유 형 + 내 신

고쟁이

수학 개념과 원리를 꿰뚫는
내신 대비 집중 훈련서

공통수학1

정답과 풀이

이투스북

I 다항식

01 다항식의 연산

001 답 ③

$2(A-B)+3B$
$=2A+B$
$=2(3x^2+6x+3)+(2x^2-1)$
$=8x^2+12x+5$

002 답 ②

$2A+B-\{A-(C-3B)\}$
$=2A+B-(A-C+3B)$
$=2A+B-A+C-3B=A-2B+C$
$=(3x^3-x+6)-2(x^3-x^2+2x-1)+(-x^2+5x-10)$
$=x^3+x^2-2$

003 답 ④

$A-2(X-B)=5A$에서
$-2(X-B)=4A,\ X-B=-2A$
$\therefore X=B-2A=(3x^2-x+2)-2(x^2+2x-5)$
$=x^2-5x+12$

004 답 ①

$(x+3y-1)(2x-y+3)$
$=(2x^2-xy+3x)+(6xy-3y^2+9y)+(-2x+y-3)$
$=2x^2-3y^2+5xy+x+10y-3$

005 답 풀이 참조

(1) $x^2+2x=t$라 하면
$(x^2+2x-1)(x^2+2x-4)$
$=(t-1)(t-4)=t^2-5t+4$
$=(x^2+2x)^2-5(x^2+2x)+4$
$=(x^4+4x^3+4x^2)+(-5x^2-10x)+4$
$=x^4+4x^3-x^2-10x+4$

(2) $(x-2)(x-1)(x+2)(x+3)$
$=(x-1)(x+2)(x-2)(x+3)$
$=(x^2+x-2)(x^2+x-6)$
이때 $x^2+x=t$라 하면
$(t-2)(t-6)=t^2-8t+12$
$=(x^2+x)^2-8(x^2+x)+12$
$=(x^4+2x^3+x^2)+(-8x^2-8x)+12$
$=x^4+2x^3-7x^2-8x+12$

(3) $(x+1)(x-2)(x+3)(x-6)$
$=(x+1)(x-6)(x-2)(x+3)$
$=(x^2-5x-6)(x^2+x-6)$
이때 $x^2-6=t$라 하면
$(t-5x)(t+x)=t^2-4xt-5x^2$
$=(x^2-6)^2-4x(x^2-6)-5x^2$
$=(x^4-12x^2+36)+(-4x^3+24x)-5x^2$
$=x^4-4x^3-17x^2+24x+36$

006 답 ②

$(2x-3)(x^2+ax+5)$의 전개식에서 x^2의 계수는
(x의 계수)$\times$(x의 계수)$+$(상수항)$\times$(x^2의 계수)이므로
$2\times a+(-3)\times 1=5$에서 $a=4$이다.
따라서 $(2x-3)(x^2+4x+5)$의 전개식에서 x의 계수는
(x의 계수)$\times$(상수항)$+$(상수항)$\times$(x의 계수)이므로
$2\times 5+(-3)\times 4=-2$이다.

007 답 ④

ㄱ. $(2x+1)^3=(2x)^3+3\times(2x)^2\times 1+3\times 2x\times 1^2+1^3$
$=8x^3+12x^2+6x+1$ (참)
ㄴ. $(x+y)(x^2-xy+y^2)=x^3+y^3$ (거짓)
ㄷ. $(a-b+c)^2$
$=a^2+(-b)^2+c^2+2\times a\times(-b)+2\times(-b)\times c+2ca$
$=a^2+b^2+c^2-2ab-2bc+2ca$ (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

008 답 29

$(5x^3-3x^2+2x)^2=(5x^3-3x^2+2x)(5x^3-3x^2+2x)$의 전개식에서 x^4의 계수는
(x^3의 계수)$\times$(x의 계수)$+$(x^2의 계수)$\times$(x^2의 계수)
$+$(x의 계수)$\times$(x^3의 계수)이므로
$5\times 2+(-3)\times(-3)+2\times 5=29$이다.

다른 풀이

$(5x^3-3x^2+2x)^2$
$=25x^6+9x^4+4x^2+2(-15x^5-6x^3+10x^4)$
$=25x^6-30x^5+29x^4-12x^3+4x^2$
에서 x^4의 계수는 29이다.

009 답 7

$(x-2)(x+1)(x+3)$
$=x^3+(-2+1+3)x^2+\{(-2)\times 1+1\times 3+3\times(-2)\}x$
$+(-2)\times 1\times 3$
$=x^3+2x^2-5x-6$
에서 x^2의 계수는 $a=2$, x의 계수는 $b=-5$이다.
$\therefore a-b=2-(-5)=7$

다른 풀이

$(x-2)(x+1)(x+3)$의 전개식에서 x^2의 계수는
$(x$의 계수$)\times(x$의 계수$)\times($상수항$)$
$+(x$의 계수$)\times($상수항$)\times(x$의 계수$)$
$+($상수항$)\times(x$의 계수$)\times(x$의 계수$)$이므로
$a=1\times1\times3+1\times1\times1+(-2)\times1\times1=2$
x의 계수는
$(x$의 계수$)\times($상수항$)\times($상수항$)$
$+($상수항$)\times(x$의 계수$)\times($상수항$)$
$+($상수항$)\times($상수항$)\times(x$의 계수$)$이므로
$b=1\times1\times3+(-2)\times1\times3+(-2)\times1\times1=-5$
$\therefore a-b=2-(-5)=7$

010 답 ③

분배법칙에 의하여 $(x-1)(x+1)=x^2-1$,
$(x-1)(\boxed{x^2+x+1})=x^3-1$,
$(x-1)(x^3+x^2+x+1)=\boxed{x^4-1}$이고,
마찬가지 방법으로 자연수 $n\ (n\geq2)$에 대하여
$(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)=\boxed{x^n-1}$
이 성립함을 알 수 있다.
$\therefore$ (가) x^2+x+1, (나) x^4-1, (다) x^n-1

011 답 38

$x+y=2$, $xy=-5$이므로
$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$
$\quad=2^3-3\times(-5)\times2=38$

012 답 ③

$a-b=2$, $a^2+b^2=6$이므로
$a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$에서 $6=2^2+2ab \qquad \therefore ab=1$
$\therefore a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$
$\quad=2^3+3\times1\times2=14$

013 답 ⑤

$x=1+\sqrt{3}$, $y=1-\sqrt{3}$이므로
$x-y=(1+\sqrt{3})-(1-\sqrt{3})=2\sqrt{3}$
$xy=(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})=-2$
$\therefore x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$
$\quad=(2\sqrt{3})^3+3\times(-2)\times2\sqrt{3}$
$\quad=24\sqrt{3}-12\sqrt{3}=12\sqrt{3}$

014 답 198

$x=3-2\sqrt{2}$에서
$\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{3-2\sqrt{2}}=\dfrac{3+2\sqrt{2}}{(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})}=3+2\sqrt{2}$이므로
$x+\dfrac{1}{x}=(3-2\sqrt{2})+(3+2\sqrt{2})=6$
$\therefore x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$
$\quad=6^3-3\times6=198$

015 답 ④

$x^2-3x-1=0$에서 $x\neq0$이므로
양변을 각각 x로 나누면
$x-3-\dfrac{1}{x}=0 \qquad \therefore x-\dfrac{1}{x}=3$
$\therefore x^3-\dfrac{1}{x^3}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$
$\quad=3^3+3\times3=36$

016 답 ①

$a+b+c=3$, $a^2+b^2+c^2=21$이므로
$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$에서
$3^2=21+2(ab+bc+ca)$
$\therefore ab+bc+ca=-6$

017 답 ⑤

다항식 $2x^3+3x^2-7x+4$를 $2x-3$으로 나누는 과정은 다음과 같다.

$$\begin{array}{rl} x^2+3x+1 & :\text{몫} \\ 2x-3\,\overline{)\,2x^3+3x^2-7x+4} & \\ 2x^3-3x^2 & \\ \hline 6x^2-7x+4 & \\ 6x^2-9x & \\ \hline 2x+4 & \\ 2x-3 & \\ \hline 7 & :\text{나머지} \end{array}$$

따라서 구하는 몫은 x^2+3x+1, 나머지는 7이다.

018 답 ⑤

다항식 $4x^2-5x+3$을 $x+a$로 나누는 과정은 다음과 같다.

$$\begin{array}{rl} \boxed{4x+(-5-4a)} & :\text{몫} \\ x+a\,\overline{)\,4x^2-5x+3} & \\ \boxed{4x^2+4ax} & \\ \hline (-5-4a)x+3 & \cdots\cdots ㉠ \\ \boxed{(-5-4a)x+a(-5-4a)} & \\ \hline \boxed{4a^2+5a+3} & :\text{나머지} \end{array}$$

…… TIP

① ㉠에서 $(-5-4a)x+3$은 $3x+3$과 같으므로
$-5-4a=3$에서 $a=-2$이다. (참)
② $a=-2$이므로 (가)에 알맞은 식은
$4x+(-5-4a)=4x+3$이다. (참)
③ $a=-2$이므로 (나)에 알맞은 식은 $4x^2+4ax=4x^2-8x$이다. (참)
④ $a=-2$이므로 (다)에 알맞은 식은
$(-5-4a)x+a(-5-4a)=3x-6$이다. (참)
⑤ $a=-2$이므로 (라)에 알맞은 값은 $4a^2+5a+3=9$이다. (거짓)

TIP

㉠에서 $a=-2$임을 알 수 있으므로 다항식 $4x^2-5x+3$을 $x-2$로 나누어 다음과 같이 빈칸을 좀 더 빨리 알아낼 수 있다.

$$\begin{array}{rl} \boxed{4x+3} & :\text{몫} \\ x-2\,\overline{)\,4x^2-5x+3} & \\ \boxed{4x^2-8x} & \\ \hline 3x+3 & \\ \boxed{3x-6} & \\ \hline \boxed{9} & :\text{나머지} \end{array}$$

019 ······ 답 ⑤

다항식 $3x^4-x^2+5x+1$을 x^2+x+1로 나누는 과정은 다음과 같다.

$$\begin{array}{rl} 3x^2-3x-1 & :\text{몫} \\ x^2+x+1\,\overline{)\,3x^4 \qquad -x^2+5x+1} & \\ 3x^4+3x^3+3x^2 \qquad\qquad & \\ \hline -3x^3-4x^2+5x+1 & \\ -3x^3-3x^2-3x \quad & \\ \hline -x^2+8x+1 & \\ -x^2-x-1 & \\ \hline 9x+2 & :\text{나머지} \end{array}$$

따라서 $Q(x)=3x^2-3x-1$, $R(x)=9x+2$이므로
$Q(2)=3\times2^2-3\times2-1=5$, $R(1)=9\times1+2=11$
$\therefore Q(2)+R(1)=5+11=16$

020 ······ 답 9

다항식 $f(x)$를 $4x^2+2x+1$로 나누었을 때의 몫과 나머지는 각각 $2x-1$, $-x+3$이므로 이를 식으로 나타내면 다음과 같다.
$f(x)=(4x^2+2x+1)(2x-1)-x+3$
$\therefore f(1)=(4\times1^2+2\times1+1)(2\times1-1)-1+3=9$

참고

$$\begin{aligned} f(x)&=(2x-1)(4x^2+2x+1)-x+3 \\ &=(8x^3-1)-x+3 \\ &=8x^3-x+2 \end{aligned}$$

021 ······ 답 $2x-7$

다항식 A를 $x-1$로 나누었을 때의 몫과 나머지는 각각 $6x+5$, -2이므로 이를 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} A&=(x-1)(6x+5)-2 \\ &=6x^2-x-7 \\ &=(3x+1)(2x-1)-6 \end{aligned}$$

따라서 다항식 A를 $3x+1$로 나누었을 때의
몫은 $2x-1$, 나머지는 -6이므로
구하는 합은 $(2x-1)+(-6)=2x-7$이다.

다른 풀이

다항식 A를 $x-1$로 나누었을 때의 몫과 나머지는 각각 $6x+5$, -2이므로 이를 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} A&=(x-1)(6x+5)-2 \\ &=6x^2-x-7 \end{aligned}$$

이때 다항식 A를 $3x+1$로 나누는 과정은 다음과 같다.

$$\begin{array}{rl} 2x-1 \quad & :\text{몫} \\ 3x+1\,\overline{)\,6x^2-x-7} & \\ 6x^2+2x \quad & \\ \hline -3x-7 & \\ -3x-1 & \\ \hline -6 & :\text{나머지} \end{array}$$

따라서 다항식 A를 $3x+1$로 나누었을 때의
몫은 $2x-1$, 나머지는 -6이므로
구하는 합은 $(2x-1)+(-6)=2x-7$이다.

022 ······ 답 ④

다항식 $P(x)$를 $4x+6$으로 나누었을 때의 몫과 나머지는 각각 $Q(x)$, R이므로 이를 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} P(x)&=(4x+6)Q(x)+R \\ &=\left(x+\frac{3}{2}\right)\times4Q(x)+R \end{aligned}$$

따라서 다항식 $P(x)$를 $x+\frac{3}{2}$으로 나누었을 때의
몫은 $4Q(x)$, 나머지는 R이다.

023 ······ 답 ④

다항식 $f(x)$를 x^2+3x-1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 $2x-4$이므로 이를 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} f(x)&=(x^2+3x-1)Q(x)+2x-4 \\ xf(x)&=x(x^2+3x-1)Q(x)+x(2x-4) \\ &=x(x^2+3x-1)Q(x)+2(x^2+3x-1)-10x+2 \\ &=(x^2+3x-1)\{xQ(x)+2\}-10x+2 \end{aligned}$$

따라서 $R(x)=-10x+2$이므로 $R(2)=-10\times2+2=-18$이다.

024 ······ 답 (1) 16 (2) 8

(1) $(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)$

$$\begin{aligned} &=(2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1) \\ &=(2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1) \\ &=(2^4-1)(2^4+1)(2^8+1) \\ &=(2^8-1)(2^8+1) \\ &=2^{16}-1 \end{aligned}$$

따라서 $n=16$이다.

(2) $9\times11\times101\times10001$

$$\begin{aligned} &=(10-1)(10+1)(10^2+1)(10^4+1) \\ &=(10^2-1)(10^2+1)(10^4+1) \\ &=(10^4-1)(10^4+1) \\ &=10^8-1 \end{aligned}$$

따라서 $n=8$이다.

TIP

(1)에서 주어진 등식의 양변에 각각 $2-1=1$을 곱하면
$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ 꼴을 반복하여 간단하게 계산할 수 있다.
마찬가지로 (2)에서 주어진 숫자를
$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ 꼴을 사용할 수 있도록 적절하게 변형하여 계산하면 편리하다.

025

답 ⑤

$(a+b+c)^2=3ab+3bc+3ca$에서
$a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=3ab+3bc+3ca$
$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$
$\frac{1}{2}(a^2-2ab+b^2)+\frac{1}{2}(b^2-2bc+c^2)+\frac{1}{2}(c^2-2ca+a^2)=0$
$\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$
$\therefore a=b=c$
따라서 이 삼각형은 세 변의 길이가 모두 같으므로 정삼각형이다.

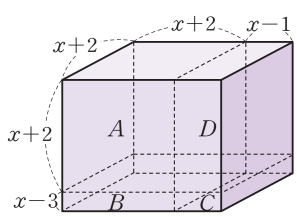
026

답 ③

주어진 직육면체의
밑면의 가로의 길이는 $(x+2)+(x-1)=2x+1$,
밑면의 세로의 길이는 $x+2$,
높이는 $(x+2)+(x-3)=2x-1$이다.
$\therefore$ (구하는 직육면체의 부피)
$=(2x+1)(x+2)(2x-1)$
$=(4x^2-1)(x+2)$
$=4x^3+8x^2-x-2$

다른 풀이

주어진 직육면체는 그림과 같이 4개의 직육면체 A, B, C, D로 이루어져 있다.

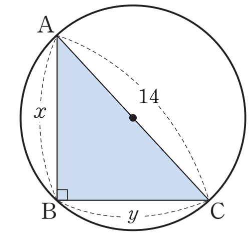


직육면체 A의 부피는 $(x+2)^3$
직육면체 B의 부피는 $(x+2)^2(x-3)$
직육면체 C의 부피는 $(x+2)(x-1)(x-3)$
직육면체 D의 부피는 $(x+2)^2(x-1)$
$\therefore$ (구하는 직육면체의 부피)
$=(x+2)^3+(x+2)^2(x-3)+(x+2)(x-1)(x-3)+(x+2)^2(x-1)$
$=4x^3+8x^2-x-2$

027

답 32

원에 내접하는 직각삼각형의 빗변은 원의 지름이다.
그림과 같이 직각삼각형 ABC의 빗변을 AC라 하면
원의 지름의 길이가 14이므로 $\overline{AC}=14$

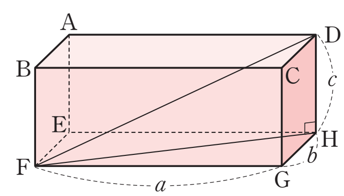


이때 $\overline{AB}=x$, $\overline{BC}=y$ $(x>0,\ y>0)$라 하면
직각삼각형 ABC에서
$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{AC}^2$이므로 $x^2+y^2=14^2$ …… ㉠
직각삼각형의 둘레의 길이가 32이므로
$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}=32$에서
$x+y+14=32$ $\quad\therefore x+y=18$ …… ㉡
$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$이므로 ㉠, ㉡에서
$18^2=14^2+2xy$
$xy=\frac{1}{2}(18^2-14^2)=\frac{1}{2}(18+14)(18-14)$
$=\frac{1}{2}\times32\times4=64$
이므로 $xy=64$이다.
$\therefore$ (직각삼각형의 넓이) $=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}$
$=\frac{1}{2}xy$
$=\frac{1}{2}\times64=32$

028

답 34

$\overline{FG}=a$, $\overline{GH}=b$, $\overline{HD}=c$ $(a>0,\ b>0,\ c>0)$라 하자.



모든 모서리의 길이의 합이 32이므로
$4(a+b+c)=32$에서 $a+b+c=8$ …… ㉠
$\overline{DF}=\sqrt{30}$이므로
$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{30}$에서 $a^2+b^2+c^2=30$ …… ㉡
$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$이므로 ㉠, ㉡에서
(직육면체의 겉넓이) $=2(ab+bc+ca)$
$=(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)$
$=8^2-30=34$

029

답 ⑤

두 조건 (가), (나)의 등식을 변끼리 더하면
$3A=3x^2+3xy+6y^2$이므로 $A=x^2+xy+2y^2$
이를 조건 (가)의 등식에 대입하면 $B=-xy+3y^2$
$\therefore A+3B=(x^2+xy+2y^2)+3(-xy+3y^2)$
$=x^2-2xy+11y^2$

030 ······ 답 24

주어진 세 등식을 변끼리 더하면

$(3A-B)+(3B-C)+(3C-A)$

$=2(A+B+C)$

$=(x^3+2x-1)+(3x^2+x+7)+(3x^3-x^2+5x)$

$=4x^3+2x^2+8x+6$

따라서 $A+B+C=2x^3+x^2+4x+3$이므로

$a=2,\ b=1,\ c=4,\ d=3$이다.

$\therefore\ abcd=2\times1\times4\times3=24$

031 ······ 답 풀이 참조

다음과 같이 일부 빈칸의 다항식을 각각 $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$라 하자.

$B(x)$	$f(x)$	$C(x)$
$A(x)$	$2x^2+3x$	$4x^2+5x+2$
$5x^2+6x+3$		

두 번째 가로의 합에서

$A(x)+(2x^2+3x)+(4x^2+5x+2)=6x^2+9x$이므로

$A(x)=x-2$ ······ ㉠

첫 번째 세로의 합에서

$A(x)+B(x)+(5x^2+6x+3)=6x^2+9x$이므로

$B(x)=x^2+2x-1$ ($\because$ ㉠) ······ ㉡

$C(x)$를 포함한 대각선의 합에서

$(5x^2+6x+3)+(2x^2+3x)+C(x)=6x^2+9x$이므로

$C(x)=-x^2-3$ ······ ㉢

첫 번째 가로의 합에서

$B(x)+C(x)+f(x)=6x^2+9x$이므로

$f(x)=6x^2+7x+4$ ($\because$ ㉡, ㉢)

$\therefore\ f(2)=6\times2^2+7\times2+4=42$

채점 요소	배점
세 다항식 $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ 구하기	60 %
다항식 $f(x)$ 구하기	30 %
$f(2)$의 값 구하기	10 %

032 ······ 답 ②

$(x^2-4)(x^2-2x+4)(x^2+2x+4)$

$=(x+2)(x-2)(x^2-2x+4)(x^2+2x+4)$

$=(x+2)(x^2-2x+4)(x-2)(x^2+2x+4)$

$=(x^3+8)(x^3-8)=x^6-64$

다른 풀이

$(x^2-4)(x^2-2x+4)(x^2+2x+4)$

$=(x^2-4)\{(x^2+4)^2-(2x)^2\}$

$=(x^2-4)(x^4+4x^2+16)$

$=(x^2)^3-4^3=x^6-64$

033 ······ 답 ③

$(1+2x+3x^2+\cdots+101x^{100})^3$

$=(1+2x+3x^2+\cdots+101x^{100})\times(1+2x+3x^2+\cdots+101x^{100})$

$\times(1+2x+3x^2+\cdots+101x^{100})$ ······ ㉠

의 전개식에서 x의 계수는 ······ TIP

(x의 계수)$\times$(상수항)$\times$(상수항)

$+$(상수항)$\times$(x의 계수)$\times$(상수항)

$+$(상수항)$\times$(상수항)$\times$(x의 계수)

이므로 $2\times1\times1+1\times2\times1+1\times1\times2=6$이다.

다른 풀이

구하는 것이 x의 계수이므로

$(1+2x+3x^2+\cdots+101x^{100})^3$에서

$3x^2$, $4x^3$, $\cdots$, $101x^{100}$은 고려하지 않아도 된다.

따라서 $(1+2x)^3$의 전개식에서 x의 계수를 구하면

$(1+2x)^3=1+6x+12x^2+8x^3$이므로 6이다.

TIP

$(1+2x+3x^2+\cdots+101x^{100})^3$은

$1+2x+3x^2+\cdots+101x^{100}$을 3번 곱한 것이다.

따라서 ㉠의 전개식에서 x의 계수는

(x의 계수)$\times$(상수항)$\times$(상수항) $\leftarrow 2x\times1\times1$

$+$(상수항)$\times$(x의 계수)$\times$(상수항) $\leftarrow 1\times2x\times1$

$+$(상수항)$\times$(상수항)$\times$(x의 계수) $\leftarrow 1\times1\times2x$

로 같은 것을 3번 더한 것과 같다.

따라서 $3\times\{$(x의 계수)$\times$(상수항)$\times$(상수항)$\}$으로 계산하면 편리하다.

이와 같은 방법으로 다항식 $\{P(x)\}^3$ 꼴의 전개식에서 특정 계수를 간단하게 구할 수 있다.

034 ······ 답 ①

$(3a^2+2a+1)^3(a-1)$의 전개식에서 a^5의 계수는

다음과 같이 경우를 나누어 구할 수 있다.

(i) $(3a^2+2a+1)^3$의 전개식에서 a^4의 계수와 $a-1$에서 a의 계수를 곱하는 경우

$(3a^2+2a+1)^3=(3a^2+2a+1)(3a^2+2a+1)(3a^2+2a+1)$

의 전개식에서 a^4의 계수는

$3\times\{$(a^2의 계수)$\times$(a^2의 계수)$\times$(상수항)$\}$

$=3\times(3\times3\times1)=27$,

$3\times\{$(a^2의 계수)$\times$(a의 계수)$\times$(a의 계수)$\}$

$=3\times(3\times2\times2)=36$

의 합이므로 $27+36=63$ ······ ㉠

$a-1$에서 a의 계수는 1 ······ ㉡

㉠, ㉡에서 a^5의 계수는 $63\times1=63$

(ii) $(3a^2+2a+1)^3$의 전개식에서 a^5의 계수와 $a-1$에서 상수항을 곱하는 경우

$(3a^2+2a+1)^3=(3a^2+2a+1)(3a^2+2a+1)(3a^2+2a+1)$

의 전개식에서 a^5의 계수는

$3\times\{$(a^2의 계수)$\times$(a^2의 계수)$\times$(a의 계수)$\}$

$=3\times(3\times3\times2)=54$ ······ ㉢

$a-1$에서 상수항은 -1 ······ ㉣

㉢, ㉣에서 a^5의 계수는 $54\times(-1)=-54$
(i), (ii)에 의하여 주어진 다항식의 전개식에서
a^5의 계수는 $63+(-54)=9$이다.

035 답 108

$(x^3+2x^2+3y)^3+(x^3+2x^2-3y)^3$의 전개식에서 x^2y^2의 계수는
$(x^3+2x^2+3y)^3$의 전개식에서 x^2y^2의 계수와 $(x^3+2x^2-3y)^3$의 전개식에서 x^2y^2의 계수의 합과 같다.

(i) $(x^3+2x^2+3y)^3$의 전개식에서 x^2y^2의 계수
$3\times\{(x^2\text{의 계수})\times(y\text{의 계수})\times(y\text{의 계수})\}$
$=3\times(2\times3\times3)=54$

(ii) $(x^3+2x^2-3y)^3$의 전개식에서 x^2y^2의 계수
$3\times\{(x^2\text{의 계수})\times(y\text{의 계수})\times(y\text{의 계수})\}$
$=3\times\{2\times(-3)\times(-3)\}=54$

(i), (ii)에 의하여 주어진 다항식의 전개식에서
x^2y^2의 계수는 $54+54=108$이다.

다른 풀이

$x^3+2x^2=A$, $3y=B$라 하면
$(x^3+2x^2+3y)^3+(x^3+2x^2-3y)^3$
$=(A+B)^3+(A-B)^3$
$=(A^3+3A^2B+3AB^2+B^3)+(A^3-3A^2B+3AB^2-B^3)$
$=2A^3+6AB^2$
$=2(x^3+2x^2)^3+6(x^3+2x^2)(3y)^2$
이므로 x^2y^2의 계수는 $6(x^3+2x^2)(3y)^2$에서 $6\times2\times3^2=108$이다.

036 답 48

$(x+1)^3+(x-1)^2=x^3+4x^2+x+2$이므로
$\{(x+1)^3+(x-1)^2\}^4=(x^3+4x^2+x+2)^4$의 전개식에서
x의 계수는
$4\times\{(x\text{의 계수})\times(\text{상수항})\times(\text{상수항})\times(\text{상수항})\}$ …… TIP
$=4\times(1\times2\times2\times2)=32$
x^{11}의 계수는
$4\times\{(x^3\text{의 계수})\times(x^3\text{의 계수})\times(x^3\text{의 계수})\times(x^2\text{의 계수})\}$
$=4\times(1\times1\times1\times4)=16$
따라서 구하는 값은 $32+16=48$이다.

TIP

$(x^3+4x^2+x+2)^4$은 x^3+4x^2+x+2를 4번 곱한 것이므로
$(x^3+4x^2+x+2)^4$
$=(x^3+4x^2+x+2)(x^3+4x^2+x+2)(x^3+4x^2+x+2)\times(x^3+4x^2+x+2)$
의 전개식에서 x의 계수는
$(x\text{의 계수})\times(\text{상수항})\times(\text{상수항})\times(\text{상수항})$ ← $x\times2\times2\times2$
$+(\text{상수항})\times(x\text{의 계수})\times(\text{상수항})\times(\text{상수항})$ ← $2\times x\times2\times2$
$+(\text{상수항})\times(\text{상수항})\times(x\text{의 계수})\times(\text{상수항})$ ← $2\times2\times x\times2$
$+(\text{상수항})\times(\text{상수항})\times(\text{상수항})\times(x\text{의 계수})$ ← $2\times2\times2\times x$
$=4\times\{(x\text{의 계수})\times(\text{상수항})\times(\text{상수항})\times(\text{상수항})\}$
이다.
이와 같은 방법으로 x^{11}의 계수도 구할 수 있다.

037 답 ②

$x+y=1$, $x^3+y^3=4$이므로
$(x+y)^3=x^3+y^3+3xy(x+y)$에서 $1^3=4+3xy\times1$
$3xy=-3$ $\quad\therefore xy=-1$ …… ㉠
$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$에서
$1^2=x^2+y^2+2\times(-1)$ ($\because$ ㉠)
$\therefore x^2+y^2=3$ …… ㉡
$(x^2+y^2)^2=x^4+y^4+2x^2y^2$이므로
$3^2=x^4+y^4+2\times(-1)^2$ ($\because$ ㉠, ㉡)
$\therefore x^4+y^4=7$

038 답 112

$(a^3+b^3)(a^3-b^3)=a^6-b^6=(a^2)^3-(b^2)^3$
$=(a^2-b^2)^3+3a^2b^2(a^2-b^2)$ …… ㉠
이때 $a^2=2\sqrt{2}+2$, $b^2=2\sqrt{2}-2$이므로
$a^2-b^2=(2\sqrt{2}+2)-(2\sqrt{2}-2)=4$
$a^2b^2=(2\sqrt{2}+2)(2\sqrt{2}-2)=4$
$\therefore (a^3+b^3)(a^3-b^3)=4^3+3\times4\times4$ ($\because$ ㉠)
$=112$

039 답 ②

$(x-a)(x+2b)(x+c)$
$=x^3+(-a+2b+c)x^2+\{(-a)\times2b+2b\times c+c\times(-a)\}x+(-a)\times2b\times c$
$=x^3+(-a+2b+c)x^2+(-2ab+2bc-ca)x-2abc$
x^2의 계수가 5이므로
$-a+2b+c=5$ …… ㉠
x의 계수가 -3이므로
$-2ab+2bc-ca=-3$ …… ㉡
$(-a+2b+c)^2=a^2+4b^2+c^2+2(-2ab+2bc-ca)$
$5^2=a^2+4b^2+c^2+2\times(-3)$ ($\because$ ㉠, ㉡)
$\therefore a^2+4b^2+c^2=31$

040 답 ④

$a^4-\sqrt{5}a^2-1=0$의 양변을 a^2으로 나누면
$a^2-\sqrt{5}-\frac{1}{a^2}=0$ $\quad\therefore a^2-\frac{1}{a^2}=\sqrt{5}$ …… ㉠
$\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)^2=\left(a^2-\frac{1}{a^2}\right)^2+4=(\sqrt{5})^2+4=9$
$\therefore a^2+\frac{1}{a^2}=3$ ($\because a^2>0$)
$\left(a-\frac{1}{a}\right)^2=a^2+\frac{1}{a^2}-2=3-2=1$
$\therefore a-\frac{1}{a}=1$ ($\because a>1$)
$a^6-\frac{1}{a^6}=\left(a^2-\frac{1}{a^2}\right)^3+3\left(a^2-\frac{1}{a^2}\right)$
$=(\sqrt{5})^3+3\times\sqrt{5}=8\sqrt{5}$ ($\because$ ㉠)
$\therefore a^6+2a^2-3a+\frac{3}{a}+\frac{2}{a^2}-\frac{1}{a^6}$

$=\left(a^6-\frac{1}{a^6}\right)+2\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)-3\left(a-\frac{1}{a}\right)$
$=8\sqrt{5}+2\times3-3\times1$
$=3+8\sqrt{5}$

041 ······ 답 ④

$x+y=1$, $x^2+y^2=3$이므로
$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$에서
$3=1^2-2xy \qquad \therefore xy=-1$
$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=1^3-3\times(-1)\times1=4$
$x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=3^2-2\times(-1)^2=7$
$(x^3+y^3)(x^4+y^4)=x^7+x^3y^4+x^4y^3+y^7$
$=x^7+y^7+x^3y^3(x+y)$
$\therefore x^7+y^7=(x^3+y^3)(x^4+y^4)-x^3y^3(x+y)$
$=4\times7-(-1)^3\times1=29$

042 ······ 답 35

$a-2b-c=2ab-2bc+ca=5$이므로
$(a-2b-c)^2=a^2+4b^2+c^2+2(-2ab+2bc-ca)$에서
$a^2+4b^2+c^2=(a-2b-c)^2-2(-2ab+2bc-ca)$
$=5^2-2\times(-5)=35$

043 ······ 답 ②

0이 아닌 세 수 x, y, z에 대하여
$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=0$에서 $\frac{yz-zx-xy}{xyz}=0$이므로
$-xy+yz-zx=0$이다.
한편, $x^2+y^2+z^2=4$이므로
$(x-y-z)^2=x^2+y^2+z^2+2(-xy+yz-zx)$
$=4+2\times0=4$
$\therefore (x-y-z)^{10}=\{(x-y-z)^2\}^5=4^5=2^{10}$

044 ······ 답 풀이 참조

(1) $x+y+z=4$, $x^2+y^2+z^2=10$이므로
$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$에서
$10=4^2-2(xy+yz+zx)$
$xy+yz+zx=3$
$\therefore x^3+y^3+z^3$
$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz$
$=4\times(10-3)+3\times(-2)$ ($\because xyz=-2$)
$=22$

(2) $(xy+yz+zx)^2$
$=(xy)^2+(yz)^2+(zx)^2+2(xy^2z+yz^2x+zx^2y)$
$=x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2xyz(x+y+z)$
(1)에서 $xy+yz+zx=3$이므로
$3^2=x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2\times(-2)\times4$
$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=25$
$\therefore x^4+y^4+z^4=(x^2)^2+(y^2)^2+(z^2)^2$
$=(x^2+y^2+z^2)^2-2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)$
$=10^2-2\times25=50$

채점 요소	배점
$xy+yz+zx$의 값 구하기	10 %
$x^3+y^3+z^3$의 값 구하기	40 %
$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2$의 값 구하기	10 %
$x^4+y^4+z^4$의 값 구하기	40 %

045 ······ 답 10

$a-b=1+\sqrt{3}$, $b-c=-2\sqrt{3}$을 변끼리 더하면
$a-c=1-\sqrt{3}$
$\therefore a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$
$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$
$=\frac{1}{2}\{(1+\sqrt{3})^2+(-2\sqrt{3})^2+(-1+\sqrt{3})^2\}$
$=10$

046 ······ 답 ⑤

$xy+yz+zx=1$, $xyz=-6$이고
$x+y+z=4$에서
$x+y=4-z$, $y+z=4-x$, $z+x=4-y$
$\therefore (x+y)(y+z)(z+x)$
$=(4-z)(4-x)(4-y)$
$=4^3-4^2(x+y+z)+4(xy+yz+zx)-xyz$
$=4^3-4^2\times4+4\times1-(-6)$
$=10$

047 ······ 답 12

다항식 $2x^3+3x^2-x+a$를 x^2-x+b로 나누는 과정은 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|l}
 & 2x+5 \\
\hline
x^2-x+b & 2x^3+3x^2-\qquad x+\quad a \\
 & 2x^3-2x^2+\quad 2bx \\
\hline
 & 5x^2-(1+2b)x+\quad a \\
 & 5x^2-\quad 5x+\quad 5b \\
\hline
 & (4-2b)x+a-5b
\end{array}$$

이때 나머지가 0이어야 하므로 나머지 $4-2b=0$, $a-5b=0$
두 식을 연립하여 풀면 $a=10$, $b=2$
$\therefore a+b=10+2=12$

다른 풀이

항등식을 학습한 이후에는 다음과 같이 풀이할 수 있다.
$2x^3+3x^2-x+a$가 x^2-x+b로 나누어떨어지므로 다음 등식이 성립한다.
$2x^3+3x^2-x+a=(x^2-x+b)(2x+k)$ (k는 상수)
이는 x에 대한 항등식이므로
x^2의 계수를 비교하면 $3=k-2 \qquad \therefore k=5$
따라서 $2x^3+3x^2-x+a=(x^2-x+b)(2x+5)$이므로
x의 계수를 비교하면 $-1=-5+2b \qquad \therefore b=2$
상수항을 비교하면 $a=5b=10$
$\therefore a+b=10+2=12$

048 ······ 답 ③

다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫과 나머지는 각각 $g(x)$, 2이고, 다항식 $g(x)$를 x^2+x+1로 나누었을 때의 몫을 $h(x)$라 하면 나머지가 $x+1$이므로

$$\begin{aligned}f(x)&=(x-1)g(x)+2\\&=(x-1)\{(x^2+x+1)h(x)+x+1\}+2\\&=(x-1)(x^2+x+1)h(x)+(x-1)(x+1)+2\\&=(x^3-1)h(x)+x^2+1\end{aligned}$$

따라서 구하는 나머지는 x^2+1이다.

049 ······ 답 풀이 참조

$f(x)=(3x^2+2x+5)(x^2-x+2)+2x^3-5x^2-6x-10$에서 $(3x^2+2x+5)(x^2-x+2)$는 x^2-x+2로 나누어떨어지므로 $f(x)$를 x^2-x+2로 나눈 나머지는 $2x^3-5x^2-6x-10$을 x^2-x+2로 나눈 나머지와 같다.

이때 다항식 $2x^3-5x^2-6x-10$을 x^2-x+2로 나누는 과정은 다음과 같다.

$$\begin{array}{r l}
 & \quad 2x\ -3 \\
x^2-x+2 \overline{)} & 2x^3-5x^2-\ \ 6x-10 \\
 & \underline{2x^3-2x^2+\ \ 4x\qquad} \\
 & \qquad -3x^2-10x-10 \\
 & \qquad \underline{-3x^2+\ \ 3x-6} \\
 & \qquad\qquad\quad -13x-4
\end{array}$$

즉, $2x^3-5x^2-6x-10=(x^2-x+2)(2x-3)-13x-4$

이고, 다항식 $f(x)$는

$$\begin{aligned}f(x)&=(3x^2+2x+5)(x^2-x+2)+(x^2-x+2)(2x-3)-13x-4\\&=(x^2-x+2)\{(3x^2+2x+5)+(2x-3)\}-13x-4\\&=(x^2-x+2)(3x^2+4x+2)-13x-4\end{aligned}$$

따라서 $Q(x)=3x^2+4x+2$, $R(x)=-13x-4$이므로

$Q(1)+R(2)=(3+4+2)+(-26-4)=-21$

채점 요소	배점
$f(x)$를 x^2-x+2로 나눈 나머지는 $2x^3-5x^2-6x-10$을 x^2-x+2로 나눈 나머지와 같음을 보이기	30 %
$Q(x)$, $R(x)$ 구하기	50 %
$Q(1)+R(2)$의 값 계산하기	20 %

050 ······ 답 ④

다항식 $f(x)$를 $g(x)$로 나누었을 때의 몫과 나머지가 각각 $Q(x)$, $R(x)$이므로 $f(x)=g(x)Q(x)+R(x)$이다.

ㄱ. $f(x)=g(x)Q(x)+R(x)$에서
$f(x)-R(x)=g(x)Q(x)$이므로
$f(x)-R(x)$는 $Q(x)$로 나누어떨어진다. (참)

ㄴ. $f(x)=x^3+x^2$, $g(x)=x^2+2x$인 경우,
$x^3+x^2=(x^2+2x)(x-1)+2x$이므로
$Q(x)=x-1$, $R(x)=2x$이다.
이때 $f(x)$를 $Q(x)$로 나누면
$x^3+x^2=(x-1)(x^2+2x+2)+2$이므로 몫은 x^2+2x+2이고
나머지는 2이므로 ㄴ이 성립하지 않는다. (거짓)

ㄷ. $f(x)=g(x)Q(x)+R(x)$에서
$2f(x)=2g(x)Q(x)+2R(x)$
이때 양변에서 각각 $g(x)$를 빼면
$$\begin{aligned}2f(x)-g(x)&=2g(x)Q(x)+2R(x)-g(x)\\&=g(x)\{2Q(x)-1\}+2R(x)\qquad \cdots\cdots \text{TIP}\end{aligned}$$
따라서 다항식 $2f(x)-g(x)$를 $g(x)$로 나누었을 때의 몫은 $2Q(x)-1$, 나머지는 $2R(x)$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

TIP

$R(x)$는 상수 또는 $(g(x)$의 차수$)>(R(x)$의 차수$)$이므로 다항식 $2f(x)-g(x)$를 $g(x)$로 나누었을 때의 나머지는 $2R(x)$이다.

051 ······ 답 ④

다항식 $f(x)$를 $x-\frac{1}{6}$로 나누었을 때의 몫과 나머지가 각각 $Q(x)$, R이므로

$$f(x)=\left(x-\frac{1}{6}\right)Q(x)+R \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변에 x를 곱하면

$$\begin{aligned}xf(x)&=x\left(x-\frac{1}{6}\right)Q(x)+Rx\\&=\left(3x-\frac{1}{2}\right)\frac{x}{3}Q(x)+\frac{R}{3}\left(3x-\frac{1}{2}\right)+\frac{R}{6}\\&=\left(3x-\frac{1}{2}\right)\left\{\frac{x}{3}Q(x)+\frac{R}{3}\right\}+\frac{R}{6}\end{aligned}$$

이므로 다항식 $xf(x)$를 $3x-\frac{1}{2}$로 나누었을 때의 몫과 나머지는 각각 $\frac{x}{3}Q(x)+\frac{R}{3}$, $\frac{R}{6}$이다.

052 ······ 답 ⑤

다항식 $P(x)$를 $2x+1$로 나누었을 때의 몫과 나머지는 각각 $Q(x)$, 5이므로

$$\begin{aligned}P(x)&=(2x+1)Q(x)+5\\&=2Q(x)\left(x+\frac{1}{2}\right)+5\\&=\{2Q(x)-1\}\left(x+\frac{1}{2}\right)+\left(x+\frac{1}{2}\right)+5\\&=\{2Q(x)-1\}\left(x+\frac{1}{2}\right)+x+\frac{11}{2}\end{aligned}$$

이다. 이때 $P(x)$는 삼차다항식이고 $Q(x)$는 이차다항식이므로 다항식 $P(x)$를 $2Q(x)-1$로 나누었을 때의 몫과 나머지는 각각 $x+\frac{1}{2}$, $x+\frac{11}{2}$이다.

따라서 구하는 합은 $\left(x+\frac{1}{2}\right)+\left(x+\frac{11}{2}\right)=2x+6$이다.

053 ······ 답 ⑤

최고차항의 계수가 1인 삼차식 $f(x)$를 $(x-2)^2$으로 나누었을 때의 몫과 나머지는 서로 같으므로

$f(x)=(x-2)^2(x+a)+x+a$ (a는 상수) ⋯⋯ ㉠

라 할 수 있다.

이때 $f(2)=3$이므로 이를 ㉠에 대입하면

$2+a=3$에서 $a=1$

$f(x)=(x-2)^2(x+1)+x+1$

$=(x-2)^2(x-2+3)+x+1$

$=(x-2)^3+3(x-2)^2+x+1$

$=(x-2)^3+3x^2-11x+13$

이므로 구하는 나머지는 $3x^2-11x+13$이다.

054

답 ②

다항식 $f(x)+g(x)$를 x^2-3x+7로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$, 다항식 $f(x)-2g(x)$를 $(x-1)(x^2-3x+7)$로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$라 하면

$f(x)+g(x)=(x^2-3x+7)Q_1(x)+2$ ⋯⋯ ㉠

$f(x)-2g(x)=(x-1)(x^2-3x+7)Q_2(x)+x^2+6x-9$ ⋯⋯ ㉡

$2\times$㉠$+$㉡을 하면

$3f(x)=2\times\{(x^2-3x+7)Q_1(x)+2\}$

$+\{(x-1)(x^2-3x+7)Q_2(x)+x^2+6x-9\}$

$=2(x^2-3x+7)Q_1(x)+4+(x-1)(x^2-3x+7)Q_2(x)$

$+(x^2-3x+7)+9x-16$

$=(x^2-3x+7)\{2Q_1(x)+(x-1)Q_2(x)+1\}+9x-12$

$\therefore\ f(x)=\frac{1}{3}(x^2-3x+7)\{2Q_1(x)+(x-1)Q_2(x)+1\}+3x-4$

따라서 구하는 나머지는 $3x-4$이다.

055

답 36

$a=9996=10^4-4$이므로

$a^2=(10^4-4)^2$

$=10^8-8\times10^4+16$

$=100000000-80000+16$

$=99920016$

따라서 a^2의 각 자리 숫자의 합은

$9+9+9+2+0+0+1+6=36$이다.

056

답 ②

$(\sqrt{3}+1)^{10}+(\sqrt{3}-1)^{10}=X$, $(\sqrt{3}+1)^{10}-(\sqrt{3}-1)^{10}=Y$라 하면

$X+Y=2(\sqrt{3}+1)^{10}$, $X-Y=2(\sqrt{3}-1)^{10}$이므로

$\{(\sqrt{3}+1)^{10}+(\sqrt{3}-1)^{10}\}^2-\{(\sqrt{3}+1)^{10}-(\sqrt{3}-1)^{10}\}^2$

$=X^2-Y^2=(X+Y)(X-Y)$

$=2(\sqrt{3}+1)^{10}\times2(\sqrt{3}-1)^{10}$

$=4\{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)\}^{10}$

$=4\{(\sqrt{3})^2-1^2\}^{10}$

$=4\times2^{10}=2^{12}$

다른 풀이

$(\sqrt{3}+1)^{10}=A$, $(\sqrt{3}-1)^{10}=B$라 하면

$\{(\sqrt{3}+1)^{10}+(\sqrt{3}-1)^{10}\}^2-\{(\sqrt{3}+1)^{10}-(\sqrt{3}-1)^{10}\}^2$

$=(A+B)^2-(A-B)^2=4AB$

$=4(\sqrt{3}+1)^{10}(\sqrt{3}-1)^{10}$

$=4\{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)\}^{10}$

$=4\{(\sqrt{3})^2-1^2\}^{10}$

$=4\times2^{10}=2^{12}$

057

답 (1) 11 (2) 99

(1) 다항식 $x^4+x^3-9x^2-4x+13$을 x^2+3x-1로 나누는 과정은 다음과 같다.

$$
\begin{array}{r}
x^2-2x-2 \\
x^2+3x-1\overline{)\,x^4+x^3-9x^2-4x+13} \\
\underline{x^4+3x^3-x^2} \\
-2x^3-8x^2-4x+13 \\
\underline{-2x^3-6x^2+2x} \\
-2x^2-6x+13 \\
\underline{-2x^2-6x+2} \\
11
\end{array}
$$

$x^4+x^3-9x^2-4x+13=(x^2+3x-1)(x^2-2x-2)+11$

이고 $x^2+3x-1=0$이므로

$x^4+x^3-9x^2-4x+13=11$

(2) $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)$

$=(x+2)(x+5)(x+3)(x+4)$

$=(x^2+7x+10)(x^2+7x+12)$

$=\{(x^2+7x+1)+9\}\{(x^2+7x+1)+11\}$

$x^2+7x+1=0$이므로

$(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)=99$

058

답 ①

$x=\sqrt{7}-3$에서 $x+3=\sqrt{7}$이고, 이 식의 양변을 제곱하면

$(x+3)^2=7$이므로

$x^2+6x+2=0$ ⋯⋯ ㉠

한편, 다항식 $x^5-34x^3-13x^2-5x+1$을 x^2+6x+2로 나누는 과정은 다음과 같다.

$$
\begin{array}{r}
x^3-6x^2-1 \\
x^2+6x+2\overline{)\,x^5-34x^3-13x^2-5x+1} \\
\underline{x^5+6x^4+2x^3} \\
-6x^4-36x^3-13x^2-5x+1 \\
\underline{-6x^4-36x^3-12x^2} \\
-x^2-5x+1 \\
\underline{-x^2-6x-2} \\
x+3
\end{array}
$$

$\therefore\ x^5-34x^3-13x^2-5x+1$

$=(x^2+6x+2)(x^3-6x^2-1)+x+3$

$=0+(\sqrt{7}-3)+3$ ($\because$ ㉠)

$=\sqrt{7}$

059

답 ④

$\overline{\mathrm{CH}}=1$, $\overline{\mathrm{BH}}=x$이고

삼각형 ABC의 넓이가 $\frac{4}{3}$이므로 $\overline{\mathrm{AB}}=\frac{8}{3}$

직각삼각형 AHC와 직각삼각형 CHB는 닮음이므로

$\overline{AH}:\overline{CH}=\overline{CH}:\overline{BH}$이다.

$\left(\frac{8}{3}-x\right):1=1:x$이므로 $x\left(\frac{8}{3}-x\right)=1$에서 $3x^2-8x+3=0$

$0<x<1$이므로 $x=\frac{4-\sqrt{7}}{3}$이다.

한편, 다항식 $3x^3-5x^2+4x+7$을 $3x^2-8x+3$으로 나누는 과정은 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|l} & x+1 \\ 3x^2-8x+3 & 3x^3-5x^2+4x+7 \\ & 3x^3-8x^2+3x \\ \hline & \quad 3x^2+x+7 \\ & \quad 3x^2-8x+3 \\ \hline & \qquad 9x+4 \end{array}$$

$3x^3-5x^2+4x+7=(3x^2-8x+3)(x+1)+9x+4$

$=0+9\times\frac{4-\sqrt{7}}{3}+4$

$=16-3\sqrt{7}$

다른 풀이

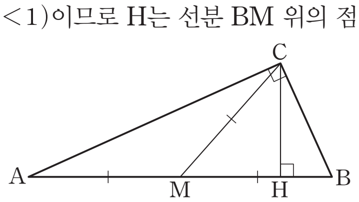
$\overline{CH}=1$이고 삼각형 ABC의 넓이가 $\frac{4}{3}$이므로

$\overline{AB}=\frac{8}{3}$

선분 AB의 중점을 M이라 하면 점 M은 직각삼각형 ABC의 외심이므로

$\overline{AM}=\overline{BM}=\overline{CM}=\frac{1}{2}\times\overline{AB}=\frac{4}{3}$

또한 $\overline{BH}=x$ $(x<1)$이므로 H는 선분 BM 위의 점이다.



직각삼각형 MHC에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{CM}^2=\overline{MH}^2+\overline{CH}^2$, $\left(\frac{4}{3}\right)^2=\overline{MH}^2+1^2$

$\overline{MH}^2=\frac{16}{9}-1=\frac{7}{9}$ $\quad\therefore \overline{MH}=\frac{\sqrt{7}}{3}$

$\overline{BH}=\overline{BM}-\overline{MH}$에서 $x=\frac{4}{3}-\frac{\sqrt{7}}{3}$이므로

$3x=4-\sqrt{7}$, $4-3x=\sqrt{7}$이고,

이 식의 양변을 제곱하면 $(4-3x)^2=7$이므로

$9x^2-24x+9=0$

$\therefore 3x^2-8x+3=0$ …… ㉠

한편, 다항식 $3x^3-5x^2+4x+7$을 $3x^2-8x+3$으로 나누는 과정은 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|l} & x+1 \\ 3x^2-8x+3 & 3x^3-5x^2+4x+7 \\ & 3x^3-8x^2+3x \\ \hline & \quad 3x^2+x+7 \\ & \quad 3x^2-8x+3 \\ \hline & \qquad 9x+4 \end{array}$$

$\therefore 3x^3-5x^2+4x+7=(3x^2-8x+3)(x+1)+9x+4$

$=0+9\times\frac{4-\sqrt{7}}{3}+4$ $(\because$ ㉠$)$

$=16-3\sqrt{7}$

060 …… 답 ①

$\overline{AB}=a$, $\overline{BC}=b$ $(a>0,\ b>0)$라 하자.

직사각형 ABCD의 넓이가 1500이므로

$ab=1500$ …… ㉠

원의 반지름의 길이를 r이라 하면

원의 넓이가 850π이므로

$\pi r^2=850\pi$, $r^2=850$ …… ㉡

삼각형 ABC에서 피타고라스 정리에 의하여

$a^2+b^2=(2r)^2$, 즉 $a^2+b^2=4r^2$에서

$a^2+b^2=3400$ $(\because$ ㉡$)$이고,

$(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$에서

$(a-b)^2=3400-2\times1500=400$ $(\because$ ㉠$)$

$\therefore |\overline{AB}-\overline{BC}|=|a-b|=\sqrt{400}=20$

061 …… 답 ④

직사각형 OCDE의 대각선의 길이는 부채꼴의 반지름의 길이와 같으므로 $\overline{CE}=\overline{OD}=3\sqrt{3}$

이때 $\overline{OC}=x$, $\overline{OE}=y$ $(x>0,\ y>0)$라 하면

직각삼각형 OCE에서 $\overline{OC}^2+\overline{OE}^2=\overline{CE}^2$이므로

$x^2+y^2=27$ …… ㉠

직사각형 OCDE의 넓이는 11이므로

$\overline{OC}\times\overline{OE}=11$ $\quad\therefore xy=11$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$

$=27+2\times11=49$

$\therefore x+y=7$ $(\because x>0,\ y>0)$

따라서 A → C → E → B를 잇는 최단 거리는

$\overline{AC}+\overline{CE}+\overline{EB}=(3\sqrt{3}-x)+3\sqrt{3}+(3\sqrt{3}-y)$

$=9\sqrt{3}-(x+y)$

$=9\sqrt{3}-7$

062 …… 답 ③

$\overline{AB}=a$, $\overline{BC}=b$, $\overline{BF}=c$ $(a>0,\ b>0,\ c>0)$라 하자.

직육면체의 모든 모서리의 합이 60이므로

$4(a+b+c)=60$에서 $a+b+c=15$ …… ㉠

피타고라스 정리에 의하여

$\overline{DB}^2=\overline{BC}^2+\overline{CD}^2=a^2+b^2$

$\overline{BG}^2=\overline{BC}^2+\overline{CG}^2=b^2+c^2$

$\overline{GD}^2=\overline{CG}^2+\overline{CD}^2=c^2+a^2$

이므로 사면체 C−BGD의 모든 모서리의 길이의 제곱의 합은

$\overline{DB}^2+\overline{BG}^2+\overline{GD}^2+\overline{CD}^2+\overline{BC}^2+\overline{CG}^2=249$

$(a^2+b^2)+(b^2+c^2)+(c^2+a^2)+a^2+b^2+c^2=249$

$3(a^2+b^2+c^2)=249$

$\therefore\ a^2+b^2+c^2=83$ …… ㉡

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$이므로 ㉠, ㉡에서

$15^2=83+2(ab+bc+ca)$

$\therefore\ ab+bc+ca=71$

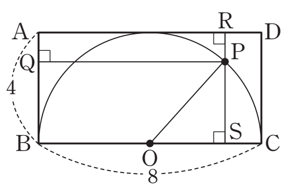
따라서 직육면체 ABCD−EFGH의 겉넓이는

$2(ab+bc+ca)=142$

063 ······ 답 ①

$\overline{AQ}=a$, $\overline{AR}=b$ $(a>0,\ b>0)$라 하면 사각형 AQPR의 대각선의 길이가 $4\sqrt{2}$이므로 $a^2+b^2=32$ …… ㉠

다음과 같이 점 P에서 선분 BC 위로 내린 수선의 발을 S, 반원의 중심을 O라 하자.



삼각형 OSP에서

$\overline{OP}=4$, $\overline{PS}=\overline{RS}-\overline{PR}=\overline{AB}-\overline{AQ}=4-a$,

$\overline{OS}=\overline{BS}-\overline{BO}=\overline{AR}-\overline{BO}=b-4$

이고 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{OP}^2=\overline{PS}^2+\overline{OS}^2$

$4^2=(4-a)^2+(b-4)^2$

$16=(a^2-8a+16)+(b^2-8b+16)$

$a^2+b^2-8(a+b)+16=0$

$32-8(a+b)+16=0$ ($\because$ ㉠)

$\therefore\ a+b=6$ …… ㉡

사각형 AQPR의 넓이는 ab이므로

$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$에서

$6^2=32+2ab$ ($\because$ ㉠, ㉡)

$\therefore\ ab=2$

064 ······ 답 ③

조건 ㈎에서 $f_1(x)=x^3+x^2+1$

조건 ㈏에 의하여

$f_2(x)=f_1(x+1)=(x+1)^3+(x+1)^2+1$

$f_3(x)=f_2(x+2)=(x+1+2)^3+(x+1+2)^2+1$

$f_4(x)=f_3(x+3)=(x+1+2+3)^3+(x+1+2+3)^2+1$

$f_5(x)=f_4(x+4)=(x+1+2+3+4)^3+(x+1+2+3+4)^2+1$

$\qquad\ =(x+10)^3+(x+10)^2+1$

따라서 $f_5(x)$의 x^2의 계수는 $3\times1^2\times10+1=31$이다.

065 ······ 답 112

$\{(x-2)^4+6(x-2)^3+12(x-2)^2\}^3$

$=[(x-2)^2\{(x-2)^2+6(x-2)+12\}]^3$

$=(x-2)^6\{(x-2)^2+6(x-2)+12\}^3$

$=(x-2)^6(x^2+2x+4)^3$

$=(x-2)^3\{(x-2)(x^2+2x+4)\}^3$

$=(x-2)^3(x^3-8)^3$

이므로 $m=3$, $n=8$이다.

$(x-2)^3(x^3-8)^3$

$=(x^3-6x^2+12x-8)(x^9-24x^6+192x^3-512)$

에서 x^{3m}, 즉 x^9의 계수는

(x^3의 계수)$\times$(x^6의 계수)$+$(상수항)$\times$(x^9의 계수)이므로

$1\times(-24)+(-8)\times1=-32$이다.

또한 x^n, 즉 x^8의 계수는 (x^2의 계수)$\times$(x^6의 계수)이므로

$(-6)\times(-24)=144$이다.

따라서 구하는 값은 $-32+144=112$이다.

066 ······ 답 135

조건 ㈎에서 $(x-3)(y-3)(2z-3)=0$이므로

$(x-3)(y-3)(2z-3)$

$=(xy-3x-3y+9)(2z-3)$

$=2xyz-3xy-6xz+9x-6yz+9y+18z-27$

$=2xyz-3(xy+2yz+2zx)+9(x+y+2z)-27$

$=2xyz-3\times3(x+y+2z)+9(x+y+2z)-27$ ($\because$ 조건 ㈏)

$=2xyz-27=0$

$2xyz=27$, $xyz=\dfrac{27}{2}$

$\therefore\ 10xyz=10\times\dfrac{27}{2}=135$

다른 풀이

조건 ㈎에서 x, y, $2z$ 중에서 적어도 하나는 3이므로

일반성을 잃지 않고 $x=3$이라 하면

조건 ㈏의 $3(x+y+2z)=xy+2yz+2zx$에서

$3(3+y+2z)=3y+2yz+6z$, $9=2yz$, $yz=\dfrac{9}{2}$

$\therefore\ 10xyz=10\times3\times\dfrac{9}{2}=135$

067 ······ 답 36

조건 ㈏에서

$x^2+4y^2+z^2-2xy+2yz+zx=0$

$\dfrac{1}{2}\{(x-2y)^2+(2y+z)^2+(z+x)^2\}=0$

이므로 $x=2y=-z$이다.

따라서 조건 ㈎에 의하여 $x=2y=-z=4$이므로

$x=4$, $y=2$, $z=-4$이다.

$\therefore\ x^2+y^2+z^2=4^2+2^2+(-4)^2=36$

068 ······ 답 −4

$x+y+z=1$이므로

$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$에서

$1=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$

$x^2+y^2+z^2=1-2(xy+yz+zx)$ …… ㉠

$x^3+y^3+z^3=13$이므로

$x^3+y^3+z^3=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz$에서

$13=1\times\{1-3(xy+yz+zx)\}+3xyz$ ($\because$ ㉠)

$xy+yz+zx-xyz=-4$

$\therefore xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)+2xyz$

$=xy(1-z)+yz(1-x)+zx(1-y)+2xyz$ ($\because x+y+z=1$)

$=xy+yz+zx-xyz=-4$

069

답 18

주어진 두 식의 양변을 각각 더하면

$\left(a+\dfrac{1}{b}\right)+\left(b+\dfrac{1}{a}\right)=6$에서 $a+b+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=6$이므로

$a+b+\dfrac{a+b}{ab}=6$ …… ㉠

주어진 두 식의 양변을 각각 곱하면

$\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{1}{a}\right)=4$에서 $ab+1+1+\dfrac{1}{ab}=4$이므로

$ab+\dfrac{1}{ab}=2$ …… ㉡

이때 $ab=t$라 하고 ㉡의 양변에 t를 곱하여 정리하면

$t^2-2t+1=0$, $(t-1)^2=0$ $\quad\therefore t=1$, 즉 $ab=1$

이를 ㉠에 대입하면 $a+b=3$

$\therefore a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

$=3^3-3\times1\times3=18$

070

답 ①

다항식 $f(x)$를 x^2+1로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 $x+2$이므로

$f(x)=(x^2+1)Q(x)+x+2$

$A=x^2+1$, $B=x+2$라 하면

$\{f(x)\}^3=\{A\times Q(x)+B\}^3$

$=A^3\{Q(x)\}^3+3A^2B\{Q(x)\}^2+3AB^2Q(x)+B^3$

$=A[A^2\{Q(x)\}^3+3AB\{Q(x)\}^2+3B^2Q(x)]+B^3$

에서 $\{f(x)\}^3$을 x^2+1로 나눈 나머지는 $B^3=(x+2)^3$을 x^2+1로 나눈 나머지와 같다.

$B^3=(x+2)^3=x^3+6x^2+12x+8$에서

$x^3+6x^2+12x+8$을 x^2+1로 나누는 과정은 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|l}
 & x+6 \\
\hline
x^2+1 & x^3+6x^2+12x+8 \\
 & x^3+x \\
\hline
 & 6x^2+11x+8 \\
 & 6x^2+6 \\
\hline
 & 11x+2
\end{array}$$

이를 식으로 나타내면 $B^3=(x^2+1)(x+6)+11x+2$이므로

$\{f(x)\}^3$을 x^2+1로 나눈 나머지는 $R(x)=11x+2$이다.

$\therefore R(2)=11\times2+2=24$

071

답 50

다항식 $2f(x)+3g(x)$를 $h(x)$로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라 할 때, 나머지가 $5x^2$이므로

$2f(x)+3g(x)=h(x)Q_1(x)+5x^2$ …… ㉠

다항식 $4f(x)+3g(x)$를 $h(x)$로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$라 할 때, 나머지가 $3x^2$이므로

$4f(x)+3g(x)=h(x)Q_2(x)+3x^2$ …… ㉡

$3\times$㉠$-5\times$㉡을 하면

$3\{2f(x)+3g(x)\}-5\{4f(x)+3g(x)\}=h(x)\{3Q_1(x)-5Q_2(x)\}$

$-14f(x)-6g(x)=h(x)\{3Q_1(x)-5Q_2(x)\}$ …… ㉢

이므로 다항식 $-14f(x)-6g(x)$가 $h(x)$로 나누어떨어진다.

이때 다항식 $mf(x)+ng(x)$에서 m, n이 30 이하의 두 자연수이므로

㉢의 양변에 각각 $-\dfrac{1}{2}$을 곱해주면

$7f(x)+3g(x)=h(x)\times\dfrac{1}{2}\{5Q_2(x)-3Q_1(x)\}$

에서 $m+n$의 최솟값은 $m=7$, $n=3$일 때 $7+3=10$이다.

㉢의 양변에 각각 -2를 곱해주면

$28f(x)+12g(x)=h(x)\times\{10Q_2(x)-6Q_1(x)\}$

에서 $m+n$의 최댓값은 $m=28$, $n=12$일 때 $28+12=40$이다.

따라서 구하는 $m+n$의 최솟값과 최댓값의 합은 $10+40=50$이다.

072

답 11

조건 (가)에서

$f(x)=g(x)\{g(x)+x^3\}+g(x)+x^3$ …… ㉠

이고, $f(x)$를 $g(x)$로 나눈 나머지는 $g(x)$의 차수보다 낮아야 하므로 $g(x)+x^3$의 차수는 $g(x)$보다 낮다.

따라서 $g(x)$는 $-x^3$을 반드시 포함하는 삼차식이다.

이때 조건 (나)에서 $g(x)$를 $g(x)+x^3$으로 나눈 몫이 이차식이려면 $g(x)+x^3$이 일차식이어야 하므로

$g(x)+x^3=ax+b$ (a, b는 상수, $a\neq0$)로 놓으면

$g(x)=-x^3+ax+b$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$f(x)=(-x^3+ax+b)(ax+b)+ax+b$

이고, $f(x)$의 최고차항의 계수가 2, 즉 $a=-2$이므로

$f(x)=(-x^3-2x+b)(-2x+b)-2x+b$ …… ㉢

조건 (다)에서 $f(0)+g(0)=-1$이므로 ㉡, ㉢에서

$f(0)+g(0)=(b^2+b)+b=b^2+2b=-1$

$b^2+2b+1=0$, $(b+1)^2=0$ $\quad\therefore b=-1$

즉, $g(x)=-x^3-2x-1$이다.

$\therefore g(-2)=-(-2)^3-2\times(-2)-1=11$

073

답 21

$f(x)=(x^2+x+1)^3$

$=\{(x^2+2)+(x-1)\}^3$

$=(x^2+2)^3+3(x^2+2)^2(x-1)+3(x^2+2)(x-1)^2+(x-1)^3$

$=(x^2+2)\{(x^2+2)^2+3(x^2+2)(x-1)+3(x-1)^2\}+(x-1)^3$ …… ㉠

이므로 $f(x)$를 $g(x)$로 나눈 나머지는 $(x-1)^3$을 x^2+2로 나눈 나머지와 같다.

$(x-1)^3=x^3-3x^2+3x-1$에서 x^3-3x^2+3x-1을 x^2+2로 나누는 과정은 다음과 같다.

$$
\begin{array}{r}
x-3 \\
x^2+2\overline{\big)\, x^3-3x^2+3x-1} \\
\underline{x^3+2x} \\
-3x^2+x-1 \\
\underline{-3x^2-6} \\
x+5
\end{array}
$$

이를 식으로 나타내면

$x^3-3x^2+3x-1=(x^2+2)(x-3)+x+5$이므로 이를 ㉠에 대입하면

$$f(x)=(x^2+2)\{(x^2+2)^2+3(x^2+2)(x-1)+3(x-1)^2\}+(x^2+2)(x-3)+x+5$$
$$=(x^2+2)\{(x^2+2)^2+3(x^2+2)(x-1)+3(x-1)^2+(x-3)\}+x+5$$

$\therefore R_1(x)=x+5$

$xf(x)$
$$=x(x^2+2)\{(x^2+2)^2+3(x^2+2)(x-1)+3(x-1)^2+(x-3)\}+x(x+5)$$
$$=x(x^2+2)\{(x^2+2)^2+3(x^2+2)(x-1)+3(x-1)^2+(x-3)\}+(x^2+2)+5x-2$$

$\therefore R_2(x)=5x-2$

$\therefore R_1(2)\times R_2(1)=(2+5)\times(5-2)$
$=21$

074 — 답 ④

$f(x)=(x+2)Q_1(x)+r_1$, $Q_1(x)=(x+2)Q_2(x)+r_2$이므로

$f(x)=(x+2)\{(x+2)Q_2(x)+r_2\}+r_1$
$=(x+2)^2Q_2(x)+r_2(x+2)+r_1$

에서 다항식 $f(x)$를 $(x+2)^2$으로 나누었을 때의 나머지는 $r_2(x+2)+r_1$이다.

또한

$f(x)=(x+2)^2\{(x+2)Q_3(x)+r_3\}+r_2(x+2)+r_1$
$=(x+2)^3Q_3(x)+r_3(x+2)^2+r_2(x+2)+r_1$

이므로 다항식 $f(x)$를 $(x+2)^3$으로 나누었을 때의 나머지는 $r_3(x+2)^2+r_2(x+2)+r_1$이다. …… ㉠

마찬가지 방법으로 다항식 $f(x)$를 $(x+2)^4$으로 나누었을 때의 나머지는

$R(x)=r_4(x+2)^3+r_3(x+2)^2+r_2(x+2)+r_1$이다.

조건 (나)에서

$R(8)=1000r_4+100r_3+10r_2+r_1=1024$이므로

조건 (가)에 의하여 $r_4=1$, $r_3=0$, $r_2=2$, $r_1=4$이다.

따라서 다항식 $f(x)$를 $(x+2)^3$으로 나누었을 때의 나머지는

$0\times(x+2)^2+2\times(x+2)+4=2x+8$ ($\because$ ㉠)

075 — 답 117

$\angle HPI=90°$이므로 $\overline{HI}=\overline{OP}$이고, $\overline{OP}$는 부채꼴의 반지름의 길이와 같으므로 $\overline{HI}=5$이다.

$\overline{PH}=x$, $\overline{PI}=y$ $(x>0,\ y>0)$라 하면 삼각형 PIH에서 피타고라스 정리에 의하여

$x^2+y^2=25$ …… ㉠

삼각형 PIH의 내접원의 반지름의 길이를 r이라 하면 내접원의 넓이가 $\frac{\pi}{4}$이므로 $\pi r^2=\frac{\pi}{4}$에서 $r=\frac{1}{2}$

삼각형 PIH의 넓이는 …… TIP

$\frac{1}{2}xy=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times(x+y+5)$, $xy=\frac{1}{2}\times(x+y+5)$에서

$x+y=2xy-5$ …… ㉡

$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$이므로 이 식에 ㉠, ㉡을 대입하면

$(2xy-5)^2=25+2xy$

$4(xy)^2-20xy+25=25+2xy$

$4(xy)^2-22xy=0$, $xy(2xy-11)=0$

이때 $xy\neq0$이므로 $2xy-11=0$에서 $xy=\frac{11}{2}$

이를 ㉡에 대입하면

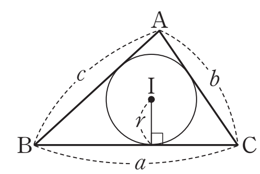
$x+y=2\times\frac{11}{2}-5=6$

$\therefore \overline{PH}^3+\overline{PI}^3=x^3+y^3$
$=(x+y)^3-3xy(x+y)$
$=6^3-3\times\frac{11}{2}\times6$
$=117$

TIP

내접원의 반지름의 길이와 삼각형의 넓이

삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이를 r이라 하면



(삼각형 ABC의 넓이)$=\frac{1}{2}r(a+b+c)$

076 — 답 15

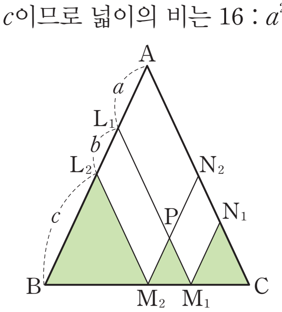
$\overline{AL_1}=a$, $\overline{L_1L_2}=b$, $\overline{L_2B}=c$라 하면

$\overline{AB}=4$에서 $a+b+c=4$ …… ㉠

$\overline{AL_1}\times\overline{L_2B}=1$에서 $ac=1$ …… ㉡

한편, 두 선분 L_1M_1, M_2N_2의 교점을 P라 하면

네 삼각형 ABC, N_1M_1C, PM_2M_1, L_2BM_2는 서로 닮음이고, 닮음비는 $4:a:b:c$이므로 넓이의 비는 $16:a^2:b^2:c^2$이다.



이때 세 삼각형 N_1M_1C, PM_2M_1, L_2BM_2의 넓이의 합이 삼각형 ABC의 넓이의 $\frac{1}{2}$이므로

$\frac{a^2+b^2+c^2}{16}=\frac{1}{2}$, 즉 $a^2+b^2+c^2=8$ …… ㉢

㉠에 의하여

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=16$

이고, 이에 ㉡, ㉢을 대입하면

$8+2(ab+bc+1)=16$, $ab+bc+1=4$

$b(a+c)=3$, $b(4-b)=3$ ($\because$ ㉠)

$b^2-4b+3=0$, $(b-1)(b-3)=0$

$\therefore b=1$ ($\because a+c=4-b\geq 2$)

$\therefore 15\overline{\mathrm{L_1L_2}}=15\times b=15\times 1=15$

077 ······ 답 148

$\overline{\mathrm{AB}}=x$, $\overline{\mathrm{AD}}=y$, $\overline{\mathrm{AE}}=z$라 하면

$l_1=3x+3y+3z+\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{CF}}+\overline{\mathrm{FA}}$

$l_2=x+y+z+\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{CF}}+\overline{\mathrm{FA}}$

이므로 $l_1-l_2=2x+2y+2z=28$에서

$x+y+z=14$

$S_1=xy+yz+zx+\frac{1}{2}xy+\frac{1}{2}yz+\frac{1}{2}zx+$(삼각형 AFC의 넓이)

$S_2=\frac{1}{2}xy+\frac{1}{2}yz+\frac{1}{2}zx+$(삼각형 AFC의 넓이)

이므로 $S_1-S_2=xy+yz+zx=61$

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AC}}^2+\overline{\mathrm{CF}}^2+\overline{\mathrm{FA}}^2&=(x^2+y^2)+(y^2+z^2)+(z^2+x^2)\\&=2(x^2+y^2+z^2)\\&=2\{(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)\}\\&=2\times(14^2-2\times 61)=148\end{aligned}$$

02 항등식과 나머지정리

078 ······ 답 ⑤

$ax^2-3x+5=x^2+(1-b)x+c$가 x에 대한 항등식이므로

양변의 계수를 비교하면

$a=1$, $-3=1-b$에서 $b=4$, $5=c$

$\therefore a+b+c=1+4+5=10$

다른 풀이

$ax^2-3x+5=x^2+(1-b)x+c$가 x에 대한 항등식이므로

x에 어떤 값을 대입하여도 항상 성립한다.

따라서 주어진 등식의 양변에

$x=0$을 대입하면 $5=c$

$x=1$을 대입하면 $a+2=2-b+c$, $a+b=5$ ······ ㉠

$x=-1$을 대입하면 $a+8=b+c$, $a-b=-3$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=4$

$\therefore a+b+c=1+4+5=10$

079 ······ 답 36

등식의 우변을 전개한 후 x에 대하여 정리하면

$$\begin{aligned}3x^2-4x+7&=a(x-1)^2+b(x-1)+c\\&=a(x^2-2x+1)+b(x-1)+c\\&=ax^2+(-2a+b)x+a-b+c\end{aligned}$$

이 등식은 x에 대한 항등식이므로 양변의 계수를 비교하면

$3=a$, $-4=-2a+b$, $7=a-b+c$에서

$a=3$, $b=2$, $c=6$

$\therefore abc=3\times 2\times 6=36$

다른 풀이

주어진 등식은 x에 대한 항등식이므로 x에 어떤 값을 대입하여도 항상 성립한다.

따라서 주어진 등식의 양변에

$x=1$을 대입하면 $6=c$ ······ ㉠

$x=0$을 대입하면 $7=a-b+c$ ······ ㉡

$x=2$를 대입하면 $11=a+b+c$ ······ ㉢

㉠을 ㉡, ㉢에 대입하면 $a-b=1$, $a+b=5$이므로

이를 연립하여 풀면

$a=3$, $b=2$

$\therefore abc=3\times 2\times 6=36$

080 ······ 답 3

주어진 등식은 x에 대한 항등식이므로 x에 어떤 값을 대입하여도 항상 성립한다.

따라서 주어진 등식의 양변에

$x=-1$을 대입하면 $a-2=0$, $a=2$

$x=1$을 대입하면 $a-8=2(b-4)$, $b=1$

$\therefore a+b=2+1=3$

다른 풀이

등식의 우변을 전개한 후 x에 대하여 정리하면

$x^3+ax^2-4x-5=(x+1)(x^2+bx-5)$

$=x^3+(b+1)x^2+(b-5)x-5$

이 등식은 x에 대한 항등식이므로 양변의 계수를 비교하면

$a=b+1$, $-4=b-5$에서 $b=1$, $a=2$

$\therefore a+b=2+1=3$

081 ⋯⋯ 답 ④

주어진 등식은 x에 대한 항등식이므로 x에 어떤 값을 대입하여도 항상 성립한다.

따라서 주어진 등식의 양변에

$x=0$을 대입하면 $4=-2a$, $a=-2$

$x=2$를 대입하면 $6=6b$, $b=1$

$x=-1$을 대입하면 $6=3c$, $c=2$

$\therefore a+2b+3c=-2+2\times1+3\times2=6$

082 ⋯⋯ 답 ③

$2kx+(k-2)y-(k+2)=0$이 k에 대한 항등식이므로

k에 대하여 정리하면

$(2x+y-1)k-2y-2=0$

양변의 계수를 비교하면

$2x+y-1=0$, $-2y-2=0$에서 $y=-1$, $x=1$

$\therefore x-y=1-(-1)=2$

083 ⋯⋯ 답 13

$a(x+y)+b(2x-3y)+8x-7y=0$이

x, y에 대한 항등식이므로 x, y에 대하여 정리하면

$(a+2b+8)x+(a-3b-7)y=0$

양변의 계수를 비교하면

$a+2b+8=0$ ⋯⋯ ㉠

$a-3b-7=0$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=-3$

$\therefore a^2+b^2=(-2)^2+(-3)^2=13$

084 ⋯⋯ 답 34

다항식 $3x^3+ax^2-22x+b$를 x^2+2x-5로 나누었을 때의 몫이 $3x-4$이고 나머지가 $x-3$이므로

$3x^3+ax^2-22x+b=(x^2+2x-5)(3x-4)+x-3$

$=3x^3+2x^2-22x+17$

이 등식은 x에 대한 항등식이므로 양변의 계수를 비교하면

$a=2$, $b=17$

$\therefore ab=2\times17=34$

085 ⋯⋯ 답 (1) -1 (2) -125

(1) $a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6$은

주어진 항등식의 우변에 $x=1$을 대입한 것이다.

따라서 주어진 항등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=(1+2-4)^3=-1$

(2) $a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5+a_6$은

주어진 항등식의 우변에 $x=-1$을 대입한 것이다.

따라서 주어진 항등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5+a_6=(1-2-4)^3=-125$

086 ⋯⋯ 답 (1) 5 (2) -6

(1) $f(x)=x^3-3x^2+5x+2$라 하면 다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는 나머지정리에 의하여

$f(1)=1^3-3\times1^2+5\times1+2=5$

(2) $f(x)=8x^3+4x-3$이라 하고 다항식 $f(x)$를 $2x+1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R이라 하면

$f(x)=(2x+1)Q(x)+R=2\left(x+\frac{1}{2}\right)Q(x)+R$

이 등식은 x에 대한 항등식이므로 양변에 $x=-\frac{1}{2}$을 대입하면

$R=f\left(-\frac{1}{2}\right)=8\times\left(-\frac{1}{2}\right)^3+4\times\left(-\frac{1}{2}\right)-3=-6$

087 ⋯⋯ 답 ①

$f(x)=x^{12}+ax^5-3$이라 하자.

다항식 $f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지가 6이므로

나머지정리에 의하여

$f(-1)=(-1)^{12}+a\times(-1)^5-3$

$=-a-2=6$

$\therefore a=-8$

088 ⋯⋯ 답 ②

$f(x)=x^2+ax-4$, $g(x)=x^2-x+a$라 하자.

두 다항식 $f(x)$, $g(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지는

나머지정리에 의하여 각각

$f(-2)=(-2)^2+a\times(-2)-4=-2a$,

$g(-2)=(-2)^2-(-2)+a=a+6$

이때 두 나머지는 서로 같으므로 $-2a=a+6$

$\therefore a=-2$

089 ⋯⋯ 답 ③

다항식 $P(x)$를 $(x+3)(x-1)$로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 $3x+5$이므로

$P(x)=(x+3)(x-1)Q(x)+3x+5$ ⋯⋯ ㉠

이때 다항식 $(x+2)P(x-4)$를 $x-1$로 나눈 나머지는

나머지정리에 의하여

$(1+2)P(1-4)=3P(-3)$이다.

㉠에서 $P(-3)=3\times(-3)+5=-4$

따라서 구하는 값은

$3P(-3)=3\times(-4)=-12$

090 ⋯ 답 ④

다항식 $f(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지는 4이므로
나머지정리에 의하여 $f(-2)=4$ ⋯⋯ ㉠
다항식 $f(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지는 -6이므로
나머지정리에 의하여 $f(3)=-6$ ⋯⋯ ㉡
한편, 다항식 $f(x)$를 $(x+2)(x-3)$으로 나누었을 때의
몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면
$f(x)=(x+2)(x-3)Q(x)+ax+b$
이므로 ㉠, ㉡에서
$f(-2)=-2a+b=4$, $f(3)=3a+b=-6$
두 식을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=0$
따라서 구하는 나머지는 $-2x$이다.

091 ⋯ 답 ⑤

다항식 $3f(x)-g(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지는
나머지정리에 의하여 $3f(-2)-g(-2)$이다.
다항식 $f(x)$를 $(x-2)(x+2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라 하면
나머지가 2이므로
$f(x)=(x-2)(x+2)Q_1(x)+2$ ⋯⋯ ㉠
다항식 $g(x)$를 $x(x+2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$라 하면
나머지가 $x-5$이므로
$g(x)=x(x+2)Q_2(x)+x-5$ ⋯⋯ ㉡
㉠, ㉡의 양변에 각각 $x=-2$를 대입하면
$f(-2)=2$, $g(-2)=-7$
$\therefore 3f(-2)-g(-2)=3\times2-(-7)=13$

092 ⋯ 답 11

다항식 $f(x)$를 x^2-3x+2로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라 하면
나머지가 5이므로
$f(x)=(x-1)(x-2)Q_1(x)+5$ ⋯⋯ ㉠
다항식 $f(x)$를 x^2+3x+2로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$라 하면
나머지가 $2x+3$이므로
$f(x)=(x+2)(x+1)Q_2(x)+2x+3$ ⋯⋯ ㉡
다항식 $f(x)$를 x^2+x-2로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를
$R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면
$f(x)=(x+2)(x-1)Q(x)+ax+b$
이 식의 양변에 $x=-2$, $x=1$을 각각 대입하면
$f(-2)=-2a+b$, $f(1)=a+b$이고
㉠에서 $f(1)=5$, ㉡에서 $f(-2)=-1$이므로
$a+b=5$, $-2a+b=-1$
두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=3$이므로
$R(x)=2x+3$
$\therefore R(4)=2\times4+3=11$

093 ⋯ 답 ③

다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가
-3이므로
$f(x)=(x-1)Q(x)-3$ ⋯⋯ ㉠
다항식 $Q(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지가 2이므로
나머지정리에 의하여 $Q(3)=2$
따라서 다항식 $f(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지는
㉠에서 나머지정리에 의하여 $f(3)=2Q(3)-3=1$이다.

094 ⋯ 답 ①

다항식 $f(x)$를 x^2+2로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가
$3x+5$이므로
$f(x)=(x^2+2)Q(x)+3x+5$ ⋯⋯ ㉠
다항식 $f(x)$를 x^2-2x-3으로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라 하면
나머지가 $x-3$이므로
$f(x)=(x+1)(x-3)Q_1(x)+x-3$ ⋯⋯ ㉡
다항식 $Q(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는 나머지정리에
의하여 $Q(-1)$이다.
㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면 $f(-1)=3Q(-1)+2$
㉡의 양변에 $x=-1$을 대입하면 $f(-1)=-4$
따라서 $3Q(-1)+2=-4$이므로
$Q(-1)=-2$

095 ⋯ 답 ④

$x=50$이라 하면
$98\times99\times103=(2x-2)(2x-1)(2x+\boxed{3})$
이다. 이때
$f(x)=(2x-2)(2x-1)(2x+\boxed{3})$
이라 하면 다항식 $f(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지는
나머지정리에 의하여
$f(-2)=(-4-2)\times(-4-1)\times(-4+3)=\boxed{-30}$이므로
$f(x)=(x+2)Q(x)+\boxed{-30}$ (단, $Q(x)$는 다항식)
다시 $x=50$을 대입하면
$98\times99\times103=52Q(50)+\boxed{-30}$
$=52\{Q(50)-1\}+\boxed{22}$ ⋯⋯ TIP
이므로 $98\times99\times103$을 52로 나누었을 때의 나머지는 $\boxed{22}$이다.
따라서 $a=3$, $b=-30$, $c=22$이므로
$a-b+c=3-(-30)+22=55$

TIP
자연수 a를 자연수 b로 나누었을 때의 나머지를 r이라 하면
r은 $0\le r<b$인 정수이다.
따라서 자연수의 나눗셈을 다항식의 나눗셈으로 변형하여
계산할 때 조건 $0\le r<b$에 맞는지 확인해야 한다.

096 ⋯ 답 ④

다항식 $f(x)$가 $x+2$로 나누어떨어지므로
인수 정리에 의하여 $f(-2)=0$이다.
따라서 $f(x)=x^3+3x^2+ax-2$에서
$f(-2)=(-2)^3+3\times(-2)^2+a\times(-2)-2=0$
$\therefore a=1$

097 ····· 답 ②

다항식 $f(6x+1)$이 $3\left(x-\frac{1}{3}\right)$로 나누어떨어지므로

인수 정리에 의하여 $f\left(6\times\frac{1}{3}+1\right)=f(3)=0$이다.

즉, $f(x)=x^3+ax^2-2x+6$에서

$f(3)=9a+27=0 \quad \therefore a=-3$

$f(x)=x^3-3x^2-2x+6$이므로

$f(1)=1^3-3\times1^2-2\times1+6=2$

098 ····· 답 13

다항식 $P(x)$가 $(x-1)(x-2)$로 나누어떨어지므로

다항식 $P(x)$는 $x-1$과 $x-2$로 각각 나누어떨어진다. ······ TIP

따라서 $P(x)=x^3+ax^2+bx-4$에서 인수 정리에 의하여

$P(1)=a+b-3=0,\ a+b=3$

$P(2)=4a+2b+4=0,\ 2a+b=-2$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-5,\ b=8$

$\therefore b-a=8-(-5)=13$

TIP

다항식 $P(x)$를 $(x-1)(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 $P(x)=(x-1)(x-2)Q(x)$이므로 다항식 $P(x)$는 $x-1$과 $x-2$로 각각 나누어떨어진다.

099 ····· 답 ③

다항식 $P(x+2)$를 $x-4$로 나눈 나머지는 15이므로

나머지정리에 의하여

$P(4+2)=P(6)=15$ ······ ㉠

다항식 $P(x+2)$는 $x+1$로 나누어떨어지므로 인수 정리에 의하여

$P(-1+2)=P(1)=0$ ······ ㉡

다항식 $P(x)$를 $(x-1)(x-6)$으로 나눈 몫을 $Q(x)$,

나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$P(x)=(x-1)(x-6)Q(x)+ax+b$

㉠, ㉡에서 $P(1)=0$, $P(6)=15$이므로 이 식의 양변에 $x=1$, $x=6$을 각각 대입하면

$a+b=0,\ 6a+b=15$

두 식을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-3$이므로 $R(x)=3x-3$이다.

$\therefore R(5)=3\times5-3=12$

100 ····· 답 ③

조립제법을 이용하여 다항식 x^3-4x^2+5x-1을 $x-3$으로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구하는 과정은 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & -4 & 5 & -1 \\ & & 3 & -3 & 6 \\ \hline & 1 & -1 & 2 & \boxed{5} \end{array}$$

따라서 x^3-4x^2+5x-1을 $x-3$으로 나누었을 때의

몫은 $Q(x)=x^2-x+2$, 나머지는 $r=5$이다.

$\therefore Q(r)=Q(5)=5^2-5+2=22$

다른 풀이

직접 나눗셈을 하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{rl} & x^2-\ x+2 \quad :\text{몫} \\ x-3 \big) & x^3-4x^2+5x-1 \\ & x^3-3x^2 \\ \hline & -\ x^2+5x-1 \\ & -\ x^2+3x \\ \hline & 2x-1 \\ & 2x-6 \\ \hline & 5 \quad :\text{나머지} \end{array}$$

따라서 x^3-4x^2+5x-1을 $x-3$으로 나누었을 때의

몫은 $Q(x)=x^2-x+2$, 나머지는 $r=5$이다.

$\therefore Q(r)=Q(5)=5^2-5+2=22$

101 ····· 답 ⑤

조립제법을 이용하여 다항식 x^3+ax^2+bx+c를 $x+2$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구하는 과정은 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & a & b & c \\ & & -2 & -10 & 4 \\ \hline & 1 & 5 & -2 & \boxed{-1} \end{array}$$

$a+(-2)=5$에서 $a=7$

$b+(-10)=-2$에서 $b=8$

$c+4=-1$에서 $c=-5$

$\therefore a+b+c=7+8+(-5)=10$

참고

위 과정은 다항식 x^3+7x^2+8x-5를 $x+2$로 나누었을 때의 몫은 x^2+5x-2이고 나머지는 -1임을 구한 것이다.

102 ····· 답 ③

조립제법을 이용하여 다항식 $3x^3+4x^2-13x+8$을 $x-\frac{2}{3}$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구하는 과정은 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{2}{3} & 3 & 4 & -13 & 8 \\ & & 2 & 4 & -6 \\ \hline & 3 & 6 & -9 & \boxed{2} \end{array}$$

$\therefore 3x^3+4x^2-13x+8=\left(x-\frac{2}{3}\right)(3x^2+6x-9)+2$

$=(3x-2)(x^2+2x-3)+2$

따라서 $a=6$, $b=-9$, $c=-2$, $d=2$, $e=-3$이므로

$a+b+c+d+e=-6$

103 ····· 답 ④

주어진 조립제법 과정에서

삼차식 $f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

다항식 $Q(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 몫은 $2x-3$, 나머지는 1이므로 $Q(x)=(x+1)(2x-3)+1$

이때 삼차식 $f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는 3이므로

$f(x)=(x-2)Q(x)+3$

$\quad\;\;=(x-2)\{(x+1)(2x-3)+1\}+3$

$\therefore f(1)=-1\times\{2\times(-1)+1\}+3=4$

참고

주어진 조립제법 과정에서 빈칸을 채우면 다음과 같다.

2	2	-5	0	7
		4	-2	-4
-1	2	-1	-2	3
		-2	3	
	2	-3	1	

따라서 $f(x)=2x^3-5x^2+7$이므로

$f(1)=2\times1^3-5\times1^2+7=4$이다.

104

답 ②

$x^8+ax^3+b=x(x-1)f(x)-2x+5$ …… ㉠

이 등식은 x에 대한 항등식이므로 양변에 …… TIP

$x=0$을 대입하면 $b=5$

$x=1$을 대입하면 $1+a+b=3$, $a=-3$

이를 ㉠에 대입하면

$x^8-3x^3+5=x(x-1)f(x)-2x+5$이므로

양변에 $x=-1$을 대입하면

$1+3+5=2f(-1)+7$

$\therefore f(-1)=1$

TIP

주어진 등식에서 $f(x)$를 구체적으로 알 수 없으므로 $f(x)$에 곱해진 $x(x-1)$의 값이 0이 되도록 하는 x의 값, 즉 $x=0$, $x=1$을 각각 대입하여 문제를 해결한다.

105

답 ②

$(x+y)a-(y-z)b-(y+z)c-3x+z=0$이

x, y, z에 대한 항등식이므로 x, y, z에 대하여 정리하면

$(a-3)x+(a-b-c)y+(b-c+1)z=0$

양변의 계수를 비교하면

$a-3=0$ …… ㉠

$a-b-c=0$ …… ㉡

$b-c+1=0$ …… ㉢

㉠에서 $a=3$이므로 이를 ㉡에 대입하면

$b+c=3$

이를 ㉢과 연립하여 풀면

$b=1$, $c=2$

$\therefore abc=3\times1\times2=6$

106

답 ⑤

$x-y=1$에서 $x=y+1$이므로 이를

$(a+b)x+(b-2a)y=9$에 대입하면

$(a+b)(y+1)+(b-2a)y=9$

$(-a+2b)y+a+b=9$

이 등식은 y에 대한 항등식이므로 양변의 계수를 비교하면

$-a+2b=0$, $a+b=9$

두 식을 연립하여 풀면 $a=6$, $b=3$

$\therefore ab=6\times3=18$

다른 풀이 1

$x-y=1$에서 $9x-9y=9$이므로 이를

$(a+b)x+(b-2a)y=9$에 대입하면

$(a+b)x+(b-2a)y=9x-9y$

이 등식은 x, y에 대한 항등식이므로 양변의 계수를 비교하면

$a+b=9$, $b-2a=-9$

두 식을 연립하여 풀면 $a=6$, $b=3$

$\therefore ab=6\times3=18$

다른 풀이 2

$x-y=1$을 만족시키는 임의의 x, y의 값을

$(a+b)x+(b-2a)y=9$에 대입하여 다음과 같이 문제를 해결할 수 있다.

$(a+b)x+(b-2a)y=9$의 양변에

$x=1$, $y=0$을 대입하면 $a+b=9$ …… ㉠

$x=0$, $y=-1$을 대입하면 $2a-b=9$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=6$, $b=3$

$\therefore ab=6\times3=18$

107

답 ②

$\dfrac{2x-6y+a}{bx+3y+5}=k$ (k는 상수)로 일정한 값을 갖는다고 하면

$2x-6y+a=k(bx+3y+5)$

이 등식은 x, y에 대한 항등식이므로 양변의 계수를 비교하면

$2=bk$, $-6=3k$, $a=5k$이므로

$k=-2$, $a=-10$, $b=-1$

$\therefore a+b=-10+(-1)=-11$

108

답 ③

$f(x)=x^3-2x^2+5$에서

$f(a-2x)=(a-2x)^3-2(a-2x)^2+5$

$\qquad=(a^3-6a^2x+12ax^2-8x^3)-2(a^2-4ax+4x^2)+5$

$\qquad=-8x^3+(12a-8)x^2+(-6a^2+8a)x+a^3-2a^2+5$

$\qquad=-8x^3+4x^2+bx+c$

이 등식은 x에 대한 항등식이므로 양변의 계수를 비교하면

$12a-8=4$, $-6a^2+8a=b$, $a^3-2a^2+5=c$에서

$a=1$, $b=2$, $c=4$

$\therefore a-b+c=1-2+4=3$

109

답 90

$3x^2-4x-1=ab(x-2)+(a-b)(x-1)^2$

이 등식은 x에 대한 항등식이므로

양변에 $x=2$를 대입하면

$3\times2^2-4\times2-1=a-b$에서

$a-b=3$ …… ㉠

양변에 $x=1$을 대입하면

$3\times1^2-4\times1-1=ab\times(-1)$에서

$ab=2$ $\cdots\cdots$ ㉡

$\therefore\ a^4b-ab^4=ab(a^3-b^3)=ab\{(a-b)^3+3ab(a-b)\}$

$=2(3^3+3\times2\times3)$ ($\because$ ㉠, ㉡)

$=90$

110 답 22

다항식 $f(x)$를 $2x^3-6x^2+5x$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 $-2x^2+ax+7$이므로

$f(x)=(2x^3-6x^2+5x)Q(x)-2x^2+ax+7$

$\quad=2x\left(x^2-3x+\frac{5}{2}\right)Q(x)-2x^2+ax+7$

이때 다항식 $f(x)$를 $x^2-3x+\frac{5}{2}$로 나누었을 때의 나머지가 $4x+b$이므로 다항식 $-2x^2+ax+7$을 $x^2-3x+\frac{5}{2}$로 나누었을 때의 나머지가 $4x+b$이다.

즉, $-2x^2+ax+7=-2\left(x^2-3x+\frac{5}{2}\right)+4x+b$에서

$-2x^2+ax+7=-2x^2+10x+b-5$

이 등식은 x에 대한 항등식이므로 양변의 계수를 비교하면

$a=10$, $7=b-5$에서 $b=12$

$\therefore\ a+b=10+12=22$

111 답 ③

삼차식 $f(x)$는 x^2+x+1로 나누어떨어지므로

두 상수 a $(a\neq0)$, b에 대하여

$f(x)=(x^2+x+1)(ax+b)$ $\cdots\cdots$ ㉠

삼차식 $f(x)+6$은 x^2+2로 나누어떨어지고,

㉠에서 $f(x)$의 삼차항의 계수가 a이므로 상수 c에 대하여

$f(x)+6=(x^2+2)(ax+c)$

$\therefore\ f(x)=(x^2+2)(ax+c)-6$ $\cdots\cdots$ ㉡

$f(0)=2$이므로 ㉠에서 $b=2$, ㉡에서 $c=4$

따라서 ㉠, ㉡에서

$(x^2+x+1)(ax+2)=(x^2+2)(ax+4)-6$ $\cdots\cdots$ ㉢

$ax^3+(a+2)x^2+(a+2)x+2=ax^3+4x^2+2ax+2$

이 등식은 x에 대한 항등식이므로 양변의 계수를 비교하면

$a+2=4$, $a+2=2a$에서 $a=2$

따라서 $f(x)=(x^2+x+1)(2x+2)$이므로

$f(1)=12$

다른 풀이

㉢은 x에 대한 항등식이므로 양변에 $x=-1$을 대입하면

$-a+2=3(-a+4)-6$에서 $a=2$

따라서 $f(x)=(x^2+x+1)(2x+2)$이므로

$f(1)=12$

112 답 ①

조건 (가)에서 $P(x)+Q(x)=3x-1$

이 등식은 x에 대한 항등식이므로 양변에 $x=2$를 대입하면

$P(2)+Q(2)=3\times2-1=5$ $\cdots\cdots$ ㉠

조건 (나)에서 $\{P(x)\}^2-\{Q(x)\}^2=3x^2-16x+5$

이 등식은 x에 대한 항등식이므로 양변에 $x=2$를 대입하면

$\{P(2)\}^2-\{Q(2)\}^2=3\times2^2-16\times2+5=-15$ $\cdots\cdots$ ㉡

이때 $\{P(2)\}^2-\{Q(2)\}^2=\{P(2)+Q(2)\}\{P(2)-Q(2)\}$이므로

$-15=5\times\{P(2)-Q(2)\}$ ($\because$ ㉠, ㉡)

$\therefore\ P(2)-Q(2)=-3$

다른 풀이

조건 (나)에서

$\{P(x)\}^2-\{Q(x)\}^2=3x^2-16x+5$

$=(3x-1)(x-5)$ $\cdots\cdots$ ㉠

이고 곱셈법칙에 의하여

$\{P(x)\}^2-\{Q(x)\}^2=\{P(x)+Q(x)\}\{P(x)-Q(x)\}$

조건 (가)에서 $P(x)+Q(x)=3x-1$이므로

$\{P(x)\}^2-\{Q(x)\}^2=(3x-1)\{P(x)-Q(x)\}$

이를 ㉠에 대입하면

$(3x-1)\{P(x)-Q(x)\}=(3x-1)(x-5)$

이 등식은 x에 대한 항등식이므로

$P(x)-Q(x)=x-5$

$\therefore\ P(2)-Q(2)=2-5=-3$

113 답 21

$P_1(x)=x$,

$P_2(x)=x(x-1)$,

$P_3(x)=x(x-1)(x-2)$이므로

$(2x-1)^3=ax(x-1)(x-2)+bx(x-1)+cx+d$ $\cdots\cdots$ ㉠

이 등식은 x에 대한 항등식이므로 양변에

$x=0$을 대입하면 $-1=d$

$x=1$을 대입하면 $1=c+d$, $c=2$

$x=2$를 대입하면 $27=2b+2c+d$, $b=12$

㉠의 양변의 x^3의 계수를 비교하면 $8=a$

$\therefore\ a+b+c+d=8+12+2+(-1)=21$

다른 풀이

㉠의 좌변을 전개하면 $8x^3-12x^2+6x-1$

이 식을 x, $x-1$, $x-2$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 차례대로 조립제법을 이용하여 구하는 과정은 다음과 같다.

$$
\begin{array}{r|rrrl}
0 & 8 & -12 & 6 & -1 \\
 & & 0 & 0 & 0 \\
\hline
1 & 8 & -12 & 6 & \boxed{-1}=d \\
 & & 8 & -4 & \\
\hline
2 & 8 & -4 & \boxed{2}=c & \\
 & & 16 & & \\
\hline
 & 8 & \boxed{12}=b & & \\
 & \| & & & \\
 & a & & &
\end{array}
$$

따라서 조립제법의 결과를 이용하면

$8x^3-12x^2+6x-1$

$=x(8x^2-12x+6)-1$

$=x\{(x-1)(8x-4)+2\}-1$

$=x[(x-1)\{8(x-2)+12\}+2]-1$

$=8x(x-1)(x-2)+12x(x-1)+2x-1$

이므로 $a=8$, $b=12$, $c=2$, $d=-1$

$\therefore a+b+c+d=21$

114 ··· 답 6

$(2x-1)^3(x+1)^2=ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f$

이 등식은 x에 대한 항등식이므로 양변에 $x=1$을 대입하면

$4=a+b+c+d+e+f$

이때 $(2x-1)^3(x+1)^2=(8x^3-12x^2+6x-1)(x^2+2x+1)$

에서 x^2의 계수는

(x^2의 계수)×(상수항)+(x의 계수)×(x의 계수)

+(상수항)×(x^2의 계수)

이므로 $(-12)\times1+6\times2+(-1)\times1=-1$

즉, $d=-1$

상수항은 (상수항)×(상수항)에서 $(-1)\times1=-1$

즉, $f=-1$

$\therefore a+b+c+e=(a+b+c+d+e+f)-(d+f)$

$=4-\{(-1)+(-1)\}=6$

다른 풀이

$(2x-1)^3(x+1)^2=(8x^3-12x^2+6x-1)(x^2+2x+1)$

$=8x^5+4x^4-10x^3-x^2+4x-1$

이므로 $a=8$, $b=4$, $c=-10$, $e=4$

$\therefore a+b+c+e=6$

115 ··· 답 풀이 참조

$(x^3-2x-4)^4=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{12}x^{12}$ ······ ㉠

이는 x에 대한 항등식이다.

(1) a_0은 $(x^3-2x-4)^4$의 상수항과 같으므로

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면 $a_0=256$

a_{12}는 $(x^3-2x-4)^4$의 x^{12}의 계수와 같으므로 $a_{12}=1$

$\therefore a_0+a_{12}=256+1=257$

(2) ㉠의 양변에

$x=1$을 대입하면

$625=a_0+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{11}+a_{12}$ ······ ㉡

$x=-1$을 대입하면

$81=a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots-a_{11}+a_{12}$ ······ ㉢

㉡, ㉢의 양변을 각각 더하면

$2(a_0+a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}+a_{12})=706$

$\therefore a_0+a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}+a_{12}=353$

(3) (2)의 풀이에서 ㉡에서 ㉢을 변끼리 빼면

$2(a_1+a_3+a_5+a_7+a_9+a_{11})=544$

$\therefore a_1+a_3+a_5+a_7+a_9+a_{11}=272$

채점 요소	배점
a_0+a_{12}의 값 구하기	20 %
$a_0+a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}+a_{12}$의 값 구하기	40 %
$a_1+a_3+a_5+a_7+a_9+a_{11}$의 값 구하기	40 %

116 ··· 답 ③

$x^{10}+2=a_{10}(x+2)^{10}+a_9(x+2)^9+\cdots+a_1(x+2)+a_0$ ······ ㉠

이 등식은 x에 대한 항등식이므로 양변에

$x=-1$을 대입하면 ······ TIP

$3=a_{10}+a_9+\cdots+a_1+a_0$

$x=-2$를 대입하면

$1026=a_0$

㉠의 양변의 x^{10}의 계수를 비교하면 $a_{10}=1$

$\therefore a_1+a_2+\cdots+a_8+a_9=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{10}-(a_0+a_{10})$

$=3-(1026+1)$

$=-1024$

TIP

㉠의 우변에서 $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{10}$의 값을 구하려면 $x+2=1$이어야 하므로 ㉠의 양변에 $x=-1$을 대입해야 하고, a_0의 값을 구하려면 $x+2=0$이어야 하므로 ㉠의 양변에 $x=-2$를 대입해야 한다.

117 ··· 답 ②

$(3x^2-x-1)^5=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{10}x^{10}$

이 등식은 x에 대한 항등식이므로 양변에

$x=\frac{1}{3}$을 대입하면

$-1=a_0+\frac{a_1}{3}+\frac{a_2}{3^2}+\cdots+\frac{a_9}{3^9}+\frac{a_{10}}{3^{10}}$ ······ ㉠

$x=-\frac{1}{3}$을 대입하면

$-\frac{1}{3^5}=a_0-\frac{a_1}{3}+\frac{a_2}{3^2}-\cdots-\frac{a_9}{3^9}+\frac{a_{10}}{3^{10}}$ ······ ㉡

㉠에서 ㉡을 변끼리 빼면

$\frac{-3^5+1}{3^5}=2\left(\frac{a_1}{3}+\frac{a_3}{3^3}+\frac{a_5}{3^5}+\cdots+\frac{a_9}{3^9}\right)$

$\therefore \frac{a_1}{3}+\frac{a_3}{3^3}+\frac{a_5}{3^5}+\cdots+\frac{a_9}{3^9}=\frac{1-3^5}{2\times3^5}$

118 ··· 답 ⑤

다항식 $P(x)+3x$를 $x-1$로 나눈 나머지는 6이므로

나머지정리에 의하여

$P(1)+3=6$, $P(1)=3$ ······ ㉠

이때 등식 $P(x+3)=P(1-x)$가 x에 대한 항등식이므로

양변에 $x=0$을 대입하면

$P(3)=P(1)$, $P(3)=3$ ($\because$ ㉠) ······ ㉡

다항식 $(x+1)P(x)$를 $(x-1)(x-3)$으로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$(x+1)P(x)=(x-1)(x-3)Q(x)+ax+b$

이 식의 양변에 $x=1$을 대입하면 $2P(1)=a+b=6$ ($\because$ ㉠)

이 식의 양변에 $x=3$을 대입하면 $4P(3)=3a+b=12$ ($\because$ ㉡)

두 식을 연립하면 $a=3$, $b=3$이므로 $R(x)=3x+3$이다.

$\therefore R(4)=3\times4+3=15$

119 ······ 답 3

다항식 $f(x)+g(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 5이므로 나머지정리에 의하여

$f(2)+g(2)=5$ ······ ㉠

다항식 $\{f(x)\}^3+\{g(x)\}^3$을 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 80이므로 나머지정리에 의하여

$\{f(2)\}^3+\{g(2)\}^3=80$ ······ ㉡

다항식 $f(x)g(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는 나머지정리에 의하여 $f(2)g(2)$이다.

$\{f(2)\}^3+\{g(2)\}^3=\{f(2)+g(2)\}^3-3f(2)g(2)\{f(2)+g(2)\}$

이므로 ㉠, ㉡에 의하여

$80=5^3-3\times f(2)g(2)\times 5$

$\therefore f(2)g(2)=3$

120 ······ 답 ①

다항식 $f(x)$를 x로 나누었을 때의 나머지가 3이므로 나머지정리에 의하여 $f(0)=3$이다.

따라서 항등식 $f(x+1)=f(x)+3x^2-x$의 양변에

$x=0$을 대입하면 $f(1)=f(0)=3$ ······ ㉠

$x=1$을 대입하면 $f(2)=f(1)+2=5$ ······ ㉡

이때 다항식 $f(x)$를 $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)=(x-1)(x-2)Q(x)+ax+b$이므로

㉠에서 $f(1)=a+b=3$, ㉡에서 $f(2)=2a+b=5$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=1$

따라서 구하는 나머지는 $2x+1$이다.

121 ······ 답 -4

$\{f(x+3)\}^2-4=x^2(x+2)(x-2)$에서

$$\begin{aligned}\{f(x+3)\}^2&=x^2(x+2)(x-2)+4\\&=x^2(x^2-4)+4\\&=x^4-4x^2+4\\&=(x^2-2)^2\end{aligned}$$

이고, $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로

$f(x+3)=x^2-2$ ······ ㉠

이때 다항식 $f(x+1)$을 $x+k$로 나눈 나머지가 7이 되려면 $f(-k+1)=7$이어야 하므로 ㉠에 $x=-k-2$를 대입하면

$(-k-2)^2-2=7$, $k^2+4k+4-2=7$

$k^2+4k-5=0$, $(k+5)(k-1)=0$에서 $k=-5$ 또는 $k=1$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은

$(-5)+1=-4$

122 ······ 답 -170

$Q(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_8x^8$에서

$Q(1)=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_8$ ······ ㉠

$Q(-1)=a_0-a_1+a_2-\cdots+a_8$ ······ ㉡

㉠에서 ㉡을 변끼리 빼면

$Q(1)-Q(-1)=2(a_1+a_3+a_5+a_7)$에서

$a_1+a_3+a_5+a_7=\frac{1}{2}\{Q(1)-Q(-1)\}$이다.

한편, $f(x)=x^9$이라 하면 다항식 $f(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지는 나머지정리에 의하여 $f(-2)=-512$이므로

$f(x)=(x+2)Q(x)-512$

이 등식은 x에 대한 항등식이므로 양변에

$x=1$을 대입하면

$f(1)=3Q(1)-512$

이때 $f(1)=1^9=1$이므로

$1=3Q(1)-512$ $\quad\therefore Q(1)=171$

$x=-1$을 대입하면

$f(-1)=Q(-1)-512$

이때 $f(-1)=(-1)^9=-1$이므로

$-1=Q(-1)-512$

$\therefore Q(-1)=511$

$$\begin{aligned}\therefore a_1+a_3+a_5+a_7&=\frac{1}{2}\{Q(1)-Q(-1)\}\\&=\frac{1}{2}(171-511)=-170\end{aligned}$$

123 ······ 답 1

다항식 $x^{20}+2x+5$를 x^2+x로 나누었을 때의 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면 몫이 $Q(x)$이므로

$x^{20}+2x+5=x(x+1)Q(x)+ax+b$ ······ ㉠

이 등식은 x에 대한 항등식이므로 양변에

$x=0$을 대입하면 $5=b$

$x=-1$을 대입하면 $4=-a+b$에서 $a=1$

이를 ㉠에 대입하면

$x^{20}+2x+5=x(x+1)Q(x)+x+5$ ······ ㉡

이때 다항식 $Q(x)$의 상수항을 포함한 모든 항의 계수의 합은 $Q(1)$과 같으므로 ㉡의 양변에 $x=1$을 대입하면

$8=2Q(1)+6$

$\therefore Q(1)=1$

124 ······ 답 20

조건 (나)에서 삼차식 $f(x)$를 $(x+3)^2$으로 나누었을 때의 몫은 일차식이므로 $ax+b$ ($a\neq0$, b는 상수)라 하면

$f(x)=(x+3)^2(ax+b)+ax+b$ ······ ㉠

이때 조건 (가)에서 $f(-3)=2$이므로

$f(-3)=-3a+b=2$, $b=3a+2$

이를 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned}f(x)&=(x+3)^2(ax+3a+2)+ax+3a+2\\&=(x+3)^2\{a(x+3)+2\}+ax+3a+2\\&=a(x+3)^3+2(x+3)^2+ax+3a+2\end{aligned}$$ ······ ㉡

따라서 다항식 $f(x)$를 $(x+3)^3$으로 나누었을 때의 나머지는 $R(x)=2(x+3)^2+ax+3a+2$이다.

$R(0)=3a+20$, $R(-2)=a+4$이므로

$R(0)=R(-2)$에서

$3a+20=a+4$ $\quad\therefore a=-8$

이를 ㉡에 대입하면

$f(x)=-8(x+3)^3+2(x+3)^2-8x-22$

$\therefore f(-4)=20$

125 ········· 답 7

다항식 $f(x)$를 $(x-2)^2(x-1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 $R(x)$ ($R(x)$는 이차 이하의 다항식)이므로

$f(x)=(x-2)^2(x-1)Q(x)+R(x)$ ······ ㉠

이때 다항식 $f(x)$를 $(x-2)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $x+3$이므로 다항식 $R(x)$를 $(x-2)^2$으로 나누었을 때의 나머지는 $x+3$과 같다.

즉, $R(x)=a(x-2)^2+x+3$ (a는 상수) ······ ㉡

이를 ㉠에 대입하면

$f(x)=(x-2)^2(x-1)Q(x)+a(x-2)^2+x+3$

이때 다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 5이므로 나머지정리에 의하여

$f(1)=a+4=5,\ a=1$

따라서 ㉡에서 $R(x)=(x-2)^2+x+3$이므로

$R(3)=7$

126 ········· 답 ③

다항식 $f(x)$를 $(x^3+5)(x-1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)$ ($R(x)$는 삼차 이하의 다항식)라 하면

$f(x)=(x^3+5)(x-1)Q(x)+R(x)$ ······ ㉠

이때 다항식 $f(x)$를 x^3+5로 나누었을 때의 나머지가 x^2-2x이므로 다항식 $R(x)$를 x^3+5로 나누었을 때의 나머지는 x^2-2x와 같다.

즉, $R(x)=a(x^3+5)+x^2-2x$ (a는 상수)이므로

이를 ㉠에 대입하면

$f(x)=(x^3+5)(x-1)Q(x)+a(x^3+5)+x^2-2x$ ······ ㉡

한편, 다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 11이므로 나머지정리에 의하여 $f(1)=11$이다.

㉡의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=6a-1=11$이므로 $a=2$

따라서 $R(x)=2(x^3+5)+x^2-2x$이므로

$R(2)=26$

127 ········· 답 91

다항식 $(x-2)P(x)-x^2$을 $P(x)-x$로 나누었을 때의 나머지가 $P(x)-3x$이므로

나머지 $P(x)-3x$의 차수는 $P(x)-x$의 차수보다 낮아야 한다.

다항식 $P(x)$의 차수가 1이 아니면 $P(x)-x$의 차수와 $P(x)-3x$의 차수는 같아지므로 $P(x)$의 차수는 1이다.

$P(x)=ax+b$ ($a\neq0$, a, b는 실수)라 하자.

$P(x)-3x=(a-3)x+b$는 상수이므로 $a=3$

$P(x)=3x+b$에 대하여

$(x-2)P(x)-x^2=\{P(x)-x\}Q(x)+P(x)-3x$

위 식을 정리하면

$\{P(x)-x\}Q(x)=(x-2)P(x)-x^2-\{P(x)-3x\}$

$=\{P(x)-x\}(x-3)$

이므로 $Q(x)=x-3$

$P(x)$를 $Q(x)$, 즉 $x-3$으로 나눈 나머지는 10이므로 나머지정리에 의하여

$P(3)=9+b=10,\ b=1$

$P(x)=3x+1$

따라서 $P(30)=91$

128 ········· 답 (1) 253 (2) 3

(1) $x=253$이라 하고 x^{11}을 $x+1$로 나누었을 때의 나머지를 구하는 문제로 변형하자.

$f(x)=x^{11}$이라 하면 다항식 $f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는 나머지정리에 의하여 $f(-1)=-1$이므로

몫을 $Q(x)$라 하면

$x^{11}=(x+1)Q(x)-1$

다시 $x=253$을 대입하면

$253^{11}=254Q(253)-1$

$=254\{Q(253)-1\}+253$

따라서 구하는 나머지는 253이다.

(2) $x=8$이라 하고 $x^{100}+x^{99}+x^{98}+\cdots+x+1$을 $x-1$로 나누었을 때의 나머지를 구하는 문제로 변형하자.

$f(x)=x^{100}+x^{99}+x^{98}+\cdots+x+1$이라 하면

다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는 나머지정리에 의하여 $f(1)=1+1+\cdots+1=101$이므로

몫을 $Q(x)$라 하면

$x^{100}+x^{99}+x^{98}+\cdots+x+1=(x-1)Q(x)+101$

다시 $x=8$을 대입하면

$8^{100}+8^{99}+8^{98}+\cdots+8+1$

$=7Q(8)+101=7Q(8)+7\times14+3$

$=7\{Q(8)+14\}+3$

따라서 구하는 나머지는 3이다.

TIP

$5=3\times1+2$에서 5를 3으로 나누었을 때의 나머지는 2이고,

$7=3\times2+1$에서 7을 3으로 나누었을 때의 나머지는 1이다.

$5+7=(3\times1+2)+(3\times2+1)$에서

$5+7$을 3으로 나누었을 때의 나머지는

5와 7을 각각 3으로 나누었을 때의 나머지 2, 1을 합한 $2+1$을 3으로 나누었을 때의 나머지인 0과 같다.

$5\times7=(3\times1+2)\times(3\times2+1)$에서

5×7을 3으로 나누었을 때의 나머지는

5와 7을 각각 3으로 나누었을 때의 나머지 2, 1을 곱한 2×1을 3으로 나누었을 때의 나머지인 2와 같다.

이를 일반화하여

A, B, C, …를 각각 P로 나누었을 때의 나머지를 a, b, c, …라 하면

$A+B+C+\cdots$를 P로 나누었을 때의 나머지는 $a+b+c+\cdots$를 P로 나누었을 때의 나머지와 같고,

$A\times B\times C\times\cdots$를 P로 나누었을 때의 나머지는 $a\times b\times c\times\cdots$를 P로 나누었을 때의 나머지와 같다.

이를 이용하여 ⑵를 다음과 같이 생각할 수 있다.
8을 7로 나누었을 때의 나머지가 1이므로
8^2을 7로 나누었을 때의 나머지는 $1^2=1$,
8^3을 7로 나누었을 때의 나머지는 $1^3=1$,
⋮
8^n을 7로 나누었을 때의 나머지는 $1^n=1$이다.
(단, n은 자연수)
따라서 $8^{100}+8^{99}+8^{98}+\cdots+8+1$을 7로 나누었을 때의 나머지는
$1+1+1+\cdots+1=101$을 7로 나누었을 때의 나머지와 같으므로
$101=7\times14+3$에서 3이다.

129
답 ④

$x=100$이라 하면
$10^{39}=10\times(10^2)^{19}=10x^{19}$, $99\times101=(x-1)(x+1)$
이므로 $10x^{19}$을 $(x-1)(x+1)$로 나누었을 때의 나머지를 구하는 문제로 변형하자.
$10x^{19}$을 $(x-1)(x+1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면
$10x^{19}=(x-1)(x+1)Q(x)+ax+b$
이 등식은 x에 대한 항등식이므로 양변에
$x=1$을 대입하면 $10=a+b$ …… ㉠
$x=-1$을 대입하면 $-10=-a+b$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=10$, $b=0$이므로
$10x^{19}=(x-1)(x+1)Q(x)+10x$
다시 $x=100$을 대입하면
$10^{39}=99\times101\times Q(100)+1000$
따라서 구하는 나머지는 1000이다.

130
답 ②

다항식 $f(x)+2x$가 $x^2-6x+8=(x-2)(x-4)$로 나누어떨어지므로 인수 정리에 의하여
$f(2)+2\times2=0$, $f(2)=-4$ …… ㉠
$f(4)+2\times4=0$, $f(4)=-8$ …… ㉡
다항식 $(x+2)f(x+5)$를 x^2+4x+3으로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면
$$\begin{aligned}(x+2)f(x+5)&=(x^2+4x+3)Q(x)+ax+b\\&=(x+1)(x+3)Q(x)+ax+b\end{aligned}$$
양변에 $x=-1$을 대입하면
$f(4)=-a+b$, $-a+b=-8$ ($\because$ ㉡)
양변에 $x=-3$을 대입하면
$-f(2)=-3a+b$, $-3a+b=4$ ($\because$ ㉠)
두 식을 연립하여 풀면 $a=-6$, $b=-14$이므로
$R(x)=-6x-14$
$\therefore R(-4)=-6\times(-4)-14=10$

131
답 ③

$P(x)-2x$가 삼차식이고 $(x+2)^2$으로 나누어떨어지므로
$P(x)-2x=(x+2)^2(ax+b)$ ($a\neq0$, b는 상수)
$\therefore P(x)=(x+2)^2(ax+b)+2x$ …… ㉠
한편, 다항식 $1-P(x)$가 x^2+4x+3, 즉 $(x+1)(x+3)$으로 나누어떨어지므로
$1-P(-1)=0$에서 $P(-1)=1$
$1-P(-3)=0$에서 $P(-3)=1$
㉠에 $x=-1$을 대입하면
$P(-1)=-a+b-2=1$에서 $-a+b=3$ …… ㉡
㉠에 $x=-3$을 대입하면
$P(-3)=-3a+b-6=1$에서 $-3a+b=7$ …… ㉢
㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=1$이므로
$P(x)=(x+2)^2(-2x+1)+2x$
$\therefore P(2)=-44$

132
답 ④

$P(1)=1$, $P(2)=2$, $P(3)=3$에서
$P(1)-1=P(2)-2=P(3)-3=0$이다.
즉, 다항식 $P(x)-x$가 $x-1$, $x-2$, $x-3$으로 나누어떨어진다.
이때 다항식 $P(x)$는 최고차항의 계수가 -2인 삼차식이므로
다항식 $P(x)-x$도 최고차항의 계수가 -2인 삼차식이다.
$P(x)-x=-2(x-1)(x-2)(x-3)$
$\therefore P(x)=-2(x-1)(x-2)(x-3)+x$
따라서 구하는 다항식 $P(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지는 나머지정리에 의하여
$P(-2)=-2\times(-3)\times(-4)\times(-5)-2=118$

133
답 ④

조건 ㈎에서 다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지가 $\frac{1}{2}$이므로
나머지정리에 의하여
$f(1)=\frac{1}{2}$ …… ㉠
조건 ㈏에서 $4f(2)-3=0$, $f(3)=1$이므로
$f(2)=\frac{3}{4}$, $f(3)=1$ …… ㉡
$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차식이고 ㉠, ㉡에서
$f(1)-\frac{2}{4}=f(2)-\frac{3}{4}=f(3)-\frac{4}{4}=0$이므로 인수 정리에 의하여
다항식 $f(x)-\frac{x+1}{4}$은 $x-1$, $x-2$, $x-3$으로 나누어떨어진다.
$f(x)-\frac{x+1}{4}=(x-1)(x-2)(x-3)$
$\therefore f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)+\frac{x+1}{4}$
따라서 다항식 $f(x+3)$을 $x-4$로 나눈 나머지는
나머지정리에 의하여 $f(4+3)=f(7)$이므로
$f(7)=6\times5\times4+2=122$

134
답 풀이 참조

$f(1)-1=f(2)-2=f(3)-3=k$ (k는 상수)라 하면
$f(1)-1-k=0$, $f(2)-2-k=0$, $f(3)-3-k=0$이므로

인수 정리에 의하여

$f(x)-x-k=a(x-1)(x-2)(x-3)$ (a는 $a\neq0$인 상수)

$\therefore f(x)=a(x-1)(x-2)(x-3)+x+k$ ...... ㉠

한편, 다항식 $f(x)$를 $x(x+1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

나머지가 $-17x-10$이므로

$f(x)=x(x+1)Q(x)-17x-10$에서

$f(-1)=7$, $f(0)=-10$이다.

㉠에 $x=-1$을 대입하면

$f(-1)=-24a-1+k=7$

$-24a+k=8$ ...... ㉡

㉠에 $x=0$을 대입하면

$f(0)=-6a+k=-10$ ...... ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=-1$, $k=-16$이므로

$f(x)=-(x-1)(x-2)(x-3)+x-16$

$\therefore f(-2)=42$

채점 요소	배점
$f(-1)$, $f(0)$의 값 구하기	20 %
$f(x)$의 식 세우기	70 %
$f(-2)$의 값 구하기	10 %

135

답 8

$(x-6)f(x+1)=(x+3)f(x-2)$는 x에 대한 항등식이므로

양변에 $x=6$을 대입하면 $0=9f(4)$, $f(4)=0$

양변에 $x=-3$을 대입하면 $-9f(-2)=0$, $f(-2)=0$

양변에 $x=3$을 대입하면 $-3f(4)=6f(1)$, $f(1)=0$ ($\because f(4)=0$)

삼차식 $f(x)$가 $f(4)=f(-2)=f(1)=0$이므로

인수 정리에 의하여

$f(x)=a(x+2)(x-1)(x-4)$ (a는 $a\neq0$인 상수) ...... ㉠

이때 다항식 $f(x)$를 $x-3$으로 나눈 나머지가 10이므로

나머지정리에 의하여 $f(3)=10$이다.

$f(3)=a\times5\times2\times(-1)=10$, $a=-1$

이를 ㉠에 대입하면

$f(x)=-(x+2)(x-1)(x-4)$

$\therefore f(2)=-4\times1\times(-2)=8$

136

답 18

조건 (가)에서

$3P(x)+Q(x)=0$, 즉 $Q(x)=-3P(x)$이므로

$P(x)Q(x)=P(x)\times\{-3P(x)\}=-3\{P(x)\}^2$ ...... ㉠

조건 (나)에서

$P(x)Q(x)$는 x^2+x-6으로 나누어떨어지므로

나눈 몫을 $A(x)$라 하면

$P(x)Q(x)=(x^2+x-6)A(x)$

$-3\{P(x)\}^2=(x+3)(x-2)A(x)$ ($\because$ ㉠)

$\therefore \{P(x)\}^2=(x+3)(x-2)\left\{-\frac{1}{3}A(x)\right\}$

$P(x)$가 이차다항식이고 $\{P(x)\}^2$이 $(x+3)(x-2)$를 인수로 가지므로 $P(x)$도 $(x+3)(x-2)$를 인수로 가져야 한다.

$P(x)=a(x+3)(x-2)$(a는 $a\neq0$인 상수)

이때 $P(1)=4$이므로

$P(1)=a\times4\times(-1)=4$, $a=-1$

즉, $P(x)=-(x+3)(x-2)$,

$Q(x)=3(x+3)(x-2)$ ($\because Q(x)=-3P(x)$)

$\therefore Q(3)=3\times6\times1=18$

137

답 6

$f(x)=x^3+3x^2+ax+b$를 x^2+4x-4로 나눈 몫이 $Q(x)$,

나머지가 $R(x)$이므로

$x^3+3x^2+ax+b=(x^2+4x-4)Q(x)+R(x)$

$f(x)$가 삼차식, x^2+4x-4는 이차식이므로

$Q(x)$는 일차식, $R(x)$는 일차 이하의 식이다.

$f(x)=x^3+3x^2+ax+b$를 x^2+4x-4로 나누는 과정은 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|l}
 & x\ -1 \\ \hline
x^2+4x-4 & x^3+3x^2+\qquad ax+b \\
 & x^3+4x^2-\qquad 4x \\ \cline{2-2}
 & \quad -x^2+(a+4)x+b \\
 & \quad -x^2-\qquad 4x+4 \\ \cline{2-2}
 & \qquad (a+8)x+b-4
\end{array}$$

이를 식으로 나타내면

$x^3+3x^2+ax+b=(x^2+4x-4)(x-1)+(a+8)x+b-4$

이고, $Q(x)=x-1$, $R(x)=(a+8)x+b-4$이다.

주어진 조건에서 $R(3)=-4$이므로

$R(3)=3(a+8)+b-4=-4$에서 $3a+b=-24$ ...... ㉠

이때 $f(x)$가 $Q(x)$로 나누어떨어지므로 $f(1)=0$이다.

$f(1)=0$에서 $1+3+a+b=0$, $a+b=-4$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 두 식을 연립하면 $a=-10$, $b=6$

즉, $f(x)=x^3+3x^2-10x+6$이다.

$\therefore f(2)=2^3+3\times2^2-10\times2+6=6$

138

답 ④

주어진 조립제법 과정에서

삼차식 $f(x)$를 $x-\frac{1}{2}$로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라 하면 다항식 $Q_1(x)$를 $x-\frac{1}{2}$로 나누었을 때의 몫은 $4x-12$, 나머지는 -2이므로

$Q_1(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)(4x-12)-2$

이때 삼차식 $f(x)$를 $x-\frac{1}{2}$로 나누었을 때의 나머지는 6이므로

$$\begin{aligned}
f(x)&=\left(x-\frac{1}{2}\right)Q_1(x)+6\\
&=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left\{\left(x-\frac{1}{2}\right)(4x-12)-2\right\}+6\\
&=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2(4x-12)-2\left(x-\frac{1}{2}\right)+6\\
&=(2x-1)^2(x-3)-2x+7
\end{aligned}$$

따라서 $Q(x)=x-3$이고 $R(x)=-2x+7$이므로

$Q(1)+R(-1)=(-2)+9=7$

139 ······························ 답 8

다항식 $3x^3+2x^2-x+1$을 $x+1$로 나누는 조립제법을 연속으로 이용하면 다음과 같다.

-1	3	2	-1	1
		-3	1	0
-1	3	-1	0	$1=d$
		-3	4	
-1	3	-4	$4=c$	
		-3		
	$3=a$	$-7=b$		

따라서 조립제법의 결과를 이용하면

$3x^3+2x^2-x+1=(x+1)(3x^2-x)+1$

$=(x+1)\{(x+1)(3x-4)+4\}+1$

$=(x+1)[(x+1)\{3(x+1)-7\}+4]+1$

$=3(x+1)^3-7(x+1)^2+4(x+1)+1$

이므로 $a=3$, $b=-7$, $c=4$, $d=1$이다.

$\therefore\ 2a+b+2c+d=8$

다른 풀이

$3x^3+2x^2-x+1$

$=a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d$

$=a(x^3+3x^2+3x+1)+b(x^2+2x+1)+c(x+1)+d$

$=ax^3+(3a+b)x^2+(3a+2b+c)x+a+b+c+d$

이 등식은 x에 대한 항등식이므로 양변의 계수를 비교하면

$a=3$, $3a+b=2$, $3a+2b+c=-1$, $a+b+c+d=1$

따라서 $b=-7$, $c=4$, $d=1$이므로

$2a+b+2c+d=8$

140 ······························ 답 ④

$x=80$이라 하면

$2\times 3^{79}=2\times(3^4)^{19}\times 3^3=54\times(3^4)^{19}$

$=54\times 81^{19}=54(x+1)^{19}$ ······ TIP

이므로 $54(x+1)^{19}$을 x로 나누었을 때의 나머지를 구하는 문제로 변형하자.

$f(x)=54(x+1)^{19}$이라 하면

다항식 $f(x)$를 x로 나누었을 때의 나머지는 $f(0)=54$이므로

몫을 $Q(x)$라 하면

$54(x+1)^{19}=xQ(x)+54$

다시 $x=80$을 대입하면

$54\times 81^{19}=80Q(80)+54$

따라서 구하는 나머지는 54이다.

TIP

나머지정리를 이용하기 위해서 나누는 수를 x에 대한 일차식으로 변형하면 간단하게 풀 수 있다.
만약 $x=3$이라 하고 $2\times x^{79}$을 x^4-1로 나누었을 때의 나머지를 구하는 것으로 변형한다면 답을 구하는 것에 어려움이 있다.
따라서 위의 풀이와 같이 나누는 수인 80과 가장 차가 작은 $3^4=81$을 이용하여 식을 변형한다.

141 ······························ 답 999

$A_1=9+99+999$,

$A_2=9\times 99+99\times 999+999\times 9$,

$A_3=9\times 99\times 999$이므로

$(x+9)(x+99)(x+999)=x^3+A_1x^2+A_2x+A_3$

양변에 $x=1$을 대입하면

$10\times 100\times 1000=1+A_1+A_2+A_3$

$\therefore\ A_1+A_2+A_3=1000000-1=999999$

따라서 $A_1+A_2+A_3$을 1000으로 나누었을 때의 나머지는 999이다.

142 ······························ 답 ③

$f(55)$에서 $\frac{55}{5}-1=10$이므로

$f(x)=a\left(\frac{1}{5}x-1\right)^3+b\left(\frac{1}{5}x-1\right)^2+c\left(\frac{1}{5}x-1\right)+d$

(a, b, c, d는 상수)로 나타내면

$f(55)=a\times 10^3+b\times 10^2+c\times 10+d$로 값을 쉽게 구할 수 있다.

다항식 $x^3-14x^2+67x-105$를 $x-5$로 나누는 조립제법을 연속으로 이용하면 다음과 같다.

5	1	-14	67	-105
		5	-45	110
5	1	-9	22	5
		5	-20	
5	1	-4	2	
		5		
	1	1		

따라서

$f(x)=(x-5)^3+(x-5)^2+2(x-5)+5$

$=5^3\left(\frac{1}{5}x-1\right)^3+5^2\left(\frac{1}{5}x-1\right)^2+2\times 5\left(\frac{1}{5}x-1\right)+5$

$=125\left(\frac{1}{5}x-1\right)^3+25\left(\frac{1}{5}x-1\right)^2+10\left(\frac{1}{5}x-1\right)+5$

이고 양변에 $x=55$를 대입하면

$f(55)=125\times 10^3+25\times 10^2+10\times 10+5$

$=125000+2500+100+5$

$=127605$

따라서 $f(55)$의 값의 각 자리의 숫자의 합은

$1+2+7+6+0+5=21$

143 ······························ 답 풀이 참조

$f(x^2+x)=x^2f(x)+x(1+2x+3x^2)+1$ ······ ㉠

에서 다항식 $f(x)$가 n차식 (n은 자연수)일 때

$f(x^2+x)$의 최고차항은 x^{2n},

$x^2f(x)$의 최고차항은 x^{n+2}이므로

㉠에서 좌변의 최고차항은 x^{2n}이고

우변의 최고차항은 x^{n+2} 또는 x^3이다.

이때 자연수 n에 대하여 $x^{2n}=x^3$은 가능하지 않으므로

$x^{2n}=x^{n+2}$에서 $2n=n+2$, $n=2$

따라서 다항식 $f(x)$가 이차식이므로
$f(x)=ax^2+bx+c$ ($a\neq 0$, b, c는 상수)라 하면
㉠에서
$a(x^2+x)^2+b(x^2+x)+c$
$=x^2(ax^2+bx+c)+x(1+2x+3x^2)+1$
$ax^4+2ax^3+(a+b)x^2+bx+c$
$=ax^4+(b+3)x^3+(c+2)x^2+x+1$
이 등식은 x에 대한 항등식이므로 양변의 계수를 비교하면
$2a=b+3$, $a+b=c+2$, $b=1$, $c=1$
따라서 $a=2$, $b=1$, $c=1$이므로 $f(x)=2x^2+x+1$이다.
$\therefore f(2)=2\times 2^2+2+1=11$

채점 요소	배점
다항식 $f(x)$의 차수 구하기	30 %
다항식 $f(x)$ 구하기	60 %
$f(2)$의 값 구하기	10 %

144

답 13

$P(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차식이므로
$P(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수) …… ㉠
조건 (나)에서 $P(x)=x^3P\left(\frac{1}{x}\right)$이므로 ㉠을 대입하면
$$x^3+ax^2+bx+c=x^3\left\{\left(\frac{1}{x}\right)^3+a\left(\frac{1}{x}\right)^2+b\left(\frac{1}{x}\right)+c\right\}$$
$$=x^3\left(\frac{1}{x^3}+\frac{a}{x^2}+\frac{b}{x}+c\right)$$
$$=cx^3+bx^2+ax+1$$
이 등식은 x에 대한 항등식이므로 양변의 계수를 비교하면
$a=b$, $c=1$
이를 ㉠에 대입하면
$P(x)=x^3+ax^2+ax+1$ …… ㉡
조건 (가)에서 $P(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지는 -9이므로
나머지정리에 의하여 $P(2)=-9$이다.
$P(2)=2^3+a\times 2^2+a\times 2+1=-9$, $a=-3$
이를 ㉡에 대입하면
$P(x)=x^3-3x^2-3x+1$
다항식 $(x-2)P(x-3)$을 $x-1$로 나눈 나머지는
나머지정리에 의하여 $-P(-2)$이므로
$-P(-2)=-(-8-12+6+1)=13$

145

답 11

다항식 $x^n(x^2+ax+b)$를 $(x-3)^2$으로 나누었을 때의
몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 $3^n(x-3)$이므로
$x^n(x^2+ax+b)=(x-3)^2Q(x)+3^n(x-3)$ …… ㉠
㉠의 양변에 $x=3$을 대입하면
$3^n(9+3a+b)=0$에서 $3^n\neq 0$이므로
$b=-3a-9$ …… ㉡
㉡을 x^2+ax+b에 대입하면
$x^2+ax+b=x^2+ax-3a-9=(x-3)(x+a+3)$
이므로 ㉠에서
$x^n(x-3)(x+a+3)=(x-3)^2Q(x)+3^n(x-3)$
이 등식은 x에 대한 항등식이므로
$x^n(x+a+3)=(x-3)Q(x)+3^n$
양변에 $x=3$을 대입하면
$3^n(a+6)=3^n$에서 $3^n\neq 0$이므로
$a+6=1$ $\quad\therefore a=-5$
이를 ㉡에 대입하면 $b=6$
$\therefore b-a=6-(-5)=11$

146

답 ⑤

$$f\left(x+3-\frac{1}{x}\right)=x^3+x^2+3+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}$$
$$=\left(x^3-\frac{1}{x^3}\right)+\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+3$$
$$=\left\{\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\frac{1}{x}\right)\right\}+\left\{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2\right\}+3$$
$$=\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+3\left(x-\frac{1}{x}\right)+5$$
이때 $x-\frac{1}{x}=k$라 하면
$f(k+3)=k^3+k^2+3k+5$
$k+3=t$라 하면 $k=t-3$이므로
$f(t)=(t-3)^3+(t-3)^2+3(t-3)+5$
$=(t^3-9t^2+27t-27)+(t^2-6t+9)+(3t-9)+5$
$=t^3-8t^2+24t-22$
즉, $f(x)=x^3-8x^2+24x-22$이므로
$a=-8$, $b=24$, $c=-22$
$\therefore a+b-c=-8+24-(-22)=38$

147

답 ⑤

$\left(\frac{x}{2}+1\right)^8=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_8x^8$ …… ㉠
이 등식은 x에 대한 항등식이다.
ㄱ. ㉠의 양변에 $x=-2$를 대입하면
$0=a_0-2a_1+4a_2-\cdots+256a_8$ (참) …… ㉡
ㄴ. ㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면
$256=a_0+2a_1+4a_2+\cdots+256a_8$ …… ㉢
㉡과 ㉢을 변끼리 더하면
$256=2(a_0+4a_2+16a_4+64a_6+256a_8)$
$a_0+4a_2+16a_4+64a_6+256a_8=128$ …… ㉣
이때 $\left(\frac{x}{2}+1\right)^8$의 전개식에서
x^8의 계수는 $\frac{1}{2^8}$이므로 $a_8=\frac{1}{256}$
상수항은 1이므로 $a_0=1$
따라서 ㉣에서 $1+4a_2+16a_4+64a_6+1=128$이므로
$2a_2+8a_4+32a_6=63$ (참)
ㄷ. ㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면
$\left(\frac{3}{2}\right)^8=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_8$ …… ㉤
㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면
$\left(\frac{1}{2}\right)^8=a_0-a_1+a_2-\cdots+a_8$ …… ㉥

㉤에서 ㉥을 변끼리 빼면

$$\left(\frac{3}{2}\right)^8-\left(\frac{1}{2}\right)^8=2(a_1+a_3+a_5+a_7)$$

$$\begin{aligned}\therefore a_1+a_3+a_5+a_7&=\frac{3^8-1}{2^9}\\&=\frac{(3^4+1)(3^2+1)(3+1)(3-1)}{2^9}\\&=\frac{205}{16}\ (\text{참})\end{aligned}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

148

답 ①

x에 대한 항등식

$(x^3+x^2-2x)^6=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{18}x^{18}$에서 좌변은

$\{x(x^2+x-2)\}^6=x^6(x^2+x-2)^6$이므로

이 전개식에서 x에 대한 오차 이하의 항의 계수와 상수항은 모두 0이다.

따라서 $a_0=a_1=a_2=a_3=a_4=a_5=0$이므로

$(x^3+x^2-2x)^6=a_6x^6+a_7x^7+a_8x^8+\cdots+a_{18}x^{18}$ ...... ㉠

또한 $x^6(x^2+x-2)^6$의 전개식에서 x^6의 계수는

$(x^2+x-2)^6$의 전개식에서 상수항과 같으므로

$a_6=(-2)^6=64$

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=a_6+a_7+a_8+\cdots+a_{18}$ ...... ㉡

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$2^6=a_6-a_7+a_8-\cdots+a_{18}$ ...... ㉢

㉡과 ㉢을 변끼리 더하면

$2^6=2(a_6+a_8+a_{10}+\cdots+a_{18})$이므로

$a_6+a_8+a_{10}+\cdots+a_{18}=32$

$$\begin{aligned}\therefore\ & a_5+a_8+a_{10}+a_{12}+\cdots+a_{18}\\&=a_5+(a_6+a_8+a_{10}+a_{12}+\cdots+a_{18})-a_6\\&=0+32-64=-32\end{aligned}$$

149

답 ②

다항식 $f(x)$를 $(x-1)^3$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

나머지가 $-x^2+ax+b$이므로

$$\begin{aligned}f(x)&=(x-1)^3Q(x)-x^2+ax+b\\&=(x-1)^3Q(x)-(x-1)^2+(a-2)x+b+1 \quad\cdots\cdots ㉠\\&=(x-1)^3Q(x)-(x-1)^2+(a-2)(x-1)+a+b-1 \quad\cdots\cdots ㉡\end{aligned}$$

㉠에서 다항식 $f(x)$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 나머지는

$(a-2)x+b+1$이고,

㉡에서 다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는

$a+b-1$이다. ...... TIP

따라서 두 나머지의 합은

$$\begin{aligned}\{(a-2)x+b+1\}+(a+b-1)&=(a-2)x+a+2b\\&=2x-6\end{aligned}$$

이 등식은 x에 대한 항등식이므로 양변의 계수를 비교하면

$a-2=2,\ a+2b=-6$에서 $a=4,\ b=-5$

$\therefore ab=4\times(-5)=-20$

TIP

㉠에서

$(x-1)^3Q(x)-(x-1)^2+(a-2)x+b+1$

$=(x-1)^2\{(x-1)Q(x)-1\}+(a-2)x+b+1$

이므로 다항식 $f(x)$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 나머지는

$(a-2)x+b+1$이다.

또한, ㉡에서

$(x-1)^3Q(x)-(x-1)^2+(a-2)(x-1)+a+b-1$

$=(x-1)\{(x-1)^2Q(x)-(x-1)+(a-2)\}+a+b-1$

이므로 다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는

$a+b-1$이다.

150

답 8

두 다항식 x^3-4x+5, x^3-3x^2+5x-1을 $(x-a)(x-b)$로

나누었을 때의 몫을 각각 $Q_1(x)$, $Q_2(x)$라 하면

나머지가 모두 $R(x)$이므로

$x^3-4x+5=(x-a)(x-b)Q_1(x)+R(x)$ ...... ㉠

$x^3-3x^2+5x-1=(x-a)(x-b)Q_2(x)+R(x)$ ...... ㉡

㉠에서 ㉡을 변끼리 빼면

$3x^2-9x+6=(x-a)(x-b)\{Q_1(x)-Q_2(x)\}$

이때 $3x^2-9x+6=3(x-1)(x-2)$이므로

$Q_1(x)-Q_2(x)=3$이고, $a=1,\ b=2$ 또는 $a=2,\ b=1$이다.

따라서 ㉠에서

$x^3-4x+5=(x-1)(x-2)(x+3)+3x-1$이므로

다항식 x^3-4x+5를 $(x-1)(x-2)$로 나누었을 때의 몫은

$Q_1(x)=x+3$이고, 나머지는 $R(x)=3x-1$이다.

$\therefore R(a+b)=R(3)=8$

참고

다항식 x^3-3x^2+5x-1을 $(x-1)(x-2)$로 나누었을 때의

몫은 $Q_2(x)=x$이고, 나머지는 $R(x)=3x-1$이다.

151

답 ②

조건 (가)에서 다항식 x^3+3x^2+4x+2를 $f(x)$로 나누었을 때의 몫을

$Q_1(x)$라 하면 나머지가 $g(x)$이므로

$x^3+3x^2+4x+2=f(x)Q_1(x)+g(x)$ ...... ㉠

이때 $f(x)$가 이차식이므로 나머지인 $g(x)$는 일차 이하의

다항식이다.

조건 (나)에서 다항식 x^3+3x^2+4x+2를 $g(x)$로 나누었을 때의 몫을

$Q_2(x)$라 하면 나머지가 $f(x)-x^2-2x$이므로

$x^3+3x^2+4x+2=g(x)Q_2(x)+f(x)-x^2-2x$ ...... ㉡

이때 $g(x)$가 일차 이하의 다항식이므로 나머지인 $f(x)-x^2-2x$는

상수이다.

$f(x)=x^2+2x+a$ (a는 상수)라 하자. ...... ㉢

다항식 x^3+3x^2+4x+2를 $f(x)=x^2+2x+a$로 나누었을 때의

몫이 $x+1$이고, 나머지가 $(2-a)x+(2-a)$이므로

㉠에서 $g(x)=(2-a)(x+1)$이다.

따라서 ㉡에서

$x^3+3x^2+4x+2=(2-a)(x+1)Q_2(x)+a$

이 등식은 x에 대한 항등식이므로 양변에 $x=-1$을 대입하면

$a=0$

따라서 $g(x)=2(x+1)$이므로

$g(1)=4$

152

답 ④

ㄱ. 다항식 $P(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지는 R이므로 나머지정리에 의하여 $R=P(-2)$이다.
따라서 다항식 $P(x-1)$을 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는 나머지정리에 의하여
$P(-1-1)=P(-2)=R$이다. (참)

ㄴ. 다항식 $P(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 몫은 $Q(x)$, 나머지는 R이므로

$P(x)=(x+2)Q(x)+R$ …… ㉠

다항식 $Q(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라 하면 나머지가 $\frac{1}{R}$이므로

$Q(x)=(x+2)Q_1(x)+\frac{1}{R}$

이를 ㉠에 대입하면

$P(x)=(x+2)\left\{(x+2)Q_1(x)+\frac{1}{R}\right\}+R$

$=(x+2)^2Q_1(x)+\frac{1}{R}(x+2)+R$

양변에 x 대신 $x-1$을 대입하면

$P(x-1)=(x+1)^2Q_1(x-1)+\frac{1}{R}(x+1)+R$ …… ㉡

따라서 다항식 $P(x)$를 $(x+2)^2$으로 나누었을 때의 나머지는 $\frac{1}{R}(x+2)+R$이고, 다항식 $P(x-1)$을 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 나머지는 $\frac{1}{R}(x+1)+R$이므로 서로 다르다. (거짓)

ㄷ. $\{P(x-1)\}^2-R^2=\{P(x-1)-R\}\{P(x-1)+R\}$이다.
㉡에서

$P(x-1)-R=(x+1)^2Q_1(x-1)+\frac{1}{R}(x+1)$이므로

다항식 $P(x-1)-R$을 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 나머지는 $\frac{1}{R}(x+1)$이다.

또한 ㉡에서

$P(x-1)+R=(x+1)^2Q_1(x-1)+\frac{1}{R}(x+1)+2R$이므로

다항식 $P(x-1)+R$을 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 나머지는 $\frac{1}{R}(x+1)+2R$이다.

$\frac{1}{R}(x+1)\times\left\{\frac{1}{R}(x+1)+2R\right\}=\frac{1}{R^2}(x+1)^2+2(x+1)$

이므로 다항식 $\{P(x-1)\}^2-R^2$을 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 나머지는 $2(x+1)=2x+2$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

153

답 12

조건 ㈎에서 나머지정리에 의하여 $f(4)=14$ …… ㉠

조건 ㈏에서 다항식 $f(x)$를 $(x+1)(x-3)$으로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라 하면 나머지는 $-3x+1$이므로

$f(x)=(x+1)(x-3)Q_1(x)-3x+1$

양변에 $x-1$을 곱하면

$(x-1)f(x)=(x+1)(x-3)(x-1)Q_1(x)+(x-1)(-3x+1)$

이때 다항식 $(x-1)f(x)$를 $(x+1)(x-3)$으로 나누었을 때의 나머지는 다항식 $(x-1)(-3x+1)$을 $(x+1)(x-3)$, 즉 x^2-2x-3으로 나누었을 때의 나머지와 같으므로

$(x-1)(-3x+1)=-3x^2+4x-1$

$=-3(x^2-2x-3)-2x-10$

에서 나머지는 $-2x-10$이다.

즉, $(x-1)f(x)=(x+1)(x-3)Q(x)-2x-10$이므로

양변에 $x=4$를 대입하면

$3f(4)=5Q(4)-18$, $5Q(4)=3\times14+18=60$ ($\because$ ㉠)

$\therefore Q(4)=12$

154

답 4

조건 ㈎의 $P(x^2)=kx^3P(x+1)-2x^4+2x^2$에서

$P(x^2)=kx^3P(x+1)-2x^4+2x^2$

$=x^2\{kxP(x+1)-2x^2+2\}$

이고, 이 식이 x에 대한 항등식이므로

양변에 $x=0$을 대입하면 $P(0)=0$

양변에 $x=-1$을 대입하면

$P(1)=-kP(0)=0$ ($\because P(0)=0$)

양변에 $x=1$을 대입하면

$P(1)=kP(2)=0$, 즉 $P(2)=0$ ($\because P(1)=0$)

양변에 $x=\sqrt{2}$를 대입하면

$P(2)=2\{\sqrt{2}kP(\sqrt{2}+1)-2\}=0$ ($\because P(2)=0$)

따라서 $P(\sqrt{2}+1)=\frac{\sqrt{2}}{k}$이다. …… ㉠

이때 $P(0)=P(1)=P(2)=0$이고, $P(x)$는 최고차항의 계수가 양수 k이므로 3차 이상의 다항식이다.

$P(x)$가 n $(n\geq3)$차 다항식이라 하면 조건 ㈎의 식에서 좌변의 차수는 $2n$, 우변의 차수는 $n+3$이므로 $2n=n+3$에서 $n=3$이다.

$P(x)=kx(x-1)(x-2)$

양변에 $x=\sqrt{2}+1$을 대입하면

$P(\sqrt{2}+1)=k(\sqrt{2}+1)\times\sqrt{2}\times(\sqrt{2}-1)=\sqrt{2}k$

㉠에서 $\sqrt{2}k=\frac{\sqrt{2}}{k}$, $k^2=1$, $k=1$ ($\because k>0$)이므로

$P(x)=x(x-1)(x-2)$이다. …… ㉡

조건 ㈏에서 $P(x)+x^4-3x$를 다항식 $Q(x)$로 나누었을 때 몫을 $A(x)$라 하면 나머지가 이차식이므로 $Q(x)$는 삼차 이상의 다항식이다.

$x(x-1)(x-2)+x^4-3x=Q(x)A(x)+2x^2+x-8$

$x^4+x^3-3x^2-x=Q(x)A(x)+2x^2+x-8$

$x^4+x^3-5x^2-2x+8=Q(x)A(x)$

좌변에 $x=-2$를 대입하면

$(-2)^4+(-2)^3-5(-2)^2-2(-2)+8=0$
이므로 조립제법을 이용하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|rrrrr} -2 & 1 & 1 & -5 & -2 & 8 \\ & & -2 & 2 & 6 & -8 \\ \hline & 1 & -1 & -3 & 4 & \boxed{0} \end{array}$$

$(x+2)(x^3-x^2-3x+4)=Q(x)A(x)$
이때 $Q(-2)\neq0$이고 $Q(x)$가 최고차항의 계수가 -1인 삼차 이상의 다항식이므로 $Q(x)=-(x^3-x^2-3x+4)$이다.
$\therefore\ P(3)+Q(2)=3\times2\times1-(2^3-2^2-3\times2+4)$ ($\because$ ㉡)
$=6-2=4$

155 ··· 답 ④

조건 ㈎에서 $f(x)$를 $x+2$, x^2+4로 나눈 몫을 각각 $Q_1(x)$, $Q_2(x)$라 하면 나머지는 모두 $3p^2$이므로
$f(x)=(x+2)Q_1(x)+3p^2=(x^2+4)Q_2(x)+3p^2$ ······ ㉠
이때
$(x+2)Q_1(x)=(x^2+4)Q_2(x)$
에서 양변은 각각 최고차항의 계수가 1인 사차다항식이므로 $Q_1(x)$는 x^2+4를, $Q_2(x)$는 $x+2$를 인수로 가지고, 일차식의 계수가 1인 일차식을 공통인수로 갖는다. 따라서
$Q_1(x)=(x^2+4)(x+a)$, $Q_2(x)=(x+2)(x+a)$ (a는 상수)이고
㉠에서
$f(x)=(x+2)(x^2+4)(x+a)+3p^2$ ······ ㉡
조건 ㈏에서 $f(1)=f(-1)$이므로
$f(1)=3\times5\times(1+a)+3p^2=15(1+a)+3p^2$
$f(-1)=1\times5\times(-1+a)+3p^2=5(-1+a)+3p^2$
에서 $15(1+a)+3p^2=5(-1+a)+3p^2$
$3(1+a)=-1+a$, $a=-2$
이를 ㉡에 대입하면
$f(x)=(x+2)(x-2)(x^2+4)+3p^2$
$=(x^2-4)(x^2+4)+3p^2$
조건 ㈐에서 $x-\sqrt{p}$는 $f(x)$의 인수이므로 인수 정리에 의하여 $f(\sqrt{p})=0$이다.
$f(\sqrt{p})=(p-4)(p+4)+3p^2=0$, $4p^2-16=0$,
$(p+2)(p-2)=0$ $\quad\therefore\ p=2$ ($\because\ p>0$)

156 ··· 답 ④

조건 ㈎에서 나머지정리에 의하여 $P(2)=-1$
조건 ㈏에서 나머지정리에 의하여
$P(a)=a^3$, 즉 $P(a)-a^3=0$을 만족시키는
실수 a는 -1과 3뿐이므로 인수 정리에 의하여
상수 k에 대하여 다음과 같은 식을 세울 수 있다.
(i) $P(x)-x^3=k(x+1)(x-3)$인 경우
$P(x)=x^3+k(x+1)(x-3)$
즉, 삼차항의 계수는 1이므로 최고차항의 계수가 음수라는 조건에 모순이다.
(ii) $P(x)-x^3=k(x+1)^2(x-3)$인 경우
양변에 $x=2$를 대입하면
$P(2)-8=-9k$에서 $k=1$이므로
$P(x)=(x+1)^2(x-3)+x^3=2x^3-x^2-5x-3$
즉, 삼차항의 계수는 2이므로 조건에 맞지 않다.
(iii) $P(x)-x^3=k(x+1)(x-3)^2$인 경우
양변에 $x=2$를 대입하면
$P(2)-8=3k$에서 $k=-3$이므로
$P(x)=-3(x+1)(x-3)^2+x^3=-2x^3+15x^2-9x-27$
삼차항의 계수는 -2, 즉 음수이므로 조건을 만족한다.
(i)~(iii)에서 조건을 만족시키는 다항식 $P(x)$는
$P(x)=-2x^3+15x^2-9x-27$이므로
$P(1)=-23$

157 ··· 답 28

$P(4)=\frac{7}{4}$,
$P(3)=\frac{4}{3}P(4)=\frac{7}{3}$,
$P(2)=\frac{3}{2}P(3)=\frac{7}{2}$,
$P(1)=2P(2)=\frac{7}{1}$이므로
$n=1, 2, 3, 4$일 때, $P(n)=\frac{7}{n}$, 즉 $nP(n)-7=0$
이때 $xP(x)-7$은 사차식이므로 인수 정리에 의하여
$xP(x)-7=k(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ $(k\neq0)$
양변에 $x=0$을 대입하면 $-7=24k$에서 $k=-\frac{7}{24}$이므로
$xP(x)-7=-\frac{7}{24}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ ······ ㉠
한편, 다항식 $P(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는
나머지정리에 의하여 $P(-1)$이므로
㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면
$-P(-1)-7=-\frac{7}{24}\times(-2)\times(-3)\times(-4)\times(-5)$
$\therefore\ P(-1)=28$

158 ··· 답 13

조건 ㈎에서 $Q(1)=0$인 경우와 $Q(1)\neq0$인 경우로 나누어 생각할 수 있다.
(i) $Q(1)=0$인 경우
$Q(x)=a(x-1)$ $(a\neq0)$라 하면 조건 ㈏에 의하여
$P(x)=x^3-10x+13-\{Q(x)\}^2$
$=x^3-a^2x^2+(2a^2-10)x+13-a^2$ ······ ㉠
이다. 조건 ㈏에 의하여 $x^3-10x+13-P(x)$는 이차식이 되어야 하므로 $P(x)$는 최고차항의 계수가 1이고 이차식 x^2-3x+3을 인수로 가져야 한다.
$P(x)=(x^2-3x+3)(x-k)$ (k는 상수)
$=x^3+(-k-3)x^2+(3k+3)x-3k$ ······ ㉡
㉠과 ㉡에 의하여
$-a^2=-k-3$, $2a^2-10=3k+3$, $13-a^2=-3k$
하지만 이를 만족시키는 a와 k는 존재하지 않는다.
(ii) $Q(1)\neq0$인 경우
$P(x)$는 x^2-3x+3과 $x-1$을 인수로 가지고 조건 ㈏에 의하여

$x^3-10x+13-P(x)$는 이차식이 되어야 하므로
$P(x)$의 최고차항의 계수는 1이다.
$P(x)=(x^2-3x+3)(x-1)=x^3-4x^2+6x-3$
이고, 조건 (나)에 의하여
$$\begin{aligned}\{Q(x)\}^2&=x^3-10x+13-P(x)\\&=x^3-10x+13-(x^3-4x^2+6x-3)\\&=4x^2-16x+16\\&=(2x-4)^2\end{aligned}$$
이므로 $Q(x)=2x-4$ 또는 $Q(x)=-2x+4$이다.
이때 $Q(0)<0$이므로 $Q(x)=2x-4$이다.
(i), (ii)에 의하여 $P(2)+Q(8)=13$이다.

159
답 15

$P(x)$는 이차항의 계수가 1인 이차다항식이므로
$P(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수) …… ㉠
$Q(x)$는 일차항의 계수가 1인 일차다항식이므로
$Q(x)=x+c$ (c는 상수) …… ㉡
조건 (가)에서 $P(x^2-1)-2Q(x+1)$이 $x+1$로 나누어떨어지므로
인수 정리에 의하여 $P(0)-2Q(0)=0$이다.
㉠, ㉡에서 $P(0)=b$, $Q(0)=c$이므로
$P(0)-2Q(0)=b-2c=0$, $b=2c$
이를 ㉠에 대입하면
$P(x)=x^2+ax+2c$ …… ㉢
따라서
$$\begin{aligned}P(x)-2Q(x)&=(x^2+ax+2c)-2(x+c)\\&=x^2+(a-2)x\end{aligned}$$
조건 (나)에서 방정식 $P(x)-2Q(x)=0$이 중근을 가지므로
다항식 $P(x)-2Q(x)$는 완전제곱식이다.
$x^2+(a-2)x$가 완전제곱식이 되려면 일차항의 계수가 0이어야 하므로 $a=2$이고, 이를 ㉢에 대입하면
$P(x)=x^2+2x+2c$ …… ㉣
이때 다항식 $2P(x)+Q(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지가 13이므로
나머지정리에 의하여
$2P(2)+Q(2)=2(2^2+2\times2+2c)+(2+c)=13$
$5c=-5$, $c=-1$
이를 ㉡, ㉣에 각각 대입하면
$P(x)=x^2+2x-2$, $Q(x)=x-1$
$\therefore$ $P(3)+Q(3)=(3^2+2\times3-2)+(3-1)=15$

160
답 ②

다항식 $f(x)$를 n차식 (n은 자연수)이라 하면
$f(x+1)+x^4f\left(\frac{1}{x^2}\right)=5x^4-x^2+x+6$ …… ㉠
에서 $f\left(\frac{1}{x^2}\right)$은 $\frac{1}{x^{2n}}$항을 가진다.
이때 $n\ge3$이면 $x^4f\left(\frac{1}{x^2}\right)$에서
$x^4\times\frac{1}{x^{2n}}=\frac{1}{x^{2n-4}}$ ($\because$ $2n>4$)항이 생기므로
㉠은 항등식이 될 수 없다. …… TIP
따라서 $f(x)$는 이차 이하의 다항식이므로
$f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면
$$\begin{aligned}&f(x+1)+x^4f\left(\frac{1}{x^2}\right)\\&=a(x+1)^2+b(x+1)+c+x^4\left(\frac{a}{x^4}+\frac{b}{x^2}+c\right)\\&=cx^4+(a+b)x^2+(2a+b)x+2a+b+c\end{aligned}$$
이므로 ㉠에 의하여
$cx^4+(a+b)x^2+(2a+b)x+2a+b+c=5x^4-x^2+x+6$
이 등식은 x에 대한 항등식이므로 양변의 계수를 비교하면
$c=5$, $a+b=-1$, $2a+b=1$, $2a+b+c=6$에서
$a=2$, $b=-3$, $c=5$
따라서 $f(x)=2x^2-3x+5$이므로
$f(1)=4$

TIP

$n=3$인 경우, $f(x)$가 삼차식이면 $f(x+1)$도 삼차식이고
$x^4f\left(\frac{1}{x^2}\right)$은 $x^4\times\frac{1}{x^6}=\frac{1}{x^2}$항을 갖는다.
따라서 ㉠에서 좌변은 $\frac{1}{x^2}$항을 갖지만 우변은 $\frac{1}{x^2}$항을 갖지 않으므로 ㉠은 항등식이 될 수 없다.
마찬가지로 $n>3$인 경우, $x^4f\left(\frac{1}{x^2}\right)$은
$x^4\times\frac{1}{x^{2n}}=\frac{1}{x^{2n-4}}$ ($\because$ $2n>4$)항을 가지므로 ㉠은 항등식이 될 수 없다.

161
답 54

조건 (가)에서 $P(1)P(2)=0$이므로
$P(1)=0$ 또는 $P(2)=0$ …… ㉠
이고, 조건 (나)에서 다항식 $P(x)\{P(x)-6\}$은 $x(x-3)$으로 나누어떨어지므로 인수 정리에 의하여
$P(0)\{P(0)-6\}=0$, $P(3)\{P(3)-6\}=0$이다.
이를 만족시키는 경우는 다음과 같다.
(i) $P(0)=0$, $P(3)=6$일 때
㉠에서 $P(1)=0$인 경우 $P(0)=P(1)=0$이므로
이차식 $P(x)$를 $P(x)=ax(x-1)$(a는 $a\neq0$인 상수)이라 하자.
이때 $P(3)=6$이므로 $6a=6$, $a=1$에서 $P(x)=x(x-1)$
㉠에서 $P(2)=0$인 경우 $P(0)=P(2)=0$이므로
이차식 $P(x)$를 $P(x)=bx(x-2)$(b는 $b\neq0$인 상수)라 하자.
이때 $P(3)=6$이므로 $3b=6$, $b=2$에서 $P(x)=2x(x-2)$
(ii) $P(0)=6$, $P(3)=0$일 때
㉠에서 $P(1)=0$인 경우 $P(1)=P(3)=0$이므로
이차식 $P(x)$를 $P(x)=c(x-1)(x-3)$ (c는 $c\neq0$인 상수)이라 하자.
이때 $P(0)=6$이므로 $3c=6$, $c=2$에서
$P(x)=2(x-1)(x-3)$
㉠에서 $P(2)=0$인 경우 $P(2)=P(3)=0$이므로
이차식 $P(x)$를 $P(x)=d(x-2)(x-3)$ (d는 $d\neq0$인 상수)이라 하자.
이때 $P(0)=6$이므로 $6d=6$, $d=1$에서
$P(x)=(x-2)(x-3)$

(iii) $P(0)=6$, $P(3)=6$일 때
$P(0)=P(3)=6$이므로 이차식 $P(x)$를
$P(x)-6=ex(x-3)$ (e는 $e\neq0$인 상수)에서
$P(x)=ex(x-3)+6$이라 하자. …… ㉡
㉠에서 $P(1)=0$인 경우 ㉡에 대입하면
$P(1)=-2e+6=0$, $e=3$에서
$P(x)=3x(x-3)+6$
㉠에서 $P(2)=0$인 경우 ㉡에 대입하면
$P(2)=-2e+6=0$에서 $e=3$이므로 $P(1)=0$을 만족시키는 경우와 같다.
(iv) $P(0)=0$, $P(3)=0$일 때
$P(x)$는 이차식이므로 $P(0)=0$, $P(3)=0$일 때 ㉠에서
$P(1)=0$ 또는 $P(2)=0$을 만족시킬 수 없다.
(i)~(iv)에서 가능한 $P(x)$는 $x(x-1)$, $2x(x-2)$, $2(x-1)(x-3)$, $(x-2)(x-3)$, $3x(x-3)+6$이므로
$Q(x)=x(x-1)+2x(x-2)+2(x-1)(x-3)$
$+(x-2)(x-3)+3x(x-3)+6$
$\therefore Q(4)=4\times3+2\times4\times2+2\times3\times1+2\times1+3\times4\times1+6=54$

03 인수분해

162 ········ 답 풀이 참조

(1) $a^2+4a+4-b^2=(a+2)^2-b^2$
$=\{(a+2)+b\}\{(a+2)-b\}$
$=(a+b+2)(a-b+2)$
(2) $a^3+9a^2b+27ab^2+27b^3$
$=a^3+3\times a^2\times3b+3\times a\times(3b)^2+(3b)^3$
$=(a+3b)^3$
(3) $a^3+8b^3=a^3+(2b)^3=(a+2b)(a^2-2ab+4b^2)$
(4) $a^2+4b^2+c^2+4ab-4bc-2ca$
$=a^2+(2b)^2+(-c)^2+2(2ab-2bc-ca)$
$=(a+2b-c)^2$

163 ········ 답 ③

① $x^3y-9xy^3=xy(x^2-9y^2)=xy(x+3y)(x-3y)$
② $64x^3-48x^2+12x-1$
$=(4x)^3+3\times(4x)^2\times(-1)+3\times(4x)\times(-1)^2+(-1)^3$
$=(4x-1)^3$
③ $8a^3-b^3=(2a)^3-b^3$
$=(2a-b)(4a^2+2ab+b^2)$
④ $x^4-16y^4=(x^2+4y^2)(x^2-4y^2)$
$=(x^2+4y^2)(x+2y)(x-2y)$
⑤ $4a^2+b^2+9c^2+4ab+6bc+12ca$
$=(2a)^2+b^2+(3c)^2+2(2ab+3bc+6ca)$
$=(2a+b+3c)^2$
따라서 인수분해가 옳지 않은 것은 ③이다.

참고
인수분해 공식은 항등식이므로 우변을 각각 곱셈 공식으로 전개하여 좌변과 비교해서 풀 수도 있다.

164 ········ 답 ③

$2a^3+3a^2b-3ab^2-2b^3$
$=2(a^3-b^3)+3ab(a-b)$
$=2(a-b)(a^2+ab+b^2)+3ab(a-b)$
$=(a-b)(2a^2+5ab+2b^2)$
$=(a-b)(a+2b)(2a+b)$

165 ········ 답 32

주어진 식을 인수분해하면
$x^3-xy^2-x^2y+y^3=x^2(x-y)-y^2(x-y)$
$=(x^2-y^2)(x-y)$
$=(x-y)^2(x+y)$
이때 $x+y=4$, $xy=2$이므로

$(x-y)^2=(x+y)^2-4xy=4^2-8=8$
따라서 $(x-y)^2(x+y)=8\times4=32$이므로
구하는 값은 32이다.

166 ······ 답 ③

$a+b+c=0$이므로
$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$
$=0$

167 ······ 답 풀이 참조

(1) $x^2+3=X$라 하면
$(x^2+x+3)(x^2+2x+3)-2x^2$
$=(X+x)(X+2x)-2x^2$
$=X^2+3xX=X(X+3x)$
$=(x^2+3)(x^2+3x+3)$
(2) $x^2+2x=X$라 하면
$(x^2+2x-2)(x^2+2x+5)+12$
$=(X-2)(X+5)+12$
$=X^2+3X+2=(X+1)(X+2)$
$=(x^2+2x+1)(x^2+2x+2)$
$=(x+1)^2(x^2+2x+2)$
(3) $x^2-2x=X$라 하면
$(x^2-2x)^2-2x^2+4x-3$
$=(x^2-2x)^2-2(x^2-2x)-3$
$=X^2-2X-3=(X+1)(X-3)$
$=(x^2-2x+1)(x^2-2x-3)$
$=(x-1)^2(x+1)(x-3)$

168 ······ 답 ⑤

$(x-1)(x-2)(x+2)(x+3)-60$
$=\{(x-1)(x+2)\}\{(x-2)(x+3)\}-60$
$=(x^2+x-2)(x^2+x-6)-60$
이때 $x^2+x=X$라 하면
$(x^2+x-2)(x^2+x-6)-60$
$=(X-2)(X-6)-60$
$=X^2-8X-48=(X-12)(X+4)$
$=(x^2+x-12)(x^2+x+4)$
$=(x+4)(x-3)(x^2+x+4)$
따라서 주어진 다항식의 인수가 아닌 것은 ⑤이다.

TIP
$(x-3)(x^2+x+4)=x^3-2x^2+x-12$이므로
②의 식 x^3-2x^2+x-12는
다항식 $(x-1)(x-2)(x+2)(x+3)-60$의 인수이다.

169 ······ 답 14

$(x^2-4x+3)(x^2+6x+8)-56$
$=(x-1)(x-3)(x+2)(x+4)-56$
$=\{(x-1)(x+2)\}\{(x-3)(x+4)\}-56$
$=(x^2+x-2)(x^2+x-12)-56$
이때 $x^2+x=X$라 하면
$(x^2+x-2)(x^2+x-12)-56$
$=(X-2)(X-12)-56$
$=X^2-14X-32=(X-16)(X+2)$
$=(x^2+x-16)(x^2+x+2)$
a, b는 양수이므로 $a=16$, $b=2$이다.
$\therefore a-b=16-2=14$

170 ······ 답 ③

$x^4-2x^3+3x^2-2x+1=x^2\left(x^2-2x+3-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$
$=x^2\left\{\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-2\left(x+\frac{1}{x}\right)+3\right\}$
$=x^2\left[\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\right\}-2\left(x+\frac{1}{x}\right)+3\right]$
$=x^2\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\left(x+\frac{1}{x}\right)+1\right\}$
이때 $x+\frac{1}{x}=t$라 하면
$x^2\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\left(x+\frac{1}{x}\right)+1\right\}=x^2(t^2-2t+1)$
$=x^2(t-1)^2$
$=x^2\left(x+\frac{1}{x}-1\right)^2$
$=\left\{x\left(x+\frac{1}{x}-1\right)\right\}^2$
$=(x^2-x+1)^2$
따라서 주어진 다항식의 인수인 것은 ③이다.

171 ······ 답 풀이 참조

(1) $x^2=X$라 하면
$x^4-7x^2+12=X^2-7X+12$
$=(X-3)(X-4)$
$=(x^2-3)(x^2-4)$
$=(x^2-3)(x+2)(x-2)$ ······ ㉠
이므로 유리수 범위까지 인수분해하면
$x^4-7x^2+12=(x^2-3)(x+2)(x-2)$이다.
(2) ㉠에서 $x^2-3=(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$이므로
실수 범위까지 인수분해하면
$x^4-7x^2+12=(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})(x+2)(x-2)$이다.

172 ······ 답 ⑤

$x^4-6x^2y^2+y^4=(x^4-2x^2y^2+y^4)-4x^2y^2$
$=(x^2-y^2)^2-(2xy)^2$
$=(x^2+2xy-y^2)(x^2-2xy-y^2)$
따라서 주어진 다항식의 인수인 것은 ⑤이다.

173 ··· 답 풀이 참조

(1) $x^4+4=(x^4+4x^2+4)-4x^2$
$=(x^2+2)^2-(2x)^2$
$=\{(x^2+2)+2x\}\{(x^2+2)-2x\}$
$=(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$

(2) $x^4+7x^2+16=(x^4+8x^2+16)-x^2$
$=(x^2+4)^2-x^2$
$=(x^2+x+4)(x^2-x+4)$

174 ··· 답 ④

주어진 식을 x에 대한 내림차순으로 정리하여 인수분해하면
$x^2+3xy+2y^2-2x-y-3$
$=x^2+(3y-2)x+(2y^2-y-3)$
$=x^2+(3y-2)x+(y+1)(2y-3)$

$$\begin{array}{ccc} x & \times & y+1 \\ x & & 2y-3 \end{array}$$

$=(x+y+1)(x+2y-3)$
따라서 주어진 다항식의 인수인 것은 ④이다.

175 ··· 답 ①

주어진 식을 x에 대한 내림차순으로 정리하여 인수분해하면
$3x^2-2xy-y^2-7x-y+2$
$=3x^2-(2y+7)x-(y^2+y-2)$
$=3x^2-(2y+7)x-(y+2)(y-1)$

$$\begin{array}{ccc} 3x & \times & y-1 \\ x & & -(y+2) \end{array}$$

$=(3x+y-1)(x-y-2)$
$=(-3x-y+1)(-x+y+2)$
따라서 $a=-3$, $b=1$, $c=-1$, $d=1$이므로
$a-b+c-d=-3-1+(-1)-1=-6$

176 ··· 답 풀이 참조

(1) 주어진 식을 y에 대한 내림차순으로 정리하여 인수분해하면
$8x^3+4x^2y-4xy-3y^2+4y-1$
$=-3y^2+(4x^2-4x+4)y+8x^3-1$
$=-3y^2+(4x^2-4x+4)y+(2x-1)(4x^2+2x+1)$

$$\begin{array}{ccc} -3y & \times & 4x^2+2x+1 \\ y & & 2x-1 \end{array}$$

$=\{-3y+(4x^2+2x+1)\}\{y+(2x-1)\}$
$=(4x^2+2x-3y+1)(2x+y-1)$

(2) 주어진 식을 y에 대한 내림차순으로 정리하여 인수분해하면
$x^4+2x^2y-4x^2+y^2-4y-5$
$=y^2+(2x^2-4)y+x^4-4x^2-5$
$=y^2+(2x^2-4)y+(x^2+1)(x^2-5)$

$$\begin{array}{ccc} y & \times & x^2+1 \\ y & & x^2-5 \end{array}$$

$=\{y+(x^2+1)\}\{y+(x^2-5)\}$
$=(x^2+y+1)(x^2+y-5)$

177 ··· 답 ②

주어진 식을 a에 대한 내림차순으로 정리하여 인수분해하면
$a^2b-ab^2+b^2c-bc^2+c^2a-ca^2$
$=(b-c)a^2+(c^2-b^2)a+bc(b-c)$
$=(b-c)a^2-(b-c)(b+c)a+bc(b-c)$
$=(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}$
$=(b-c)(a-b)(a-c)$
$=(a-b)(b-c)(a-c)$

178 ··· 답 $(x+1)(x+3)(x-2)$

$f(x)=x^3+2x^2-5x-6$이라 하면
$f(-1)=-1+2+5-6=0$이므로
조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 2 & -5 & -6 \\ & & -1 & -1 & 6 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore\ x^3+2x^2-5x-6=(x+1)(x^2+x-6)$
$=(x+1)(x+3)(x-2)$

179 ··· 답 풀이 참조

(1) 다항식 $f(x)=x^3-2x^2+kx+12$가
$x-1$로 나누어떨어지므로 인수 정리에 의하여
$f(1)=1-2+k+12=0$
$\therefore\ k=-11$

(2) (1)에 의하여 $f(x)=x^3-2x^2-11x+12$이고
$f(1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -2 & -11 & 12 \\ & & 1 & -1 & -12 \\ \hline & 1 & -1 & -12 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore\ f(x)=(x-1)(x^2-x-12)$
$=(x-1)(x+3)(x-4)$

채점요소	배점
인수 정리를 이용하여 k의 값 구하기	30 %
조립제법을 이용하여 다항식 $f(x)$를 인수분해하기	70 %

180 ··· 답 ④

$f(x)=2x^4-7x^3-6x^2+7x+4$라 하면
$f(1)=2-7-6+7+4=0$,
$f(-1)=2+7-6-7+4=0$이므로
조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 2 & -7 & -6 & 7 & 4 \\ & & 2 & -5 & -11 & -4 \\ \hline -1 & 2 & -5 & -11 & -4 & \boxed{0} \\ & & -2 & 7 & 4 & \\ \hline & 2 & -7 & -4 & \boxed{0} & \end{array}$$

$2x^4-7x^3-6x^2+7x+4$
$=(x-1)(x+1)(2x^2-7x-4)$

$=(x-1)(x+1)(2x+1)(x-4)$
따라서 주어진 식의 인수가 아닌 것은
④ $x^2+5x+4=(x+1)(x+4)$이다.

181

답 (1) 729000 (2) 10000

(1) $x=89$라 하면
$89^3+3\times89^2+3\times89+1$
$=x^3+3x^2+3x+1$
$=(x+1)^3$
$=90^3=729000$
(2) $a=32$, $b=19$, $c=49$라 하면
$32^2+19^2+49^2+2(32\times19+19\times49+49\times32)$
$=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$
$=(a+b+c)^2$
$=(32+19+49)^2=100^2=10000$

182

답 ②

$x=999$라 하면
$999^3-1=x^3-1$
$999\times1000+1=x(x+1)+1$
$\qquad\qquad\quad=x^2+x+1$
이때 $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$이므로
$999^3-1=(999-1)(999^2+999+1)$
$\qquad\quad=998\times(999\times1000+1)$
따라서 구하는 몫은 998이다.

183

답 (1) 10 (2) 11

(1) $x=38$이라 하면
$38^3+7\times38^2-17\times38+9=x^3+7x^2-17x+9$
$f(x)=x^3+7x^2-17x+9$라 하면
$f(1)=1^3+7-17+9=0$이므로
조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 7 & -17 & 9 \\ & & 1 & 8 & -9 \\ \hline & 1 & 8 & -9 & \boxed{0} \end{array}$$

$x^3+7x^2-17x+9=(x-1)(x^2+8x-9)$
$\qquad\qquad\qquad\quad=(x-1)^2(x+9)$
다시 $x=38$을 대입하면
$38^3+7\times38^2-17\times38+9=37^2\times47$
에서 $a=37$, $b=47$
$\therefore b-a=47-37=10$
(2) $x=29$라 하면
$29^3+2\times29^2-5\times29-6=x^3+2x^2-5x-6$
$f(x)=x^3+2x^2-5x-6$이라 하면
$f(-1)=-1+2+5-6=0$이므로
조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 2 & -5 & -6 \\ & & -1 & -1 & 6 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & \boxed{0} \end{array}$$

$x^3+2x^2-5x-6=(x+1)(x^2+x-6)$
$\qquad\qquad\qquad=(x+1)(x+3)(x-2)$
다시 $x=29$를 대입하면
$29^3+2\times29^2-5\times29-6=30\times32\times27$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad=2^6\times3^4\times5$
에서 $a=6$, $b=4$, $c=1$
$\therefore a+b+c=6+4+1=11$

184

답 ④

직육면체 A, B, C, D의 부피는 각각 x^3, y^3, xy^2, x^2y이므로
직육면체 A, B, C, D를 각각 27개, 1개, 9개, 27개 사용하여
만든 정육면체의 부피는 $27x^3+y^3+9xy^2+27x^2y$이다.
이를 인수분해하면
$27x^3+27x^2y+9xy^2+y^3$
$=(3x)^3+3\times(3x)^2\times y+3\times(3x)\times y^2+y^3$
$=(3x+y)^3$
따라서 구하는 정육면체의 한 모서리의 길이는 $3x+y$이다.

185

답 ③

$a^3+b^3+c^3-3abc$에서 $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$이므로
$a^3+b^3+c^3-3abc=(\boxed{a+b})^3-3ab(a+b)+c^3-3abc$
$\qquad\qquad\qquad\quad=(\boxed{a+b})^3+c^3-3ab(a+b+c)$
이때 $(a+b)^3+c^3=\{(a+b)+c\}\{(a+b)^2-(a+b)c+c^2\}$이므로
$(\boxed{a+b})^3+c^3-3ab(a+b+c)$
$=(\boxed{a+b+c})\{(a+b)^2-(a+b)c+c^2\}-3ab(a+b+c)$
$=(\boxed{a+b+c})(a^2+2ab+b^2-ac-bc+c^2-3ab)$
$=(a+b+c)(\boxed{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca})$
따라서 $X=a+b$, $Y=a+b+c$,
$Z=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$이므로
$XY+Z=(a+b)(a+b+c)+(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$
$\qquad\quad=(a+b)^2+c(a+b)+(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$
$\qquad\quad=2a^2+2b^2+c^2+ab$

186

답 ②

다항식 $f(x)$를 x^3-1로 나누었을 때 몫을 $Q(x)$라 하면
나머지가 $R(x)$($R(x)$는 이차 이하의 다항식)이므로
$f(x)=(x^3-1)Q(x)+R(x)$에서
$f(x)=(x-1)(x^2+x+1)Q(x)+R(x)$ …… ㉠
다항식 $f(x)$를 x^2+x+1로 나누었을 때의 나머지가 $2x-5$이므로
$R(x)$를 x^2+x+1로 나눈 나머지도 $2x-5$이다.
즉, $R(x)=a(x^2+x+1)+2x-5$ (a는 상수) …… ㉡
이를 ㉠에 대입하면
$f(x)=(x-1)(x^2+x+1)Q(x)+a(x^2+x+1)+2x-5$
이때 다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 9이므로
나머지정리에 의하여 $f(1)=9$이다.
$3a-3=9$, $a=4$
이를 ㉡에 대입하면
$R(x)=4(x^2+x+1)+2x-5$

$\therefore\ R(2)=4(2^2+2+1)+4-5=27$

187 ······ 답 ④

다항식 $x^6+x^4-3x^3-x^2$을 다항식 $P(x)$로 나누면 몫은 $Q(x)$이고

나머지는 $-3x^3-2x^2$이므로

$x^6+x^4-3x^3-x^2=P(x)Q(x)-3x^3-2x^2$

$P(x)Q(x)=x^6+x^4+x^2$

$=x^2(x^4+x^2+1)$

$=x^2(x^2+x+1)(x^2-x+1)$ ······ ㉠

$x^6+x^4-3x^3-x^2$을 다항식 $P(x)$로 나눈 나머지가 삼차식이므로

$P(x)$는 사차 이상의 다항식이고, $Q(x)$는 이차 이하의 다항식이다.

이때 다항식 $Q(x-2)$를 $x-1$로 나눈 나머지가 3이므로

나머지정리에 의하여 $Q(-1)=3$이다.

㉠에서 이를 만족시키는 경우는

$Q(x)=x^2-x+1,\ P(x)=x^2(x^2+x+1)$

$\therefore\ P(1)+Q(3)=3+7=10$

188 ······ 답 ③

$f(x)=x^8$이라 하면 다항식 $f(x)$를 $x+\frac{1}{2}$로 나누었을 때의

나머지는 나머지정리에 의하여

$R_1=f\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)^8=\frac{1}{2^8}$

따라서 $x^8=\left(x+\frac{1}{2}\right)Q(x)+\frac{1}{2^8}$이므로

$x^8-\frac{1}{2^8}=\left(x+\frac{1}{2}\right)Q(x)$ ······ ㉠

㉠의 좌변을 인수분해하면

$x^8-\frac{1}{2^8}=\left(x^4+\frac{1}{2^4}\right)\left(x^4-\frac{1}{2^4}\right)$

$=\left(x^4+\frac{1}{2^4}\right)\left(x^2+\frac{1}{2^2}\right)\left(x^2-\frac{1}{2^2}\right)$

$=\left(x^4+\frac{1}{2^4}\right)\left(x^2+\frac{1}{2^2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)$

이므로 이를 ㉠에 대입하여 정리하면

$Q(x)=\left(x^4+\frac{1}{2^4}\right)\left(x^2+\frac{1}{2^2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)$

따라서 다항식 $Q(x)$를 $x+\frac{1}{2}$로 나누었을 때의 나머지는

나머지정리에 의하여

$R_2=Q\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^4}\right)\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}\right)\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)$

$=\frac{1}{2^3}\times\frac{1}{2}\times(-1)=-\frac{1}{2^4}$

$\therefore\ \frac{R_2}{R_1}=\left(-\frac{1}{2^4}\right)\div\frac{1}{2^8}=-2^4=-16$

189 ······ 답 ④

$x^{101}-1=(x-1)(x^{100}+x^{99}+x^{98}+\cdots+x+1)$이므로

다항식 $x^{101}-1$을 $x-1$로 나누었을 때의 몫은

$Q(x)=x^{100}+x^{99}+x^{98}+\cdots+x+1$

$x=1$을 대입하면

$Q(1)=1+1+1+\cdots+1=101$

$x=-1$을 대입하면

$Q(-1)=1-1+1-1+\cdots-1+1=1$

$\therefore\ Q(1)+Q(-1)=101+1=102$

190 ······ 답 450

다항식 $x^{50}-1$을 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$,

나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$x^{50}-1=(x-1)^2Q(x)+ax+b$ ······ ㉠

양변에 $x=1$을 대입하면 $0=a+b$ $\quad\therefore\ b=-a$ ······ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$x^{50}-1=(x-1)^2Q(x)+a(x-1)$

$=(x-1)\{(x-1)Q(x)+a\}$

이때 $x^{50}-1=(x-1)(x^{49}+x^{48}+x^{47}+\cdots+x+1)$이므로

$(x-1)(x^{49}+x^{48}+x^{47}+\cdots+x+1)=(x-1)\{(x-1)Q(x)+a\}$

양변을 $x-1$로 나누면

$x^{49}+x^{48}+x^{47}+\cdots+x+1=(x-1)Q(x)+a$

이 등식은 x에 대한 항등식이므로 양변에 $x=1$을 대입하면

$a=50,\ b=-50$ ($\because$ ㉡)에서 $R(x)=50x-50$이다.

$\therefore\ R(10)=450$

191 ······ 답 ④

$(x+2)(x+4)(x+6)(x+8)+k$

$=\{(x+2)(x+8)\}\{(x+4)(x+6)\}+k$

$=(x^2+10x+16)(x^2+10x+24)+k$

$x^2+10x+16=X$라 하면 ······ TIP

$(x^2+10x+16)(x^2+10x+24)+k=X(X+8)+k$

$=X^2+8X+k$

이때 X^2+8X+k가 x에 대한 이차식의 완전제곱 꼴로

인수분해되기 위해서는

$X^2+8X+k=(X+4)^2$을 만족시켜야 하므로

$k=16$

다시 $X=x^2+10x+16$을 대입하면

$(X+4)^2=(x^2+10x+20)^2$이므로

$f(x)=x^2+10x+20$

따라서 옳은 것은 ④이다.

TIP

$x^2+10x=X$라 하면

$(x^2+10x+16)(x^2+10x+24)+k$

$=(X+16)(X+24)+k=X^2+40X+384+k$

이때 $X^2+40X+384+k=(X+20)^2$을 만족시켜야 하므로

$384+k=400$에서 $k=16$임을 구할 수도 있으나,

본풀이와 같이 $x^2+10x+16=X$라 하면 큰 수의 곱셈 없이

좀 더 간단하게 풀 수 있다.

192 ······ 답 40

$x^2+x=X$라 하면

$(x^2+x)(x^2+x-4)+a(x^2+x)+12$

$=X(X-4)+aX+12$

$=X^2+(a-4)X+12$

이때 p, q는 자연수이고, $12=1\times12=2\times6=3\times4$이므로

$X^2+(a-4)X+12$

$=(X+1)(X+12)=(x^2+x+1)(x^2+x+12)$ …… ㉠

$=(X+2)(X+6)=(x^2+x+2)(x^2+x+6)$ …… ㉡

$=(X+3)(X+4)=(x^2+x+3)(x^2+x+4)$ …… ㉢

로 인수분해 할 수 있다.

㉠에서 $(X+1)(X+12)=X^2+13X+12$이므로

$a-4=13$, $a=17$

㉡에서 $(X+2)(X+6)=X^2+8X+12$이므로

$a-4=8$, $a=12$

㉢에서 $(X+3)(X+4)=X^2+7X+12$이므로

$a-4=7$, $a=11$

따라서 구하는 모든 실수 a의 값의 합은

$11+12+17=40$이다.

193 답 46

$(x-3)^4-5(x-3)^2+4$에서 $(x-3)^2=X$라 하면

$(x-3)^4-5(x-3)^2+4=X^2-5X+4=(X-1)(X-4)$

$=\{(x-3)^2-1^2\}\{(x-3)^2-2^2\}$

$=\{(x-4)(x-2)\}\{(x-5)(x-1)\}$

$=(x-1)(x-2)(x-4)(x-5)$

$\therefore\ a^2+b^2+c^2+d^2=1^2+2^2+4^2+5^2=46$

194 답 (1) -1 (2) -3

(1) 주어진 식을 x에 대한 내림차순으로 정리하면

$x^2+(ky-1)x-6y^2-7y-2$

$=x^2+(ky-1)x-(3y+2)(2y+1)$

이 식이 인수분해 되므로

$(2y+1)-(3y+2)=ky-1$이다.

양변의 y항의 계수를 비교하면 $k=-1$이다.

(2) 주어진 식을 x에 대한 내림차순으로 정리하면

$x^2+3xy+2y^2-2x-5y+k$

$=x^2+(3y-2)x+2y^2-5y+k$ …… ㉠

이 식이 인수분해되므로

$2y^2-5y+k=(2y+a)(y+b)$ (a, b는 상수) …… ㉡

라 하면 양변의 y항의 계수에서 $-5=a+2b$ …… ㉢

또한 ㉠에서

$x^2+(3y-2)x+2y^2-5y+k$

$=x^2+(3y-2)x+(2y+a)(y+b)$

$$\begin{array}{ccc} x & \times & 2y+a \\ x & & y+b \end{array}$$

$=(x+2y+a)(x+y+b)$

의 양변의 x항의 계수에서

$3y-2=(2y+a)+(y+b)$

$=3y+a+b$

이므로 $-2=a+b$ …… ㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-3$

$\therefore\ k=ab=-3$ ($\because$ ㉡)

195 답 ④

ㄱ. $a^2+b^2+c^2-2ab-2bc+2ca=(a-b+c)^2$

ㄴ. $(a+b)(b+c)(c+a)+abc$

$=(ab+ac+b^2+bc)(c+a)+abc$

$=abc+ac^2+b^2c+bc^2+a^2b+a^2c+ab^2+abc+abc$

이 식을 a에 대한 내림차순으로 정리하여 인수분해하면

$(b+c)a^2+(b^2+3bc+c^2)a+bc(b+c)$

$$\begin{array}{ccc} a & \times & b+c \\ (b+c)a & & bc \end{array}$$

$=\{a+(b+c)\}\{(b+c)a+bc\}$

$=(a+b+c)(ab+bc+ca)$

ㄷ. 주어진 식을 a에 대한 내림차순으로 정리하여 인수분해하면

$a^2(b+c)-b^2(a-c)+c^2(a-b)-abc$

$=(b+c)a^2-(b^2+bc-c^2)a+bc(b-c)$

$$\begin{array}{ccc} a & \times & -(b-c) \\ (b+c)a & & -bc \end{array}$$

$=\{a-(b-c)\}\{(b+c)a-bc\}$

$=(a-b+c)(ab-bc+ca)$

따라서 $a-b+c$를 인수로 갖는 것은 ㄱ, ㄷ이다.

196 답 -1

$f(x)=x^4-4x^3-x^2+16x-12$라 하면

$f(1)=1-4-1+16-12=0$

$f(2)=16-32-4+32-12=0$

이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

1	1	-4	-1	16	-12
		1	-3	-4	12
2	1	-3	-4	12	0
		2	-2	-12	
	1	-1	-6	0	

$x^4-4x^3-x^2+16x-12$

$=(x-1)(x-2)(x^2-x-6)$

$=(x-1)(x-2)(x+2)(x-3)$

따라서

$(x+k)(x-k)P(x)=(x+2)(x-2)(x-1)(x-3)$

에서 $k=2$ ($\because\ k>0$)이므로 $P(x)=(x-1)(x-3)$이다.

$\therefore\ P(2)=1\times(-1)=-1$

197 답 ①

$P(x)Q(x)=x^4+6x^3+9x^2-4x-12$에서

$P(1)Q(1)=1+6+9-4-12=0$

$P(-2)Q(-2)=16-48+36+8-12=0$

이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

1	1	6	9	-4	-12
		1	7	16	12
-2	1	7	16	12	0
		-2	-10	-12	
	1	5	6	0	

$P(x)Q(x)=(x-1)(x+2)(x^2+5x+6)$
$\qquad\qquad=(x-1)(x+3)(x+2)^2$
두 이차식 $f(x)$, $g(x)$가 모두 $x-k$로 나누어떨어지므로 $x-k$를 공통인수로 갖는다.
따라서 $k=-2$이고, 두 이차식은 각각 $x+2$를 인수로 갖는다.
이때 두 다항식의 최고차항의 계수가 모두 1이므로
두 다항식은 $(x+2)(x-1)$, $(x+2)(x+3)$이고
구하고자 하는 합은
$(x+2)(x-1)+(x+2)(x+3)$
$=(x+2)\{(x-1)+(x+3)\}$
$=(x+2)(2x+2)=2x^2+6x+4$

198 ······ 답 $3x-6$

$P(x)Q(x)=x^4-5x^3+9x^2-8x+4$에서
$P(2)Q(2)=16-40+36-16+4=0$
이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

2	1	-5	9	-8	4
		2	-6	6	-4
	1	-3	3	-2	0

$P(x)Q(x)=(x-2)(x^3-3x^2+3x-2)$
이고 $f(x)=x^3-3x^2+3x-2$라 할 때, $f(2)=0$이므로
다시 조립제법을 이용하여 인수분해하면

2	1	-3	3	-2
		2	-2	2
	1	-1	1	0

따라서
$P(x)Q(x)=(x-2)^2(x^2-x+1)$
이때 다항식 $P(x)$의 차수가 다항식 $Q(x)$의 차수보다 크고,
두 다항식이 모두 일차 이상이므로
$P(x)$는 삼차식이고 $Q(x)$는 일차식이다.
$P(x)=(x-2)(x^2-x+1)$, $Q(x)=x-2$
이때
$P(x)=(x-2)(x^2-x+1)$
$\qquad=(x-2)\{(x-2)(x+1)+3\}$
$\qquad=(x-2)^2(x+1)+3(x-2)$
이므로 다항식 $P(x)$를 $\{Q(x)\}^2=(x-2)^2$으로 나눈 나머지는
$3(x-2)$, 즉 $3x-6$이다.

199 ······ 답 ②

$x+2=t$라 하면
$(x+2)^3-3(x+2)^2-6x-4$
$=(x+2)^3-3(x+2)^2-6(x+2)+8$
$=t^3-3t^2-6t+8$
이때 $f(t)=t^3-3t^2-6t+8$이라 하면
$f(1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

1	1	-3	-6	8
		1	-2	-8
	1	-2	-8	0

$t^3-3t^2-6t+8=(t-1)(t^2-2t-8)$
$\qquad\qquad\qquad=(t-1)(t+2)(t-4)$
$\qquad\qquad\qquad=(x+1)(x+4)(x-2)$ $(\because t=x+2)$
따라서 $a=-2$, $b=1$, $c=4$이다. $(\because a<b<c)$
$\therefore a+2b+3c=-2+2\times1+3\times4=12$

200 ······ 답 5

다항식 x^4+ax^2+b가 $(x-1)^2$을 인수로 가지므로
다항식 x^4+ax^2+b는 $x-1$로 나누어떨어진다.
$f(x)=x^4+ax^2+b$라 하면 인수 정리에 의하여
$f(1)=1+a+b=0$에서 $b=-a-1$ ······ ㉠
$f(x)=x^4+ax^2-a-1$
$\qquad=(x^2+a+1)(x^2-1)$
$\qquad=(x^2+a+1)(x+1)(x-1)$
이때 $f(x)$가 $(x-1)^2$을 인수로 가져야 하므로
x^2+a+1이 $x-1$을 인수로 가져야 한다.
따라서 $g(x)=x^2+a+1$이라 하면
인수 정리에 의하여 $g(1)=1+a+1=0$이므로
$a=-2$, $b=1$ ($\because$ ㉠)
$\therefore a^2+b^2=5$

다른 풀이

다항식 x^4+ax^2+b가 $(x-1)^2$을 인수로 가지므로
다항식 x^4+ax^2+b는 $x-1$로 나누어떨어진다.
그때의 몫을 $Q(x)$라 하면
$x^4+ax^2+b=(x-1)Q(x)$
이때 다항식 x^4+ax^2+b가 $(x-1)^2$을 인수로 가지므로
다항식 $Q(x)$도 $x-1$로 나누어떨어진다.
따라서 이를 조립제법을 이용하여 나타내면

1	1	0	a	0	b
		1	1	$a+1$	$a+1$
1	1	1	$a+1$	$a+1$	$a+b+1=0$
		1	2	$a+3$	
	1	2	$a+3$	$2a+4=0$	

$2a+4=0$에서 $a=-2$이므로 $a+b+1=0$에서 $b=1$
$\therefore a^2+b^2=5$

201 ······ 답 240

$x=19$, $y=11$이라 하면
$\dfrac{19^6-11^6}{19^4+19^2\times11^2+11^4}=\dfrac{x^6-y^6}{x^4+x^2y^2+y^4}$
$=\dfrac{(x^2-y^2)(x^4+x^2y^2+y^4)}{x^4+x^2y^2+y^4}$
$=x^2-y^2$
$=(x-y)(x+y)$
$=(19-11)\times(19+11)$
$=8\times30$
$=240$

202 ······ 답 ④

$x=90$이라 하면

$$\frac{90^4+90^2+1}{90\times91+1}=\frac{x^4+x^2+1}{x(x+1)+1}$$
$$=\frac{(x^2-x+1)(x^2+x+1)}{x^2+x+1} \quad \cdots\cdots \text{TIP}$$
$$=x^2-x+1$$
$$=90^2-90+1$$
$$=8011$$

TIP

$$x^4+x^2+1=(x^4+2x^2+1)-x^2=(x^2+1)^2-x^2$$
$$=\{(x^2+1)-x\}\{(x^2+1)+x\}$$
$$=(x^2-x+1)(x^2+x+1)$$

203

답 ②

$x=2+\sqrt{6}$에서 $x-2=\sqrt{6}$이므로

양변을 제곱하면 $x^2-4x+4=6$

$\therefore x^2-4x=2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이때 $\dfrac{x^3-5x^2+5x-1}{x^3-5x^2+4x}$에서

$f(x)=x^3-5x^2+5x-1$이라 하면

$f(1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -5 & 5 & -1 \\ & & 1 & -4 & 1 \\ \hline & 1 & -4 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-1)(x^2-4x+1)$

또한 분모를 인수분해하면

$x^3-5x^2+4x=x(x^2-5x+4)$

$=x(x-1)(x-4)$

$$\therefore \frac{x^3-5x^2+5x-1}{x^3-5x^2+4x}=\frac{(x-1)(x^2-4x+1)}{x(x-1)(x-4)}$$
$$=\frac{x^2-4x+1}{x^2-4x}=\frac{3}{2}\ (\because ㉠)$$

다른 풀이

$x=2+\sqrt{6}$에서 $x-2=\sqrt{6}$이므로 양변을 제곱하면

$x^2-4x+4=6$ $\quad\therefore x^2-4x-2=0$

$\dfrac{x^3-5x^2+5x-1}{x^3-5x^2+4x}$의 분자와 분모를 각각 x^2-4x-2로 나누었을 때의 몫은 모두 $x-1$이고, 나머지는 각각 $3x-3$, $2x-2$이므로

$$\frac{x^3-5x^2+5x-1}{x^3-5x^2+4x}=\frac{(x^2-4x-2)(x-1)+3x-3}{(x^2-4x-2)(x-1)+2x-2}$$
$$=\frac{0+3(x-1)}{0+2(x-1)}\ (\because x^2-4x-2=0)$$
$$=\frac{3}{2}$$

204

답 8

$x=1234$라 하면

$$\frac{1234^3-1234^2-3\times1234+2}{1234^2+1233}=\frac{x^3-x^2-3x+2}{x^2+x-1} \quad\cdots\cdots ㉠$$

이때 $f(x)=x^3-x^2-3x+2$라 하면

$f(2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -1 & -3 & 2 \\ & & 2 & 2 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-2)(x^2+x-1)$

㉠에서

$$\frac{x^3-x^2-3x+2}{x^2+x-1}=\frac{(x-2)(x^2+x-1)}{x^2+x-1}$$
$$=x-2$$
$$=1234-2$$
$$=1232$$

따라서 구하는 합은 $1+2+3+2=8$이다.

205

답 ④

$2^{12}-1=(2^6+1)(2^6-1)$

$=(2^6+1)(2^3+1)(2^3-1)$

$=65\times9\times7$

$=3^2\times5\times7\times13$

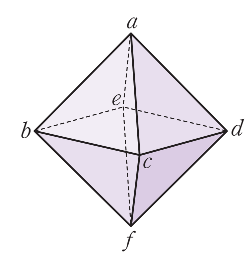
따라서 $2^{12}-1$을 나누어떨어지도록 하는 30보다 크고 40보다 작은 자연수는 $5\times7=35$, $3\times13=39$이므로 그 합은

$35+39=74$

206

답 19

다음과 같이 여섯 개의 꼭짓점에 적힌 자연수를 각각 a, b, c, d, e, f라 하자.



여덟 개의 면에 적힌 수는 각각의 삼각형의 꼭짓점에 적힌 세 수의 곱이고, 적힌 수들의 합이 165이므로

$abc+acd+ade+abe+fbc+fcd+fde+fbe=165$

좌변을 정리하면

$a(bc+cd+de+be)+f(bc+cd+de+be)$

$=(a+f)(bc+cd+de+be)$

$=(a+f)\{b(c+e)+d(c+e)\}$

$=(a+f)(c+e)(b+d)$

a, b, c, d, e, f는 모두 자연수이므로

$a+f$, $c+e$, $b+d$는 모두 2 이상의 자연수이다.

$165=3\times5\times11$이므로 구하는 값은

$a+b+c+d+e+f=3+5+11=19$

207

답 ③

$ab(a+b)=bc(b+c)+ca(c-a)$에서

$ab(a+b)-bc(b+c)-ca(c-a)=0$이므로

좌변을 전개하여 a에 대한 내림차순으로 정리한 후 인수분해하면

$ab(a+b)-bc(b+c)-ca(c-a)$
$=a^2b+ab^2-b^2c-bc^2-c^2a+ca^2$
$=(b+c)a^2+(b^2-c^2)a-bc(b+c)$
$=(b+c)\{a^2+(b-c)a-bc\}$

$$\begin{array}{ccc} a & \times & b \\ a & & -c \end{array}$$

$=(b+c)(a+b)(a-c)=0$
이때 $a+b\neq0$, $b+c\neq0$이므로 ($\because$ $a>0$, $b>0$, $c>0$)
$a-c=0$에서 $a=c$이다.
따라서 주어진 삼각형은 $a=c$인 이등변삼각형이다.

208

답 풀이 참조

조건 (가)에서 $a^3-ab^2-b^2c+a^2c+ac^2+c^3=0$이고
좌변을 인수분해하면
$a^3-ab^2-b^2c+a^2c+ac^2+c^3$
$=a^3+c^3-b^2(a+c)+ac(a+c)$
$=(a+c)(a^2-ac+c^2)-b^2(a+c)+ac(a+c)$
$=(a+c)\{(a^2-ac+c^2)-b^2+ac\}$
$=(a+c)(a^2+c^2-b^2)=0$
a, b, c는 양수이므로 $a+c>0$에서
$a^2+c^2=b^2$ …… ㉠
따라서 삼각형 ABC는 빗변의 길이가 b인 직각삼각형이다.
이때 삼각형 ABC의 넓이가 2이므로
$\frac{1}{2}ac=2$, $ac=4$ …… ㉡
조건 (나)에서 $a+c=\frac{3}{5}\sqrt{5}b$이고 양변을 각각 제곱하면
$a^2+2ac+c^2=\frac{9}{5}b^2$
$b^2+8=\frac{9}{5}b^2$ ($\because$ ㉠, ㉡)
$5b^2+40=9b^2$, $4b^2=40$, $b^2=10$ $\quad\therefore b=\sqrt{10}$ ($\because$ $b>0$)
이를 조건 (나)의 식에 대입하면
$a+c=\frac{3}{5}\sqrt{5}\times\sqrt{10}=3\sqrt{2}$
따라서 삼각형 ABC의 둘레의 길이는
$(a+c)+b=3\sqrt{2}+\sqrt{10}$이다.

채점 요소	배점
조건 (가)로 삼각형 ABC는 빗변의 길이가 b인 직각삼각형임을 구하기	40 %
조건 (나)와 삼각형의 넓이를 이용하여 b의 값 구하기	40 %
삼각형 ABC의 둘레의 길이 구하기	20 %

209

답 ⑤

부피가 $(x^3+3x^2-9x+5)\pi$인 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 $r(x)$, 높이를 $h(x)$라 하면
$(x^3+3x^2-9x+5)\pi=\pi\{r(x)\}^2h(x)$
$\therefore x^3+3x^2-9x+5=\{r(x)\}^2h(x)$ …… ㉠
이때 $f(x)=x^3+3x^2-9x+5$라 하면
$f(1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 3 & -9 & 5 \\ & & 1 & 4 & -5 \\ \hline & 1 & 4 & -5 & \boxed{0} \end{array}$$

$x^3+3x^2-9x+5=(x-1)(x^2+4x-5)$
$=(x-1)(x-1)(x+5)$
$=(x-1)^2(x+5)$
㉠에서 $r(x)=x-1$, $h(x)=x+5$
따라서 구하는 원기둥의 겉넓이는
$2\times\pi(x-1)^2+2\pi(x-1)\times(x+5)$
$=2\pi(x-1)\{(x-1)+(x+5)\}$
$=2\pi(x-1)(2x+4)$
$=4\pi(x-1)(x+2)$

210

답 ①

한 모서리의 길이가 x인 정육면체의 부피는 x^3이고,
[그림 1]에서 높이 방향으로 구멍을 뚫은 부분은
가로의 길이, 세로의 길이, 높이가 각각
y, y, x인 직육면체 모양이므로
그 부피는 $y\times y\times x=xy^2$이다.
마찬가지로 [그림 2]에서 각 면에 뚫은 구멍의 부피도 모두 xy^2이다.
이때 뚫은 세 개의 구멍에서 겹치는 부분은
한 모서리의 길이가 y인 정육면체 모양이므로 그 부피는 y^3이다.
따라서 구하는 [그림 2]의 입체의 부피는
$x^3-3xy^2+2y^3=x^3-y^3-3xy^2+3y^3$ …… TIP
$=(x-y)(x^2+xy+y^2)-3y^2(x-y)$
$=(x-y)(x^2+xy-2y^2)$
$=(x-y)(x-y)(x+2y)$
$=(x-y)^2(x+2y)$

다른 풀이

본 풀이에서 구한 [그림 2]의 입체의 부피 $x^3-3xy^2+2y^3$을
다음과 같이 인수분해할 수도 있다.
$x^3-3xy^2+2y^3$을 x에 대한 식으로 보자.
$f(x)=x^3-3y^2x+2y^3$이라 하면
$f(y)=y^3-3y^3+2y^3=0$이므로
조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} y & 1 & 0 & -3y^2 & 2y^3 \\ & & y & y^2 & -2y^3 \\ \hline & 1 & y & -2y^2 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore x^3-3xy^2+2y^3=(x-y)(x^2+xy-2y^2)$
$=(x-y)(x-y)(x+2y)$
$=(x-y)^2(x+2y)$

TIP

부피가 x^3인 정육면체에서
부피가 xy^2인 3개의 직육면체의 부피를 빼면
부피가 y^3인 정육면체의 부피가 3번 중복하여 빠진다.
따라서 [그림 2]의 입체의 부피를 구하기 위해선
부피가 y^3인 정육면체의 부피를 다시 2번 더해야 한다.
따라서 [그림 2]의 입체의 부피는
$x^3-3\times xy^2+2\times y^2=x^3-3xy^2+2y^3$이다.

211 ······························· 답 풀이 참조

(1) 자연수 n부터 연속하는 네 자연수의 곱에 1을 더한 수를 식으로 나타내면 $n(n+1)(n+2)(n+3)+1$이다.
이를 인수분해하면
$n(n+1)(n+2)(n+3)+1$
$=\{n(n+3)\}\{(n+1)(n+2)\}+1$
$=(n^2+3n)(n^2+3n+2)+1$
$n^2+3n=X$라 하면
$(n^2+3n)(n^2+3n+2)+1$
$=X(X+2)+1=(X+1)^2=(n^2+3n+1)^2$
이때 n^2+3n+1은 자연수이므로
모든 연속하는 네 자연수의 곱에 1을 더한 수는
어떤 자연수의 제곱이 된다.

(2) (1)에서 $n(n+1)(n+2)(n+3)+1=(n^2+3n+1)^2$이 성립하므로 $n=11$일 때
$\sqrt{11\times12\times13\times14+1}=\sqrt{(11^2+3\times11+1)^2}$
$=121+33+1=155$

채점 요소	배점
$n(n+1)(n+2)(n+3)+1$로 식 세우기	30 %
$(n^2+3n+1)^2$으로 인수분해하기	50 %
$\sqrt{11\times12\times13\times14+1}$의 값 구하기	20 %

212 ······························· 답 8

주어진 조건에 의하여 다항식 x^3+ax^2+bx+3이
$x^3+ax^2+bx+3=(x+p)(x+q)(x+r)$ (p, q, r은 정수)과 같이 인수분해 되어야 하고, $pqr=3$이어야 하므로
다음과 같이 경우를 나누어 생각할 수 있다.

(i) $(x+1)(x+1)(x+3)$으로 인수분해 되는 경우
$(x+1)^2(x+3)=x^3+5x^2+7x+3$에서
$a=5$, $b=7$이므로
$a+b=12$

(ii) $(x+1)(x-1)(x-3)$으로 인수분해 되는 경우
$(x+1)(x-1)(x-3)=x^3-3x^2-x+3$에서
$a=-3$, $b=-1$이므로
$a+b=-4$

(iii) $(x-1)(x-1)(x+3)$으로 인수분해 되는 경우
$(x-1)^2(x+3)=x^3+x^2-5x+3$에서
$a=1$, $b=-5$이므로
$a+b=-4$

(i)~(iii)에서 $a+b$의 최댓값은 $M=12$, 최솟값은 $m=-4$이므로
$M+m=8$

213 ······························· 답 96

다항식 $x^3-(1-6ab)x+n$이 $x-1$을 인수로 가지므로
$f(x)=x^3-(1-6ab)x+n$이라 할 때
인수 정리에 의하여 $f(1)=0$이다.
조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & 6ab-1 & n \\ & & 1 & 1 & 6ab \\ \hline & 1 & 1 & 6ab & n+6ab=0 \end{array}$$

따라서 $n=-6ab$이고 n이 100 이하의 자연수이므로
$-6ab\le100$, $ab\ge-\frac{50}{3}$ ······ ㉠
$x^3-(1-6ab)x+n=(x-1)(x^2+x+6ab)$
이때 $(x-1)(x^2+x+6ab)=(x-1)(x-2a)(x-3b)$
로 인수분해 되는 경우는
$-2a-3b=1$에서 $2a+3b=-1$ ······ ㉡
을 만족시킬 때이다.
㉠, ㉡을 만족시키는 a, b의 값을 찾아보면
$a=4$, $b=-3$일 때, $2\times4+3\times(-3)=-1$이고
$ab=-12\ge-\frac{50}{3}$
$a=1$, $b=-1$일 때, $2\times1+3\times(-1)=-1$이고
$ab=-1\ge-\frac{50}{3}$
$a=-2$, $b=1$일 때, $2\times(-2)+3\times1=-1$이고
$ab=-2\ge-\frac{50}{3}$
$a=-5$, $b=3$일 때, $2\times(-5)+3\times3=-1$이고
$ab=-15\ge-\frac{50}{3}$
따라서 n의 최솟값은 $ab=-1$일 때, $n=-6\times(-1)=6$이고
최댓값은 $ab=-15$일 때, $n=-6\times(-15)=90$이므로
구하는 값은 $6+90=96$이다.

214 ······························· 답 ②

$(k^3+2k^2+3k+2)\div(k^2+4k+3)$의 값이 정수이므로
$\frac{k^3+2k^2+3k+2}{k^2+4k+3}$가 정수이다. ······ ㉠
$f(k)=k^3+2k^2+3k+2$라 하면 $f(-1)=-1+2-3+2=0$이므로
조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ & & -1 & -1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}$$

$k^3+2k^2+3k+2=(k+1)(k^2+k+2)$이고, 이를 ㉠에 다시 대입하면
$$\frac{k^3+2k^2+3k+2}{k^2+4k+3}=\frac{(k+1)(k^2+k+2)}{(k+3)(k+1)}$$
$$=\frac{k^2+k+2}{k+3}$$
$$=\frac{(k+3)(k-2)+8}{k+3}$$
$$=k-2+\frac{8}{k+3}$$
k는 정수이므로 $k-2+\frac{8}{k+3}$이 정수이려면
$\frac{8}{k+3}$이 정수가 되어야 한다.
이때 8의 양의 약수는 1, 2, 4, 8이므로 분모인 $k+3$이 1, 2, 4, 8, -1, -2, -4, -8 중 하나가 되어야 한다.

I 다항식

$k=-2$일 때 $\frac{8}{-2+3}=8$, $k=1$일 때 $\frac{8}{1+3}=2$,

$k=5$일 때 $\frac{8}{5+3}=1$, $k=-4$일 때 $\frac{8}{-4+3}=-8$,

$k=-5$일 때 $\frac{8}{-5+3}=-4$, $k=-7$일 때 $\frac{8}{-7+3}=-2$,

$k=-11$일 때 $\frac{8}{-11+3}=-1$이므로 모든 정수 k의 값의 합은

$(-2)+1+5+(-4)+(-5)+(-7)+(-11)=-23$

215
답 ⑤

조건 (나)에서

$\{P(x)\}^3+\{Q(x)\}^3=12x^4+24x^3+12x^2+16$ …… ㉠

곱셈 공식을 이용하면

$\{P(x)\}^3+\{Q(x)\}^3$

$=\{P(x)+Q(x)\}^3-3P(x)Q(x)\{P(x)+Q(x)\}$

이고, 조건 (가)에 의하여 $P(x)+Q(x)=4$이므로

$\{P(x)\}^3+\{Q(x)\}^3=4^3-3\times4\times P(x)Q(x)$

$=64-12P(x)Q(x)$

따라서 ㉠에서

$64-12P(x)Q(x)=12x^4+24x^3+12x^2+16$

$-12P(x)Q(x)=12x^4+24x^3+12x^2-48$

$-P(x)Q(x)=x^4+2x^3+x^2-4$

이때 $-P(1)Q(1)=0$, $-P(-2)Q(-2)=0$이므로

조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & -4 \\ & & 1 & 3 & 4 & 4 \\ \hline -2 & 1 & 3 & 4 & 4 & 0 \\ & & -2 & -2 & -4 & \\ \hline & 1 & 1 & 2 & 0 & \end{array}$$

$-P(x)Q(x)=(x-1)(x+2)(x^2+x+2)$

$=(x^2+x-2)(x^2+x+2)$

조건 (가)에서 $P(x)+Q(x)=4$이고 $P(x)$의 최고차항의 계수가 음수이므로

두 이차식 $P(x)$, $Q(x)$는

$P(x)=-x^2-x+2$, $Q(x)=x^2+x+2$

$\therefore P(2)+Q(3)=(-2^2-2+2)+(3^2+3+2)$

$=-4+14=10$

216
답 ②

칠판의 오른쪽이 3 cm가 남으므로

$n^3+an^2+8n+7-3$, 즉 n^3+an^2+8n+4가 $n+2$로 나누어떨어진다.

$f(n)=n^3+an^2+8n+4$라 하면 인수 정리에 의하여

$f(-2)=-8+4a-16+4=0$에서 $a=5$

따라서 $f(n)=n^3+5n^2+8n+4$, $f(-2)=0$이므로

조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 5 & 8 & 4 \\ & & -2 & -6 & -4 \\ \hline & 1 & 3 & 2 & 0 \end{array}$$

$n^3+5n^2+8n+4=(n+2)(n^2+3n+2)$

$=(n+2)^2(n+1)$

따라서 칠판의 가로 방향으로 붙인 사진의 개수는

$(n+2)(n+1)$ …… ㉠

또한 칠판의 아래쪽이 1 cm가 남으므로

$n^3+6n^2+bn+7-1$, 즉 n^3+6n^2+bn+6이 $n+2$로 나누어떨어진다.

$g(n)=n^3+6n^2+bn+6$이라 하면 인수 정리에 의하여

$g(-2)=-8+24-2b+6=0$에서 $b=11$

따라서 $g(n)=n^3+6n^2+11n+6$, $g(-2)=0$이므로

조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 6 & 11 & 6 \\ & & -2 & -8 & -6 \\ \hline & 1 & 4 & 3 & 0 \end{array}$$

$n^3+6n^2+11n+6=(n+2)(n^2+4n+3)$

$=(n+2)(n+1)(n+3)$

따라서 칠판의 세로 방향으로 붙인 사진의 개수는

$(n+1)(n+3)$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여 칠판에 붙인 모든 사진의 개수는

$(n+2)(n+1)\times(n+1)(n+3)=(n+1)^2(n+2)(n+3)$이다.

217
답 ②

$a^3+b^3-c^3-(b-c)a^2-(c+a)b^2-(a-b)c^2$

$=a^2(a-b+c)-b^2(a-b+c)-c^2(a-b+c)$

$=(a-b+c)(a^2-b^2-c^2)=0$ …… ㉠

이때 삼각형에서 한 변의 길이는 나머지 두 변의 길이의 합보다 작으므로 $b<a+c$이다.

즉, $a-b+c>0$에서 $a-b+c\neq0$이므로

㉠에서 $a^2-b^2-c^2=0$, $a^2=b^2+c^2$이다.

즉, 주어진 삼각형은 빗변의 길이가 a인 직각삼각형이다.

따라서 이 삼각형의 직각을 낀 두 변의 길이가 각각 b, c이므로

넓이는 $\frac{1}{2}bc$이다.

218
답 ⑤

$x^4+2ax^3+bx^2+2ax+1=x^2\left\{\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+2a\left(x+\frac{1}{x}\right)+b\right\}$

$=x^2\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+2a\left(x+\frac{1}{x}\right)+b-2\right\}$

ㄱ. $a=2$, $b=6$인 경우

$x^2\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+4\left(x+\frac{1}{x}\right)+4\right\}=x^2\left(x+\frac{1}{x}+2\right)^2$

$=(x^2+2x+1)^2$

$=(x+1)^4$

이므로 $N(2, 6)=4$

$a=0$, $b=-2$인 경우

$x^2\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4\right\}=x^2\left(x+\frac{1}{x}+2\right)\left(x+\frac{1}{x}-2\right)$

$=(x^2+2x+1)(x^2-2x+1)$

$=(x+1)^2(x-1)^2$

이므로 $N(0, -2)=4$

$\therefore N(2, 6)+N(0, -2)=8$ (거짓)

ㄴ. $a=k$, $b=2$인 경우

$$x^2\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+2k\left(x+\frac{1}{x}\right)\right\}=x^2\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{1}{x}+2k\right)$$
$$=(x^2+1)(x^2+2kx+1)$$

이므로 $N(k,\ 2)=2$를 만족시키려면 $x^2+2kx+1$이 계수가 모두 정수인 일차식으로 인수분해되어야 한다.

따라서 $k=1$ 또는 $k=-1$이다. (참) …… TIP

ㄷ. $b=a^2+2$이면

$$x^2\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+2a\left(x+\frac{1}{x}\right)+a^2\right\}=x^2\left(x+\frac{1}{x}+a\right)^2$$
$$=(x^2+ax+1)^2$$

따라서 $N(a,\ b)=4$를 만족시키려면

$a=2$ 또는 $a=-2$이어야 하므로

모든 a의 값의 곱은 -4이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

TIP

$x^2+2kx+1$의 상수항이 1이므로

$x^2+2kx+1=(x+1)^2$ 또는 $x^2+2kx+1=(x-1)^2$으로

인수분해 되어야 한다.

따라서 x항의 계수를 비교하면 $k=1$ 또는 $k=-1$이다.

219 ……………… 답 74

$N=x^4-25x^2-50x-25$
$=x^4-25(x^2+2x+1)$
$=(x^2)^2-\{5(x+1)\}^2$
$=(x^2+5x+5)(x^2-5x-5)$

이므로 $|N|$이 소수가 되려면

x^2+5x+5가 1 또는 -1이고

x^2-5x-5가 $\pm$(소수)이거나

x^2-5x-5가 1 또는 -1이고

x^2+5x+5가 $\pm$(소수)이어야 한다.

(i) x^2+5x+5가 1 또는 -1이고 x^2-5x-5가 $\pm$(소수)인 경우

$x^2+5x+5=1$일 때, $x^2+5x+4=(x+4)(x+1)=0$에서

$x=-4$ 또는 $x=-1$

$x=-4$일 때, $x^2-5x-5=16+20-5=31$에서 $|N|=31$

$x=-1$일 때, $x^2-5x-5=1+5-5=1$에서 $|N|=1$이므로 소수가 아니다.

$x^2+5x+5=-1$일 때, $x^2+5x+6=(x+2)(x+3)=0$에서

$x=-2$ 또는 $x=-3$

$x=-2$일 때, $x^2-5x-5=4+10-5=9$에서 $|N|=9$이므로 소수가 아니다.

$x=-3$일 때, $x^2-5x-5=9+15-5=19$에서 $|N|=19$

(ii) x^2-5x-5가 1 또는 -1이고 x^2+5x+5가 $\pm$(소수)인 경우

$x^2-5x-5=1$일 때, $x^2-5x-6=(x-6)(x+1)=0$에서

$x=6$ 또는 $x=-1$

$x=6$일 때, $x^2+5x+5=36+30+5=71$에서 $|N|=71$

$x=-1$일 때, $x^2+5x+5=1-5+5=1$에서 $|N|=1$이므로 소수가 아니다.

$x^2-5x-5=-1$일 때, $x^2-5x-4=0$에서 좌변이 정수 범위에서 인수분해 되지 않으므로 조건을 만족시키는 정수 x의 값이 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 $|N|$이 소수가 되도록 하는 정수 x의 값은 $x=-4$, $x=-3$, $x=6$으로 개수는 $p=3$이고, 이때 소수 $|N|$의 최댓값은 $q=71$이다.

$\therefore$ $p+q=3+71=74$

220 ……………… 답 ⑤

$x^2=t$라 하면 $x^4-ax^2+36=t^2-at+36$

이 식을 계수가 모두 정수인 t에 대한 두 일차식으로 인수분해할 수 있는 경우는

$t^2-at+36=(t-1)(t-36)$
$t^2-at+36=(t-2)(t-18)$
$t^2-at+36=(t-3)(t-12)$
$t^2-at+36=(t-4)(t-9)$
$t^2-at+36=(t-6)^2$

의 5개이다. ($\because$ $a>0$이므로 자연수 m, n에 대하여 $(t+m)(t+n)$으로 인수분해할 수 없다.)

이때 $(t-m)(t-n)=(x^2-m)(x^2-n)$에서

x에 대한 각 이차식이 계수가 모두 정수인 두 일차식으로 인수분해 되려면 m, n이 각각 어떤 자연수의 제곱이 되어야 한다.

따라서 가능한 경우는 다음과 같다.

$(t-1)(t-36)=(x^2-1)(x^2-36)$
$=(x+1)(x-1)(x+6)(x-6)$
$=x^4-37x^2+36$

$(t-4)(t-9)=(x^2-4)(x^2-9)$
$=(x+2)(x-2)(x+3)(x-3)$
$=x^4-13x^2+36$

따라서 양수 a가 될 수 있는 값은 37 또는 13이므로

그 합은 $37+13=50$이다.

221 ……………… 답 40

$n^4+2n^2-3=(n^2-1)(n^2+3)$
$=(n-1)(n+1)(n^2+3)$
$=(n-1)(n^3+n^2+3n+3)$
$=(n-1)\{(n-2)(n^2+3n+9)+21\}$
$=(n-1)(n-2)(n^2+3n+9)+21(n-1)$ …… ㉠

$(n-1)(n-2)(n^2+3n+9)$는 $(n-1)(n-2)$의 배수이므로

㉠이 $(n-1)(n-2)$의 배수가 되기 위해서는

$21(n-1)$이 $(n-1)(n-2)$의 배수가 되어야 한다.

즉, $n-2>0$이므로 $n-2$가 21의 양의 약수이어야 한다.

이때 21의 양의 약수는 1, 3, 7, 21이므로

$n-2=21$일 때, $n=23$

$n-2=7$일 때, $n=9$

$n-2=3$일 때, $n=5$

$n-2=1$일 때, $n=3$

따라서 구하는 모든 자연수 n의 값의 합은

$23+9+5+3=40$이다.

222 ······ 답 ③

주어진 식을 x에 대한 내림차순으로 정리하면

$x^2-y^2-ax-by-2=x^2-ax-(y^2+by+2)$ ······ ㉠

이 식이 계수가 정수인 x, y에 대한 두 일차식의 곱으로 인수분해되려면 x에 대한 다항식 ㉠의 상수항은 다음과 같아야 한다.

(i) $y^2+by+2=(y+1)(y+2)=y^2+3y+2$인 경우

y의 계수를 비교하면 $b=3$이다.

이때 ㉠에서

$x^2-ax-(y+1)(y+2)=\{x-(y+1)\}\{x+(y+2)\}$

$=x^2+x-(y+1)(y+2)$

인 경우 x의 계수를 비교하면 $a=-1$이고,

$x^2-ax-(y+1)(y+2)=\{x+(y+1)\}\{x-(y+2)\}$

$=x^2-x-(y+1)(y+2)$

인 경우 x의 계수를 비교하면 $a=1$이다.

(ii) $y^2+by+2=(y-1)(y-2)=y^2-3y+2$인 경우

y의 계수를 비교하면 $b=-3$이다.

이때 ㉠에서

$x^2-ax-(y-1)(y-2)=\{x-(y-1)\}\{x+(y-2)\}$

$=x^2-x-(y-1)(y-2)$

인 경우 x의 계수를 비교하면 $a=1$이고,

$x^2-ax-(y-1)(y-2)=\{x+(y-1)\}\{x-(y-2)\}$

$=x^2+x-(y-1)(y-2)$

인 경우 x의 계수를 비교하면 $a=-1$이다.

(i), (ii)에서 가능한 $a+b$의 값은

$a=-1$, $b=3$에서 $a+b=2$

$a=1$, $b=3$에서 $a+b=4$

$a=1$, $b=-3$에서 $a+b=-2$

$a=-1$, $b=-3$에서 $a+b=-4$

따라서 $a+b$의 값이 될 수 없는 것은 ③이다.

다른 풀이

다항식 $x^2-y^2-ax-by-2$가 계수가 모두 정수인 두 일차식의 곱으로 인수분해 되므로

$x^2-y^2-ax-by-2=(x+y+C_1)(x-y+C_2)$ (C_1, C_2는 정수)

와 같이 나타낼 수 있다.

$x^2-y^2-ax-by-2=x^2-y^2+(C_1+C_2)x-(C_1-C_2)y+C_1C_2$

즉, $a=-C_1-C_2$, $b=C_1-C_2$에서

$a+b=-2C_2$ ······ ㉠

이고 $C_1C_2=-2$이다.

이때 두 정수 C_1, C_2의 순서쌍 $(C_1,\ C_2)$는 $(1,\ -2)$, $(2,\ -1)$, $(-2,\ 1)$, $(-1,\ 2)$로 4개이므로

㉠에 의하여 가능한 $a+b$의 값은 -4, -2, 2, 4이다.

따라서 $a+b$의 값이 될 수 없는 것은 ③이다.

223 ······ 답 181

$ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)=138$에서

좌변을 전개하여 인수분해하면

$a^3b-ab^3+b^3c-bc^3+ac^3-a^3c$

$=a^3(b-c)-a(b^3-c^3)+bc(b^2-c^2)$

$=a^3(b-c)-a(b-c)(b^2+bc+c^2)+bc(b-c)(b+c)$

$=(b-c)\{a^3-a(b^2+bc+c^2)+bc(b+c)\}$

$=(b-c)(a^3-ab^2-abc-ac^2+b^2c+bc^2)$

$=(b-c)\{(b^2c-ab^2)+(bc^2-abc)-(ac^2-a^3)\}$

$=(b-c)\{b^2(c-a)+bc(c-a)-a(c-a)(c+a)\}$

$=(b-c)(c-a)\{b^2+cb-a(c+a)\}$

$b \quad c+a$

$b \quad -a$

$=(b-c)(c-a)(b-a)(a+b+c)$

$=(b-c)(a-c)(a-b)(a+b+c)$

이때 $138=2\times3\times23$이므로

$(b-c)(a-c)(a-b)(a+b+c)=1\times2\times3\times23$이다.

a, b, c는 10 이하의 자연수이므로 $a+b+c=23$

이고, $a>b>c$라 하면

$a-c=3$이고, $a-b=2$, $b-c=1$ 또는 $a-b=1$, $b-c=2$이다.

이를 만족시키는 a, b, c는 $a=9$, $b=8$, $c=6$이다.

$\therefore\ a^2+b^2+c^2=9^2+8^2+6^2=181$

224 ······ 답 98

다항식 $P(x)$가 일차식 $x-a$를 인수로 가지므로 인수 정리에 의하여 $P(a)=0$이다.

$P(a)=a^4-250a^2+b=0$에서 $b=250a^2-a^4$이고 ······ ㉠

b가 자연수이므로 $b=250a^2-a^4=a^2(250-a^2)>0$에서

자연수 a로 가능한 값은 1, 2, 3, $\cdots$, 15이다. ······ ㉡

㉠을 $P(x)$에 대입하면

$P(x)=x^4-250x^2+250a^2-a^4$이고

$P(-a)=0$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

a	1	0	-250	0	$250a^2-a^4$
		a	a^2	$-250a+a^3$	$-250a^2+a^4$
$-a$	1	a	$-250+a^2$	$-250a+a^3$	0
		$-a$	0	$250a-a^3$	
	1	0	$-250+a^2$	0	

따라서

$P(x)=(x-a)(x+a)(x^2-250+a^2)$

$=(x-a)(x+a)\{x^2-(250-a^2)\}$

이고, 이 식이 계수와 상수항이 모두 정수인 서로 다른 세 다항식의 곱으로 인수분해 되려면 $x^2-(250-a^2)$이 두 일차식으로 인수분해 되지 않아야 한다.

$x^2-(250-a^2)$이 두 일차식으로 인수분해 되는 경우는

$250-a^2$이 제곱수가 될 때이고, $250=5^2+15^2=9^2+13^2$이므로

$a=5$, $a=9$, $a=13$, $a=15$일 때 $250-a^2$이 제곱수가 된다.

㉡에서 a는 15 이하의 자연수이고 이 중에서 $a=5$, $a=9$, $a=13$, $a=15$일 때를 제외하고 만들어지는 모든 다항식 $P(x)$의 개수는

$p=15-4=11$이다.

또한 a의 최댓값은 14이고 그때의 b의 값은

$q=14^2(250-14^2)=14^2\times54$이다.

$\therefore\ \dfrac{q}{9(p+1)}=\dfrac{14^2\times54}{9(11+1)}=98$

225 ······ 답 3

$P(x^{12})=x^{24}+x^{12}+1$
$=\{(x^3)^8-1\}+\{(x^3)^4-1\}+3$
$=(x^3-1)\{(x^3)^7+(x^3)^6+(x^3)^5+\cdots+x^3+1\}$
$+(x^3-1)\{(x^3)^3+(x^3)^2+x^3+1\}+3$

이때 $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=(x-1)P(x)$이므로
다항식 x^3-1은 $P(x)$로 나누어떨어진다.
따라서 다항식 $P(x^{12})$을 $P(x)$로 나누었을 때의 나머지는 3이다.

226 ······ 답 ①

$x^{27}+x^{26}+x^{24}+x^{23}+x+3$
$=x^{27}+x^{26}+x^{25}+x^{24}+x^{23}-x^{25}+x+3$
$=x^{23}(x^4+x^3+x^2+x+1)-x^{25}+x+3$
$=x^{23}(x^4+x^3+x^2+x+1)-(x^{25}-1)+x+2$
$=x^{23}(x^4+x^3+x^2+x+1)$
$-(x^5-1)(x^{20}+x^{15}+x^{10}+x^5+1)+x+2$ ······ TIP
$=x^{23}(x^4+x^3+x^2+x+1)$
$-(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^{20}+x^{15}+x^{10}+x^5+1)+x+2$
$=(x^4+x^3+x^2+x+1)\{x^{23}-(x-1)(x^{20}+x^{15}+x^{10}+x^5+1)\}$
$+x+2$

따라서 구하는 나머지는 $x+2$이다.

TIP

$x^{25}-1$에서 $x^5=t$라 하면
$x^{25}-1=t^5-1=(t-1)(t^4+t^3+t^2+t+1)$이므로
$x^{25}-1=(x^5-1)(x^{20}+x^{15}+x^{10}+x^5+1)$이다.

227 ······ 답 ③

$f(x)=x^{10}-2x^5-3$이라 하면
다항식 $f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는
나머지정리에 의하여 $f(-1)=1-2\times(-1)-3=0$이다.
다항식 $x^{10}-2x^5-3$을 $x+1$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$이므로
$x^{10}-2x^5-3=(x+1)Q(x)$ ······ ㉠
이때 $x^5=X$라 하면
$x^{10}-2x^5-3=X^2-2X-3=(X+1)(X-3)$
$=(x^5+1)(x^5-3)$
$=(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)(x^5-3)$ ······ TIP
이를 ㉠에 대입하면
$(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)(x^5-3)=(x+1)Q(x)$에서
$Q(x)=(x^4-x^3+x^2-x+1)(x^5-3)$
따라서 다항식 $Q(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는
나머지정리에 의하여
$Q(-1)=\{1-(-1)+1-(-1)+1\}\times(-1-3)$
$=-20$

TIP

3 이상의 홀수인 자연수 n에 대하여
$x^n+1=(x+1)(x^{n-1}-x^{n-2}+x^{n-3}-\cdots-x+1)$
이 성립한다.
[증명]
2 이상의 자연수 n에 대하여
$x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+x^{n-3}+\cdots+x+1)$ ······ ㉠
은 x에 대한 항등식이다.
따라서 n이 3 이상의 홀수일 때,
㉠에 x 대신 $-x$를 대입하면
$-x^n-1=(-x-1)(x^{n-1}-x^{n-2}+x^{n-3}-\cdots-x+1)$
$\therefore x^n+1=(x+1)(x^{n-1}-x^{n-2}+x^{n-3}-\cdots-x+1)$

228 ······ 답 126

정사각뿔 O$-$ABCD의 부피는
$\frac{1}{3}\times a^2\times\frac{\sqrt{2}}{2}a=\frac{\sqrt{2}}{6}a^3$ ······ TIP
정사각뿔 O$-$EFGH의 부피는
$\frac{1}{3}\times b^2\times\frac{\sqrt{2}}{2}b=\frac{\sqrt{2}}{6}b^3$
두 정사각뿔 O$-$ABCD, O$-$EFGH의 부피의 합이 $2\sqrt{2}$이므로
$\frac{\sqrt{2}}{6}a^3+\frac{\sqrt{2}}{6}b^3=\frac{\sqrt{2}}{6}(a^3+b^3)=2\sqrt{2}$,
$a^3+b^3=12$ ······ ㉠
한편, 점 F에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 I라 하면
삼각형 BFI는 $\angle\text{FBI}=60^\circ$인 직각삼각형이므로
$\overline{\text{FI}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{\text{FB}}=\frac{\sqrt{3}}{2}(a-b)$, $\overline{\text{BI}}=\frac{1}{2}\overline{\text{FB}}=\frac{1}{2}(a-b)$에서
$\overline{\text{AI}}=\overline{\text{AB}}-\overline{\text{BI}}=a-\frac{1}{2}(a-b)=\frac{1}{2}(a+b)$
삼각형 FAI는 직각삼각형이므로
$\overline{\text{AF}}^2=\overline{\text{FI}}^2+\overline{\text{AI}}^2$
$=\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}(a-b)\right\}^2+\left\{\frac{1}{2}(a+b)\right\}^2$
$=\frac{3}{4}(a^2-2ab+b^2)+\frac{1}{4}(a^2+2ab+b^2)$
$=a^2-ab+b^2=4$ ······ ㉡
㉠, ㉡에서
$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)=(a+b)\times4=12$이므로
$a+b=3$ ······ ㉢
$a^2-ab+b^2=(a+b)^2-3ab=3^2-3ab=4$이므로
$ab=\frac{5}{3}$ ······ ㉣
㉢, ㉣에서
$(a-b)^2=(a+b)^2-4ab=3^2-4\times\frac{5}{3}=\frac{7}{3}$이므로
$a-b=\frac{\sqrt{21}}{3}$ ······ ㉤
사각형 ABFE의 넓이는 정삼각형 OAB의 넓이에서
정삼각형 OEF의 넓이를 뺀 것과 같으므로

$S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2-\frac{\sqrt{3}}{4}b^2$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2-b^2)$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}(a+b)(a-b)$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 3\times\frac{\sqrt{21}}{3}$ ($\because$ ㉢, ㉣)

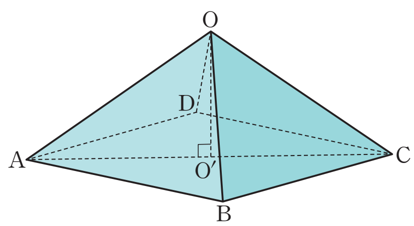
$=\frac{3}{4}\sqrt{7}$

$\therefore 32\times S^2=32\times\frac{63}{16}=126$

TIP

모든 모서리의 길이가 같은 정사각뿔의 부피

모든 모서리의 길이가 a인 정사각뿔 O$-$ABCD에 대하여 점 O에서 밑면에 내린 수선의 발을 O′이라 하면 점 O′은 선분 AC의 중점이다.



$\overline{OA}=\overline{OC}=a$이고 정사각형 ABCD에서 $\overline{AC}=\sqrt{2}a$이므로 삼각형 OAC는 $\angle AOC=90°$인 직각이등변삼각형이다.

따라서 $\overline{OO'}=\overline{AO'}=\frac{1}{2}\overline{AC}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$이므로

정사각뿔 O$-$ABCD의 부피는

$\frac{1}{3}\times a^2\times\frac{\sqrt{2}}{2}a=\frac{\sqrt{2}}{6}a^3$

Ⅱ 방정식과 부등식

01 복소수와 이차방정식

229 ······ 답 ④

① 허수는 양수, 음수를 판단할 수 없다.
② 복소수 $a+bi$ (a, b는 실수)에 대하여 $b=0$이면 실수이다.
③ $2+3i$의 허수부분은 3이다.
④ 복소수의 허수부분은 실수이다.
⑤ 허수는 실수 a와 0이 아닌 실수 b에 대하여 $a+bi$ 꼴로 나타낼 수 있다.

따라서 옳은 것은 ④이다.

230 ······ 답 (1) $5+2i$ (2) 1 (3) -1

(1) $(1+i)^2+(1+2i)(1-2i)=(1+2i+i^2)+\{1^2-(2i)^2\}$
$=(1+2i-1)+\{1-(-4)\}$
$=5+2i$

(2) $\frac{2}{1-i}=\frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{2(1+i)}{1-i^2}=\frac{2(1+i)}{2}=1+i$이고,

$\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{1-2i+i^2}{1-i^2}$

$=\frac{1-2i-1}{1-(-1)}=\frac{-2i}{2}=-i$

$\therefore \frac{2}{1-i}+\frac{1-i}{1+i}=(1+i)+(-i)=1$

(3) $\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{1+2i+i^2}{1-i^2}$

$=\frac{1+2i-1}{1-(-1)}=\frac{2i}{2}=i$

$\therefore \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2=i^2=-1$

231 ······ 답 ②

$\alpha=\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{1+2i-1}{1-(-1)}=i$

$\beta=\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{1-2i-1}{1-(-1)}=-i$

$\therefore \frac{2\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{2i^2+(-i)^2}{i\times(-i)}=-3$

다른 풀이

$\alpha=\frac{1+i}{1-i}$, $\beta=\frac{1-i}{1+i}$에서

$\alpha^2=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2=\frac{1+2i-1}{1-2i-1}=\frac{2i}{-2i}=-1$

$\beta^2=\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2=\frac{1-2i-1}{1+2i-1}=\frac{-2i}{2i}=-1$

$\alpha\beta=\frac{1+i}{1-i}\times\frac{1-i}{1+i}=1$이므로

$\dfrac{2\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\dfrac{2\times(-1)+(-1)}{1}=-3$

232 ⋯⋯ 답 ③

$f(x)=x^3+x^2+x-3$이라 할 때 $f(1)=0$이므로

조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 1 & 1 & -3 \\ & & 1 & 2 & 3 \\ \hline & 1 & 2 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

$x^3+x^2+x-3=(x-1)(x^2+2x+3)$이고,

$x^2+2x+3=0$에서 이차방정식의 근의 공식에 의하여

$x=-1\pm\sqrt{1^2-3}=-1\pm\sqrt{2}i$이므로

$x^2+2x+3=\{(x-(-1+\sqrt{2}i)\}\{(x-(-1-\sqrt{2}i)\}$

$=(x+1-\sqrt{2}i)(x+1+\sqrt{2}i)$

따라서 주어진 다항식은

$x^3+x^2+x-3=(x-1)(x+1-\sqrt{2}i)(x+1+\sqrt{2}i)$

로 인수분해 된다.

233 ⋯⋯ 답 ⑤

$(3+i)a-2bi=6-4i$에서

$3a+(a-2b)i=6-4i$이므로

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$3a=6$, $a-2b=-4$에서 $a=2$, $b=3$

$\therefore a+b=2+3=5$

234 ⋯⋯ 답 6

$(1-i)^2=1-2i-1=-2i$

$(1+i)^2=1+2i-1=2i$이므로

$(1+i)^4=(2i)^2=-4$

$(1-i)^2-a(1+i)^4=-2i-a\times(-4)=4a-2i$

이고, $4a-2i=16+bi$이므로

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$4a=16$, $a=4$이고 $b=-2$

$\therefore a-b=4-(-2)=6$

235 ⋯⋯ 답 21

$\dfrac{a}{1-i}+\dfrac{b}{1+i}=\dfrac{a(1+i)}{(1-i)(1+i)}+\dfrac{b(1-i)}{(1+i)(1-i)}$

$=\dfrac{a(1+i)}{2}+\dfrac{b(1-i)}{2}$

이고, $\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{a-b}{2}i=5+2i$이므로

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$\dfrac{a+b}{2}=5$, $\dfrac{a-b}{2}=2$

$a+b=10$, $a-b=4$에서 $a=7$, $b=3$

$\therefore ab=7\times3=21$

236 ⋯⋯ 답 ①

$a^3-a^2b-ab^2+b^3=a^2(a-b)-b^2(a-b)$

$=(a^2-b^2)(a-b)$

$=(a+b)(a-b)^2$ ⋯⋯ ㉠

한편, $a+b=(1+2i)+(1-2i)=2$,

$a-b=(1+2i)-(1-2i)=4i$이므로

이를 ㉠에 대입하면

$(a+b)(a-b)^2=2\times(4i)^2=-32$

237 ⋯⋯ 답 ②

$x=\dfrac{2}{1+i}=\dfrac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)}=1-i$,

$y=\dfrac{2}{1-i}=\dfrac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)}=1+i$이므로

$x+y=(1-i)+(1+i)=2$

$xy=(1-i)(1+i)=2$

$\therefore x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

$=2^3-3\times2\times2=-4$

다른 풀이

$x=\dfrac{2}{1+i}=\dfrac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)}=1-i$,

$y=\dfrac{2}{1-i}=\dfrac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)}=1+i$이므로

$x^3=(1-i)^3=1-3i-3+i=-2-2i$

$y^3=(1+i)^3=1+3i-3-i=-2+2i$

$\therefore x^3+y^3=(-2-2i)+(-2+2i)=-4$

참고

$x=\dfrac{2}{1+i}$, $y=\dfrac{2}{1-i}$를 그대로 계산하기보다는

분모가 실수가 되도록 $x=1-i$, $y=1+i$와 같이 정리한 후

계산하는 것이 더 편리하다.

238 ⋯⋯ 답 ①

$z=(1+i)x^2-(1-i)x-2i$라 하면

$z=(x^2-x)+(x^2+x-2)i$

$=x(x-1)+(x+2)(x-1)i$에서

(실수부분)$=x(x-1)$ ⋯⋯ ㉠

(허수부분)$=(x+2)(x-1)$ ⋯⋯ ㉡

이므로 복소수 z가 실수가 되기 위해서는

㉡에서 $x=-2$ 또는 $x=1$이어야 한다.

이때 $x=1$이면 ㉠에서 실수부분도 0이 되어 $z=0$이 되므로

z가 0이 아닌 실수가 되도록 하는 실수 x의 값은 -2이다.

TIP

$z=(1+i)x^2-(1-i)x-2i$의 값은

① $x=1$일 때, $z=0$ (실수)

② $x=-2$일 때, $z=6$ (실수)

③ $x=0$일 때, $z=-2i$ (순허수)

그 이외의 실수 x에 대하여 z는 순허수가 아닌 허수이다.

참고

복소수 $z=a+bi$ (a, b는 실수)에서 실수부분이 0이고 허수부분은 0이 아닌 경우 $z=bi$와 같이 나타낼 수 있고, 이러한 복소수를 순허수라 한다.

239

답 (1) $a=0$, $b\neq0$ (2) $a=b=0$ (3) $a\neq0$, $b=0$

$z=a+bi$ (a, b는 실수)에 대하여

$z^2=(a+bi)^2=a^2-b^2+2abi$ …… ㉠

(1) z^2이 음의 실수일 때,

㉠에서 $a^2-b^2+2abi<0$이므로

$a^2-b^2<0$이고 $2ab=0$이어야 한다.

(i) $a=0$이면 $-b^2<0$이어야 하므로 $b\neq0$

(ii) $b=0$이면 $a^2<0$을 만족시키는 실수 a가 존재하지 않는다. …… TIP

(i), (ii)에서 $a=0$이고 $b\neq0$이다. 즉, z는 순허수이다.

(2) $z^2=0$일 때,

㉠에서 $a^2-b^2+2abi=0$이므로

$a^2-b^2=0$이고 $2ab=0$이어야 한다.

따라서 $a=b=0$이다. 즉, $z=0$이다.

(3) z^2이 양의 실수일 때,

㉠에서 $a^2-b^2+2abi>0$이므로

$a^2-b^2>0$이고 $2ab=0$이어야 한다.

(i) $a=0$이면 $-b^2>0$을 만족시키는 실수 b가 존재하지 않는다.

(ii) $b=0$이면 $a^2>0$이어야 하므로 $a\neq0$

(i), (ii)에서 $a\neq0$이고 $b=0$이다.

즉, z는 0이 아닌 실수이다.

TIP

모든 실수 x에 대하여 $x^2\geq0$이 성립한다.
즉, $x^2<0$을 만족시키는 실수 x는 존재하지 않는다.

참고

복소수 z에 대하여

① $z=0$이면 $z^2=0$이고, $z^2=0$이면 $z=0$이다.

② z가 0이 아닌 실수이면 $z^2>0$이고, $z^2>0$이면 z는 0이 아닌 실수이다.

③ z가 순허수이면 $z^2<0$이고, $z^2<0$이면 z는 순허수이다.

240

답 ④

$z=2-3i$, $\bar{z}=2+3i$이므로

① $z+\bar{z}=(2-3i)+(2+3i)=4$ (참)

② $z-\bar{z}=(2-3i)-(2+3i)=-6i$ (참)

③ $z\bar{z}=(2-3i)(2+3i)=13$ (참)

④ $\dfrac{z}{\bar{z}}=\dfrac{2-3i}{2+3i}=\dfrac{-5-12i}{13}$ (거짓)

⑤ $z^2=(2-3i)^2=-5-12i$ (참)

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

241

답 ⑤

$z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면

복소수 z의 켤레복소수는 $\bar{z}=a-bi$이다.

① $z+\bar{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a$이므로

$z+\bar{z}$는 실수이다. (참)

② $z-\bar{z}=(a+bi)-(a-bi)=2bi$이므로

$z-\bar{z}$의 실수부분은 0이다. (참)

③ $z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2\geq0$이므로

$z\bar{z}$는 0 또는 양수이다. (참)

④ $z=\bar{z}$이면 $a+bi=a-bi$에서 $b=-b$, $b=0$

즉, $z=a$이므로 z는 실수이다. (참)

⑤ $z=-\bar{z}$이면 $a+bi=-(a-bi)=-a+bi$에서

$a=-a$, $a=0$

즉, $z=bi$이므로 z는 0 또는 순허수이다. (거짓)

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

TIP

복소수 z와 그 켤레복소수 $\bar{z}$에 대하여
$z+\bar{z}$와 $z\bar{z}$는 항상 실수이고, $z-\bar{z}$는 0 또는 순허수이다.

242

답 ④

복소수 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면

z의 켤레복소수는 $\bar{z}=a-bi$이다.

$z+\bar{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a$: 실수

$z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$: 0이 아닌 실수

($\because$ z는 0이 아닌 복소수)

$z-\bar{z}=(a+bi)-(a-bi)=2bi$: 0 또는 순허수

ㄱ. $(1+z)(1+\bar{z})=1+(z+\bar{z})+z\bar{z}=1+2a+a^2+b^2$이므로

항상 실수이다.

ㄴ. $\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{\bar{z}}=\dfrac{z+\bar{z}}{z\bar{z}}=\dfrac{2a}{a^2+b^2}$이므로 항상 실수이다.

ㄷ. $z^2-\bar{z}^2=(z+\bar{z})(z-\bar{z})=2a\times2bi=4abi$이므로

0 또는 순허수이다.

ㄹ. $(z-\bar{z})^2=(2bi)^2=-4b^2$이므로 항상 실수이다.

따라서 항상 실수인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

243

답 ③

$z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$이므로

$z+\bar{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a=6$에서 $a=3$

$z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2=9+b^2=11$에서

$b^2=2$, $b=\pm\sqrt{2}$

$\therefore$ $z=3\pm\sqrt{2}i$

244

답 ③

$z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$

ㄱ. $\bar{z}=a-bi$의 켤레복소수는 z이므로 $\bar{\bar{z}}=z$ (참)

ㄴ. $\overline{z\bar{z}}=\bar{z}\bar{\bar{z}}=\bar{z}z$ (거짓)

ㄷ. $\overline{z+\bar{z}}=\bar{z}+\bar{\bar{z}}=\bar{z}+z$ (거짓)
ㄹ. $\overline{z-\bar{z}}=\bar{z}-\bar{\bar{z}}=\bar{z}-z$ (참)
ㅁ. $\overline{\left(\dfrac{z}{\bar{z}}\right)}=\dfrac{\bar{z}}{\bar{\bar{z}}}=\dfrac{\bar{z}}{z}$ (참)
따라서 항상 성립하는 것은 ㄱ, ㄹ, ㅁ의 3개이다.

TIP

0이 아닌 두 복소수 z, w와 각각의 켤레복소수 $\bar{z}$, $\bar{w}$에 대하여 다음이 성립한다.

$\bar{\bar{z}}=z$, $\overline{zw}=\bar{z}\,\bar{w}$, $\overline{z+w}=\bar{z}+\bar{w}$, $\overline{z-w}=\bar{z}-\bar{w}$, $\overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)}=\dfrac{\bar{z}}{\bar{w}}$

245

답 ⑤

$z=1-i$이므로 $\bar{z}=1+i$
$z+\bar{z}=(1-i)+(1+i)=2$
$z\bar{z}=(1-i)(1+i)=1-(-1)=2$
$\therefore \dfrac{z+1}{z}+\dfrac{\bar{z}+1}{\bar{z}}=1+\dfrac{1}{z}+1+\dfrac{1}{\bar{z}}$
$=2+\dfrac{z+\bar{z}}{z\bar{z}}$
$=2+\dfrac{2}{2}=3$

다른 풀이

$\dfrac{z+1}{z}=\dfrac{(1-i)+1}{1-i}=\dfrac{2-i}{1-i}=\dfrac{3+i}{2}$
$\dfrac{\bar{z}+1}{\bar{z}}=\overline{\left(\dfrac{z+1}{z}\right)}=\dfrac{3-i}{2}$
$\therefore \dfrac{z+1}{z}+\dfrac{\bar{z}+1}{\bar{z}}=\dfrac{3+i}{2}+\dfrac{3-i}{2}=3$

246

답 26

$\alpha\bar{\alpha}-\alpha\bar{\beta}-\bar{\alpha}\beta+\beta\bar{\beta}$
$=\alpha(\bar{\alpha}-\bar{\beta})-\beta(\bar{\alpha}-\bar{\beta})=(\alpha-\beta)(\bar{\alpha}-\bar{\beta})$
이때 $\alpha-\beta=(3-2i)-(2+3i)=1-5i$
이므로 $\bar{\alpha}-\bar{\beta}=\overline{\alpha-\beta}=1+5i$이다.
따라서 $(\alpha-\beta)(\bar{\alpha}-\bar{\beta})=(1-5i)(1+5i)=1+25=26$

TIP

주어진 식 $\alpha\bar{\alpha}-\alpha\bar{\beta}-\bar{\alpha}\beta+\beta\bar{\beta}$에
$\alpha=3-2i$, $\beta=2+3i$, $\bar{\alpha}=3+2i$, $\bar{\beta}=2-3i$
를 먼저 대입하는 것보다 위의 풀이처럼 주어진 식을 변형하여 계산하는 것이 더 편리하다.

247

답 ④

$\bar{z}_1-\bar{z}_2=\overline{z_1-z_2}=\overline{2-3i}=2+3i$
$\bar{z}_1\bar{z}_2=\overline{z_1z_2}=\overline{1+5i}=1-5i$
$\therefore (\bar{z}_1-2)(\bar{z}_2+2)=\bar{z}_1\bar{z}_2+2(\bar{z}_1-\bar{z}_2)-4$
$=(1-5i)+2(2+3i)-4$
$=1+i$

다른 풀이

$(z_1-2)(z_2+2)=z_1z_2+2(z_1-z_2)-4$
$=(1+5i)+2(2-3i)-4$
$=1-i$
$\therefore (\bar{z}_1-2)(\bar{z}_2+2)=\overline{(z_1-2)(z_2+2)}$
$=\overline{1-i}=1+i$

248

답 ①

$z=\bar{z}$를 만족시키므로 z는 실수이다.
$z=x-4+(x^2+2x-24)i$
$=(x-4)+(x+6)(x-4)i$
에서 허수부분이 0이 되려면 $x=-6$ 또는 $x=4$이다.
이때 $z\neq0$에서 실수부분은 0이 아니므로 $x\neq4$이다.
$\therefore x=-6$

249

답 ④

$z+\bar{z}=0$을 만족시키므로 z가 순허수이다.
$z=x^2-(3+i)x+2+i$
$=(x^2-3x+2)-(x-1)i$
$=(x-1)(x-2)-(x-1)i$
에서 $(x-1)(x-2)=0$이고 $x-1\neq0$이므로 $x=2$이다.
따라서 $a=2$, $b=-i$이므로
$a+b=2-i$

250

답 ④

복소수 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$이므로
$(1+i)z+i\bar{z}=(1+i)(a+bi)+i(a-bi)$
$=a+bi+ai-b+ai+b$
$=a+(2a+b)i$
$=3+8i$
복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$a=3$, $2a+b=8$이므로 $a=3$, $b=2$
$\therefore z=3+2i$

251

답 ⑤

$\bar{\alpha}^2+\bar{\beta}^2=5-2i$에서 $\overline{\bar{\alpha}^2+\bar{\beta}^2}=\alpha^2+\beta^2=5+2i$이다.
이때 $\alpha+\beta=4-i$이므로
$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta$에 대입하면
$(4-i)^2=(5+2i)+2\alpha\beta$
$2\alpha\beta=10-10i$에서 $\alpha\beta=5-5i$이다.
따라서 $\bar{\alpha}\bar{\beta}=\overline{\alpha\beta}=5+5i$이므로
$\alpha\beta+\bar{\alpha}\bar{\beta}=(5-5i)+(5+5i)$
$=10$

TIP

두 복소수 z, w에 대하여 $\overline{zw}=\bar{z}\,\bar{w}$이므로 $\overline{z^n}=\bar{z}^n$가 성립한다.

252 ······ 답 ⑤

$i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=1$, $i^5=i$, $\cdots$이므로

자연수 n에 대하여 $i^n=i^{n+4}$이다.

$$\begin{aligned}\therefore\ &1+i+i^2+i^3+\cdots+i^{10}\\&=(1+i+i^2+i^3)+(i^4+i^5+i^6+i^7)+i^8+i^9+i^{10}\\&=\{1+i+(-1)+(-i)\}+\{1+i+(-1)+(-i)\}\\&\qquad+1+i+(-1)\\&=i\end{aligned}$$

253 ······ 답 ④

$i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=1$, $i^5=i$, $\cdots$이므로

자연수 n에 대하여 $i^n=i^{n+4}$이다.

$$\begin{aligned}\therefore\ &\frac{i^2+3i^4+5i^6+7i^8+9i^{10}+11i^{12}}{2i+4i^3+6i^5+8i^7+10i^9+12i^{11}}\\&=\frac{(-1+3)+(-5+7)+(-9+11)}{(2i-4i)+(6i-8i)+(10i-12i)}\\&=\frac{2+2+2}{(-2i)+(-2i)+(-2i)}\\&=\frac{6}{-6i}=i\end{aligned}$$

254 ······ 답 ①

$$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{1+2i-1}{1-(-1)}=i$$

$$\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{1-2i-1}{1-(-1)}=-i$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2n}+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2n}&=\left\{\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2\right\}^n+\left\{\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2\right\}^n\\&=(i^2)^n+\{(-i)^2\}^n\\&=(-1)^n+(-1)^n\\&=-2\ (\because n\text{은 홀수})\end{aligned}$$

255 ······ 답 ④

$z^3=1-i$이므로 $\bar{z}^3=\overline{z^3}=\overline{1-i}=1+i$

$\bar{z}^6=(\bar{z}^3)^2=(1+i)^2=2i$, $\bar{z}^{12}=(\bar{z}^6)^2=(2i)^2=-4$이다.

$\therefore\ \bar{z}^{24}=(\bar{z}^{12})^2=(-4)^2=16$

256 ······ 답 ①

$z=1+i$이므로

$z^2=(1+i)^2=2i$

$z^{100}=(z^2)^{50}=(2i)^{50}=2^{50}\times(i^4)^{12}\times i^2=-2^{50}$

$\bar{z}^{100}=\overline{z^{100}}=-2^{50}$

$\therefore\ z^{100}+\bar{z}^{100}=(-2^{50})+(-2^{50})=-2^{51}$

257 ······ 답 ①

$\dfrac{1}{i}=-i$이므로

$$\begin{aligned}&\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\cdots+\frac{1}{i^{50}}\\&=-i+(-i)^2+(-i)^3+\cdots+(-i)^{50}\\&=(-i-1+i+1)+(-i-1+i+1)\\&\qquad+\cdots+(-i-1+i+1)-i-1\\&=12\times(-i-1+i+1)-i-1\\&=-1-i\end{aligned}$$

따라서 $a=-1$, $b=-1$이므로

$a+b=(-1)+(-1)=-2$

258 ······ 답 ②

$$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{1+2i-1}{1-(-1)}=i$$

$$\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{1-2i-1}{1-(-1)}=-i$$

$$\begin{aligned}\therefore\ &\frac{1+i}{1-i}+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2+\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^4\\&\qquad+\cdots+\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{29}+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{30}\\&=\{i+(-i)^2+i^3+(-i)^4\}\\&\qquad+\cdots+\{i^{25}+(-i)^{26}+i^{27}+(-i)^{28}\}+i^{29}+(-i)^{30}\\&=-1+i\end{aligned}$$

259 ······ 답 ②

복소수 $z=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$에 대하여

$$z^2=\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\frac{-2-2\sqrt{3}i}{4}=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

$$z^3=z\times z^2=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\times\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}=\frac{1-(-3)}{4}=1$$

이므로 자연수 n에 대하여 $z^n=z^{n+3}$이다. ······ ㉠

이때 $z+z^2+z^3=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}+\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}+1=0$이므로

$$\begin{aligned}&z+z^2+z^3+\cdots+z^{40}\\&=(z+z^2+z^3)+(z^4+z^5+z^6)+\cdots+(z^{37}+z^{38}+z^{39})+z^{40}\\&=(z+z^2+z^3)+(z+z^2+z^3)+\cdots+(z+z^2+z^3)+z\ (\because ㉠)\\&=z=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\end{aligned}$$

다른 풀이

복소수 $z=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$에서 $2z=-1+\sqrt{3}i$이므로

$2z+1=\sqrt{3}i$

양변을 각각 제곱하면

$4z^2+4z+1=-3$에서 $z^2+z+1=0$ ······ ㉠

양변에 각각 $z-1$을 곱하면

$(z-1)(z^2+z+1)=0$에서 $z^3=1$

따라서 자연수 n에 대하여 $z^n=z^{n+3}$이므로 ······ ㉡

$$\begin{aligned}&z+z^2+z^3+\cdots+z^{40}\\&=(z+z^2+z^3)+(z^4+z^5+z^6)+\cdots+(z^{37}+z^{38}+z^{39})+z^{40}\\&=(z+z^2+z^3)+(z+z^2+z^3)+\cdots+(z+z^2+z^3)+z\ (\because ㉡)\\&=z\ (\because ㉠)\\&=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\end{aligned}$$

260 ··· 답 ⑤

① $\frac{\sqrt{-4}}{\sqrt{-2}}=\frac{\sqrt{4}i}{\sqrt{2}i}=\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$ (참)

② $\frac{\sqrt{-9}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{9}i}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}i$ (참)

③ $\sqrt{-2}\sqrt{-5}=\sqrt{2}i\sqrt{5}i=-\sqrt{10}$ (참)

④ $\sqrt{-12}-\sqrt{-3}=2\sqrt{3}i-\sqrt{3}i=\sqrt{3}i$ (참)

⑤ $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{-2}}=\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}i}=\frac{2}{i}=-2i$ (거짓)

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

다른 풀이

① $\frac{\sqrt{-4}}{\sqrt{-2}}=\sqrt{\frac{-4}{-2}}=\sqrt{2}$ (참)

② $\frac{\sqrt{-9}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{-9}{3}}=\sqrt{-3}=\sqrt{3}i$ (참)

③ $\sqrt{-2}\sqrt{-5}=-\sqrt{(-2)\times(-5)}=-\sqrt{10}$ (참)

⑤ $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{-2}}=-\sqrt{\frac{8}{-2}}=-\sqrt{-4}=-2i$ (거짓)

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

261 ··· 답 ③

$a<0$, $b>0$에 대하여 $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=-\sqrt{\frac{b}{a}}$이므로

$\sqrt{\frac{4}{-1}}=-\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{-1}}$이다.

따라서 등호를 잘못 사용한 곳은 ③이다.

262 ··· 답 ①

$\sqrt{-2}\sqrt{-8}+\frac{\sqrt{-6}\sqrt{8}}{\sqrt{-3}}+\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{-2}}$

$=-\sqrt{(-2)\times(-8)}+\sqrt{\frac{-6}{-3}}\times\sqrt{8}-\sqrt{\frac{32}{-2}}$

$=-\sqrt{16}+\sqrt{2}\times2\sqrt{2}-\sqrt{-16}$

$=-4+4-4i=-4i$

다른 풀이

$\sqrt{-2}\sqrt{-8}+\frac{\sqrt{-6}\sqrt{8}}{\sqrt{-3}}+\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{-2}}$

$=\sqrt{2}i\times2\sqrt{2}i+\frac{\sqrt{6}i\times2\sqrt{2}}{\sqrt{3}i}+\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}i}$

$=-4+4-4i=-4i$

263 ··· 답 ①

$x^2-9x-36=0$에서 $(x+3)(x-12)=0$

$\therefore$ $x=-3$ 또는 $x=12$

$\alpha=-3$, $\beta=12$라 하면

$\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}+\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}=\frac{\sqrt{-3}}{\sqrt{12}}+\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{-3}}=\sqrt{\frac{-3}{12}}-\sqrt{\frac{12}{-3}}$

$=\frac{i}{2}-2i=-\frac{3}{2}i$

다른 풀이

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=9$, $\alpha\beta=-36$

$\therefore$ $\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}+\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}=\frac{\alpha+\beta}{\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}}=\frac{\alpha+\beta}{\sqrt{\alpha\beta}}=\frac{9}{6i}=-\frac{3}{2}i$

264 ··· 답 ④

$\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$이므로 $a<0$, $b<0$이다.

따라서 복소수 $\sqrt{a}-\sqrt{-b}$의 허수부분은 $\sqrt{-a}$이므로

$\sqrt{a}-\sqrt{-b}$의 켤레복소수는 $-\sqrt{a}-\sqrt{-b}$이다.

265 ··· 답 ①

$\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=-\sqrt{\frac{b}{a}}$에서 $a<0$, $b>0$이므로

$-a>0$, $\frac{a}{b}<0$, $a^2b>0$이다.

따라서 $\sqrt{-a}+\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{a^2b}$에서

실수부분은 $\sqrt{-a}+\sqrt{a^2b}$이고, 허수부분은 $\sqrt{-\frac{a}{b}}$이다.

266 ··· 답 ⑤

$a>b>0$에서 $-a<0$, $a-b>0$, $b-a<0$이므로

$\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{a}}-\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{b-a}}=\sqrt{\frac{-a}{a}}+\sqrt{\frac{a-b}{b-a}}=\sqrt{-1}+\sqrt{-1}$

$=i+i=2i$

다른 풀이

$a>b>0$에서 $b-a<0$이므로

$\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{a}}-\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{b-a}}=\frac{\sqrt{a}i}{\sqrt{a}}-\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a-b}i}$

$=i-\frac{1}{i}=i-(-i)=2i$

267 ··· 답 ②

$x^2-3x+3=0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha^2-3\alpha+3=0$, $\beta^2-3\beta+3=0$에서

$\alpha^2-3\alpha=-3$, $\beta^2-3\beta=-3$이다.

$\therefore$ $\frac{2+9\beta-3\beta^2}{2\alpha^2-6\alpha+9}=\frac{2-3(\beta^2-3\beta)}{2(\alpha^2-3\alpha)+9}$

$=\frac{2-3\times(-3)}{2\times(-3)+9}=\frac{11}{3}$

268 ··· 답 (1) 1, 2 (2) 1

(1) 이차방정식 $x^2+(2k-1)x+k^2-2=0$의 판별식을 D라 할 때, 실근을 가지려면 $D\geq0$이어야 한다.

$D=(2k-1)^2-4(k^2-2)=-4k+9\geq0$

즉, $k\leq\frac{9}{4}$이어야 한다.

따라서 자연수 k의 값은 1, 2이다.

Ⅱ 방정식과 부등식

(2) 이차방정식 $(1+k^2)x^2-2(1+k)x+2=0$의 판별식을 D라 할 때, 실근을 가지려면 $D\geq 0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=(1+k)^2-2(1+k^2)=-(k-1)^2\geq 0$

즉, $(k-1)^2\leq 0$이어야 한다.

이때 자연수 k에 대하여 $(k-1)^2\geq 0$이므로 $k-1=0$

$\therefore k=1$

269 ······ 답 ③

이차방정식 $x^2-4ax+4a^2+a+3=0$의 판별식을 D라 할 때, 서로 다른 두 허근을 가져야 하므로 $D<0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=(-2a)^2-(4a^2+a+3)<0$

$-a-3<0$에서 $a>-3$

따라서 정수 a의 최솟값은 -2이다.

다른 풀이

$x^2-4ax+4a^2+a+3=0$에서 $(x-2a)^2=-a-3$이므로

서로 다른 두 허근을 갖기 위해선

$-a-3<0$, 즉 $a>-3$이어야 한다.

따라서 정수 a의 최솟값은 -2이다.

270 ······ 답 ③

주어진 방정식이 이차방정식이므로 $k\neq 0$

이차방정식 $kx^2-2kx+3=0$ ······ ㉠

의 판별식을 D라 할 때, 중근을 가져야 하므로 $D=0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=k^2-3k=0,\ k(k-3)=0$

$\therefore k=3\ (\because k\neq 0)$

㉠에 $k=3$을 대입하면

$3x^2-6x+3=0,\ 3(x-1)^2=0$

$\therefore \alpha=1$

$\therefore k+\alpha=3+1=4$

271 ······ 답 ①

$3|x|^2-5|x|-2=(3|x|+1)(|x|-2)=0$에서

$|x|=-\frac{1}{3}$ 또는 $|x|=2$

이때 $|x|\geq 0$이므로 $|x|=2$이다.

즉, $x=\pm 2$이므로 구하는 모든 실근의 곱은 -4이다.

272 ······ 답 ③

(i) $x\geq -1$일 때,

$x^2-2|x+1|-6=0$에서

$x^2-2x-8=0,\ (x+2)(x-4)=0$

$\therefore x=4\ (\because x\geq -1)$

(ii) $x<-1$일 때,

$x^2-2|x+1|-6=0$에서

$x^2+2x-4=0$

$\therefore x=-1-\sqrt{5}\ (\because x<-1)$

(i), (ii)에서 구하는 모든 실근의 합은

$4+(-1-\sqrt{5})=3-\sqrt{5}$

273 ······ 답 ④

이차방정식 $x^2+2x+a-2=0$의 판별식을 D_1이라 할 때, 실근을 가지려면

$\frac{D_1}{4}=1^2-(a-2)\geq 0,\ a\leq 3$ ······ ㉠

이차방정식 $x^2-4x+3a+10=0$의 판별식을 D_2라 할 때, 실근을 가지려면

$\frac{D_2}{4}=(-2)^2-(3a+10)\geq 0,\ 3a\leq -6,\ a\leq -2$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 둘 중 하나의 조건만 만족해야 하므로 $-2<a\leq 3$일 때, 이차방정식 $x^2+2x+a-2=0$은 실근을 가지고 이차방정식 $x^2-4x+3a+10=0$은 허근을 갖는다.

따라서 $-2<a\leq 3$인 모든 정수 a의 값의 합은

$(-1)+0+1+2+3=5$

274 ······ 답 ③

방정식 $-3x^2+6x+1=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=-\frac{1}{3}$

① $\alpha+\beta=2$ (참)

② $\alpha\beta=-\frac{1}{3}$ (참)

③ $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=2^2-2\times\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{14}{3}$ (거짓)

④ $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=2^3-3\times\left(-\frac{1}{3}\right)\times 2=10$ (참)

⑤ $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{2}{-\frac{1}{3}}=-6$ (참)

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

275 ······ 답 ④

방정식 $x^2-5x+2=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=5,\ \alpha\beta=2$

$\therefore \left(1+\frac{2}{\alpha}\right)\left(1+\frac{2}{\beta}\right)=1+\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}+\frac{4}{\alpha\beta}$

$=1+\frac{2(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}+\frac{4}{\alpha\beta}$

$=1+\frac{2\times 5}{2}+\frac{4}{2}=8$

276 ······ 답 (1) 13 (2) $-\frac{1}{7}$

이차방정식 $x^2+3x-5=0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha^2+3\alpha-5=0$, $\beta^2+3\beta-5=0$ ······ ㉠

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-3$, $\alpha\beta=-5$ ······ ㉡

(1) $(\alpha^2+2\alpha-2)(\beta^2+2\beta-2)$

$=\{(\alpha^2+3\alpha-5)-\alpha+3\}\{(\beta^2+3\beta-5)-\beta+3\}$

$=(-\alpha+3)(-\beta+3)$ ($\because$ ㉠)

$=\alpha\beta-3(\alpha+\beta)+9$

$=(-5)-3\times(-3)+9=13$ ($\because$ ㉡)

(2) $\dfrac{1}{(\alpha^2+4\alpha-4)(\beta^2+4\beta-4)}$

$=\dfrac{1}{\{(\alpha^2+3\alpha-5)+\alpha+1\}\{(\beta^2+3\beta-5)+\beta+1\}}$

$=\dfrac{1}{(\alpha+1)(\beta+1)}$ ($\because$ ㉠)

$=\dfrac{1}{\alpha\beta+\alpha+\beta+1}=\dfrac{1}{(-5)+(-3)+1}$ ($\because$ ㉡)

$=-\dfrac{1}{7}$

277 ······ 답 4

이차방정식 $f(x)-3x+2=0$의 두 근 α, β에 대하여

$\alpha+\beta=-4$, $\alpha\beta=-2$이므로

$f(x)-3x+2=a(x^2+4x-2)$ $(a\neq0)$

$f(x)=a(x^2+4x-2)+3x-2$ ······ ㉠

$f(0)=2$이므로

$f(0)=-2a-2=2$에서 $a=-2$

이를 ㉠에 대입하면

$f(x)=-2(x^2+4x-2)+3x-2$

$=-2x^2-5x+2$

$\therefore f(-2)=-2\times(-2)^2-5\times(-2)+2=4$

278 ······ 답 ④

이차방정식의 계수가 모두 실수이므로 한 근이 $1+2i$이면 다른 한 근은 그 켤레복소수인 $1-2i$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은

$(1+2i)+(1-2i)=-(a+b)$에서 $a+b=-2$ ······ ㉠

두 근의 곱은

$(1+2i)(1-2i)=a^2+b^2$에서 $a^2+b^2=5$ ······ ㉡

이때 $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$에 ㉠, ㉡을 대입하면

$(-2)^2=5+2ab$에서 $ab=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore \dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}=\dfrac{a^2+b^2}{ab}$

$=\dfrac{5}{-\frac{1}{2}}=-10$

279 ······ 답 ④

이차방정식 $2x^2+8x-3k=0$의 두 근을 α, β라 할 때,

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-4$, $\alpha\beta=-\dfrac{3}{2}k$

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$이고 $|\alpha-\beta|=k$이므로

$k^2=(-4)^2-4\times\left(-\dfrac{3}{2}k\right)=16+6k$

$k^2-6k-16=0$, $(k+2)(k-8)=0$

$\therefore k=|\alpha-\beta|=8$ ($\because k>0$)

280 ······ 답 ③

x에 대한 이차방정식 $x^2-(2k+1)x+(k^2+1)=0$의 판별식을 D라 할 때, 서로 다른 두 실근을 가지려면

$D=(2k+1)^2-4(k^2+1)=4k-3>0$

$\therefore k>\dfrac{3}{4}$ ······ ㉠

한편, 주어진 이차방정식의 두 근의 비가 1 : 2이므로

두 근을 α, 2α (α는 양수)라 하면

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+2\alpha=2k+1$에서 $\alpha=\dfrac{2k+1}{3}$ ······ ㉡

$\alpha\times2\alpha=k^2+1$에서 $2\alpha^2=k^2+1$ ······ ㉢

㉡을 ㉢의 식에 대입하면 $2\left(\dfrac{2k+1}{3}\right)^2=k^2+1$

$2(2k+1)^2=9(k^2+1)$, $k^2-8k+7=0$

$(k-1)(k-7)=0$ $\therefore k=1$ 또는 $k=7$

이때 $k=1$과 $k=7$은 모두 ㉠을 만족시키고, ㉡에서

$2k+1>0$이므로

구하는 모든 실수 k의 값의 합은

$1+7=8$이다.

281 ······ 답 ①

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을 α, β라 하면

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=5$, $\alpha\beta=-5$

$f(3x+1)=0$의 두 근은 $3x+1=\alpha$, $3x+1=\beta$에서

$\dfrac{\alpha-1}{3}$, $\dfrac{\beta-1}{3}$이다.

이때 $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=25+20=45$에서

$|\alpha-\beta|=3\sqrt{5}$이므로 방정식 $f(3x+1)=0$의 두 근의 차는

$\left|\dfrac{\alpha-1}{3}-\dfrac{\beta-1}{3}\right|=\dfrac{|\alpha-\beta|}{3}=\dfrac{3\sqrt{5}}{3}=\sqrt{5}$

다른 풀이

$f(x)=x^2-5x-5$에서 x 대신 $3x+1$을 대입하면

$f(3x+1)=(3x+1)^2-5(3x+1)-5$

$=9x^2-9x-9$

따라서 이차방정식 $f(3x+1)=0$, 즉 $9x^2-9x-9=0$의 두 근을 α, β라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=1,\ \alpha\beta=-1$

$\therefore\ |\alpha-\beta|=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}$

$=\sqrt{1^2-4\times(-1)}=\sqrt{5}$

282

답 (1) $x^2-4x+3=0$ (2) $x^2-x-1=0$

이차방정식 $x^2-3x+1=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=3,\ \alpha\beta=1$이다.

(1) 두 근이 $\alpha+\beta,\ \alpha\beta$이고 이차항의 계수가 1인 이차방정식은
$(x-3)(x-1)=0$, 즉 $x^2-4x+3=0$이다.

(2) $(\alpha-1)+(\beta-1)=\alpha+\beta-2=3-2=1$,
$(\alpha-1)(\beta-1)=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1=1-3+1=-1$이므로
두 근이 $\alpha-1,\ \beta-1$이고 이차항의 계수가 1인 이차방정식은
$x^2-x-1=0$이다.

다른 풀이

(2) $f(x)=x^2-3x+1$이라 할 때, 방정식 $f(x)=0$의 두 근이 α, β이므로 방정식 $f(x+1)=0$의 두 근은 $\alpha-1,\ \beta-1$이다.

$f(x+1)=(x+1)^2-3(x+1)+1$

$=(x^2+2x+1)-3x-3+1$

$=x^2-x-1$

이므로 구하는 이차방정식은 $x^2-x-1=0$이다.

283

답 ⑤

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta=\frac{c}{a}$

따라서 두 근이 $\frac{1}{\alpha},\ \frac{1}{\beta}$이고 이차항의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)x+\frac{1}{\alpha\beta}=0,\ x^2+\left(\boxed{-\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}}\right)x+\frac{1}{\alpha\beta}=0$

위 식에 $\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta=\frac{c}{a}$를 대입하면

$x^2+\frac{b}{c}x+\frac{a}{c}=0$

이때 양변에 c를 곱하면 $cx^2+(\boxed{b})x+(\boxed{a})=0$이다.

따라서 (가) $-\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$, (나) b, (다) a이다.

TIP

이차방정식 $ax^2+bx+c=0\ (ac\neq0)$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이면
이차방정식 $cx^2+bx+a=0$의 두 근은 $\frac{1}{\alpha},\ \frac{1}{\beta}$이다.

284

답 ③

이차방정식 $x^2-kx+k+1=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 할 때,
두 근의 부호가 서로 다르므로 $\alpha\beta<0$이다.
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha\beta=k+1$이므로
$k+1<0$에서 $k<-1$

TIP

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 서로 다른 부호의 두 실근을
가지면 판별식 $D>0$이고, 두 근의 곱이 음수이다.
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱이 음수이면
$\frac{c}{a}<0$, 즉 $ac<0$이다.
이때 판별식 $D=b^2-4ac$에서 $b^2\geq0$이고 $ac<0$에서
$-4ac>0$이므로 $D>0$을 만족시킨다.
따라서 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 서로 다른 부호의 두
실근을 가지기 위해서는 두 근의 곱이 음수인 것, 즉 $\frac{c}{a}<0$만을
보이면 된다.

285

답 ③

이차방정식 $x^2+(k^2-k-6)x-2k+3=0$의 두 실근을 $\alpha,\ \beta$라 하면
두 실근의 절댓값은 같고 부호는 서로 다르므로
$\alpha\beta<0,\ \alpha+\beta=0$을 만족시켜야 한다.
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-(k^2-k-6)=0$ …… ㉠

$\alpha\beta=-2k+3<0$ …… ㉡

㉠에서 $(k+2)(k-3)=0$이므로
$k=-2$ 또는 $k=3$

㉡에서 $k>\frac{3}{2}$

$\therefore\ k=3$

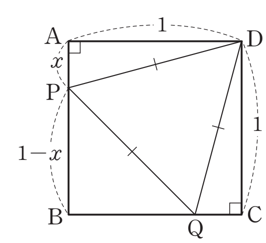
TIP

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 실근이 절댓값은 같고
부호가 서로 다르면 한 실근이 α일 때 다른 실근은 $-\alpha$이므로
두 근의 합은 0이고, 두 근의 곱은 음수이다.
따라서 $ax^2+bx+c=0$의 두 실근이 절댓값은 같고 부호가 서로
다르면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$b=0,\ \frac{c}{a}<0$임을 보이면 된다.

286

답 $2-\sqrt{3}$

$\overline{AP}=x\ (0<x<1)$라 하면 $\overline{BP}=1-x$



한편, 두 삼각형 PAD, QCD는
$\angle A=\angle C=90^\circ,\ \overline{PD}=\overline{QD},\ \overline{AD}=\overline{CD}=1$
이므로 서로 합동이다.
따라서 $\overline{CQ}=\overline{AP}=x$이므로 $\overline{BQ}=1-x$
직각이등변삼각형 PBQ에서 $\overline{PQ}=\sqrt{2}(1-x)$

직각삼각형 PAD에서 $\overline{PD}=\sqrt{x^2+1}$
정삼각형 PQD에서 $\overline{PQ}=\overline{PD}$이므로
$\sqrt{2}(1-x)=\sqrt{x^2+1}$, $2(1-x)^2=x^2+1$
$x^2-4x+1=0$
$\therefore x=2-\sqrt{3}$ ($\because 0<x<1$)

287

답 ①

올해 밭의 총넓이는 $10\times10+500=600$이므로
$(10+x)(10+x-10)=600$에서
$x^2+10x-600=0$, $(x+30)(x-20)=0$
$\therefore x=-30$ 또는 $x=20$
이때 $x>10$이므로 $x=20$이다.

288

답 ⑤

$z=\dfrac{3-i}{1+i}=\dfrac{(3-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{2-4i}{2}=1-2i$이므로
$z-1=-2i$에서 $(z-1)^3=(-2i)^3$
$z^3-3z^2+3z-1=8i$
$z^3-3z^2+4z+1=(z^3-3z^2+3z-1)+z+2$
$=8i+(1-2i)+2=3+6i$
$3+6i=a+bi$에서 $a=3$, $b=6$
$\therefore a+b=3+6=9$

다른 풀이

$z=\dfrac{3-i}{1+i}=\dfrac{(3-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{2-4i}{2}=1-2i$이므로
$(z-1)^2=(-2i)^2$에서 $z^2-2z+5=0$
$z^3-3z^2+4z+1=(z^2-2z+5)(z-1)-3z+6$
$=-3z+6$
$=3+6i$
$3+6i=a+bi$에서 $a=3$, $b=6$
$\therefore a+b=3+6=9$

289

답 4

$z=(1+2i)x^2-(7+16i)x+12+30i$
$=(x^2-7x+12)+(2x^2-16x+30)i$
$=(x-3)(x-4)+2(x-3)(x-5)i$
이므로 $z^2<0$이기 위해서는 z가 순허수, 즉
(실수부분)$=(x-3)(x-4)=0$
(허수부분)$=2(x-3)(x-5)\neq0$
이어야 한다.
$\therefore x=4$

참고

$z^2>0$, 즉 z가 0이 아닌 실수이기 위해서는 $x=5$
$z^2=0$, 즉 $z=0$이기 위해서는 $x=3$
$z^2<0$, 즉 z가 순허수이기 위해서는 $x=4$이어야 한다.

290

답 18

조건 (가)에서 $(1-i+z)^2<0$이므로
$1-i+z$는 순허수이다.
즉, $1-i+a+bi=(a+1)+(b-1)i$가 순허수이므로
$a=-1$, $b\neq1$
조건 (나)에서
$z^2=(a+bi)^2=(-1+bi)^2=1-b^2-2bi=c-8i$
복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$1-b^2=c$, $-2b=-8$이므로 $b=4$, $c=-15$
$\therefore a+b-c=(-1)+4-(-15)=18$

291

답 ②

$\{a(1+i)+b(1-i)\}^2=-4<0$이므로
복소수 $a(1+i)+b(1-i)$는 순허수이다.
$a(1+i)+b(1-i)=(a+b)+(a-b)i$에서
$a+b=0$ …… ㉠
이때 $\{(a-b)i\}^2=-4$이므로
$a-b=2$ 또는 $a-b=-2$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a=1$, $b=-1$ 또는 $a=-1$, $b=1$이므로
$ab=(-1)\times1=-1$

다른 풀이

$a(1+i)+b(1-i)$가 -4의 제곱근이므로
$a(1+i)+b(1-i)$는 $2i$ 또는 $-2i$이다.
(i) $(a+b)+(a-b)i=2i$일 때
$a+b=0$이고 $a-b=2$이므로
$a=1$, $b=-1$
(ii) $(a+b)+(a-b)i=-2i$일 때
$a+b=0$이고 $a-b=-2$이므로
$a=-1$, $b=1$
(i), (ii)에 의하여 $ab=-1$이다.

292

답 ②

$2(k-2i)+k^2-35+ki=(k^2+2k-35)+(k-4)i$
이므로 이 복소수를 제곱해서 실수가 되려면
실수부분이 0이거나 허수부분이 0이 되어야 한다.
(i) (실수부분)$=0$인 경우
$k^2+2k-35=0$, $(k+7)(k-5)=0$에서
$k=-7$ 또는 $k=5$
(ii) (허수부분)$=0$인 경우
$k-4=0$에서 $k=4$
(i), (ii)에 의하여 모든 실수 k의 값의 합은
$(-7)+5+4=2$

293

답 ③

$z_1=1+i$
$z_2=iz_1=i(1+i)=i+i^2=i-1$

$z_3=iz_2=i(i-1)=i^2-i=-1-i$
$z_4=iz_3=i(-1-i)=-i-i^2=-i+1$
$z_5=iz_4=i(-i+1)=-i^2+i=1+i$
$\vdots$
이므로 $z_n=z_{n+4}$이다.
$\therefore\ z_{1000}=z_{996}=z_{992}=\cdots=z_4=1-i$

다른 풀이

$z_2=iz_1$
$z_3=iz_2=i^2z_1$
$z_4=iz_3=i^3z_1$
$z_5=iz_4=i^4z_1=z_1$ ($\because\ i^4=1$)
$\vdots$
따라서 $z_{n+4}=z_n$이다.
이때 $1000=4\times250$이므로
$z_{1000}=z_4=i^3z_1=-i(1+i)=1-i$

294 ········ 답 ②

$z_1=2+i$

$z_2=\dfrac{1}{1-z_1}=\dfrac{1}{1-(2+i)}=\dfrac{-1+i}{2}$

$z_3=\dfrac{1}{1-z_2}=\dfrac{1}{1-\dfrac{-1+i}{2}}=\dfrac{3+i}{5}$

$z_4=\dfrac{1}{1-z_3}=\dfrac{1}{1-\dfrac{3+i}{5}}=2+i=z_1$

$\vdots$
이므로 $z_n=z_{n+3}$이다.
이때 $50=3\times16+2$이므로
$z_{50}=z_2=\dfrac{i-1}{2}$

295 ········ 답 ③, ④

① $\alpha=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\overline{\alpha}=a-bi$에서
$\alpha+\overline{\alpha}=(a+bi)+(a-bi)=2a=0$이므로
$\alpha=bi$이고 $\alpha^2=-b^2\le0$ (거짓)
② $\alpha=1+i$, $\beta=2-i$이면 $\alpha+\beta$는 실수이지만 $\beta\ne\overline{\alpha}$이다. (거짓)
③ $\alpha\overline{\alpha}=1$이면 $\overline{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha}$이므로 $\alpha+\dfrac{1}{\alpha}=\alpha+\overline{\alpha}$는 실수이다. (참)
④ $\alpha=0$인 경우는 참이므로 $\alpha\ne0$인 경우를 생각해보면
$\alpha\beta=0$에서 $\dfrac{1}{\alpha}\times\alpha\beta=\dfrac{1}{\alpha}\times0$, 즉 $\beta=0$이다.
따라서 $\alpha\beta=0$이면 $\alpha=0$ 또는 $\beta=0$이다. (참)
⑤ $\alpha=1$, $\beta=i$이면 $\alpha^2+\beta^2=0$이지만 $\alpha\ne0$, $\beta\ne0$이다. (거짓)
따라서 옳은 것은 ③, ④이다.

296 ········ 답 ⑤

$z=a+bi$ (a, b는 실수, $a>0$)라 하면 $\overline{z}=a-bi$
$z-\overline{z}=2bi=2i$에서 $b=1$이므로 $z=a+i$

$z^3-\overline{z}^3=(z-\overline{z})^3+3z\overline{z}(z-\overline{z})$
$=(2i)^3+3(a^2+1)\times2i$
$=-8i+6(a^2+1)i=\{-8+6(a^2+1)\}i$
$=22i$
이때 복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$-8+6(a^2+1)=22$, $6(a^2+1)=30$, $a^2+1=5$
$a^2=4$ $\quad\therefore\ a=2$ ($\because\ a>0$)
따라서 $z=2+i$이므로
$z^2-\overline{z}^2=(z+\overline{z})(z-\overline{z})=4\times2i=8i$

297 ········ 답 ⑤

$z=\dfrac{1+\sqrt{7}i}{2}$에서 $\overline{z}=\dfrac{1-\sqrt{7}i}{2}$이므로
$z+\overline{z}=1$, $z\overline{z}=2$
이때 $w=\dfrac{2z-1}{z+1}$이므로
$w\overline{w}=\dfrac{2z-1}{z+1}\times\dfrac{2\overline{z}-1}{\overline{z}+1}=\dfrac{4z\overline{z}-2(z+\overline{z})+1}{z\overline{z}+(z+\overline{z})+1}$
$=\dfrac{4\times2-2\times1+1}{2+1+1}=\dfrac{7}{4}$

298 ········ 답 8

$z^2=4\sqrt{3}+4i$이므로 $\overline{z}^2=4\sqrt{3}-4i$이다.
$z^2\times\overline{z}^2=(4\sqrt{3}+4i)(4\sqrt{3}-4i)$
$=48+16=64$
$\therefore\ z\overline{z}=8$ ($\because\ z\overline{z}\ge0$) ······ **TIP**

다른 풀이

$z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면
$z^2=a^2-b^2+2abi=4\sqrt{3}+4i$
이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$a^2-b^2=4\sqrt{3}$, $ab=2$
$(a^2+b^2)^2=(a^2-b^2)^2+4a^2b^2$
$=(4\sqrt{3})^2+4\times2^2=64$
$\therefore\ z\overline{z}=a^2+b^2=8$ ($\because\ a$, b는 실수)

TIP
복소수 $z=a+bi$ (a, b는 실수)에서 $\overline{z}=a-bi$이므로
$z\overline{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2\ge0$이다.
즉, 항상 $z\overline{z}\ge0$이 성립한다.

299 ········ 답 ②

$\overline{\alpha}\beta=4$에서 $\overline{\overline{\alpha}\beta}=\alpha\overline{\beta}=4$이므로
$\beta=\dfrac{4}{\overline{\alpha}}$, $\dfrac{4}{\overline{\beta}}=\alpha$
$\therefore\ \left(\beta+\dfrac{4}{\overline{\beta}}\right)^2=\left(\dfrac{4}{\overline{\alpha}}+\alpha\right)^2=(5i)^2=-25$

300 답 ④

$z+\frac{1}{z}$이 실수이므로 $z+\frac{1}{z}=\overline{z+\frac{1}{z}}$

$\overline{z+\frac{1}{z}}=\bar{z}+\frac{1}{\bar{z}}$이므로 $\bar{z}+\frac{1}{\bar{z}}=z+\frac{1}{z}$에서

$\bar{z}-z+\frac{1}{\bar{z}}-\frac{1}{z}=0$

$\bar{z}-z-\frac{\bar{z}-z}{z\bar{z}}=(\bar{z}-z)\left(1-\frac{1}{z\bar{z}}\right)=0$

$\therefore z=\bar{z}$ 또는 $z\bar{z}=1$

이때 $z=\bar{z}$이면 z는 실수이므로

$z\bar{z}=1$

다른 풀이

$z=a+bi$ (a, b는 실수, $b\neq0$)라 하면

$$\begin{aligned} z+\frac{1}{z}&=a+bi+\frac{1}{a+bi} \\ &=a+bi+\frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} \\ &=a+bi+\frac{a-bi}{a^2+b^2} \\ &=\left(a+\frac{a}{a^2+b^2}\right)+\left(b-\frac{b}{a^2+b^2}\right)i \end{aligned}$$

이므로 $z+\frac{1}{z}$이 실수이기 위해서는 허수부분이 0이어야 한다.

즉, $b-\frac{b}{a^2+b^2}=0$에서 $b\left(1-\frac{1}{a^2+b^2}\right)=0$

$\therefore a^2+b^2=1$ ($\because b\neq0$)

$\therefore z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2=1$

301 답 ①

$z=a+bi$ (a, b는 실수, $b\neq0$)라 하면 $\bar{z}=a-bi$

$$\begin{aligned} z\bar{z}+\frac{z}{\bar{z}}&=(a+bi)(a-bi)+\frac{a+bi}{a-bi} \\ &=(a^2+b^2)+\frac{a^2-b^2+2abi}{a^2+b^2} \\ &=\left(a^2+b^2+\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)+\frac{2ab}{a^2+b^2}i=5 \end{aligned}$$ …… ㉠

이때 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$\frac{2ab}{a^2+b^2}=0$에서 $a=0$ ($\because b\neq0$)

이를 ㉠에 대입하면

$b^2-1=5$이므로 $b^2=6$

$\therefore (z-\bar{z})^2=(2bi)^2=-4b^2=-24$

302 답 9

$$\begin{aligned} z&=(1+2i)x^2-2(1-i)x-3(1+4i) \\ &=(x^2-2x-3)+(2x^2+2x-12)i \\ &=(x+1)(x-3)+2(x+3)(x-2)i \end{aligned}$$

조건 (가)에서 $z\neq\bar{z}$이려면 z는 허수이어야 하므로 $a\neq-3$, $a\neq2$이다. …… ㉠

조건 (나)에서 $z=a$, 즉 z가 실수이려면

$2(x+3)(x-2)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=2$이므로

$b=-3$ 또는 $b=2$이다.

이때 $b=2$이면 $a=-3$이므로 ㉠을 만족시키지 않고,

$b=-3$이면 $a=12$이므로 두 조건 (가), (나)를 모두 만족시킨다.

$\therefore a+b=12+(-3)=9$

303 답 ③

ㄱ. $z^4<0$이므로 z^2이 순허수이다.

$z^2=ki$ $(k\neq0)$라 하면

$\bar{z}^2=\overline{z^2}=-ki$이므로 $\bar{z}^2$은 순허수이다. (참)

ㄴ. $z=a+bi$ (a, b는 실수)에 대하여

$z^2=(a+bi)^2=a^2-b^2+2abi=(a+b)(a-b)+2abi$가

순허수이므로 $(a+b)(a-b)=0$, $2ab\neq0$이다.

즉, 0이 아닌 두 실수 a, b에 대하여

$a=b$ 또는 $a=-b$이어야 한다.

따라서 $z=a+ai$ 또는 $z=a-ai$이다. …… ㉠

이때 $z=a+ai$인 경우 z의 실수부분과 허수부분은 같지만,

$z=a-ai$인 경우 z의 실수부분과 허수부분은 같지 않다. (거짓)

ㄷ. ㉠에서 $z=a\pm ai$ $(a\neq0)$라 하면 $\bar{z}=a\mp ai$ (복부호동순)이므로

$z+\bar{z}=4$에서 $2a=4$, $a=2$이다.

즉, $z=2\pm2i$, $\bar{z}=2\mp2i$ (복부호동순)이므로 $z\bar{z}=4+4=8$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

304 답 25

$z=\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$

$z^2=\left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)^2=-i$

$z^4=(z^2)^2=(-i)^2=-1$

$z^8=(z^4)^2=(-1)^2=1$

이므로 복소수 z의 거듭제곱은 z, z^2, $\cdots$, z^8의 값이 반복된다.

따라서 $z^n=1$을 만족시키는 자연수 n은

$n=8k$ (k는 자연수) 꼴이므로 $1\leq n\leq200$을 만족시키는 자연수

n은 8×1, 8×2, $\cdots$, 8×25의 25개이다.

305 답 ②

$$\begin{aligned} &i-3i^2+5i^3-7i^4+\cdots-99i^{50}+101i^{51} \\ &=\{i-3\times(-1)+5\times(-i)-7\} \\ &\quad+\{9i-11\times(-1)+13\times(-i)-15\}+\cdots+97i^{49}-99i^{50}+101i^{51} \\ &=(-4i-4)\times12+97i+99-101i \\ &=-48i-48-4i+99 \\ &=51-52i \end{aligned}$$

306 답 ①

$f(n)=ni^n-(n+1)i^{n+1}$에서

$f(1)=i-2i^2$

$f(2)=2i^2-3i^3$

$f(3)=3i^3-4i^4$

$\vdots$

$f(16)=16i^{16}-17i^{17}$

$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(16)$
$=(i-2i^2)+(2i^2-3i^3)+(3i^3-4i^4)+\cdots+(16i^{16}-17i^{17})$
$=i-17i^{17}$
$=i-17i$
$=-16i$

307 ······ 답 ⑤

ㄱ. $f(2)=i^2+i^3+i^4=-1-i+1=-i$ (참)
ㄴ. $f(n+4)=i^{n+4}+i^{n+5}+i^{n+6}$
$=i^n+i^{n+1}+i^{n+2}$ ($\because i^4=1$)
$=f(n)$ (참)
ㄷ. $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=(-1)+(-i)+1+i=0$이므로
$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(98)$
$=\{f(1)+f(2)+f(3)+f(4)\}$
$+\cdots+\{f(93)+f(94)+f(95)+f(96)\}+f(97)+f(98)$
$=f(97)+f(98)=f(1)+f(2)=-1-i$ (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

참고
자연수 n에 대하여 $i^n+i^{n+2}=0$이므로
$f(n)=i^{n+1}$이다.
이를 이용하여 문제를 풀 수도 있다.

308 ······ 답 13

8의 모든 양의 약수는 1, 2, 4, 8이므로
$f(8)=i^1+i^2+i^4+i^8=i-1+1+1=i+1$
2^m의 모든 양의 약수는 1, 2, 2^2, $\cdots$, 2^m이므로
$f(2^m)=i^1+i^2+i^{2^2}+\cdots+i^{2^m}$
이때 2^m의 모든 양의 약수의 개수는 $m+1$이고,
t가 2 이상의 자연수이면 $i^{2^t}=1$이므로
$f(2^m)=i-1+1+1+\cdots+1=i+m-2$
$f(2^m)-f(8)=10$에서
$(i+m-2)-(i+1)=10$
$\therefore m=13$

309 ······ 답 ④

두 실수 a, b $(b\neq0)$에 대하여
$z=a+bi$라 하면 $\overline{z}=a-bi$이므로
$z^2=\overline{z}$에서 $(a+bi)^2=a-bi$
$a^2-b^2+2abi=a-bi$
이때 복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$a^2-b^2=a$ ······ ㉠
$2ab=-b$ ······ ㉡
㉡에서 $2ab+b=0$, $b(2a+1)=0$
$\therefore a=-\dfrac{1}{2}$ ($\because b\neq0$)
이를 ㉠에 대입하면 $b^2=\dfrac{3}{4}$
$\therefore z+\overline{z}=2a=-1$, $z\overline{z}=a^2+b^2=1$

한편, $z^2=\overline{z}$에서 $\overline{z}^2=z$이므로
$z^3=zz^2=z\overline{z}$, $z^4=zz^3=z^2\overline{z}=\overline{z}^2=z$
$z^5=zz^4=z^2=\overline{z}$, $z^6=zz^5=z\overline{z}$
$\therefore z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1$
$=z\overline{z}+\overline{z}+z+z\overline{z}+\overline{z}+z+1$
$=2(z+\overline{z})+2z\overline{z}+1$
$=2\times(-1)+2\times1+1$
$=1$

다른 풀이
$z^2=\overline{z}$이므로 $z^4=\overline{z}^2$
이때 $\overline{z}^2=\overline{z^2}=\overline{\overline{z}}=z$이므로
$z^4=z$에서 $z^4-z=0$
$z(z-1)(z^2+z+1)=0$
$\therefore z^2+z+1=0$ ($\because z\neq0$, $z\neq1$)
$\therefore z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1$
$=z^4(z^2+z+1)+z(z^2+z+1)+1$
$=0+0+1=1$

310 ······ 답 144

$(1+i)^2=2i$
$(1+i)^4=(2i)^2=-4$
$(1+i)^8=(-4)^2=16=2^4$
$(1+i)^{8k}=2^{4k}$ (k는 자연수)
따라서 $m=8k$, $n=4k$이므로 $m=2n$ ······ ㉠
$m\leq100$, $n\leq100$이므로 m이 최댓값을 가질 때,
$m+n$이 최댓값을 갖는다.
100보다 작은 8의 배수 중 최댓값은 $8\times12=96$이므로
m의 최댓값은 96이고, 그때의 n의 값은 48이다. ($\because$ ㉠)
따라서 $m+n$의 최댓값은 $96+48=144$이다.

311 ······ 답 75

$\dfrac{1}{i}=-i$, $\dfrac{1}{i^2}=-1$, $\dfrac{1}{i^3}=i$, $\dfrac{1}{i^4}=1$이므로
$\dfrac{1}{i}-\dfrac{1}{i^2}+\dfrac{1}{i^3}-\dfrac{1}{i^4}+\cdots+\dfrac{(-1)^{n+1}}{i^n}$
$=(-i+1+i-1)+(-i+1+i-1)+\cdots+\dfrac{(-1)^{n+1}}{i^n}$
$=1-i$
가 되려면 $n=4k+2$ (k는 음이 아닌 정수) 꼴이므로
$1\leq n\leq300$에서 $1\leq4k+2\leq300$
$\therefore -\dfrac{1}{4}\leq k\leq\dfrac{149}{2}=74.5$
위 부등식을 만족시키는 음이 아닌 정수 k의 개수가 75이므로
구하는 자연수 n의 개수는 75이다.

312 ······ 답 24

$z^2=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^2=\dfrac{2}{-2i}=i$
$z^4=i^2=-1$

$z^8=(-1)^2=1$이고,

$w^2=\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

$w^3=w\times w^2=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\times\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}=\dfrac{1+3}{4}=1$

이때 등식 $z^n=w^n$이 성립하려면

n은 3과 8의 공배수, 즉 24의 배수이어야 한다.

따라서 구하는 자연수 n의 최솟값은 24이다.

313 ··· 답 ③

$a>0$, $b<0$이므로

$\dfrac{\sqrt{25a^2}}{\sqrt{-a^2}}+2\sqrt{ab}\sqrt{ab}+\sqrt{(a+1)^2}\sqrt{-(a+1)^2}$

$=-\sqrt{\dfrac{25a^2}{-a^2}}-2\sqrt{(ab)^2}+(a+1)\times(a+1)i$

$=-5i+2ab+(a^2+2a+1)i$

$=2ab+(a^2+2a-4)i$

즉, $2ab+(a^2+2a-4)i=-24+4i$이므로

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$2ab=-24$에서 $ab=-12$ ······ ㉠

$a^2+2a-4=4$에서 $a^2+2a-8=0$, $(a+4)(a-2)=0$

$\therefore a=2$ ($\because a>0$), $b=-6$ ($\because$ ㉠)

$\therefore a+b=2+(-6)=-4$

314 ··· 답 ②

$\sqrt{x}\sqrt{y}=-\sqrt{xy}$에서 $x<0$, $y<0$이고,

$\dfrac{\sqrt{z}}{\sqrt{y}}=-\sqrt{\dfrac{z}{y}}$에서 $z>0$이다.

따라서 $x+y<0$, $z-y>0$, $x-z<0$이므로

$|x+y|+\sqrt{(z-y)^2}-|x-z|$

$=-(x+y)+(z-y)-\{-(x-z)\}$

$=-2y$

315 ··· 답 ④

$\sqrt{x}\sqrt{x+4}=-\sqrt{x^2+4x}$가 성립하려면

$x<0$, $x+4<0$을 동시에 만족시키거나

$x=0$ 또는 $x=-4$이므로 $x=0$, $x\le-4$ ······ ㉠

$\dfrac{\sqrt{x+6}}{\sqrt{x-5}}=-\sqrt{\dfrac{x+6}{x-5}}$이 성립하려면

$x+6>0$, $x-5<0$을 동시에 만족시키거나 $x=-6$이므로

$-6\le x<5$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 x의 값의 범위는 $x=0$, $-6\le x\le-4$

이므로 이를 만족시키는 정수 x는 -6, -5, -4, 0의 4개이다.

316 ··· 답 ③

$\sqrt{\dfrac{ab}{c}}=-\dfrac{\sqrt{ab}}{\sqrt{c}}$에서 $c<0$, $ab>0$이고,

$\sqrt{b}\sqrt{c}=\sqrt{bc}$에서 $c<0$이므로 $b>0$이다.

$\therefore a>0$, $b>0$, $c<0$

ㄱ. $a>0$, $b>0$이므로 $|a+b|=a+b=|a|+|b|$ (참)

ㄴ. $a>0$, $b>0$, $c<0$이므로

$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}\sqrt{c}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{bc}}=-\sqrt{\dfrac{a}{bc}}$ (참)

ㄷ. $a>0$, $b>0$, $c<0$이므로

$\sqrt{-a}\sqrt{-b}\sqrt{-c}=-\sqrt{(-a)\times(-b)}\sqrt{-c}$

$=-\sqrt{-abc}$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

317 ··· 답 7

두 실수 x, y의 곱이 양수이고 $x+3y<0$이므로

$x<0$, $y<0$이다.

$\therefore \sqrt{\dfrac{x}{3y}}+\sqrt{\dfrac{3y}{x}}=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{3y}}+\dfrac{\sqrt{3y}}{\sqrt{x}}$

$=\dfrac{\sqrt{x}\sqrt{x}+\sqrt{3y}\sqrt{3y}}{\sqrt{3y}\sqrt{x}}$

$=\dfrac{x+3y}{-\sqrt{3xy}}=\dfrac{-21}{-3}=7$

다른 풀이

$x+3y=-21$ ······ ㉠

$xy=3$ ······ ㉡

이므로 $x<0$, $y<0$

㉠에서 $x=-21-3y$이므로 ㉡에 대입하여 정리하면

$y^2+7y+1=0$

양변을 y로 나누면 $y+\dfrac{1}{y}=-7$ ······ ㉢

한편, ㉡에서 $x=\dfrac{3}{y}$이므로

$\sqrt{\dfrac{x}{3y}}+\sqrt{\dfrac{3y}{x}}=\sqrt{\dfrac{1}{y^2}}+\sqrt{y^2}$

$=-\dfrac{1}{y}-y$ ($\because y<0$)

$=-\left(y+\dfrac{1}{y}\right)=7$ ($\because$ ㉢)

318 ··· 답 ④

이차방정식 $x^2-2(k-a)x+k^2-4k+b=0$의 판별식을 D라 하면

중근을 가지므로

$\dfrac{D}{4}=(k-a)^2-(k^2-4k+b)$

$=2k(2-a)+a^2-b=0$

위 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$2-a=0$에서 $a=2$

$a^2-b=0$에서 $4-b=0$이므로 $b=4$

$\therefore ab=2\times4=8$

319 ··· 답 ②

$x=\dfrac{b\pm\sqrt{b^2+ac}}{a}$로 잘못 구한 한 근이 $1+i$이므로

나머지 한 근은 $1-i$이다.

$\frac{b+\sqrt{b^2+ac}}{a}+\frac{b-\sqrt{b^2+ac}}{a}=(1+i)+(1-i)$에서

$\frac{2b}{a}=2 \quad \therefore b=a$

$\frac{b+\sqrt{b^2+ac}}{a}\times\frac{b-\sqrt{b^2+ac}}{a}=(1+i)\times(1-i)$에서

$\frac{b^2-(b^2+ac)}{a^2}=2 \quad \therefore c=-2a$

$\therefore ax^2+bx+c=ax^2+ax-2a$
$=a(x^2+x-2)$
$=a(x+2)(x-1)=0$

따라서 바르게 구한 두 근은 $\alpha=1$, $\beta=-2$ ($\because \alpha>\beta$)이므로

$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{-2}{1}=-2$

320

답 $\alpha=\frac{3}{2}$, $\beta=-\frac{1}{2}$

이차방정식 $x^2-2px+q=0$의 판별식을 D라 하면 이 이차방정식이 중근을 가지므로

$\frac{D}{4}=p^2-q=0$, $q=p^2$ ...... ㉠

이를 위의 이차방정식에 대입하면

$x^2-2px+p^2=(x-p)^2=0$에서 $\alpha=p$이다.

이차방정식 $3x^2-2px+q-5p+3=0$이 $\alpha=p$를 근으로 가지므로 이를 대입하면

$3p^2-2p\times p+p^2-5p+3=0$ ($\because$ ㉠)

$2p^2-5p+3=(2p-3)(p-1)=0$에서 $p=\frac{3}{2}$ 또는 $p=1$

이때 $p=1$이면 ㉠에서 $p=q=1$이므로 p, q가 서로 다른 실수라는 조건에 모순이다. 즉, $p=\frac{3}{2}$, $q=\frac{9}{4}$이다.

이를 방정식 $3x^2-2px+q-5p+3=0$에 대입하면

$3x^2-2\times\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}-5\times\frac{3}{2}+3=0$

$3x^2-3x-\frac{9}{4}=0$, $4x^2-4x-3=0$

$(2x+1)(2x-3)=0$에서 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{2}$

$\therefore \alpha=\frac{3}{2}$, $\beta=-\frac{1}{2}$

321

답 ③

x에 대한 방정식 $(1-n)x^2+2\sqrt{2}x-1=0$에 대하여

(i) $n=1$인 경우

주어진 방정식은 $2\sqrt{2}x-1=0$이므로 $x=\frac{1}{2\sqrt{2}}$이다.

$\therefore f(1)=1$

(ii) $n\neq1$인 경우

주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(\sqrt{2})^2-(-1)\times(1-n)=3-n$이므로

$f(0)=f(2)=2$, $f(3)=1$, $f(4)=0$

(i), (ii)에 의하여

$f(0)+f(1)+f(2)+f(3)+f(4)$
$=2+1+2+1+0=6$

322

답 ④

이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 판별식을 D라 할 때, 두 허근을 가지므로

$D=a^2-4b<0$

$\therefore b>\frac{a^2}{4}$ ...... ㉠

ㄱ. 방정식 $x^2+2bx-a^2=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=b^2+a^2>\frac{a^4}{16}+a^2$ ($\because$ ㉠)

이때 $\frac{a^4}{16}+a^2\geq0$이므로 $D_1>0$

즉, 서로 다른 두 실근을 갖는다.

ㄴ. 방정식 $x^2+ax+3b=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=a^2-12b<a^2-3a^2$ ($\because$ ㉠)

$=-2a^2\leq0$

즉, 서로 다른 두 허근을 갖는다.

ㄷ. 방정식 $x^2+2(a^2-4b)x-4b=0$의 판별식을 D_3이라 하면

$\frac{D_3}{4}=(a^2-4b)^2+4b>0$ ($\because$ $(a^2-4b)^2>0$이고 $b>0$)

즉, 서로 다른 두 실근을 갖는다.

따라서 항상 서로 다른 두 실근을 갖는 방정식은 ㄱ, ㄷ이다.

323

답 4

$|x^2-(2a+1)x+3a+1|=2$의 한 근이 a가 되려면

$|a^2-(2a+1)a+3a+1|=2$

$|a^2-2a-1|=2$에서

$a^2-2a-1=2$ 또는 $a^2-2a-1=-2$

$a^2-2a-3=0$ 또는 $a^2-2a+1=0$

$(a+1)(a-3)=0$ 또는 $(a-1)^2=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=3$ 또는 $a=1$

따라서 구하는 모든 양수 a의 값의 합은

$3+1=4$

324

답 $-\sqrt{5}$, 3

방정식 $x^2+2|x|-7=2\sqrt{(x+1)^2}$에서

$x^2+2|x|-7=2|x+1|$

(i) $x<-1$일 때

$x^2-2x-7=-2(x+1)$에서 $x^2=5$

$\therefore x=-\sqrt{5}$ ($\because x<-1$)

(ii) $-1\leq x<0$일 때

$x^2-2x-7=2(x+1)$에서 $x^2-4x-9=0$

이때 이차방정식의 근의 공식에 의하여 $x=2\pm\sqrt{13}$이므로 $-1\leq x<0$을 만족시키는 값은 존재하지 않는다.

(iii) $x\geq0$일 때

$x^2+2x-7=2(x+1)$에서 $x^2=9 \quad \therefore x=3$ ($\because x\geq0$)

(i)~(iii)에 의하여 구하는 모든 근은 $-\sqrt{5}$, 3이다.

325

답 ②

이차방정식 $x^2+px+q=0$에서 근의 공식에 의하여

$x=\dfrac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}$ ...... ㉠

이 이차방정식이 서로 다른 두 허근을 가지므로 $p^2-4q<0$이고,

α, β는 $\dfrac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}=-\dfrac{p}{2}\pm\dfrac{\sqrt{4q-p^2}}{2}i$

이때 실수부분은 $-\dfrac{p}{2}$, 허수부분은 $\pm\dfrac{\sqrt{4q-p^2}}{2}$이다.

실수부분 $-\dfrac{p}{2}$가 정수가 되도록 하는 소수 p의 값은 2뿐이므로

$p=2$이다.

허수부분에 이를 대입하면 $\pm\dfrac{\sqrt{4q-p^2}}{2}=\pm\dfrac{\sqrt{4q-4}}{2}=\pm\sqrt{q-1}$

허수부분도 정수가 되려면 제곱근 안의 수가 제곱수가 되어야 하므로

$q-1=k^2$ (k는 자연수), $q=k^2+1$

이를 만족시키는 50 이하의 소수 q의 값은

$k=1$일 때 $q=2$, $k=2$일 때 $q=5$,

$k=4$일 때 $q=17$, $k=6$일 때 $q=37$

따라서 $p+q$의 최솟값은 $p=2$, $q=2$일 때 4이고,

최댓값은 $p=2$, $q=37$일 때 39이므로 구하는 합은

$4+39=43$

326 .... 답 ③

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근이 α, β이므로

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$, $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

$c(x-2)^2+b(x-2)+a=0$에서 $t=x-2$라 하면 ...... ㉠

$ct^2+bt+a=0$은 t에 대한 이차방정식이고,

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근이 α, β이므로

이차방정식 $ct^2+bt+a=0$의 두 근은 $t=\dfrac{1}{\alpha}$ 또는 $t=\dfrac{1}{\beta}$이다.

㉠에서 $x=t+2$이므로

이차방정식 $c(x-2)^2+b(x-2)+a=0$의 두 근은

$\dfrac{1}{\alpha}+2$, $\dfrac{1}{\beta}+2$이다.

327 .... 답 7

이차방정식 $x^2-2x-1=0$의 두 근이 α, β이므로

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=-1$

$\begin{cases} f(\alpha)=2\beta=4-2\alpha \\ f(\beta)=2\alpha=4-2\beta \end{cases}$에서

$f(\alpha)+2\alpha-4=0$, $f(\beta)+2\beta-4=0$이다.

즉, 방정식 $f(x)+2x-4=0$의 두 근이 α, β이고

$f(x)$의 이차항의 계수는 1이므로

$f(x)+2x-4=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=x^2-2x-1$

$\therefore\ f(x)=(x^2-2x-1)-2x+4$

$\qquad\quad =x^2-4x+3$

따라서 $a=-4$, $b=3$이므로

$b-a=3-(-4)=7$

328 .... 답 $a\geq\dfrac{4}{3}$

이차방정식 $ax^2-5ax+a+4=0$ $(a>0)$의 판별식을 D라 하면

이 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로

$D=25a^2-4a(a+4)>0$에서

$21a^2-16a>0$, $a\left(a-\dfrac{16}{21}\right)>0$

$\therefore\ a>\dfrac{16}{21}$ $(\because a>0)$ ...... ㉠

주어진 이차방정식의 두 실근을 α, β라 하면

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=\dfrac{5a}{a}=5$, $\alpha\beta=\dfrac{a+4}{a}=1+\dfrac{4}{a}$

이때 $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$이고 두 실근의 차가 3 이상이어야 하므로

$(\alpha-\beta)^2=5^2-4\times\left(1+\dfrac{4}{a}\right)\geq9$

$12-\dfrac{16}{a}\geq0$, $\dfrac{1}{a}\leq\dfrac{3}{4}$ $\quad\therefore\ a\geq\dfrac{4}{3}$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 구하는 양의 실수 a의 값의 범위는 $a\geq\dfrac{4}{3}$이다.

329 .... 답 ④

이차방정식 $x^2-4x+5=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(-2)^2-5<0$이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

이때 두 근이 α, β이므로 $\overline{\alpha}=\beta$, $\overline{\beta}=\alpha$이다.

한편, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=5$이므로

$\alpha^2\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta^2=\alpha^3+\beta^3$

$\qquad\qquad =(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$\qquad\qquad =4^3-3\times5\times4$

$\qquad\qquad =4$

참고

이차방정식의 한 근 α가 허수가 아닌 실수이면 $\overline{\alpha}=\alpha$이므로

이차방정식의 두 근을 α, $\overline{\alpha}$라 할 수 없다.

따라서 판별식을 통해 방정식의 근이 허수인지를 파악할 필요가 있다.

330 .... 답 ④

이차방정식 $x^2+px+q=0$의 두 근은 α, β이므로

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-p$ ...... ㉠

$\alpha\beta=q$ ...... ㉡

이차방정식 $x^2+qx+r=0$의 두 근은 3α, 3β이므로

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$3(\alpha+\beta)=-q$ ...... ㉢

$9\alpha\beta=r$ ...... ㉣

㉠을 ㉢에 대입하면 $-3p=-q$에서 $p=\dfrac{q}{3}$

㉡을 ㉣에 대입하면 $9q=r$

$\therefore \dfrac{p}{r}=\dfrac{\frac{q}{3}}{9q}=\dfrac{1}{27}$

다른 풀이

이차방정식 $x^2+px+q=0$의 두 근이 α, β이므로

$\left(\dfrac{x}{3}\right)^2+p\left(\dfrac{x}{3}\right)+q=0$, 즉 $x^2+3px+9q=0$의 두 근은 3α, 3β이다.

따라서 두 이차방정식 $x^2+3px+9q=0$,

$x^2+qx+r=0$의 좌변의 계수를 비교하면

$3p=q$, $9q=r$

즉, $p=\dfrac{q}{3}$, $r=9q$이므로

$\dfrac{p}{r}=\dfrac{\frac{q}{3}}{9q}=\dfrac{1}{27}$

331 ······ 답 13

$z=p+qi$ (p, q는 실수)라 하자.

$(2i+z)^2>0$에서 $2i+z$는 실수이어야 한다.

따라서 $q=-2$이므로 $z=p-2i$이다.

한편, z는 이차방정식 $x^2+6x+a=0$의 한 허근이므로

그 켤레복소수인 $\bar{z}=p+2i$를 나머지 한 근으로 갖는다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$z+\bar{z}=-6$에서 $2p=-6$ $\quad\therefore p=-3$

따라서 $z=-3-2i$, $\bar{z}=-3+2i$이므로

$a=z\bar{z}=(-3-2i)(-3+2i)=9+4=13$

332 ······ 답 ④

이차방정식 $x^2-2x+3=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(-1)^2-3<0$이므로 α는 허근이다.

따라서 이차방정식 $x^2-2x+3=0$의 두 근은

α, $\bar{\alpha}$ ($\bar{\alpha}$는 α의 켤레복소수)이므로 $\alpha+\bar{\alpha}=2$, $\alpha\bar{\alpha}=3$이다.

$$\begin{aligned}\therefore z+\bar{z}&=\frac{\alpha}{2\alpha-1}+\frac{\bar{\alpha}}{2\bar{\alpha}-1}\\&=\frac{\alpha(2\bar{\alpha}-1)+\bar{\alpha}(2\alpha-1)}{(2\alpha-1)(2\bar{\alpha}-1)}\\&=\frac{4\alpha\bar{\alpha}-(\alpha+\bar{\alpha})}{4\alpha\bar{\alpha}-2(\alpha+\bar{\alpha})+1}\\&=\frac{12-2}{12-4+1}=\frac{10}{9}\end{aligned}$$

333 ······ 답 ②

이차방정식 $x^2+3kx+6k=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-3k$, $\alpha\beta=6k$ ······ ㉠

k가 양의 실수이므로 $\alpha+\beta<0$, $\alpha\beta>0$

$\therefore \alpha<0$, $\beta<0$

이때 $|\alpha|-|\beta|=3$에서 $-\alpha+\beta=3$이므로 $\beta=\alpha+3$이고,

β는 음수이므로 $\beta=\alpha+3<0$에서

$\alpha<-3$ ······ ㉡

㉠에서

$\alpha+\beta=\alpha+(\alpha+3)=-3k$

즉, $k=\dfrac{-2\alpha-3}{3}$이고 $\alpha\beta=\alpha(\alpha+3)=6k$이므로

$\alpha(\alpha+3)=2(-2\alpha-3)$, $\alpha^2+7\alpha+6=0$

$(\alpha+6)(\alpha+1)=0$에서 $\alpha=-6$ ($\because$ ㉡)이므로

$\beta=-3$, $k=3$

$\therefore k-\alpha-2\beta=3-(-6)-2\times(-3)=15$

다른 풀이

이차방정식 $x^2+3kx+6k=0$에서

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-3k$, $\alpha\beta=6k$ ······ ㉠

이고, k가 양의 실수이므로

$\alpha+\beta<0$, $\alpha\beta>0$ $\quad\therefore \alpha<0$, $\beta<0$

이때 $|\alpha|-|\beta|=3$에서 $\beta-\alpha=3$ ······ ㉡

$(\alpha+\beta)^2=(\alpha-\beta)^2=4\alpha\beta$이므로 ㉠, ㉡에서

$(-3k)^2=3^2+4\times6k$, $9k^2-24k-9=0$

$(3k+1)(k-3)=0$ $\quad\therefore k=3$ ($\because k>0$)

이를 방정식에 대입하면

$x^2+9x+18=0$, $(x+3)(x+6)=0$

에서 $x=-3$ 또는 $x=-6$

즉, $\alpha=-6$, $\beta=-3$이다.

$\therefore k-\alpha-2\beta=3-(-6)-2\times(-3)=15$

334 ······ 답 ①

이차방정식의 계수가 모두 실수이므로

한 근이 $\dfrac{3}{1-\sqrt{3}i}=\dfrac{3(1+\sqrt{3}i)}{4}$이면

다른 한 근은 켤레복소수인 $\dfrac{3(1-\sqrt{3}i)}{4}$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은

$\dfrac{3(1+\sqrt{3}i)}{4}+\dfrac{3(1-\sqrt{3}i)}{4}=-a$, $a=-\dfrac{3}{2}$ ······ ㉠

두 근의 곱은

$\dfrac{3(1+\sqrt{3}i)}{4}\times\dfrac{3(1-\sqrt{3}i)}{4}=b$, $b=\dfrac{9}{4}$ ······ ㉡

$\dfrac{3}{a+b}=\dfrac{3}{\left(-\frac{3}{2}\right)+\frac{9}{4}}=4$, $\dfrac{5}{a-b}=\dfrac{5}{\left(-\frac{3}{2}\right)-\frac{9}{4}}=-\dfrac{4}{3}$이므로

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\dfrac{3}{a+b}$, $\dfrac{5}{a-b}$를 두 근으로 하는 이차방정식은

(두 근의 합)$=\dfrac{3}{a+b}+\dfrac{5}{a-b}=4+\left(-\dfrac{4}{3}\right)=\dfrac{8}{3}$,

(두 근의 곱)$=\dfrac{3}{a+b}\times\dfrac{5}{a-b}=4\times\left(-\dfrac{4}{3}\right)=-\dfrac{16}{3}$

즉, $x^2-\dfrac{8}{3}x-\dfrac{16}{3}=0$에서 $3x^2-8x-16=0$이므로

$p=-8$, $q=-16$

$\therefore p+q=(-8)+(-16)=-24$

335 ······ 답 $-1+\sqrt{2}$

이차방정식 $x^2-(2+\sqrt{2})x+\sqrt{2}k-3=0$의 정수인 근을 m, 다른 한 근을 α라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

두 근의 합은 $m+\alpha=2+\sqrt{2}$에서 $\alpha=2+\sqrt{2}-m$ ······ ㉠

두 근의 곱은 $m\alpha=\sqrt{2}k-3$ ······ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$m(2+\sqrt{2}-m)=\sqrt{2}k-3$

$\sqrt{2}m+(-m^2+2m)=\sqrt{2}k-3$

m은 정수, k는 자연수이므로 $m=k$이고,

$-m^2+2m=-3$에서 $m^2-2m-3=0$

$(m+1)(m-3)=0$

$\therefore m=-1$ 또는 $m=3$

이때 $m=k$이고 k가 자연수이므로 $m=3$

이를 ㉠에 대입하면 구하는 다른 한 근은

$2+\sqrt{2}-3$, 즉 $-1+\sqrt{2}$이다.

336 ······ 답 ⑤

$|x^2-2x-k|=3$에서 ······ ㉠

$x^2-2x-k=3$ 또는 $x^2-2x-k=-3$

$x^2-2x-k-3=0$ 또는 $x^2-2x-k+3=0$

각각의 판별식을 D_1, D_2라 하면 ㉠이 네 실근을 갖기 위해서 $D_1\geq0$, $D_2\geq0$이어야 한다.

$\frac{D_1}{4}=1+k+3\geq0$에서 $k\geq-4$

$\frac{D_2}{4}=1+k-3\geq0$에서 $k\geq2$

$\therefore k\geq2$ ······ ㉡

㉠의 네 실근의 곱이 16이므로

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(-k-3)(-k+3)=16$

$k^2-9=16\qquad\therefore k=5$ 또는 $k=-5$

$\therefore k=5$ ($\because$ ㉡)

참고

$k=-5$일 때에도 방정식 $|x^2-2x-k|=3$의 네 근의 곱은 16이지만 모두 허근이다.

337 ······ 답 ①

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근이 $\frac{1-\sqrt{2}i}{3}$, $\frac{1+\sqrt{2}i}{3}$이므로

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

(두 근의 합)$=-\frac{b}{a}=\frac{2}{3}$에서 $b=-\frac{2}{3}a$

(두 근의 곱)$=\frac{c}{a}=\frac{1}{3}$에서 $c=\frac{1}{3}a$

따라서 이차방정식 $cx^2+bx+a=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\frac{b}{c}=2$, $\alpha\beta=\frac{a}{c}=3$

$\therefore (\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$=2^2-4\times3=-8$

다른 풀이

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근이 $\frac{1-\sqrt{2}i}{3}$, $\frac{1+\sqrt{2}i}{3}$이므로

이차방정식 $cx^2+bx+a=0$의 두 근 α, β는

$\frac{3}{1-\sqrt{2}i}=1+\sqrt{2}i$, $\frac{3}{1+\sqrt{2}i}=1-\sqrt{2}i$이다.

$\therefore (\alpha-\beta)^2=(2\sqrt{2}i)^2=-8$

338 ······ 답 ④

이차항의 계수를 0이 아닌 다른 실수로 잘못 보고 풀어서 $2+i$를 근으로 구했으므로 이때 구한 다른 한 근은 켤레복소수인 $2-i$이다.

이차항의 계수를 실수 p $(p\neq0)$로 잘못 보았다고 할 때,

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-\frac{b}{p}=(2+i)+(2-i)=4$에서 $p=-\frac{b}{4}$,

$\frac{c}{p}=(2+i)(2-i)=5$에서 $p=\frac{c}{5}$이므로

$-\frac{b}{4}=\frac{c}{5}$에서 $c=-\frac{5}{4}b$ ······ ㉠

상수항을 다른 실수로 잘못 보고 풀어서 $1+3i$를 근으로 구했으므로 이때 구한 다른 한 근은 켤레복소수인 $1-3i$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-\frac{b}{a}=(1+3i)+(1-3i)=2$에서 $a=-\frac{b}{2}$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 주어진 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$은

$-\frac{b}{2}x^2+bx-\frac{5}{4}b=0$, 즉 $2x^2-4x+5=0$이다.

이 이차방정식의 서로 다른 두 근이 α, β이므로

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=\frac{5}{2}$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=2^2-2\times\frac{5}{2}=-1$

339 ······ 답 5

두 실수 a, b $(b\neq0)$에 대하여 $\alpha=a+bi$라 하면 $\beta=a-bi$이다.

$2\alpha+\beta^2=1$에서 $2(a+bi)+(a-bi)^2=1$

$(a^2+2a-b^2)+2b(1-a)i=1$

이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a^2+2a-b^2=1$, $2b(1-a)=0$이어야 한다.

$2b(1-a)=0$에서 $a=1$ ($\because b\neq0$)이므로

$a^2+2a-b^2=1$에서 $b^2=2$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$p=-(\alpha+\beta)=-2a=-2$

$q=\alpha\beta=a^2+b^2=1+2=3$

$\therefore q-p=3-(-2)=5$

다른 풀이

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-p$이므로

$\alpha=-p-\beta$

따라서 $2\alpha+\beta^2=2(-p-\beta)+\beta^2=1$이므로

$\beta^2-2\beta-2p-1=0$

즉, β는 x에 대한 방정식 $x^2-2x-2p-1=0$의 한 근이다.

이때 p는 실수이므로 방정식 $x^2-2x-2p-1=0$의 다른 한 근은 β의 켤레복소수인 α이다.

따라서 $x^2+px+q=x^2-2x-2p-1$에서 항등식의 성질에 의하여

$p=-2,\ q=-2p-1 \qquad \therefore\ p=-2,\ q=3$

$\therefore\ q-p=3-(-2)=5$

참고

$b^2=2$에서 $b=-\sqrt{2}$ 또는 $b=\sqrt{2}$이므로

$\alpha=1+\sqrt{2}i,\ \beta=1-\sqrt{2}i$ 또는 $\alpha=1-\sqrt{2}i,\ \beta=1+\sqrt{2}i$이다.

340
답 풀이 참조

(1) 이차방정식 $x^2-2x-1=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=-1$이다.

(2) $\dfrac{\beta^2}{1+\alpha}+\dfrac{\alpha^2}{1+\beta}=\dfrac{\beta^2(1+\beta)+\alpha^2(1+\alpha)}{(1+\alpha)(1+\beta)}$

$=\dfrac{\alpha^3+\beta^3+\alpha^2+\beta^2}{1+\alpha+\beta+\alpha\beta}$

$=\dfrac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)+(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{1+(\alpha+\beta)+\alpha\beta}$

$=\dfrac{2^3-3\times(-1)\times2+2^2-2\times(-1)}{1+2+(-1)}$

$=10$

$\dfrac{\beta^2}{1+\alpha}\times\dfrac{\alpha^2}{1+\beta}=\dfrac{\alpha^2\beta^2}{(1+\alpha)(1+\beta)}$

$=\dfrac{(\alpha\beta)^2}{1+(\alpha+\beta)+\alpha\beta}$

$=\dfrac{(-1)^2}{1+2+(-1)}$

$=\dfrac{1}{2}$

(3) $\dfrac{\beta^2}{1+\alpha},\ \dfrac{\alpha^2}{1+\beta}$을 두 근으로 하는 이차방정식의 두 근의 합은 10,

두 근의 곱은 $\dfrac{1}{2}$이고, x^2의 계수가 2이므로

$2\left(x^2-10x+\dfrac{1}{2}\right)=0$에서 $2x^2-20x+1=0$이다.

채점 요소	배점
$\alpha+\beta,\ \alpha\beta$의 값 구하기	20%
$\frac{\beta^2}{1+\alpha}+\frac{\alpha^2}{1+\beta},\ \frac{\beta^2}{1+\alpha}\times\frac{\alpha^2}{1+\beta}$의 값 구하기	40%
$\frac{\beta^2}{1+\alpha},\ \frac{\alpha^2}{1+\beta}$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 2인 이차방정식 구하기	40%

341
답 ⑤

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로

0이 아닌 실수 a에 대하여

$f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)$ …… ㉠

라 하자.

$f(2x-1)+4=a(2x-1-\alpha)(2x-1-\beta)+4$

$=a\{4x^2-2(\alpha+\beta+2)x+(\alpha\beta+\alpha+\beta+1)\}+4$

$=a(4x^2-8x+8)+4$

$=4ax^2-8ax+8a+4$

이므로 이차방정식 $f(2x-1)+4=0$의 두 근의 곱은

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\dfrac{8a+4}{4a}=1 \qquad \therefore\ a=-1$

㉠에서

$f(x)=a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}$

$=-(x^2-2x+5)$

$\therefore\ f(2)=-(4-4+5)=-5$

342
답 16

이차항의 계수가 1이므로 조건 (가)에 의하여

$f(x)=x^2+kx+8$ (k는 상수)

방정식 $x^2-3x+1=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3,\ \alpha\beta=1$

$\therefore\ \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=3^2-2\times1=7$

조건 (나)에서

$f(\alpha)+f(\beta)=(\alpha^2+k\alpha+8)+(\beta^2+k\beta+8)$

$=(\alpha^2+\beta^2)+k(\alpha+\beta)+16$

$=7+3k+16$

$=3k+23=2$

이므로 $k=-7$이고, $f(x)=x^2-7x+8$

$\therefore\ f(8)=64-56+8=16$

343
답 ④

조건 (가)에서 $f\left(\dfrac{\alpha}{3}\right)-3=0,\ f\left(\dfrac{\beta}{3}\right)-3=0$이므로

이차방정식 $f\left(\dfrac{x}{3}\right)-3=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이다.

따라서 $f(x)$의 이차항의 계수를 a ($a\neq0$)라 하면

$f\left(\dfrac{x}{3}\right)-3=a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}=a(x^2+2x-1)$

$f\left(\dfrac{x}{3}\right)=a(x^2+2x-1)+3$

이때 조건 (나)에서 $f(0)=1$이므로

$f(0)=a\times(-1)+3=1$에서 $a=2$

$\therefore\ f(1)=f\left(\dfrac{3}{3}\right)=2(3^2+2\times3-1)+3=31$

344
답 ③

두 실수 $a,\ b$ ($b\neq0$)에 대하여

$\alpha=a+bi$라 하면 $\overline{\alpha}=a-bi$이고, 이차방정식

$x^2+4x+k=0$ …… ㉠

의 두 근은 $\alpha,\ \overline{\alpha}$이다.

ㄱ. ㉠의 판별식을 D라 하면 ㉠은 허근을 가지므로

$\frac{D}{4}=2^2-k<0$

$\therefore k>4$ (참)

ㄴ. ㉠에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\overline{\alpha}=(a+bi)+(a-bi)=2a=-4$

즉, $a=-2$이므로 α의 실수부분은 -2이다. (거짓)

ㄷ. ㄱ에서 $\alpha\overline{\alpha}=k>4$이고,

ㄴ에서 $\alpha+\overline{\alpha}=-4$이므로

$(1+\alpha)(1+\overline{\alpha})=(\alpha+\overline{\alpha})+\alpha\overline{\alpha}+1>(-4)+4+1=1$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

345 ······ 답 ⑤

$x^2+px+1=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-p$ ······ ㉠

$\alpha\beta=1$ ······ ㉡

ㄱ. $\alpha\beta=1>0$이므로 α, β의 부호는 서로 같다.

(i) $\alpha>0$, $\beta>0$인 경우

$|\alpha+\beta|=\alpha+\beta$, $|\alpha|+|\beta|=\alpha+\beta$이므로

$|\alpha+\beta|=|\alpha|+|\beta|$이다.

(ii) $\alpha<0$, $\beta<0$인 경우

$|\alpha+\beta|=-(\alpha+\beta)$,

$|\alpha|+|\beta|=(-\alpha)+(-\beta)$이므로

$|\alpha+\beta|=|\alpha|+|\beta|$이다.

$\therefore |\alpha+\beta|=|\alpha|+|\beta|$ (참)

ㄴ. ㉡에서 $\beta=\frac{1}{\alpha}$이므로

$0<\alpha<1$이면 $\frac{1}{\alpha}>1$, 즉 $\beta>1$이다. (참)

ㄷ. 이차방정식 $x^2+px+1=0$은 서로 다른 두 실근을 가지므로

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=p^2-4>0$ ······ ㉢

$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=p^2-2$ ($\because$ ㉠, ㉡)

$=(p^2-4)+2>2$ ($\because$ ㉢)

즉, $\alpha^2+\beta^2$의 값은 2보다 크다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

346 ······ 답 ③

α, β를 두 근으로 하고 이차항의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$이고,

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=7$이므로 $x^2-2x+7=0$ ······ ㉠

이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-7=-6<0$

이므로 이차방정식 ㉠은 서로 다른 두 허근 α, β를 갖는다.

이때 두 허근은 서로 켤레복소수 관계이므로

$\alpha=\overline{\beta}$, $\overline{\alpha}=\beta$ ······ ㉡

ㄱ. ㉡에 의하여 $\alpha\overline{\alpha}=\beta\overline{\beta}$ (참)

ㄴ. ㉡에 의하여

$\alpha+\overline{\beta}=\alpha+\alpha=2\alpha$, $\overline{\alpha}+\beta=\beta+\beta=2\beta$이다.

이때 $\alpha\neq\beta$이므로 $\alpha+\overline{\beta}\neq\overline{\alpha}+\beta$ (거짓)

ㄷ. 이차방정식 ㉠의 한 근이 α이므로

$\alpha^2-2\alpha+7=0$에서 $\alpha^2=2\alpha-7=2\overline{\beta}-7$ ($\because$ ㉡) (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

347 ······ 답 ①

복소수 z에 대하여 $z+\overline{z}=-1$, $z\overline{z}=1$이므로 ······ ㉠

z, $\overline{z}$는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 두 근이다.

양변에 $x-1$을 곱하면 $(x-1)(x^2+x+1)=0$, $x^3=1$이므로

$z^3=\overline{z}^3=1$이다. ······ ㉡

$\therefore \frac{\overline{z}}{z^5}-\frac{2\overline{z}^2}{z^4}+\frac{3\overline{z}^3}{z^3}-\frac{4\overline{z}^4}{z^2}+\frac{5\overline{z}^5}{z}$

$=\frac{\overline{z}}{z^2}-\frac{2\overline{z}^2}{z}+\frac{3}{1}-\frac{4\overline{z}}{z^2}+\frac{5\overline{z}^2}{z}$ ($\because$ ㉡)

$=\frac{3\overline{z}^2}{z}-\frac{3\overline{z}}{z^2}+3=\frac{3z^2\overline{z}^2}{z^3}-\frac{3z\overline{z}}{z^3}+3$

$=3$ ($\because$ ㉠, ㉡)

다른 풀이

복소수 z에 대하여 $z+\overline{z}=-1$, $z\overline{z}=1$이므로

z, $\overline{z}$는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 두 근이다.

양변에 $x-1$을 곱하면 $(x-1)(x^2+x+1)=0$, $x^3=1$이므로

$z^3=\overline{z}^3=1$이다. ······ ㉠

$\frac{\overline{z}}{z^5}-\frac{2\overline{z}^2}{z^4}+\frac{3\overline{z}^3}{z^3}-\frac{4\overline{z}^4}{z^2}+\frac{5\overline{z}^5}{z}$

$=\frac{\overline{z}}{z^2}-\frac{2\overline{z}^2}{z}+\frac{3}{1}-\frac{4\overline{z}}{z^2}+\frac{5\overline{z}^2}{z}$ ($\because$ ㉠)

$=\frac{3\overline{z}^2}{z}-\frac{3\overline{z}}{z^2}+3$

이때 $z\overline{z}=1$에서 $\frac{1}{z}=\overline{z}$이므로

$\frac{3\overline{z}^2}{z}-\frac{3\overline{z}}{z^2}+3=3\overline{z}^2\times\overline{z}-3\overline{z}\times\overline{z}^2+3=3$

348 ······ 답 ②

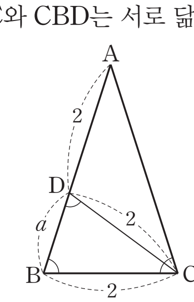
조건 (가)에 의하여 삼각형 ABC는

$\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형이므로 $\angle ABC=\angle ACB$

조건 (나)에 의하여 삼각형 CBD는

$\overline{BC}=\overline{CD}$인 이등변삼각형이므로 $\angle CBD=\angle CDB$

따라서 두 삼각형 ABC와 CBD는 서로 닮음이다.



$\overline{BD}=a$ $(a>0)$라 하면

조건 (나)에 의하여 $\overline{AB}=a+2$이므로

$(a+2):2=2:a$, $a(a+2)=4$, $a^2+2a-4=0$

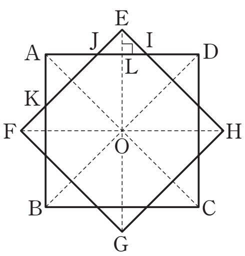
$\therefore a=-1+\sqrt{5}$ $(\because a>0)$

$m=-(\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BC}})=-a-4=-3-\sqrt{5}$

$n=\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{BC}}=2(a+2)=2+2\sqrt{5}$

$\therefore m+n=(-3-\sqrt{5})+(2+2\sqrt{5})=-1+\sqrt{5}$

349 ⋯⋯⋯⋯ 답 50



꼭짓점 E에서 변 AD에 내린 수선의 발을 L이라 하고 $\overline{\mathrm{JL}}=x$라 하자.

삼각형 EJI는 직각이등변삼각형이므로 $\overline{\mathrm{EL}}=x$이고,

삼각형 EJI의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 2x\times x=x^2$이다.

$\overline{\mathrm{AJ}}=1-x$이므로 삼각형 AKJ의 넓이는 $\frac{(1-x)^2}{2}$이다.

삼각형 AKJ의 넓이가 삼각형 EJI의 넓이의 $\frac{3}{2}$배이므로

$\frac{(1-x)^2}{2}=\frac{3}{2}x^2$, $2x^2+2x-1=0$이고, 이차방정식의 근의 공식에 의하여 $x=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ $(\because x>0)$이다.

$\overline{\mathrm{OE}}=\sqrt{2}k$이고,

$\overline{\mathrm{OE}}=\overline{\mathrm{OL}}+\overline{\mathrm{EL}}=1+\frac{-1+\sqrt{3}}{2}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

이므로 $\sqrt{2}k=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$이다.

$k=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$에서 $p=q=\frac{1}{4}$이므로

$100(p+q)=50$

350 ⋯⋯⋯⋯ 답 102

$z=\frac{3+\sqrt{2}i}{\sqrt{2}-3i}=\frac{(3+\sqrt{2}i)(\sqrt{2}+3i)}{(\sqrt{2}-3i)(\sqrt{2}+3i)}=i$이므로

$z-2z^2+3z^3-4z^4+\cdots+(-1)^{n+1}nz^n$

$=(i+2-3i-4)+(5i+6-7i-8)+\cdots+(-1)^{n+1}ni^n$

$=(-2-2i)+(-2-2i)+\cdots+(-1)^{n+1}ni^n$

$=52+51i$

에서

$52+51i=25(-2-2i)+(101i+102)$

$\therefore n=102$

351 ⋯⋯⋯⋯ 답 ⑤

$z=a+bi$, $w=c+di$ (a, b, c, d는 실수이고, $abcd\neq 0$)라 하자.

$z-w=(a-c)+(b-d)i$가 실수이므로 $b=d$

$zw=ac-b^2+(ab+bc)i$가 실수이므로 $b(a+c)=0$

따라서 $c=-a$이므로 $w=-a+bi$

ㄱ. $z+w=(a+bi)+(-a+bi)=2bi$ (참)

ㄴ. $zw=(a+bi)(-a+bi)=-a^2-b^2<0$ (참)

ㄷ. $z\bar{z}-w\bar{w}=(a+bi)(a-bi)-(-a+bi)(-a-bi)$

$\qquad=(a+bi)(a-bi)-(a-bi)(a+bi)$

$\qquad=0$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

352 ⋯⋯⋯⋯ 답 ②

$a_n+b_ni=\frac{1-ni}{1+ni}=\frac{(1-ni)^2}{(1+ni)(1-ni)}=\frac{1-n^2-2ni}{1+n^2}$

$=\frac{1-n^2}{1+n^2}-\frac{2n}{1+n^2}i$

이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a_n=\frac{1-n^2}{1+n^2}$, $b_n=-\frac{2n}{1+n^2}$

$(a_n)^2+(b_n)^2=\left(\frac{1-n^2}{1+n^2}\right)^2+\left(-\frac{2n}{1+n^2}\right)^2$

$=\frac{(1-2n^2+n^4)+4n^2}{(1+n^2)^2}$

$=\frac{(1+n^2)^2}{(1+n^2)^2}=1$

$\therefore \{(a_1)^2+(a_2)^2+(a_3)^2+\cdots+(a_{50})^2\}$

$\qquad+\{(b_1)^2+(b_2)^2+(b_3)^2+\cdots+(b_{50})^2\}$

$=\{(a_1)^2+(b_1)^2\}+\{(a_2)^2+(b_2)^2\}+\{(a_3)^2+(b_3)^2\}$

$\qquad+\cdots+\{(a_{50})^2+(b_{50})^2\}$

$=1+1+1+\cdots+1=50$

참고

임의의 두 실수 x, y $(x^2+y^2\neq 0)$에 대하여

$\frac{x-yi}{x+yi}=\frac{(x-yi)^2}{(x+yi)(x-yi)}$

$=\frac{x^2-y^2-2xyi}{x^2+y^2}$

$=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-\frac{2xy}{x^2+y^2}i$

이므로 실수부분은 $a=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, 허수부분은 $b=-\frac{2xy}{x^2+y^2}$

이때

$a^2+b^2=\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)^2+\left(-\frac{2xy}{x^2+y^2}\right)^2$

$=\frac{(x^4-2x^2y^2+y^4)+4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$

$=\frac{(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^2}=1$

이 성립한다.

353 ⋯⋯⋯⋯ 답 3

$(-1)^2=1$, $i^2=-1$, $(1+i)^2=2i$이므로

a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_{30} 중 -1의 개수를 a, i의 개수를 b, $1+i$의 개수를 c라 하면

$a+b+c=30$ $\cdots\cdots$ ㉠

$(a_1)^2+(a_2)^2+(a_3)^2+\cdots+(a_{30})^2$
$=1\times a+(-1)\times b+2i\times c=(a-b)+2ci=7+10i$
이므로 $a-b=7$, $c=5$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=16$, $b=9$, $c=5$
따라서
$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{30}=(-1)\times 16+i\times 9+(1+i)\times 5$
$=-11+14i$
이므로 구하는 답은 $(-11)+14=3$이다.

354

답 ④

$(z-2)^2=2-2i$이므로 $\overline{(z-2)^2}=(\bar{z}-2)^2=2+2i$이고,
$(z-2)^2(\bar{z}-2)^2=\{(z-2)(\bar{z}-2)\}^2$
$=\{z\bar{z}-2(z+\bar{z})+4\}^2$
이므로
$\{z\bar{z}-2(z+\bar{z})+4\}^2=(2-2i)(2+2i)=8$ …… ㉠
이때 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면
$z\bar{z}-2(z+\bar{z})+4=(a+bi)(a-bi)-2(a+bi+a-bi)+4$
$=a^2+b^2-4a+4$
$=(a-2)^2+b^2\geq 0$ ($\because (a-2)^2\geq 0,\ b^2\geq 0$)
…… ㉡
㉠에서 $\{z\bar{z}-2(z+\bar{z})+4\}^2=8$이므로
$z\bar{z}-2(z+\bar{z})+4=2\sqrt{2}$ ($\because$ ㉡)
$\therefore\ z\bar{z}-2z-2\bar{z}=z\bar{z}-2(z+\bar{z})=2\sqrt{2}-4$

355

답 ⑤

ㄱ. $\dfrac{z^2}{1-z}$이 실수이므로 그 켤레복소수인
$\overline{\left(\dfrac{z^2}{1-z}\right)}=\dfrac{\bar{z}^2}{1-\bar{z}}$은 실수이다. (참)
ㄴ. $\dfrac{z^2}{1-z}=k$ (k는 실수)라 하면
$z^2=k(1-z)$에서 $z^2+kz-k=0$
즉, z는 x에 대한 이차방정식 $x^2+kx-k=0$의 한 근이다.
이때 z는 실수가 아닌 복소수이므로 이 이차방정식의 다른 한 실근은 $\bar{z}$이고, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$z+\bar{z}=-k$, $z\bar{z}=-k$
따라서 $z+\bar{z}=z\bar{z}$이다. (참)
ㄷ. 두 실수 a, b ($b\neq 0$)에 대하여
$z=a+bi$라 하면
$z+\bar{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a$
$z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2>0$이고
ㄴ에서 $z+\bar{z}=z\bar{z}$이므로
복소수 z의 실수부분은 양수이다. (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

356

답 ②

$z=a+bi$ (a, b는 실수)라 할 때, $z^4<0$을 만족시키려면
$z^2=(a+bi)^2=a^2-b^2+2abi$가 순허수가 되어야 하므로
z^2의 실수부분은 $a^2-b^2=0$이고, 허수부분은 $2ab\neq 0$이어야 한다.
즉, $a+b=0$ 또는 $a-b=0$이고, …… (i)
$a\neq 0$, $b\neq 0$이어야 한다. …… (ii)
주어진 복소수 z는
$(2+i)x^2+(3i-2)x-12+2i$
$=(2x^2-2x-12)+(x^2+3x+2)i$
$=2(x+2)(x-3)+(x+2)(x+1)i$
(i) $a+b=0$ 또는 $a-b=0$
$a+b=2(x+2)(x-3)+(x+2)(x+1)$
$=(x+2)(3x-5)=0$
이므로 $x=-2$ 또는 $x=\dfrac{5}{3}$
$a-b=2(x+2)(x-3)-(x+2)(x+1)$
$=(x+2)(x-7)=0$
이므로 $x=-2$ 또는 $x=7$
따라서 $x=-2$ 또는 $x=\dfrac{5}{3}$ 또는 $x=7$
(ii) $a=2x^2-2x-12=2(x+2)(x-3)\neq 0$과
$b=x^2+3x+2=(x+2)(x+1)\neq 0$에서
$x\neq -2$, $x\neq -1$, $x\neq 3$
(i), (ii)에 의하여 주어진 조건을 만족시키는 실수 x의 값은
$\dfrac{5}{3}$ 또는 7이므로 모든 실수 x의 값의 합은
$\dfrac{5}{3}+7=\dfrac{26}{3}$

357

답 ④

이차방정식 $x^2-ax+2p=0$의 두 근을 α, β라 할 때,
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=a$, $\alpha\beta=2p$ …… ㉠
조건 (나)에서 두 근이 서로 다른 자연수이고, 조건 (가)에서 p가 소수이므로 두 근의 곱이 $2p$이려면 두 근은 2, p 또는 1, $2p$이다.
(i) 두 근이 2, p인 경우
㉠에서 두 근의 합은 $2+p=a$이고, 조건 (가)에서 a가 9의 배수인 두 자리 자연수이므로 이를 만족시키는 순서쌍 (a, p)는
(45, 43), (63, 61), (81, 79), (99, 97)의 4개이다.
(ii) 두 근이 1, $2p$인 경우
㉠에서 두 근의 합은 $1+2p=a$이고, 조건 (가)에서 a가 9의 배수인 두 자리 자연수이므로 이를 만족시키는 순서쌍 (a, p)는
(27, 13), (63, 31)의 2개이다.
(i), (ii)에 의하여 순서쌍 (a, p)의 개수는 $4+2=6$이다.

358

답 4

조건 (가)에서 $f(n)=(1-i)^{2n}+2^n i$라 하면
$f(n)=(1-i)^{2n}+2^n i=\{(1-i)^2\}^n+2^n i$
$=(-2i)^n+2^n i$
$=(-2)^n i^n+2^n i$

이고, 음이 아닌 정수 k에 대하여

$n=4k+1$일 때, $f(n)=-2^{4k+1}i+2^{4k+1}i=0$

$n=4k+2$일 때, $f(n)=-2^{4k+2}+2^{4k+2}i$

$n=4k+3$일 때, $f(n)=2^{4k+3}i+2^{4k+3}i=2^{4k+4}i$

$n=4k+4$일 때, $f(n)=2^{4k+4}+2^{4k+4}i$

$\{(1-i)^{2n}+2^n i\}^2<0$을 만족시키려면 $f(n)$이 순허수가 되어야 하므로 $n=4k+3$이면서 동시에 조건 (나)에 의하여 n은 3의 배수이다.

따라서 조건 (가)를 만족시키는 40 이하의 자연수는 3, 7, 11, $\cdots$, 39이고, 이 중 3의 배수는 3, 15, 27, 39의 4개이다.

359

답 ④

$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1+2i-1}{2}=i$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^2=\frac{2}{1+2i-1}=-i$이므로

$z_n=\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2n}-\left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^{2n}=\left\{\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}^n-\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^2\right\}^n$

$=i^n-(-i)^n$

$\therefore z_{4k-3}=2i$, $z_{4k-2}=0$, $z_{4k-1}=-2i$, $z_{4k}=0$ (k는 자연수)

ㄱ. 서로 다른 z_n의 값은 $2i$, 0, $-2i$의 3개이다. (거짓)

ㄴ. $z_1+z_2+z_3+\cdots+z_{4k-3}=2i$

$z_1+z_2+z_3+\cdots+z_{4k-2}=2i$

$z_1+z_2+z_3+\cdots+z_{4k-1}=0$

$z_1+z_2+z_3+\cdots+z_{4k}=0$

즉, $z_1+z_2+z_3+\cdots+z_n$으로 가능한 서로 다른 값은 $2i$, 0이고 그 총합은 $2i$이다. (참)

ㄷ. $z_l\times z_m<0$을 만족시키기 위해선

$2i\times 2i$ 또는 $(-2i)\times(-2i)$이어야 한다.

(i) $2i\times 2i$인 경우

l과 m이 모두 $4k-3$ 꼴이어야 하므로

가능한 10 이하의 자연수는 1, 5, 9이다.

따라서 순서쌍 (l, m)은

$(1, 1)$, $(1, 5)$, $(5, 1)$, $(5, 5)$, $(1, 9)$, $(9, 1)$, $(9, 9)$, $(5, 9)$, $(9, 5)$의 9개이다.

(ii) $(-2i)\times(-2i)$인 경우

l과 m이 모두 $4k-1$ 꼴이어야 하므로

가능한 10 이하의 자연수는 3, 7이다.

따라서 순서쌍 (l, m)은

$(3, 3)$, $(3, 7)$, $(7, 3)$, $(7, 7)$의 4개이다.

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 (l, m)의 개수는 13이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

360

답 ①

조건 (가)에서 $\frac{\sqrt{n-3}}{\sqrt{4-m}}=-\sqrt{\frac{n-3}{4-m}}$이므로

$m>4$, $n>3$이거나 $m\neq 4$, $n=3$이다.

조건 (나)에서 $\sqrt{m-8}\sqrt{n-6}=\sqrt{(m-8)(n-6)}$이므로

$m-8\geq 0$, $n-6\geq 0$에서 $m\geq 8$, $n\geq 6$이거나

$m-8\geq 0$, $n-6<0$에서 $m\geq 8$, $n<6$이거나

$m-8<0$, $n-6\geq 0$에서 $m<8$, $n\geq 6$이다.

따라서 조건 (가)와 조건 (나)를 모두 만족시키는 순서쌍 (m, n)의 개수는 다음과 같다.

(i) $m>4$, $n\geq 3$이고, $m\geq 8$, $n\geq 6$일 때

$m\geq 8$에서 m의 값은 3개이고, $n\geq 6$에서 n의 값은 5개이다.

즉, 순서쌍 (m, n)의 개수는 $3\times 5=15$

(ii) $m>4$, $n\geq 3$이고, $m\geq 8$, $n<6$일 때

$m\geq 8$이므로 m의 값은 3개이고, $3\leq n<6$이므로 n의 값은 3개이다.

즉, 순서쌍 (m, n)의 개수는 $3\times 3=9$

(iii) $m>4$, $n\geq 3$이고, $m<8$, $n\geq 6$일 때

$4<m<8$이므로 m의 값은 3개이고, $n\geq 6$이므로 n의 값은 5개이다.

즉, 순서쌍 (m, n)의 개수는 $3\times 5=15$

(i)~(iii)에 의하여 순서쌍 (m, n)의 개수는

$15+9+15=39$

361

답 ②

주어진 이차식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^2+(k-y)x-2y^2-3y+2$이다.

이때 x에 대한 이차방정식 $x^2+(k-y)x-2y^2-3y+2=0$의 근은

$x=\frac{-(k-y)\pm\sqrt{(k-y)^2+4(2y^2+3y-2)}}{2}$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(k-y)^2+4(2y^2+3y-2)$이고

$x^2+(k-y)x-2y^2-3y+2$

$=\left\{x-\frac{-(k-y)+\sqrt{D}}{2}\right\}\left\{x-\frac{-(k-y)-\sqrt{D}}{2}\right\}$

이때 x, y에 대한 두 일차식의 곱으로 인수분해 되기 위해선 근호 안의 식 D가 완전제곱식이 되어야 하므로

$D=(k-y)^2+4(2y^2+3y-2)$

$=9y^2+(12-2k)y+k^2-8$

에서 y에 대한 이차방정식 $9y^2+(12-2k)y+k^2-8=0$의 판별식을 D_1이라 할 때, $D_1=0$을 만족시켜야 한다.

$\frac{D_1}{4}=(6-k)^2-9(k^2-8)=0$

$8k^2+12k-108=0$, $2k^2+3k-27=0$

$(2k+9)(k-3)=0$

$\therefore k=3$ ($\because k>0$)

362

답 ④

$z=\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=i$

이므로

$z^n-z^{2n}+z^{3n}-z^{4n}+\cdots-z^{50n}$

$=i^n-(i^2)^n+(i^3)^n-(i^4)^n+\cdots-(i^{50})^n$

$=i^n-(-1)^n+(-i)^n-1^n+\cdots-(-1)^n$

음이 아닌 정수 k에 대하여

$n=4k+1$일 때

(i) $i^{4k+1}-(-1)^{4k+1}+(-i)^{4k+1}-1^{4k+1}+\cdots-(-1)^{4k+1}$

$=(i+1-i-1)+(i+1-i-1)+\cdots+i+1=i+1$

(ii) $n=4k+2$일 때

$i^{4k+2}-(-1)^{4k+2}+(-i)^{4k+2}-1^{4k+2}+\cdots-(-1)^{4k+2}$

$=(-1-1-1-1)+(-1-1-1-1)+\cdots-1-1=-50$

(iii) $n=4k+3$일 때

$i^{4k+3}-(-1)^{4k+3}+(-i)^{4k+3}-1^{4k+3}+\cdots-(-1)^{4k+3}$

$=(-i+1+i-1)+(-i+1+i-1)+\cdots-i+1=-i+1$

(iv) $n=4k+4$일 때

$i^{4k+4}-(-1)^{4k+4}+(-i)^{4k+4}-1^{4k+4}+\cdots-(-1)^{4k+4}$

$=(1-1+1-1)+(1-1+1-1)+\cdots+1-1=0$

(i)~(iv)에 의하여 $z^n-z^{2n}+z^{3n}-z^{4n}+\cdots-z^{50n}$의 값이 실수가 되려면 $n=4k+2$ 또는 $n=4k+4$이어야 한다.

$70=4\times17+2$이므로 $n=4k+2$를 만족시키는 자연수 n은 18개이고, $n=4k+4$를 만족시키는 자연수 n은 17개이다.

따라서 구하는 자연수 n의 개수는 $18+17=35$

다른 풀이

$z=\dfrac{1+i}{1-i}=\dfrac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=i$

이므로 $z^2=-1$, $z^3=-i$, $z^4=1$이고

자연수 n에 대하여 z^n의 값은 실수 또는 순허수이다.

$z^n-z^{2n}+z^{3n}-z^{4n}+\cdots-z^{50n}$

$=(1-z^n)(z^n+z^{3n}+z^{5n}+\cdots+z^{49n})$

$=z^n(1-z^n)(1+z^{2n}+z^{4n}+\cdots+z^{48n})$

(i) z^n의 값이 실수인 경우

$1-z^n$의 값과 $1+z^{2n}+z^{4n}+\cdots+z^{48n}$의 값 모두 실수이므로 $z^n-z^{2n}+z^{3n}-z^{4n}+\cdots-z^{50n}$의 값은 실수이다.

(ii) z^n의 값이 순허수인 경우

z^{2n}의 값은 실수이므로 $1+z^{2n}+z^{4n}+\cdots+z^{48n}$의 값은 실수이다.

따라서 $z^n(1-z^n)$의 값이 실수이어야 $z^n-z^{2n}+z^{3n}-z^{4n}+\cdots-z^{50n}$의 값이 실수이다.

하지만 이 경우 $z^n(1-z^n)=z^n-z^{2n}$에서 $z^n(1-z^n)$의 값은 실수가 아닌 복소수이므로 $z^n-z^{2n}+z^{3n}-z^{4n}+\cdots-z^{50n}$의 값은 실수가 아니다.

(i), (ii)에서 $z^n-z^{2n}+z^{3n}-z^{4n}+\cdots-z^{50n}$의 값이 실수가 되기 위해서는 z^n의 값은 실수이어야 한다.

즉, n은 짝수이어야 하므로 구하는 자연수 n의 개수는

$\dfrac{70}{2}=35$이다.

363 ······ 답 풀이 참조

$z^2-az+a=0$에서 $z^2=az-a$이므로

$z^3=z^2\times z=az^2-az=a(az-a)-az$

$=(a^2-a)z-a^2$

a는 실수이고 z는 허수이므로 복소수 z^3이 실수이기 위해선 $a^2-a=0$이어야 한다.

$a(a-1)=0$ $\quad\therefore a=0$ 또는 $a=1$

이차방정식 $x^2-ax+a=0$의 판별식을 $D=a^2-4a$라 하면

이 이차방정식은 허근 z를 가지므로 $D<0$ ······ ㉠

(i) $a=0$일 때

$D=0$이므로 ㉠을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=1$일 때

$D=-3<0$이므로 ㉠을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $a=1$이다.

채점 요소	배점
z^3이 실수가 되기 위하여 $a^2-a=0$이어야 함을 구하기	70%
조건을 만족시키는 실수 a의 값 구하기	30%

다른 풀이

이차방정식 $x^2-ax+a=0$이 허근 z를 가지므로

판별식을 D라 하면 $D=a^2-4a<0$에서 $0<a<4$ ······ ㉠

두 실수 p, q $(q\neq0)$에 대하여 $z=p+qi$라 하면

$\bar{z}=p-qi$도 이차방정식 $x^2-ax+a=0$의 근이므로

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$z+\bar{z}=a$에서 $2p=a$, $p=\dfrac{a}{2}$ ······ ㉡

$z\bar{z}=a$에서 $p^2+q^2=a$ ······ ㉢

$z^3=(p+qi)^3=p^3+3p^2qi-3pq^2-q^3i$

$=(p^3-3pq^2)+q(3p^2-q^2)i$

이므로 z^3이 실수가 되기 위해선

$q(3p^2-q^2)=0$, 즉 $3p^2-q^2=0$ ($\because q\neq0$)이어야 한다.

㉢을 대입하면 $3p^2-(a-p^2)=0$, $4p^2-a=0$

㉡을 대입하면 $4\times\left(\dfrac{a}{2}\right)^2-a=0$, $a^2-a=0$

$a(a-1)=0$ $\quad\therefore a=1$ ($\because$ ㉠)

364 ······ 답 ①

이차방정식의 두 실근을 α, β라 하면

두 근의 부호가 서로 다르므로 $\alpha\beta<0$이고,

양수인 근의 절댓값이 음수인 근의 절댓값보다 크므로

$\alpha+\beta>0$을 만족시켜야 한다.

$2(k-1)^2x^2+3(k-3)x-2k+1=0$이 x에 대한 이차방정식이므로

$2(k-1)^2\neq0$, 즉 $k\neq1$

한편, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=\dfrac{-3(k-3)}{2(k-1)^2}>0$ ······ ㉠

$\alpha\beta=\dfrac{-2k+1}{2(k-1)^2}<0$ ······ ㉡

이때 $2(k-1)^2>0$이므로 ㉠에서 $-3(k-3)>0$ $\quad\therefore k<3$

㉡에서 $-2k+1<0$ $\quad\therefore k>\dfrac{1}{2}$

따라서 $\dfrac{1}{2}<k<3$, $k\neq1$이므로 정수 k는 2의 1개이다.

365 ······ 답 ②

$g(n)=i-i^2+i^3-\cdots+(-1)^{n+1}i^n$이라 하면

$g(n)=(i+1-i-1)+(i+1-i-1)+\cdots+(-1)^{n+1}i^n$

이므로 음이 아닌 정수 m에 대하여

$n=4m+1$일 때, $g(n)=i$

$n=4m+2$일 때, $g(n)=i+1$

$n=4m+3$일 때, $g(n)=1$

$n=4m+4$일 때, $g(n)=0$

$h(n)=\frac{1}{i}-\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}-\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{i^n}$이라 하면

$h(n)=(-i+1+i-1)+(-i+1+i-1)+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{i^n}$

이므로

$n=4m+1$일 때, $h(n)=-i$

$n=4m+2$일 때, $h(n)=-i+1$

$n=4m+3$일 때, $h(n)=1$

$n=4m+4$일 때, $h(n)=0$

따라서

$n=4m+1$일 때, $f(n)=i\times(-i)=1$

$n=4m+2$일 때, $f(n)=(i+1)\times(-i+1)=2$

$n=4m+3$일 때, $f(n)=1\times1=1$

$n=4m+4$일 때, $f(n)=0\times0=0$

즉, $f(k)+f(k+1)=1$이 되려면 $k=4m+3$ 또는 $k=4m+4$이어야 한다.

30 이하의 자연수 중 $k=4m+3$을 만족시키는 k는 3, 7, 11, ⋯, 27의 7개이고, $k=4m+4$를 만족시키는 k는 4, 8, 12, ⋯, 28의 7개이므로 구하는 자연수 k의 개수는

$7+7=14$이다.

366

답 32

다항식 $P_n(x)$를 x^2+x+1로 나눌 때 몫을 $A_n(x)$라 하면 다항식 $P_n(x)$가 x^2+x+1로 나누어떨어지므로

$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots(1+x^{n-1})(1+x^n)-32$

$=(x^2+x+1)A_n(x)$ ⋯⋯ ㉠

이때 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 근을 w라 하면

$w^2+w+1=0$이고, ⋯⋯ ㉡

양변에 $x-1$을 곱하면 $(x-1)(x^2+x+1)=0$, $x^3=1$에서

$w^3=1$이다. ⋯⋯ ㉢

㉠의 양변에 $x=w$를 대입하면

$(1+w)(1+w^2)(1+w^3)\cdots(1+w^{n-1})(1+w^n)-32=0$

즉, $(1+w)(1+w^2)(1+w^3)\cdots(1+w^{n-1})(1+w^n)=32$이므로

$Q(n)=(1+w)(1+w^2)(1+w^3)\cdots(1+w^{n-1})(1+w^n)$이라 하면

$Q(n)=32$가 되어야 한다.

음이 아닌 정수 k에 대하여

$n=3k+1$일 때, $1+w^n=1+w=-w^2$ ($\because$ ㉡)

$n=3k+2$일 때, $1+w^n=-w$ ($\because$ ㉡)

$n=3k+3$일 때, $1+w^n=2$ ($\because$ ㉢)

이므로

$$Q(3k+1)=\{(-w^2)\times(-w)\times2\}\times\{(-w^2)\times(-w)\times2\}\times\cdots\times(-w^2)$$
$$=2^k\times(-w^2)$$
$$Q(3k+2)=\{(-w^2)\times(-w)\times2\}\times\{(-w^2)\times(-w)\times2\}\times\cdots\times(-w^2)\times(-w)$$
$$=2^k$$
$$Q(3k+3)=\{(-w^2)\times(-w)\times2\}\times\{(-w^2)\times(-w)\times2\}\times\cdots\times\{(-w^2)\times(-w)\times2\}$$
$$=2^{k+1}$$

이때 $32=2^5$이므로 $Q(n)=32$를 만족시키는 n은 15 또는 17이다.

따라서 구하는 자연수 n의 값의 합은 $15+17=32$이다.

367

답 ③

이차방정식 $x^2+x+1=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-1$, $\alpha\beta=1$

$x^2+x+1=0$의 양변에 $x-1$을 곱하면

$(x-1)(x^2+x+1)=0$, $x^3-1=0$에서 $x^3=1$

즉, $\alpha^3=\beta^3=1$이다. ⋯⋯ ㉠

$\beta f(\alpha^5)=3\beta+1$에서 $\beta f(\alpha^2)=3\beta+1$ ($\because$ ㉠)

양변을 β로 나누면 $f(\alpha^2)=3+\frac{1}{\beta}$에서 $f(\alpha^2)=3+\alpha$ ($\because$ $\alpha\beta=1$)

$\alpha f(\beta^5)=3\alpha+1$에서 $\alpha f(\beta^2)=3\alpha+1$ ($\because$ ㉠)

양변을 α로 나누면 $f(\beta^2)=3+\frac{1}{\alpha}$에서 $f(\beta^2)=3+\beta$ ($\because$ $\alpha\beta=1$)

이때 α, β는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 두 근이므로

$\alpha^2+\alpha+1=0$, $\beta^2+\beta+1=0$에서 $\alpha^2=-\alpha-1$, $\beta^2=-\beta-1$이다.

따라서

$f(\alpha^2)=3+\alpha$에서 $f(-\alpha-1)=3+\alpha$, $f(\beta)=2-\beta$

$f(\beta^2)=3+\beta$에서 $f(-\beta-1)=3+\beta$, $f(\alpha)=2-\alpha$

즉, 이차방정식 $f(x)+x-2=0$의 두 근이 α, β이고,

$f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$f(x)+x-2=x^2+x+1$

$f(x)=x^2+3$

$\therefore$ $a+b=0+3=3$

368

답 16

이차방정식 $x^2-x+1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-1)^2-4<0$이므로

서로 다른 두 허근 z, $\bar{z}$ ($\bar{z}$는 z의 켤레복소수)를 갖는다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$z+\bar{z}=1$ ⋯⋯ ㉠

$z\bar{z}=1$ ⋯⋯ ㉡

$\therefore$ $z^n(1-z)^{2n+1}=z^n\times\bar{z}^{2n+1}$ ($\because$ ㉠)

$=(z\bar{z})^n\times\bar{z}^{n+1}=\bar{z}^{n+1}$ ($\because$ ㉡) ⋯⋯ ㉢

이때 $\bar{z}$는 방정식 $x^2-x+1=0$의 근이므로

$\bar{z}^2-\bar{z}+1=0$에서 $(\bar{z}+1)(\bar{z}^2-\bar{z}+1)=0$

$\therefore$ $\bar{z}^3=-1$, $\bar{z}^6=1$

따라서 $z^n(1-z)^{2n+1}$의 값이 양의 실수이기 위해서는

㉢에서 $n+1=6k$ (k는 자연수), 즉 $n=6k-1$ 꼴이어야 한다.

주어진 조건에 의하여 $n\le100$이므로

이를 만족시키는 k는 1, 2, 3, ⋯, 16이다.

따라서 구하는 자연수 n의 개수는 16이다.

다른 풀이

이차방정식 $x^2-x+1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-1)^2-4<0$이므로 z는 허수이다.

$z^2-z+1=0$에서 $1-z=-z^2$이고

$(z+1)(z^2-z+1)=0$에서 $z^3=-1$, $z^6=1$

$$z^n(1-z)^{2n+1}=z^n\times(-z^2)^{2n+1}$$
$$=z^n\times(-1)^{2n+1}\times(z^2)^{2n+1}$$
$$=-z^{5n+2}$$

이므로 $z^n(1-z)^{2n+1}$의 값이 양의 실수이기 위해서는
$5n+2$는 홀수인 3의 배수이어야 한다.
주어진 조건에 의하여 $n\le 100$이므로 이를 만족시키는 자연수 n은
5, 11, 17, $\cdots$, 95의 16개이다.

369 ······ 답 13

이차방정식 $x^2+\sqrt{2}x+1=0$의 두 근은 근의 공식에 의하여

$x=\dfrac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{2}i}{2}=\dfrac{-1\pm i}{\sqrt{2}}$이므로 $\alpha=\dfrac{-1+i}{\sqrt{2}}$, $\beta=\dfrac{-1-i}{\sqrt{2}}$라 하자.

$\alpha^2=\left(\dfrac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)^2=-i$, $\alpha^3=(-i)\times\dfrac{-1+i}{\sqrt{2}}=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$,

$\alpha^4=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\times\dfrac{-1+i}{\sqrt{2}}=-1$이므로

$\alpha^5=\alpha\times\alpha^4=-\alpha=\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$, $\alpha^6=\alpha^2\times\alpha^4=-\alpha^2=i$,

$\alpha^7=\alpha^3\times\alpha^4=-\alpha^3=\dfrac{-1-i}{\sqrt{2}}$, $\alpha^8=\alpha^4\times\alpha^4=1$

$\beta^2=\left(\dfrac{-1-i}{\sqrt{2}}\right)^2=i$, $\beta^3=i\times\dfrac{-1-i}{\sqrt{2}}=\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$,

$\beta^4=\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\times\dfrac{-1-i}{\sqrt{2}}=-1$이므로

$\beta^5=\beta\times\beta^4=-\beta=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$, $\beta^6=\beta^2\times\beta^4=-\beta^2=-i$,

$\beta^7=\beta^3\times\beta^4=-\beta^3=\dfrac{-1+i}{\sqrt{2}}$, $\beta^8=\beta^4\times\beta^4=1$

이므로 $\alpha^n=\alpha^{n+8}$, $\beta^n=\beta^{n+8}$이다.
음이 아닌 정수 k에 대하여

$n=8k+1$일 때, $\alpha^n+\beta^n=\dfrac{-1+i}{\sqrt{2}}+\dfrac{-1-i}{\sqrt{2}}=-\sqrt{2}$

$n=8k+2$일 때, $\alpha^n+\beta^n=(-i)+i=0$

$n=8k+3$일 때, $\alpha^n+\beta^n=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}+\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

$n=8k+4$일 때, $\alpha^n+\beta^n=(-1)+(-1)=-2$

$n=8k+5$일 때, $\alpha^n+\beta^n=\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}+\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

$n=8k+6$일 때, $\alpha^n+\beta^n=i+(-i)=0$

$n=8k+7$일 때, $\alpha^n+\beta^n=\dfrac{-1-i}{\sqrt{2}}+\dfrac{-1+i}{\sqrt{2}}=-\sqrt{2}$

$n=8k+8$일 때, $\alpha^n+\beta^n=1+1=2$

즉, $\alpha^n+\beta^n=0$을 만족시키는 경우는 $n=8k+2$ 또는 $n=8k+6$일 때이다.
따라서 50 이하의 자연수 중 $n=8k+2$인 것은 2, 10, 18, $\cdots$, 50의 7개이고 $n=8k+6$인 것은 6, 14, 22, $\cdots$, 46의 6개이므로
구하는 자연수 n의 개수는 $7+6=13$

다른 풀이

$x^2+\sqrt{2}x+1=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=-\sqrt{2}$, $\alpha\beta=1$
이차방정식 $x^2+\sqrt{2}x+1=0$의 계수가 모두 실수이고, 서로 다른 두 허근을 가지므로 $\beta=\overline{\alpha}$ ($\overline{\alpha}$는 α의 켤레복소수)
즉, $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=0$, $\alpha^2=-\overline{\alpha}^2$
$\alpha\beta=1$에서 $\alpha^2\beta^2=1$, $\alpha^4=-1$
$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=\sqrt{2}$
$\alpha^4+\beta^4=-2$
이므로 음이 아닌 정수 k에 대하여 $\alpha^n+\beta^n=0$을 만족시키려면
$n=4k+2$이다.
따라서 50 이하의 자연수 중 $n=4k+2$를 만족하는 n은
2, 6, 10, $\cdots$, 50의 13개이다.

370 ······ 답 6

이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 서로 다른 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=-a$ ······ ㉠
$\alpha\beta=b$ ······ ㉡
이차방정식 $x^2+3ax+3b=0$의 서로 다른 두 근이
$\alpha+2$, $\beta+2$이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$(\alpha+2)+(\beta+2)=-3a$ ······ ㉢
$(\alpha+2)(\beta+2)=3b$ ······ ㉣
㉠을 ㉢에 대입하면
$-a+4=-3a \qquad \therefore a=-2$
㉠, ㉡을 ㉣에 대입하면
$b+2\times2+4=3b \qquad \therefore b=4$
따라서 $x^2-2x+4=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=4$이고,
$x^2-2x+4=0$에서 양변에 $(x+2)$를 곱하면
$(x+2)(x^2-2x+4)=0$, $x^3+8=0 \qquad \therefore x^3=-8$
즉, $\alpha^3=-8$, $\beta^3=-8$이다.
따라서 $\alpha^n+\beta^n$의 값을 n의 값에 따라 차례대로 구하면 다음과 같다.
$\alpha+\beta=2$
$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=2^2-2\times4=-4$
$\alpha^3+\beta^3=(-8)+(-8)=-16$
$\alpha^4+\beta^4=\alpha^3\times\alpha+\beta^3\times\beta=-8(\alpha+\beta)=-16$
$\alpha^5+\beta^5=\alpha^3\times\alpha^2+\beta^3\times\beta^2=-8(\alpha^2+\beta^2)=32$
$\alpha^6+\beta^6=(\alpha^3)^2+(\beta^3)^2=(-8)^2+(-8)^2=128$
$\alpha^7+\beta^7=(\alpha^3)^2\times\alpha+(\beta^3)^2\times\beta=64(\alpha+\beta)=128$
따라서 $\alpha^6+\beta^6=\alpha^7+\beta^7=128$이므로
조건을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 6이다.

371 ······ 답 4

정삼각형의 외접원의 중심을 O, 두 선분 BC, MN의 중점을 각각 Q, R이라 하자.
다음과 같이 삼각형 QMN은 정삼각형 AMN과 합동이므로 세 점 A, O, Q는 한 직선 위에 있고 삼각형 BQO는 직각삼각형이다.

삼각형 ABC는 한 변의 길이가 $2x$인 정삼각형이고,
점 O는 정삼각형 ABC의 무게중심과 일치하므로
$\overline{AQ}=\sqrt{3}x$, $\overline{OQ}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$

직각삼각형 BQO에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{OB}^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}x\right)^2+x^2=\frac{4}{3}x^2$, $\overline{OB}=\overline{OA}=\frac{2\sqrt{3}}{3}x$

이때 $\overline{NR}=\frac{x}{2}$이고,

$\overline{OR}=\overline{OA}-\overline{AR}=\frac{2\sqrt{3}}{3}x-\frac{\sqrt{3}}{2}x=\frac{\sqrt{3}}{6}x$

직각삼각형 PRO에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{OP}^2=\overline{OR}^2+\overline{PR}^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{6}x\right)^2+\left(\frac{x}{2}+1\right)^2$

이때 $\overline{OP}^2=\overline{OB}^2$이므로 $\overline{OB}^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{6}x\right)^2+\left(\frac{x}{2}+1\right)^2$

$\frac{4}{3}x^2=\frac{1}{12}x^2+\frac{1}{4}x^2+x+1$, $x^2-x-1=0$

양변을 x로 나누면

$x-1-\frac{1}{x}=0$, $x-\frac{1}{x}=1$

$\therefore x^3-\frac{1}{x^3}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\frac{1}{x}\right)$

$=1^3+3\times1=4$

372 ······ 답 150

$\left\{i^n+\left(\frac{1}{i}\right)^{2n}\right\}^m=\left\{i^n+\left(\frac{1}{i^2}\right)^n\right\}^m=\{i^n+(-1)^n\}^m$

따라서 음이 아닌 정수 a에 대하여

$n=4a+1$일 때, $i^n+(-1)^n=i-1$

$n=4a+2$일 때, $i^n+(-1)^n=0$

$n=4a+3$일 때, $i^n+(-1)^n=-i-1$

$n=4a+4$일 때, $i^n+(-1)^n=2$

$\left\{i^n+\left(\frac{1}{i}\right)^{2n}\right\}^m$이 음의 실수가 되려면

$i^n+(-1)^n=i-1$ 또는 $i^n+(-1)^n=-i-1$인 경우만 가능하다.

(i) $i^n+(-1)^n=i-1$인 경우

$n=4a+1$일 때이므로 50 이하의 자연수 n은

1, 5, 9, ⋯, 49의 13개이다.

$m=2$일 때, $(i-1)^2=-1-2i+1=-2i$

$m=3$일 때, $(i-1)^3=-2i(i-1)=2+2i$

$m=4$일 때, $(i-1)^4=(-2i)^2=-4$

이므로 $(i-1)^m$이 음의 실수가 되는 경우는 음이 아닌 정수 b에 대하여 $m=8b+4$일 때이다.

따라서 50 이하의 자연수 m의 개수는 4, 12, 20, ⋯, 44의 6개이고, 순서쌍 (m, n)의 개수는 $6\times13=78$이다.

(ii) $i^n+(-1)^n=-i-1$인 경우

$n=4a+3$일 때이므로 50 이하의 자연수 n은

3, 7, 11, ⋯, 47의 12개이다.

$m=2$일 때, $(-i-1)^2=-1+2i+1=2i$

$m=3$일 때, $(-i-1)^3=2i\times(-i-1)=2-2i$

$m=4$일 때, $(-i-1)^4=(2i)^2=-4$

이므로 $(-i-1)^m$이 음의 실수가 되는 경우는 음이 아닌 정수 b에 대하여 $m=8b+4$일 때이다.

따라서 50 이하의 자연수 m의 개수는 4, 12, 20, ⋯, 44의 6개이고 순서쌍 (m, n)의 개수는 $6\times12=72$이다.

(i), (ii)에 의하여 구하는 순서쌍 (m, n)의 개수는

$78+72=150$이다.

373 ······ 답 ④

$(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)=0$

$3x^2-2(a+b+c)x+ab+bc+ca=0$ ······ ㉠

이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)$

$=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}\geq0$

ㄱ. 임의의 세 양수 a, b, c에 대하여 $D\geq0$이므로 주어진 방정식은 항상 실근을 갖는다. (거짓)

ㄴ. 주어진 방정식이 중근을 가지면 $D=0$이므로 $a=b=c$이다. (참)

ㄷ. 정육면체가 아닐 때, $D>0$이므로 주어진 방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다. 이 두 실근을 α, β라 하면 ㉠에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=\frac{2(a+b+c)}{3}$, $\alpha\beta=\frac{ab+bc+ca}{3}$이고,

$a>0$, $b>0$, $c>0$이므로 $\alpha+\beta>0$, $\alpha\beta>0$이다.

따라서 두 근은 모두 양수이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

02 이차방정식과 이차함수

374 답 ①

이차함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는
이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 실근과 같다.
즉, 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 -1, 2이므로
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
두 근의 합은 $-a=(-1)+2=1$이므로 $a=-1$
두 근의 곱은 $b=(-1)\times 2=-2$
$\therefore a+b=(-1)+(-2)=-3$

다른 풀이

이차함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프가 두 점 $(-1,\ 0)$, $(2,\ 0)$을 지나므로
$0=1-a+b$, $0=4+2a+b$
두 식을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=-2$
$\therefore a+b=-3$

375 답 ③

이차함수 $y=2x^2-4x-10$의 그래프가 x축과 만나는 두 점 A, B의 x좌표는 방정식 $2x^2-4x-10=0$의 두 실근이므로 방정식 $2x^2-4x-10=0$의 두 실근을 α, β라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=-5$
이때 두 점 A, B의 좌표는 각각 $(\alpha,\ 0)$, $(\beta,\ 0)$이므로
$\overline{\mathrm{AB}}=|\alpha-\beta|$
$\therefore \overline{\mathrm{AB}}^2=(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$
$=2^2-4\times(-5)=24$

376 답 (1) $k<4$ (2) $k=4$ (3) $k>4$

이차함수 $y=x^2-4x+k$의 그래프와 x축의 교점의 개수는
이차방정식 $x^2-4x+k=0$의 서로 다른 실근의 개수와 같다.
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 다음을 만족시키면 된다.

(1) x축과 서로 다른 두 점에서 만나려면 방정식 $x^2-4x+k=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로
$\frac{D}{4}=4-k>0$에서 $k<4$

(2) x축과 접하려면 방정식 $x^2-4x+k=0$이 중근을 가져야 하므로
$\frac{D}{4}=4-k=0$에서 $k=4$

(3) x축과 만나지 않으려면 방정식 $x^2-4x+k=0$이 허근을 가져야 하므로
$\frac{D}{4}=4-k<0$에서 $k>4$

377 답 ⑤

이차함수 $y=-x^2+(2m-1)x-m^2+2$의 그래프가
x축과 만나지 않으려면 x에 대한 이차방정식
$-x^2+(2m-1)x-m^2+2=0$, 즉
$x^2-(2m-1)x+m^2-2=0$이 허근을 가져야 한다.
이 방정식의 판별식을 D라 하면
$D=(2m-1)^2-4(m^2-2)$
$=4m^2-4m+1-4m^2+8$
$=-4m+9<0$
이므로 $m>\frac{9}{4}$이다.
따라서 구하는 정수 m의 최솟값은 3이다.

378 답 20

이차함수 $y=2x^2+ax+b$의 그래프가 x축과 접하므로
방정식 $2x^2+ax+b=0$이 중근을 가져야 한다.
이 방정식의 판별식을 D라 하면
$D=a^2-8b=0$이므로 $b=\frac{a^2}{8}$
$y=2x^2+ax+b=2x^2+ax+\frac{a^2}{8}$
이 함수의 그래프가 점 $(1,\ 8)$을 지나므로 대입하면
$8=2+a+\frac{a^2}{8}$, $a^2+8a-48=0$, $(a+12)(a-4)=0$
이므로 $a=4$ ($\because a>0$), $b=2$이다.
$\therefore a^2+b^2=4^2+2^2=20$

다른 풀이

이차함수 $y=2x^2+ax+b$의 그래프가 x축과 접하므로
우변은 완전제곱식으로 표현가능하다.
$y=2(x-p)^2$이라 하면 $p=-\frac{a}{4}<0$이다.
이 이차함수의 그래프가 점 $(1,\ 8)$을 지나므로
$8=2(1-p)^2$, $(1-p)^2=4$, $1-p=\pm 2$
$\therefore p=-1$ ($\because p<0$)
따라서 $y=2(x+1)^2=2x^2+4x+2$이므로
$a=4$, $b=2$
$\therefore a^2+b^2=4^2+2^2=20$

379 답 ④

① 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 위로 볼록하므로 $a<0$이다.
또한 축이 y축의 오른쪽에 존재하므로 $-\frac{b}{2a}>0$
$\therefore b>0$ (참)
② 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 y절편이 양수이므로
$f(0)=c>0$ (참)
③ 방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 하면 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로
$D=b^2-4ac>0$
$\therefore b^2>4ac$ (참)

④ $a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{4}c=\frac{1}{4}(4a+2b+c)$이고

$f(2)=4a+2b+c>0$이므로

$a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{4}c>0$ (거짓)

⑤ $f(5)=0$이므로 $25a+5b+c=0$

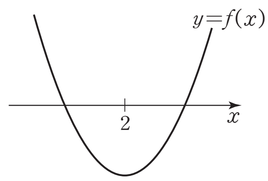
$\therefore 25a+c=-5b<0$ ($\because b>0$) (참)

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

380

답 ②

이차방정식 $x^2+ax+4a-3=0$의 두 근 사이에 2가 있어야 하므로 $f(x)=x^2+ax+4a-3$이라 할 때, 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



즉, $x=2$에서의 함숫값 $f(2)$가 음수이어야 하므로

$f(2)=4+2a+4a-3<0$에서 $a<-\frac{1}{6}$이다.

따라서 구하는 정수 a의 최댓값은 -1이다.

381

답 ⑤

이차함수 $y=2x^2-5x+3$의 그래프와 직선 $y=x+11$의 교점의 x좌표는 이차방정식 $2x^2-5x+3=x+11$의 실근과 같다.

$2x^2-6x-8=0$, $x^2-3x-4=0$ …… TIP

$(x+1)(x-4)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=4$

따라서 구하는 값은 $(-1)+4=3$이다.

TIP

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은 3임을 바로 구할 수도 있다.

382

답 ④

이차함수 $y=x^2-3x+a$의 그래프와 직선 $y=2x+1$이 서로 다른 두 점에서 만나므로 이차방정식

$x^2-3x+a=2x+1$, 즉 $x^2-5x+a-1=0$이

서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이 방정식의 판별식을 D라 하면

$D=5^2-4(a-1)=-4a+29>0$

이므로 $a<\frac{29}{4}$에서 구하는 정수 a의 최댓값은 7이다.

383

답 ①

이차함수 $f(x)=x^2-4x+6$의 그래프가 직선 $y=kx-5$와 서로 다른 두 점 $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$에서 만나므로 방정식 $f(x)=kx-5$에서 $f(x)-(kx-5)=0$의 서로 다른 두 실근이 x_1, x_2이다.

$x^2-4x+6-(kx-5)=0$에서 $x^2-(k+4)x+11=0$이고,

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$x_1+x_2=k+4=7$

$\therefore k=3$

384

답 ②

이차함수 $y=x^2+(a-1)x-b+2$의 그래프가 점 $(2, -2)$를 지나므로

$-2=2^2+(a-1)\times2-b+2$, $2a-b=-6$

$\therefore b=2a+6$

이차함수 $y=x^2+(a-1)x-2a-4$의 그래프가 직선 $y=-2x+2$와 접하므로 방정식

$x^2+(a-1)x-2a-4=-2x+2$가 중근을 갖는다.

이차방정식 $x^2+(a+1)x-2a-6=0$의 판별식을 D라 할 때,

$D=(a+1)^2-4\times(-2a-6)=0$에서

$(a+1)^2+4\times(2a+6)=0$

$a^2+10a+25=0$, $(a+5)^2=0$ $\therefore a=-5$

㉠에서 $b=2\times(-5)+6=-4$

$\therefore a-b=(-5)-(-4)=-1$

385

답 ③

이차함수 $y=-x^2+3x+2$의 그래프와 직선 $y=x+k$의 교점의 개수는 이차방정식 $-x^2+3x+2=x+k$의 서로 다른 실근의 개수와 같다.

따라서 두 그래프가 적어도 한 점에서 만나려면 방정식

$-x^2+3x+2=x+k$가 실근을 가져야 하므로 방정식

$x^2-2x+k-2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1-(k-2)\geq0$

$\therefore k\leq3$

386

답 ④

직선의 방정식을 $y=ax+b$ (a, b는 상수)라 할 때, 이 직선이 점 $(-1, 1)$을 지나므로 $1=-a+b$, $b=a+1$에서 $y=ax+a+1$이다.

이차함수 $y=x^2-3x+1$의 그래프와 직선 $y=ax+a+1$이 접하면

방정식 $x^2-3x+1=ax+a+1$이 중근을 갖고 이때의 근이 접점의 x좌표이다.

$x^2-(a+3)x-a=0$ …… ㉠

에서 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(a+3)\}^2-4\times(-a)=0$, $a^2+10a+9=0$

$(a+9)(a+1)=0$ $\therefore a=-9$ 또는 $a=-1$

㉠에서

$a=-9$일 때, $x^2+6x+9=(x+3)^2=0$이므로

접점의 x좌표는 -3이다.

$a=-1$일 때, $x^2-2x+1=(x-1)^2=0$이므로

접점의 x좌표는 1이다.

따라서 두 접점의 x좌표의 합은 $(-3)+1=-2$

387 ······ 답 ③

방정식 $ax^2+(b-m)x+c-n=0$은 $ax^2+bx+c=mx+n$이므로 이 방정식의 실근은 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 교점의 x좌표와 같다.
주어진 그림에서 두 그래프의 두 교점의 x좌표는 각각 -3, 4이므로 구하는 값은
$(-3)\times 4=-12$

388 ······ 답 ①

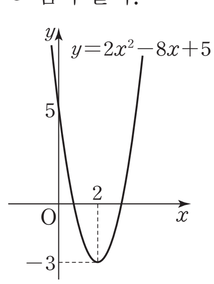
구하는 기울기가 2인 직선의 방정식을 $y=2x+k$ (k는 실수)라 하면 이 직선이 곡선 $y=x^2-3x+4$에 접해야 하므로
방정식 $x^2-3x+4=2x+k$, 즉 $x^2-5x+4-k=0$이 중근을 가져야 한다.
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$D=25-4(4-k)=0$
$4k+9=0 \qquad \therefore k=-\frac{9}{4}$
따라서 구하는 직선의 방정식은 $y=2x-\frac{9}{4}$이다.

389 ······ 답 6

이차함수 $y=x^2+a$의 그래프와 직선 $y=bx+1$이 서로 다른 두 점에서 만나므로 방정식 $x^2+a=bx+1$, 즉 $x^2-bx+a-1=0$이 서로 다른 두 실근을 가지며 그 중 한 근이 $2+\sqrt{3}$이다.
이때 a, b가 유리수이므로 나머지 한 근은 $2-\sqrt{3}$이다.
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$b=(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=4$, $a-1=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=1$
에서 $a=2$, $b=4$이다.
$\therefore a+b=2+4=6$

390 ······ 답 ②

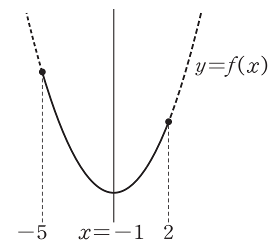
$y=2x^2-8x+5$
$\quad=2(x^2-4x+4)-8+5$
$\quad=2(x-2)^2-3$
이므로 이 이차함수의 그래프는 꼭짓점의 좌표가 $(2, -3)$이고, 아래로 볼록하므로 다음 그림과 같다.



따라서 $x=2$일 때 최솟값 -3을 갖는다.
$\therefore a+b=2+(-3)=-1$

391 ······ 답 ③

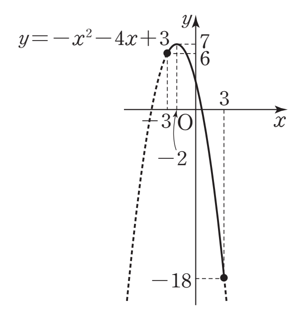
$f(-5)=f(3)$이 성립하므로 이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$의 축은 $x=\frac{-5+3}{2}$, 즉 $x=-1$이다.
$a>0$이므로 $-5\le x\le 2$에서 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 $-5\le x\le 2$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(-5)$, 최솟값은 $f(-1)$이다.

392 ······ 답 ①

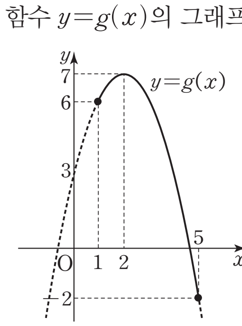
$y=-x^2-4x+3=-(x^2+4x+4)+4+3$
$\quad=-(x+2)^2+7$
$-3\le x\le 3$에서 함수 $y=-(x+2)^2+7$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$x=-2$일 때 최댓값 $M=-(-2+2)^2+7=7$을 갖고,
$x=3$일 때 최솟값 $m=-(3+2)^2+7=-18$을 갖는다.
$\therefore M+m=7+(-18)=-11$

393 ······ 답 ②

$f(x)=x^2-2x+k=(x^2-2x+1)+k-1$
$\qquad=(x-1)^2+k-1$
$-2\le x\le 3$에서 $x=1$일 때 최솟값 $f(1)=k-1$을 가지므로
$k-1=3$에서 $k=4$
$g(x)=-x^2+4x+3=-(x^2-4x+4)+7$
$\qquad=-(x-2)^2+7$
이므로 $1\le x\le 5$에서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$x=2$일 때 최댓값 $g(2)=7$을 갖고,
$x=5$일 때 최솟값 $g(5)=-2$를 갖는다.
따라서 구하는 최댓값과 최솟값의 합은
$7+(-2)=5$

394 ⋯⋯ 답 5

점 $(a,\ b)$가 이차함수 $y=x^2-2x-3$의 그래프 위의 점이므로
$b=a^2-2a-3$을 만족시킨다.

$$2a^2-b+3=2a^2-(a^2-2a-3)+3$$
$$=a^2+2a+6=(a+1)^2+5$$

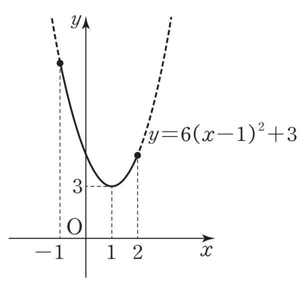
따라서 $2a^2-b+3$은 $a=-1$일 때, 최솟값 5를 갖는다.

395 ⋯⋯ 답 ⑤

$2x+y=3$, 즉 $y=-2x+3$에서

$$2x^2+y^2=2x^2+(-2x+3)^2$$
$$=2x^2+(4x^2-12x+9)$$
$$=6(x-1)^2+3$$

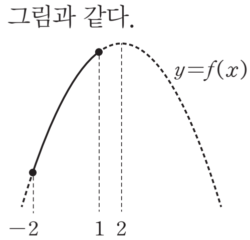
$-1\le x\le 2$에서 함수 $y=6(x-1)^2+3$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$x=-1$일 때 최댓값 $M=6\times(-2)^2+3=27$을 갖고,
$x=1$일 때 최솟값 $m=3$을 갖는다.
$\therefore\ M+m=27+3=30$

396 ⋯⋯ 답 25

이차항의 계수가 -1이고 꼭짓점의 좌표가 $(2,\ k)$인 이차함수는
$f(x)=-(x-2)^2+k$이므로 $-2\le x\le 1$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



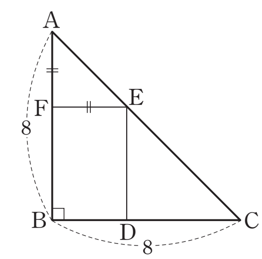
따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$일 때 최솟값을 갖고,
$x=1$일 때 최댓값을 갖는다.
$f(-2)=-16+k=-3$이므로 $k=13$
$M=f(1)=-1+k=12$
$\therefore\ k+M=13+12=25$

397 ⋯⋯ 답 186

$y=-5t^2+60t=-5(t-6)^2+180$
에서 $t=6$일 때, 공의 높이가 180(m)로 가장 높이 올라가게 된다.
따라서 $a=6$, $b=180$이므로
$a+b=6+180=186$

398 ⋯⋯ 답 20

$\overline{FB}=x\ (0<x<8)$라 하면 두 삼각형 ABC, AFE가 서로 닮음이므로
$\overline{FE}=\overline{AF}=8-\overline{FB}=8-x$이다.



직사각형 BDEF의 넓이는
$\overline{FB}\times\overline{FE}=x(8-x)=-(x-4)^2+16$
이므로 $x=4$일 때, 최댓값 16을 갖는다.
따라서 $a=4$, $b=16$이므로
$a+b=4+16=20$

399 ⋯⋯ 답 ④

두 정삼각형의 한 변의 길이를 각각 a, $b\ (a>0,\ b>0)$라 하면
$3a+3b=30$, $b=10-a$
두 정삼각형의 넓이의 합은

$$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2+\frac{\sqrt{3}}{4}b^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\{a^2+(10-a)^2\}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}(2a^2-20a+100)$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}(a-5)^2+\frac{25\sqrt{3}}{2}$$

이므로 $a=5$일 때, 두 정삼각형의 넓이의 합은 최솟값 $\frac{25\sqrt{3}}{2}$을 갖는다.

400 ⋯⋯ 답 ③

직사각형 모양의 닭장에서 닭장에 포함되는 벽을 가로로 하여 이 길이를 a(m)라 하고,
세로의 길이를 b(m)라 하면 두 양수 a, b에 대하여
$a+2b=20$이므로 $a=20-2b$
따라서 닭장의 바닥의 넓이는

$$ab=(20-2b)b=-2(b^2-10b)$$
$$=-2(b-5)^2+50$$

이므로 $b=5$일 때 닭장의 바닥의 넓이가 최댓값 50을 갖는다.
따라서 구하는 닭장에 포함되는 벽의 길이는 $a=10$(m)이다.

401 ······ 답 ④

입장료를 50원 올릴 때마다 입장객의 수가 10명씩 감소하므로
이 박물관의 1인당 입장료를 $(2000+50x)$원이라 하면
하루 입장객의 수는 $(500-10x)$명이다. (단, $0<x<50$)
하루 입장료의 총 판매액은

$$\begin{aligned}(2000+50x)(500-10x)&=-500x^2+5000x+1000000\\&=-500(x-5)^2+1012500\end{aligned}$$

이므로 $x=5$일 때 최대이다.
따라서 하루 입장료의 총 판매액이 최대가 되도록 하는
이 박물관의 1인당 입장료는 2250원이다.

402 ······ 답 ③

이차함수 $y=2x^2-4x+k$의 그래프가 x축과 만나는 두 점의
x좌표를 각각 α, β라 하면 두 점 사이의 거리는 $|\alpha-\beta|$와 같으므로
$|\alpha-\beta|=4$이다. ······ ㉠
또한 이차방정식 $2x^2-4x+k=0$의 두 실근이 α, β이므로
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=\dfrac{k}{2}$ ······ ㉡
$|\alpha-\beta|^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$이므로 ㉠, ㉡을 대입하면
$16=4-2k$
$\therefore k=-6$

403 ······ 답 ①

방정식 $x^2-2(a+2k)x+(a^2+4k^2+6k)=0$이 중근을 가지므로
이 방정식의 판별식을 D라 하면
$\dfrac{D}{4}=(a+2k)^2-(a^2+4k^2+6k)=0$이어야 한다.
$4ak-6k=0$, $2k(2a-3)=0$
이 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로
$a=\dfrac{3}{2}$

404 ······ 답 2

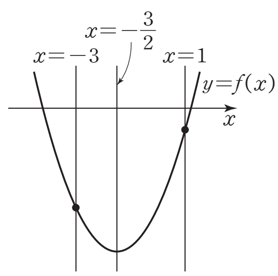
이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 두 점의 좌표를 각각
$(\alpha,\ 0)$, $(\beta,\ 0)$이라 하자.
α, β는 방정식 $f(x)=0$의 두 실근이고,
이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축이 직선 $x=2$이므로
$\dfrac{\alpha+\beta}{2}=2$에서 $\alpha+\beta=4$ ······ ㉠
방정식 $f(3x-1)=0$의 두 근을 각각 p, q라 하면
$(3p-1)+(3q-1)=\alpha+\beta$이므로 ㉠을 대입하면
$3(p+q)-2=4$, $3(p+q)=6$
$\therefore p+q=2$

405 ······ 답 ①

이차방정식 $x^2+3x+a=0$의 한 근은 -3보다 작고 다른 한 근은
1보다 크므로 $f(x)=x^2+3x+a$라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프가
x축과 만나는 두 교점의 x좌표 중 하나는 -3보다 작고 다른 하나는
1보다 커야 한다.
따라서 $f(-3)<0$이고, $f(1)<0$이다.
$f(x)=x^2+3x+a=\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2+a-\dfrac{9}{4}$이고,
이 이차함수의 그래프의 축이 직선 $x=-\dfrac{3}{2}$이므로
$f(1)<0$이면 반드시 $f(-3)<0$이다. ······ TIP
즉, 한 교점의 x좌표가 1보다 크면 다른 한 교점의 x좌표는 반드시
-3보다 작게 된다.
따라서 $f(1)<0$만 만족시키면 되므로
$f(1)=4+a<0$
$\therefore a<-4$

TIP

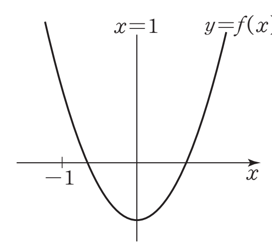
이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



축과 더 멀리 떨어진 $x=1$에서의 함숫값이 음수이면
$x=-3$에서의 함숫값도 음수가 되므로 $f(1)<0$이면
$f(-3)<0$을 만족시킨다.

406 ······ 답 6

$f(x)=x^2-2x+k-3$이라 하면 $f(x)=(x-1)^2+k-4$이므로
이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축은 직선 $x=1$이다.
따라서 이차방정식 $x^2-2x+k-3=0$의 두 근이 모두 -1보다
크려면 다음 그림과 같이 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의
교점의 x좌표가 모두 -1보다 커야 한다.



이차방정식 $x^2-2x+k-3=0$의 판별식을 D라 하면
$\dfrac{D}{4}=(-1)^2-(k-3)>0$에서 $k<4$ ······ ㉠
또한 $f(-1)>0$이므로
$f(-1)=1+2+k-3>0$에서 $k>0$ ······ ㉡
㉠, ㉡에서 $0<k<4$이므로 구하는 모든 정수 k의 값의 합은
$1+2+3=6$이다.

407 ······ 답 25

조건 (가)에서 $f(x)g(x)=x^4-9x^2+4x+12$에서
$f(-1)g(-1)=0$, $f(2)g(2)=0$이므로

조립제법을 이용하여 인수분해하면

-1	1	0	-9	4	12
		-1	1	8	-12
2	1	-1	-8	12	0
		2	2	-12	
	1	1	-6	0	

$f(x)g(x)=(x+1)(x-2)(x^2+x-6)$, 즉

$f(x)g(x)=(x+1)(x+3)(x-2)^2$이다.

조건 (나)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축에 접하고 최고차항의 계수가 1인 이차함수이므로

$f(x)=(x-2)^2$, $g(x)=(x+1)(x+3)$이다.

$\therefore f(3)+g(3)=(3-2)^2+(3+1)\times(3+3)=25$

408 ········ 답 ⑤

세 이차함수의 최고차항의 계수의 절댓값이 모두 같으므로 아래로 볼록한 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수를 a $(a>0)$라 하면 두 함수 $g(x)$, $h(x)$의 최고차항의 계수는 각각 $-a$, a이다.

함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 $x=1$, $x=3$에서 만나므로

$f(x)=a(x-1)(x-3)$

함수 $y=g(x)$의 그래프는 위로 볼록하고 x축과 $x=-1$, $x=3$에서 만나므로

$g(x)=-a(x+1)(x-3)$

함수 $y=h(x)$의 그래프는 아래로 볼록하고 x축과 $x=3$, $x=4$에서 만나므로

$h(x)=a(x-3)(x-4)$

따라서 방정식 $f(x)+g(x)+h(x)=0$에서

$a(x-1)(x-3)-a(x+1)(x-3)+a(x-3)(x-4)=0$

$a(x-3)\{(x-1)-(x+1)+(x-4)\}=0$

$a(x-3)(x-6)=0$

즉, $x=3$ 또는 $x=6$이므로 방정식 $f(x)+g(x)+h(x)=0$의 모든 근의 합은 $3+6=9$이다.

409 ········ 답 ④

$f(x)=x^2+ax+b$, $g(x)=-x^2+cx+d$에서

$f(x)-g(x)=2x^2+(a-c)x+b-d$

ㄱ. 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 서로 접하므로 방정식 $f(x)-g(x)=0$은 중근을 갖는다.
이차방정식 $2x^2+(a-c)x+b-d=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(a-c)^2-4\times2(b-d)=0$
$\therefore (a-c)^2=8(b-d)$ (거짓)

ㄴ. 함수 $y=f(x)-g(x)$의 그래프가 직선 $x=-\dfrac{a-c}{4}$에 대하여 대칭이므로 $f(0)-g(0)$의 값은 $f\left(\dfrac{c-a}{2}\right)-g\left(\dfrac{c-a}{2}\right)$의 값과 같다.
이때 $f(0)=b$, $g(0)=d$에서 $f(0)-g(0)=b-d$이므로
$b-d=f\left(\dfrac{c-a}{2}\right)-g\left(\dfrac{c-a}{2}\right)$에서
$b-f\left(\dfrac{c-a}{2}\right)=d-g\left(\dfrac{c-a}{2}\right)$이다. (참)

ㄷ. 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 제1사분면에서 접하므로 방정식 $f(x)-g(x)=0$은 0보다 큰 실근을 갖는다.
따라서 $f(-1)-g(-1)>0$이므로
$2\times(-1)^2+(a-c)\times(-1)+b-d>0$에서
$a-c-b+d<2$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

410 ········ 답 ③

조건 (가)에서 이차함수 $y=f(x)$의 축이 $x=-1$이므로

$f(x)=(x+1)^2+k$ (k는 상수)

$\quad=x^2+2x+1+k$ ······ ㉠

에서 $a=2$, $b=1+k$

조건 (나)에서 이차방정식 $x^2-3x-2=0$의 두 근 α, β에 대하여 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=-2$ ······ ㉡

$f(\alpha)+f(\beta)=(\alpha^2+2\alpha+1+k)+(\beta^2+2\beta+1+k)$

$\quad=(\alpha^2+\beta^2)+2(\alpha+\beta)+2(1+k)$

$\quad=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+2(1+k)$

$\quad=3^2-2\times(-2)+2\times3+2(1+k)$ ($\because$ ㉡)

$\quad=21+2k$

$f(\alpha)+f(\beta)=5$에서 $21+2k=5$, $2k=-16$, 즉 $k=-8$

이를 ㉠에 대입하면 $f(x)=x^2+2x-7$이다.

$\therefore f(2)=2^2+2\times2-7=1$

411 ········ 답 $\dfrac{9}{4}$

이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\dfrac{D_1}{4}=(k-1)^2-(k^2-5)=-2k+6$

이차방정식 $g(x)=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=3^2-4k=9-4k$

α, β는 음이 아닌 정수이므로 $\alpha^2+\beta^2=5$를 만족시키려면 $\alpha=2$, $\beta=1$ 또는 $\alpha=1$, $\beta=2$이어야 한다.

(i) $\alpha=2$, $\beta=1$일 때
함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 두 점에서 만나므로
$\dfrac{D_1}{4}=-2k+6>0$에서 $k<3$
함수 $y=g(x)$의 그래프가 x축과 한 점에서 접하므로
$D_2=9-4k=0$에서 $k=\dfrac{9}{4}$
두 조건을 동시에 만족시키는 실수 k의 값은 $\dfrac{9}{4}$이다.

(ii) $\alpha=1$, $\beta=2$일 때
함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 접하므로
$\dfrac{D_1}{4}=-2k+6=0$에서 $k=3$
함수 $y=g(x)$의 그래프가 x축과 두 점에서 만나므로
$D_2=9-4k>0$에서 $k<\dfrac{9}{4}$
두 조건을 동시에 만족시키는 실수 k의 값이 존재하지 않는다.

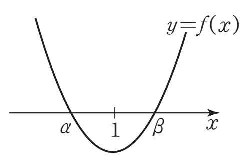
(i), (ii)에서 구하는 실수 k의 값은 $\dfrac{9}{4}$이다.

412 답 ③

이차함수 $y=x^2-2kx+k^2+4k$의 그래프와 직선 $y=ax+b$가 접하려면 방정식 $x^2-2kx+k^2+4k=ax+b$가 중근을 가져야 한다.
즉, 방정식 $x^2-(2k+a)x+k^2+4k-b=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(2k+a)^2-4(k^2+4k-b)=0$에서 등식
$4ak+a^2-16k+4b=0$이 k의 값에 관계없이 항상 성립해야 한다.
$(4a-16)k+a^2+4b=0$에서 $4a-16=0$, $a^2+4b=0$
따라서 $a=4$, $b=-4$이므로 $a+b=0$

413 답 $a\le-\frac{3}{2}$

이차함수 $y=x^2+2ax+3$의 그래프와 직선 $y=2x-1$의 두 교점의 x좌표를 각각 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면
방정식 $x^2+2ax+3=2x-1$, 즉 $x^2+(2a-2)x+4=0$의 서로 다른 두 실근이 α, β이고, 점 $(1, 1)$이 선분 AB 위에 있어야 하므로
$\alpha\le1\le\beta$를 만족시켜야 한다. …… TIP 1
따라서 $f(x)=x^2+(2a-2)x+4$라 하면 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같이 $x=1$에서의 함숫값이 0보다 작거나 같아야 한다.



즉, $f(1)=1+2a-2+4\le0$에서 $a\le-\frac{3}{2}$

TIP 1
점 $(1, 1)$이 선분 AB 위에 있으면 점 A 또는 B가 점 $(1, 1)$이 될 수 있으므로 $\alpha\le1\le\beta$이다.

TIP 2
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha\beta=4$이므로 $f(1)=0$이어도 $\alpha\ne\beta$이다.

414 답 ③

직선 $y=2x+a$가 이차함수 $y=x^2-3x+5$의 그래프와 만나지 않으므로 방정식 $x^2-3x+5=2x+a$, 즉 $x^2-5x+5-a=0$이 실근을 갖지 않는다.
이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 하면
$D_1=(-5)^2-4\times(5-a)<0$ $\quad\therefore a<-\frac{5}{4}$ …… ㉠
직선 $y=2x+a$가 이차함수 $y=x^2-2x-1$의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만나므로 방정식 $x^2-2x-1=2x+a$,
즉 $x^2-4x-1-a=0$이 서로 다른 두 실근을 갖는다.
이 이차방정식의 판별식을 D_2라 하면
$\frac{D_2}{4}=(-2)^2-(-1-a)>0$ $\quad\therefore a>-5$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 $-5<a<-\frac{5}{4}$이므로 모든 정수 a는
-4, -3, -2의 3개이다.

415 답 ③

두 점 (a, b), (b, a)가 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점이므로
$b=a^2-5a-8$, $a=b^2-5b-8$ …… ㉠
위의 두 식을 변끼리 빼면
$b-a=a^2-b^2-5(a-b)$, $(a+b)(a-b)-4(a-b)=0$
$\therefore (a-b)(a+b-4)=0$
$a>b$이므로 $a+b=4$, $b=4-a$를 ㉠의 첫 번째 식에 대입하면
$4-a=a^2-5a-8$, $a^2-4a-12=0$
$(a+2)(a-6)=0$에서 $a=6$ $(\because a>b)$이고 $b=-2$이다.
이때 함수 $y=x^2+k$의 그래프와 직선 $y=6x-2$가 접하므로
이차방정식 $x^2+k=6x-2$, 즉 $x^2-6x+k+2=0$이 중근을 가진다.
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(-3)^2-(k+2)=0$
$\therefore k=7$

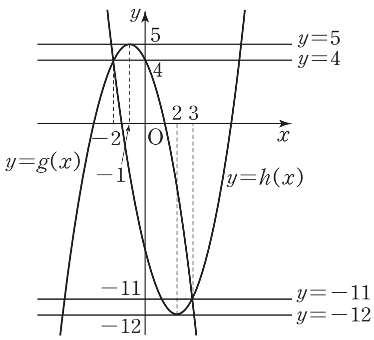
416 답 ④

두 함수 $f(x)=-x^2+5$, $g(x)=-2x+k$의 그래프가 접하면
방정식 $-x^2+5=-2x+k$, 즉 $x^2-2x+k-5=0$이 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 하면
$\frac{D_1}{4}=(-1)^2-(k-5)=0$ $\quad\therefore k=k_1=6$
두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만날 때, 두 점의 x좌표를 각각 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면 α, β는 방정식 $x^2-2x+k-5=0$의 두 실근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=k-5$ …… ㉠
이때 직선 $y=g(x)$의 기울기가 음수이므로 $g(\alpha)>g(\beta)$이고, 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 두 점의 y좌표의 차가 8이려면 $g(\alpha)-g(\beta)=8$이어야 한다.
$(-2\alpha+k)-(-2\beta+k)=8$, $-2(\alpha-\beta)=8$
$\therefore \alpha-\beta=-4$ …… ㉡
$(\alpha+\beta)^2=(\alpha-\beta)^2+4\alpha\beta$에서
$2^2=(-4)^2+4(k-5)$ $(\because$ ㉠, ㉡$)$, 즉 $4k=8$이므로 $k=k_2=2$
$\therefore k_1+k_2=6+2=8$

417 답 -14

$g(x)=-x^2-2x+4$, $h(x)=x^2-4x-8$이라 하자.
$g(x)=-(x+1)^2+5$, $h(x)=(x-2)^2-12$이므로
두 함수의 꼭짓점의 좌표는 각각 $(-1, 5)$, $(2, -12)$이다.
$$\begin{aligned}g(x)-h(x)&=-x^2-2x+4-(x^2-4x-8)\\&=-2x^2+2x+12\\&=-2(x+2)(x-3)\end{aligned}$$
에서 방정식 $g(x)-h(x)=0$의 해가 $x=-2$ 또는 $x=3$이고,
$g(-2)=-(-2)^2-2(-2)+4=4$,
$g(3)=-3^2-2\times3+4=-11$이므로
두 함수 $y=g(x)$, $y=h(x)$의 그래프가 두 점
$(-2, 4)$, $(3, -11)$
에서 만난다.

따라서 $f(t)=3$에서 직선 $y=t$가 두 이차함수 $y=g(x)$, $y=h(x)$의 그래프와 만나는 서로 다른 점의 개수가 3인 경우는 다음 그림과 같다.



따라서 $f(t)=3$을 만족시키는 실수 t의 값의 합은
$5+4+(-11)+(-12)=-14$

418 ········ 답 ①

이차항의 계수가 2인 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 두 점 $(\alpha,\ 0)$, $(\beta,\ 0)$에서 만나므로
$f(x)=2(x-\alpha)(x-\beta)$ ······ ㉠
이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=g(x)$와 두 점 $(\alpha,\ 0)$, $(\gamma,\ f(\gamma))$에서 만나므로
$f(x)-g(x)=2(x-\alpha)(x-\gamma)$ ······ ㉡
이때 $\beta-\alpha=6$, $\gamma-\alpha=4$이므로 $\beta-\gamma=2$ ······ ㉢
㉠에서 ㉡을 빼면

$$\begin{aligned} g(x)&=2(x-\alpha)(x-\beta)-2(x-\alpha)(x-\gamma)\\ &=2(x-\alpha)\{(x-\beta)-(x-\gamma)\}\\ &=2(x-\alpha)(\gamma-\beta)\\ &=-4(x-\alpha)\ (\because ㉢) \end{aligned}$$

$g(-2)=4$이므로
$g(-2)=-4(-2-\alpha)=4$에서 $\alpha=-1$이고,
이를 ㉢에 대입하면 $\beta=5$, $\gamma=3$
따라서 $f(x)=2(x+1)(x-5)$, $g(x)=-4(x+1)$이다.

$$\begin{aligned} \therefore\ f(2\alpha)+g\left(\frac{\beta\gamma}{3}\right)&=f(-2)+g(5)\\ &=2\times(-1)\times(-7)+(-4)\times6=-10 \end{aligned}$$

419 ········ 답 ③

두 점 A, B의 x좌표를 각각 α, β라 하면 $\mathrm{A}(\alpha,\ \alpha^2)$, $\mathrm{B}(\beta,\ \beta^2)$이고, α, β는 이차방정식 $x^2=x+k$, 즉 $x^2-x-k=0$의 두 실근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=-k$ ······ ㉠
이때 $\alpha>0$, $\beta<0$이므로

$S_1=\frac{1}{2}\times\alpha\times\alpha^2=\frac{1}{2}\alpha^3$, $S_2=\frac{1}{2}\times(-\beta)\times\beta^2=-\frac{1}{2}\beta^3$

$$\begin{aligned} S_1-S_2&=\frac{1}{2}\alpha^3-\left(-\frac{1}{2}\beta^3\right)=\frac{1}{2}(\alpha^3+\beta^3)\\ &=\frac{1}{2}\{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)\}\\ &=\frac{1}{2}\times\{1^3-3\times(-k)\times1\}\ (\because ㉠)\\ &=\frac{1+3k}{2} \end{aligned}$$

$S_1-S_2=14$에서 $\frac{1+3k}{2}=14$, $3k=27$
$\therefore\ k=9$

420 ········ 답 풀이 참조

이차함수 $y=x^2+2(k+4)x+4$의 그래프와 x축이 접하므로 이차방정식 $x^2+2(k+4)x+4=0$이 중근을 갖는다.
이 방정식의 판별식을 D_1이라 하면
$\frac{D_1}{4}=(k+4)^2-4=0$
$k^2+8k+12=0$, $(k+6)(k+2)=0$
$\therefore\ k=-6$ 또는 $k=-2$ ······ ㉠
이차함수 $y=x^2+2(k+4)x+4$의 그래프와 직선 $y=kx+3$이 접하므로 이차방정식 $x^2+2(k+4)x+4-kx-3=0$, 즉 $x^2+(k+8)x+1=0$이 중근을 갖는다.
이 방정식의 판별식을 D_2라 하면
$D_2=(k+8)^2-4=0$
$k^2+16k+60=0$, $(k+10)(k+6)=0$
$\therefore\ k=-10$ 또는 $k=-6$ ······ ㉡
㉠, ㉡에서 구하는 실수 k의 값은 -6이다.

채점 요소	배점
이차함수 $y=x^2+2(k+4)x+4$의 그래프와 x축이 접하도록 하는 실수 k의 값 구하기	40%
이차함수 $y=x^2+2(k+4)x+4$의 그래프와 직선 $y=kx+3$이 접하도록 하는 실수 k의 값 구하기	40%
두 조건을 동시에 만족시키는 실수 k의 값 구하기	20%

421 ········ 답 14

두 이차함수 $y=x^2+2x+1$, $y=-(x-3)^2+k$의 그래프에 동시에 접하는 직선의 방정식을 $y=ax+b$ (a, b는 상수)라 하자.
이 직선이 이차함수 $y=x^2+2x+1$과 접하므로 이차방정식 $x^2+2x+1=ax+b$, 즉 $x^2+(2-a)x+1-b=0$이 중근을 갖는다.
이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 하면
$D_1=(2-a)^2-4(1-b)=0$
$a^2-4a+4b=0$
$\therefore\ 4b=-a^2+4a$ ······ ㉠
이차함수 $y=-(x-3)^2+k$와 직선이 접하므로 이차방정식 $-(x-3)^2+k=ax+b$, 즉 $x^2+(a-6)x+b-k+9=0$이 중근을 갖는다. 이 이차방정식의 판별식을 D_2라 하면
$D_2=(a-6)^2-4(b-k+9)=0$
$a^2-12a-4b+4k=0$
$2a^2-16a+4k=0\ (\because ㉠)$ $\quad\therefore\ a^2-8a+2k=0$
조건을 만족시키는 서로 다른 두 직선이 존재하려면 이 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D_3이라 하면
$\frac{D_3}{4}=(-4)^2-2k>0$, $2k<16$ $\quad\therefore\ k<8$
이때 정수 k의 최댓값이 7이고, 두 직선의 기울기의 곱은 이차방정식 $a^2-8a+2k=0$에서 이차방정식과 근과 계수의 관계에 의하여 $2k$이므로 최댓값은 $2k=2\times7=14$이다.

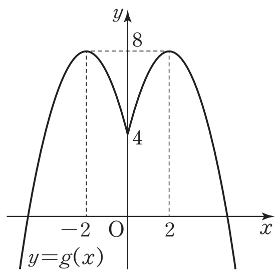
422 ……………… 답 ②

$f(x)=-x^2+4x+4=-(x-2)^2+8$

$x\geq 0$일 때, $g(x)=-(x-2)^2+8$이고,

$x<0$일 때, $g(x)=-(-x-2)^2+8=-(x+2)^2+8$이므로

함수 $g(x)=\begin{cases} f(x) & (x\geq 0) \\ f(-x) & (x<0) \end{cases}$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$h(t)=2$를 만족시키는 자연수 t의 값은 1, 2, 3, 8이므로

$\alpha=1+2+3+8=14$

$h(t)=4$를 만족시키는 자연수 t의 값은 5, 6, 7이므로

$\beta=5+6+7=18$

$\therefore\ \beta-\alpha=18-14=4$

423 ……………… 답 −8

이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(0,\ -2)$이므로

$f(x)=kx^2-2$ (k는 0이 아닌 상수)라 하자.

함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(a,\ 2)$를 지나므로

$f(a)=ka^2-2=2$에서 $k=\dfrac{4}{a^2}$

$\therefore\ f(x)=\dfrac{4}{a^2}x^2-2$

이때 직선 $y=g(x)$는 원점과 점 $(a,\ 2)$를 지나므로 $g(x)=\dfrac{2}{a}x$이다.

$f(x)-g(x)=\dfrac{4}{a^2}x^2-2-\dfrac{2}{a}x=\dfrac{2}{a^2}(2x^2-ax-a^2)$

$=\dfrac{2}{a^2}(2x+a)(x-a)=0$

이므로 $x=-\dfrac{a}{2}$ 또는 $x=a$

방정식 $f(x)=g(x)$의 두 근의 차가 6이므로

$a-\left(-\dfrac{a}{2}\right)=\dfrac{3}{2}a=6$ ($\because\ a>0$)에서 $a=4$, $k=\dfrac{1}{4}$

따라서 $f(x)=\dfrac{1}{4}x^2-2$이므로 방정식 $f(x)=0$, $\dfrac{1}{4}x^2-2=0$,

$x^2-8=0$의 두 근의 곱은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 -8이다.

424 ……………… 답 $\dfrac{33}{2}$

$f(x)=x^2-2x-8=(x+2)(x-4)$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가

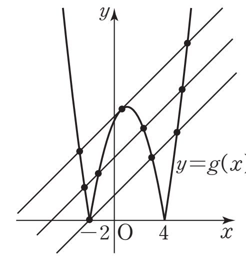
x축과 $x=-2$, $x=4$에서 만나고 아래로 볼록하므로

$-2<x<4$일 때 $f(x)<0$이고, $x\leq -2$ 또는 $x\geq 4$일 때

$f(x)\geq 0$이다.

따라서 $g(x)=\begin{cases} -f(x) & (-2<x<4) \\ f(x) & (x\leq -2 \text{ 또는 } x\geq 4) \end{cases}$이고 그 그래프는

다음 그림과 같다.



함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 서로 다른 네 점에서 만나려면 직선이 $-2<x<4$에서 함수 $y=-f(x)$의 그래프와 접할 때보다는 아래쪽에, 점 $(-2,\ 0)$을 지날 때보다는 위쪽에 위치해야 한다.

(i) 직선 $y=x+k$가 $-2<x<4$에서 함수 $y=-f(x)$의 그래프와 접할 때

방정식 $-x^2+2x+8=x+k$, 즉 $x^2-x+k-8=0$이 중근을 가지므로 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(-1)^2-4(k-8)=0$, $4k=33$ $\quad\therefore\ k=\dfrac{33}{4}$

(ii) 직선 $y=x+k$가 점 $(-2,\ 0)$을 지날 때

직선 $y=x+k$에 점 $(-2,\ 0)$을 대입하면

$0=-2+k$ $\quad\therefore\ k=2$

(i), (ii)에 의하여 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 서로 다른 네 점에서 만나도록 하는 k의 값의 범위는 $2<k<\dfrac{33}{4}$이다.

$\therefore\ pq=2\times\dfrac{33}{4}=\dfrac{33}{2}$

425 ……………… 답 ②

방정식 $2x+2=x^2+4x-1$, 즉 $x^2+2x-3=0$,

$(x+3)(x-1)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$이다.

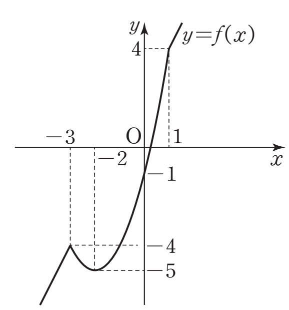
따라서 직선 $y=2x+2$와 이차함수 $y=x^2+4x-1$의 그래프가

두 점 $(-3,\ -4)$, $(1,\ 4)$에서 만나고,

$y=x^2+4x-1=(x+2)^2-5$이므로 함수 $f(x)$는 $x=-2$일 때,

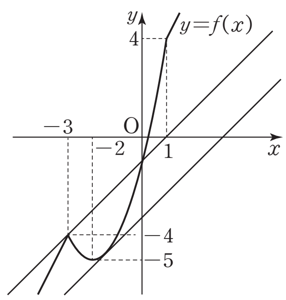
최솟값 -5를 갖는다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



ㄱ. 위의 그래프에서 함수 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 한 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값의 범위는 $k<-5$ 또는 $k>-4$ (참)

ㄴ. 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x+a$가 서로 다른 세 점에서 만나려면 다음 그림과 같이 a의 값이 직선 $y=x+a$가 함수 $y=x^2+4x-1$의 그래프와 접할 때보다는 크고 점 $(-3,\ -4)$를 지날 때보다는 작아야 한다.



이차방정식 $x^2+4x-1=x+a$, 즉 $x^2+3x-1-a=0$이 중근을 가지므로 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=3^2-4(-1-a)=0$, $4a=-13$

$\therefore a=-\dfrac{13}{4}$

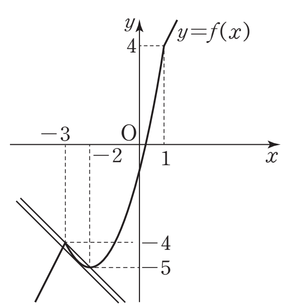
직선 $y=x+a$에 점 $(-3, -4)$를 대입하면

$-4=-3+a \qquad \therefore a=-1$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x+a$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 실수 a의 값의 범위는

$-\dfrac{13}{4}<a<-1$ (참)

ㄷ. 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-x+b$가 서로 다른 두 점에서 만나려면 다음 그림과 같이 직선 $y=-x+b$가 점 $(-3, -4)$를 지나거나 이차함수 $y=x^2+4x-1$의 그래프와 접해야 한다.



이차방정식 $x^2+4x-1=-x+b$, 즉 $x^2+5x-1-b=0$이 중근을 가지므로 판별식을 D_2라 하면

$D_2=5^2-4(-1-b)=0$, $4b=-29 \qquad \therefore b=-\dfrac{29}{4}$

직선 $y=-x+b$에 점 $(-3, -4)$를 대입하면

$-4=-(-3)+b \qquad \therefore b=-7$

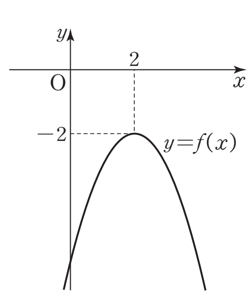
따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-x+b$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 b의 값은 $-\dfrac{29}{4}$ 또는 -7 (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

426

답 ④

함수 $f(x)=-x^2+4x-6=-(x-2)^2-2$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$a\le 2$이면 $a\le x\le 5$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(2)=-2$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$\therefore a>2$

이때 $a\le x\le 5$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(a)$이므로

$f(a)=-3$이다.

$f(a)=-a^2+4a-6=-3$에서

$a^2-4a+3=0$, $(a-1)(a-3)=0$

$\therefore a=3$ $(\because a>2)$

427

답 29

$g(x)$는 일차식이고, $f(x)$는 최고차항의 계수가 2인 이차식이므로

$g(x)-f(x)$는 최고차항의 계수가 -2인 이차식이다.

이때 함수 $y=g(x)-f(x)$가 $x=3$에서 최댓값 4를 가지므로

$g(x)-f(x)=-2(x-3)^2+4$

$\qquad\qquad\quad =-2x^2+12x-14$

한편, 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 $x=\alpha$, $x=\beta$에서 만나므로 방정식 $g(x)-f(x)=0$의 두 근이 α, β이다.

따라서 이차방정식 $-2x^2+12x-14=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=6$, $\alpha\beta=7$

$\therefore \alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta=36-7=29$

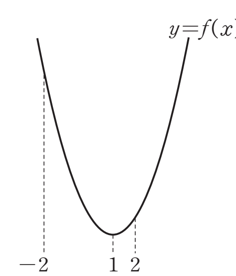
428

답 ④

조건 (가)에서 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $x=\dfrac{-1+3}{2}=1$에 대하여 대칭이므로 꼭짓점의 x좌표가 1이다.

$\therefore a=-2$

즉, $f(x)=x^2-2x+b$이고 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



$-2\le x\le 2$에서 이차함수 $f(x)$는 x의 값이 1과 더 멀리 떨어졌을 때 최대가 되므로 $x=-2$일 때 최댓값을 갖는다.

$f(-2)=(-2)^2-2\times(-2)+b=12$이므로 $b=4$

따라서 $f(x)=x^2-2x+4$이므로

$f(3)=3^2-2\times 3+4=7$이다.

429

답 ④

이차방정식 $x^2+2(k+1)x+k^2-2k+5=0$이 두 실근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(k+1)^2-(k^2-2k+5)\ge 0$, $4k\ge 4$

$\therefore k\ge 1 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

또한 이차방정식 $x^2+2(k+1)x+k^2-2k+5=0$에서

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2(k+1)=-2k-2$, $\alpha\beta=k^2-2k+5$
이때
$$\begin{aligned}(\alpha-2)(\beta-2)&=\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+4\\&=k^2-2k+5-2(-2k-2)+4\\&=k^2+2k+13\\&=(k+1)^2+12\end{aligned}$$
이고, ㉠에서 $k\geq1$이므로
$(\alpha-2)(\beta-2)$는 $k=1$일 때, 최솟값 16을 갖는다.

430 답 45

조건 ㈎에서 이차방정식 $f(x)=0$이 중근을 가지므로
이차방정식 $-x^2+ax-b=0$의 판별식을 D라 하면
$D=a^2-4(-1)(-b)=0$, $a^2=4b$ …… ㉠
이때 $f(x)=-x^2+ax-b=-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}-b$에서
$a>0$이고 함수 $y=f(x)$의 그래프는 위로 볼록하므로
$-a\leq x\leq a$에서 $x=\frac{a}{2}$일 때 최댓값을 가지고,
$x=-a$일 때 최솟값을 갖는다.
조건 ㈏에서 최솟값이 -45이므로
$$\begin{aligned}f(-a)&=-(-a)^2+a(-a)-b\\&=-2a^2-b\\&=-2\times4b-b\ (\because ㉠)\\&=-9b\end{aligned}$$
에서 $-9b=-45$, 즉 $b=5$이고 $a^2=20$ ($\because$ ㉠)
$\therefore a^2+b^2=20+5^2=45$

431 답 ④

$f(-3)=f(9)$에서 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축은 직선
$x=\frac{-3+9}{2}=3$이므로 $f(x)=x^2-6x+a$ (a는 상수)라 하자. …… ㉠
ㄱ. $f(x)=(x-3)^2+a-9$이므로 $x=3$일 때 최솟값을 갖는다.
따라서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(3)$이다. (참)
ㄴ. $1\leq x\leq6$에서 함수 $f(x)$는 $x=3$일 때 최솟값을 갖고,
$x=6$일 때 최댓값을 갖는다.
따라서 최댓값과 최솟값의 차는 ㉠에서
$f(6)-f(3)=(36-36+a)-(9-18+a)=9$ (거짓)
ㄷ. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나지 않기 위한 조건은
방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=9-a<0$ ($\because$ ㉠) $\quad\therefore a>9$
즉, $f(0)=a>9$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 만나지 않는다. (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

432 답 5

$$\begin{aligned}f(x)&=-2x^2+4kx-2k^2-1\\&=-2(x-k)^2-1\end{aligned}$$
이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(k, -1)$이다.
k의 값의 범위에 따라 $2\leq x\leq3$에서 함수 $f(x)$의 최댓값을 구하면 다음과 같다.
(i) $k\leq2$일 때
$2\leq x\leq3$에서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값을 가지므로
$f(2)=-2\times2^2+4k\times2-2k^2-1=-2k^2+8k-9$
에서 $-2k^2+8k-9=-3$, $2k^2-8k+6=0$
$2(k-1)(k-3)=0 \quad \therefore k=1$ ($\because k\leq2$)
(ii) $2<k<3$일 때
$2\leq x\leq3$에서 함수 $f(x)$는 꼭짓점에서 최댓값을 갖는다.
그러나 $f(k)=-1$이므로 최댓값이 -3이 되도록 하는 실수 k의 값이 존재하지 않는다.
(iii) $k\geq3$일 때
$2\leq x\leq3$에서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 최댓값을 가지므로
$f(3)=-2\times3^2+4k\times3-2k^2-1=-2k^2+12k-19$
에서 $-2k^2+12k-19=-3$, $2k^2-12k+16=0$
$2(x-2)(x-4)=0 \quad \therefore k=4$ ($\because k\geq3$)
(i)~(iii)에서 모든 실수 k의 값의 합은
$1+4=5$

433 답 풀이 참조

함수 $y=(x^2-4x+3)^2-12(x^2-4x+3)+30$에서
$t=x^2-4x+3$으로 치환하면
$t=(x-2)^2-1$에서 $-1\leq x\leq3$이므로
$x=2$일 때 $t=-1$로 최솟값을 갖고,
$x=-1$일 때 $t=8$로 최댓값을 갖는다.
따라서 주어진 함수는
$$\begin{aligned}y&=(x^2-4x+3)^2-12(x^2-4x+3)+30\\&=t^2-12t+30\\&=(t-6)^2-6\end{aligned}$$
이므로 $-1\leq t\leq8$에서
$t=6$일 때 최솟값 -6을 갖고,
$t=-1$일 때 최댓값 43을 갖는다.

채점 요소	배점
$t=x^2-4x+3$으로 치환하여 t의 최댓값과 최솟값 구하기	40%
$-1\leq t\leq8$에서 함수 $y=t^2-12t+30$의 최댓값과 최솟값 구하기	60%

434 답 풀이 참조

방정식 $x^2-5x-6=0$, $(x+1)(x-6)=0$에서
$x=-1$ 또는 $x=6$이므로 $\mathrm{B}(-1, 0)$, $\mathrm{C}(6, 0)$이다.
점 P가 점 A에서 출발하여 점 C까지 움직이므로
$0\leq a\leq6$이고, 점 P가 곡선 $y=x^2-5x-6$ 위의 점이므로
$b=a^2-5a-6$
따라서 주어진 식은
$$\begin{aligned}a^2+4b-1&=a^2+4(a^2-5a-6)-1\\&=5a^2-20a-25\\&=5(a-2)^2-45\end{aligned}$$
이므로 $0\leq a\leq6$에서
$a=2$일 때 최솟값 -45를 갖고,
$a=6$일 때 최댓값 35를 갖는다.

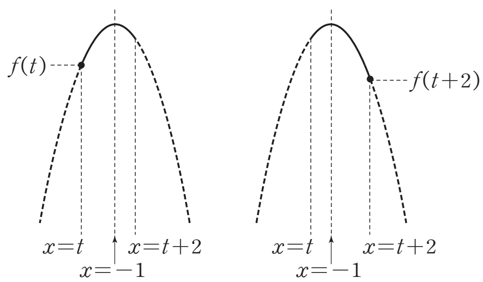
채점 요소	배점
a의 값의 범위 구하기	20%
점 P가 곡선 $y=x^2-5x-6$ 위의 점이라는 것을 이용하여 a^2+4b-1을 a에 대한 식으로 나타내기	40%
a^2+4b-1의 최댓값과 최솟값 구하기	40%

435

답 ③

조건 (나)에서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 최댓값을 가지므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 위로 볼록하고 축이 $x=-1$이다. …… ㉠

$t\le x\le t+2$에서 함수 $f(x)$의 최솟값이 $g(t)$이므로 다음 그림과 같이 경우를 나누어 보자.

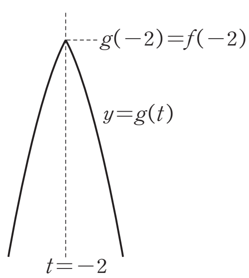


[$t\le -2$일 때]　　[$t>-2$일 때]

$t\le -2$일 때, $t\le x\le t+2$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(t)$이므로 $g(t)=f(t)$

$t>-2$일 때, $t\le x\le t+2$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(t+2)$이므로 $g(t)=f(t+2)$

따라서 함수 $g(t)=\begin{cases} f(t) & (t\le -2) \\ f(t+2) & (t>-2) \end{cases}$의 그래프는 다음 그림과 같다.



함수 $g(t)$의 최댓값이 4이므로 $g(-2)=4$이고,

㉠에서 $f(-2)=f(0)=4$이므로

$f(x)-4=ax(x+2)\,(a<0)$

조건 (가)에서 $f(-1)=7$이므로

$f(-1)-4=a\times(-1)\times(-1+2)$에서 $a=-3$

$\therefore\ f(x)=-3x(x+2)+4$

$\therefore\ f(-5)=-3\times(-5)\times(-5+2)+4=-41$

436

답 ②

조건 (가)에서 $f(-1)=f(3)$이므로 이차함수 $f(x)$의 축이 $x=\dfrac{-1+3}{2}=1$이다.

$f(x)=a(x-1)^2+b$ (a, b는 상수, $a\ne 0$)라 하자.

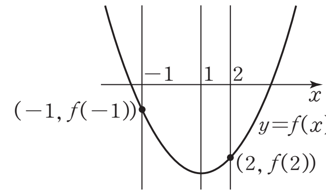
이차함수 $f(x)$의 축이 $x=1$이므로 $f(-1)\ne f(2)$

즉, 조건 (나)에서 $f(-1)+|f(2)|=0$이므로

$f(-1)=-|f(2)|<0$에서 $f(2)>0$이고,

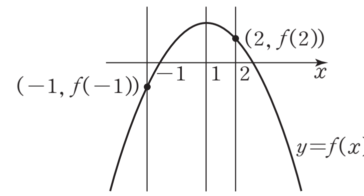
$f(-1)+f(2)=0$이다. …… ㉠

(i) $a>0$인 경우



$f(2)<f(-1)<0$이 되어 ㉠을 만족시키지 않는다.

(ii) $a<0$인 경우



㉠에서

$f(-1)+f(2)=\{a\times(-2)^2+b\}+(a\times 1^2+b)$

$=(4a+b)+(a+b)=5a+2b=0$ …… ㉡

(i), (ii)에 의하여 $a<0$이므로 이차함수 $f(x)$의 그래프는 위로 볼록하다.

따라서 조건 (다)에서 $-2\le x\le 2$일 때 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 최솟값 -26을 가진다.

$f(-2)=a\times(-3)^2+b=9a+b=-26$, $b=-26-9a$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하면 $a=-4$, $b=10$

따라서 $f(x)=-4(x-1)^2+10$이므로

$f(3)=-4\times(3-1)^2+10=-6$

437

답 ②

조건 (가)에서 이차함수 $y=f(x)$의 축은 직선 $x=2$이므로

$f(x)=ax^2-4ax+b$ (a, b는 상수, $a\ne 0$)라 하자. …… ㉠

조건 (나)에서 이차방정식 $f(x)=4x-1$, 즉

$ax^2-2(2a+2)x+b+1=0$이 중근을 가지므로

판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(2a+2)^2-a(b+1)=0$ …… ㉡

조건 (다)에서 $1\le x\le 4$일 때, 함수 $f(x)$의 최댓값은 5이고, 최솟값은 -3이므로 a의 값의 부호에 따라 경우를 나누면 다음과 같다.

(i) $a>0$일 때

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 아래로 볼록하므로

$f(4)$가 최댓값, $f(2)$가 최솟값이다.

$f(4)=a\times 4^2-4a\times 4+b=5$에서 $b=5$ ($\because$ ㉠)

$f(2)=a\times 2^2-4a\times 2+b=-3$에서 $-4a+b=-3$

즉, $-4a=-8$ ($\because b=5$)에서 $a=2$이므로

$f(x)=2x^2-8x+5$ 이다.

㉡에서 $a=2$, $b=5$일 때, $\dfrac{D}{4}=6^2-2(5+1)=24\ne 0$이므로

조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a<0$일 때

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 위로 볼록하므로

$f(2)$가 최댓값, $f(4)$가 최솟값이다.

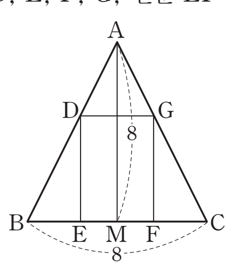
$f(4)=b=-3$, $f(2)=-4a+b=5$에서 $-4a=8(\because b=-3)$
즉, $a=-2$이므로 $f(x)=-2x^2+8x-3$이다.
㉡에서 $a=-2$, $b=-3$일 때,
$\frac{D}{4}=(-2)^2+2(-3+1)=0$이므로 조건을 만족시킨다.
(i), (ii)에 의하여 $f(x)=-2x^2+8x-3$이고,
α, β가 방정식 $f(x)=3$의 두 실근이므로
$-2x^2+8x-3=3$, $x^2-4x+3=0$
$(x-3)(x-1)=0$ $\quad\therefore x=1$ 또는 $x=3$
$\therefore \alpha^2+\beta^2=1^2+3^2=10$

438 ⋯⋯ 답 ⑤

네 꼭짓점 부분을 잘라내기 전의 직사각형의 가로와 세로의 길이를 각각 x, y라 하자.
종이를 잘라내고 남은 부분의 둘레의 길이는 종이를 자르기 전의 직사각형의 둘레의 길이와 같으므로
$2(x+y)=40$에서 $x+y=20$이다. ⋯⋯ ㉠
남은 종이의 넓이는 직사각형의 넓이에서
한 변의 길이가 2인 정사각형 4개의 넓이를 뺀 것과 같으므로
$xy-4\times2^2=xy-16$ ⋯⋯ ㉡
㉡에 ㉠을 대입하면
$xy-16=x(20-x)-16=-x^2+20x-16$
$=-(x-10)^2+84\ (4<x<16)$
따라서 구하는 남은 종이의 넓이의 최댓값은 84이다.

439 ⋯⋯ 답 16

다음과 같이 이등변삼각형의 꼭짓점을 A, B, C,
직사각형의 꼭짓점을 D, E, F, G, 선분 EF의 중점을 M이라 하자.



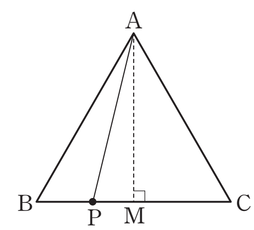
삼각형 ABM과 삼각형 DBE가 서로 닮음이고,
$\overline{BM}:\overline{AM}=1:2$이므로 $\overline{DE}=2\overline{BE}$이다.
$\overline{EM}=a\ (0<a<4)$라 하면
$\overline{BE}=4-a$, $\overline{DE}=2(4-a)$
이므로 직사각형 DEFG의 넓이는
$2a\times2(4-a)=-4(a^2-4a)$
$=-4(a-2)^2+16$
따라서 $0<a<4$에서 $a=2$일 때,
직사각형의 넓이는 최댓값은 16을 갖는다.

440 ⋯⋯ 답 ①

사각형 PQRS의 넓이는 직사각형 ABCD의 넓이에서 네 삼각형 SAP, PBQ, QCR, RDS의 넓이를 뺀 것과 같다.
직사각형 ABCD의 넓이는 15이고,
$\overline{AP}=\overline{BQ}=\overline{CR}=\overline{DS}=x$라 하면
두 삼각형 SAP, QCR의 넓이는 각각 $\frac{1}{2}x(5-x)$이고,
두 삼각형 PBQ, RDS의 넓이는 각각 $\frac{1}{2}x(3-x)$이다.
따라서 사각형 PQRS의 넓이는
$15-\{x(5-x)+x(3-x)\}=2x^2-8x+15$
$=2(x-2)^2+7$
이므로 $0<x<3$에서 $x=2$일 때, 최솟값 7을 갖는다.

441 ⋯⋯ 답 ②

점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 M이라 하면
$\overline{AM}=2\sqrt{3}$이다.



이때 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$이 최소가 되려면 점 P가 선분 BM 위에 존재해야 한다. ⋯⋯ 참고
$\overline{PM}=t\ (0\le t\le2)$라 하면
$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=\overline{PM}^2+\overline{AM}^2+\overline{BP}^2$
$=t^2+(2\sqrt{3})^2+(2-t)^2$
$=2t^2-4t+16=2(t^2-2t+8)$
$=2(t-1)^2+14$
이므로 $t=1$일 때, 최솟값 14를 갖는다.

참고
점 P가 선분 CM 위에 존재할 경우
$\overline{AP}\ge\overline{AM}$, $\overline{BP}\ge\overline{BM}$이므로
$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2\ge\overline{AM}^2+\overline{BM}^2$이 되어 점 P가 점 M일 때
$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$의 값이 최소이다.
따라서 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$의 값이 최솟값을 갖도록 하는 점 P는 선분 BM 위에 존재해야 한다.

442 ⋯⋯ 답 50

판매 금액이 a % 증가할 때, 판매 대수는 $2a$가 감소하므로
한 달 동안 총 판매 금액을 $f(a)$라 하면
$f(a)=100(1+0.01a)(300-2a)$
$=(100+a)(300-2a)$
$=-2a^2+100a+30000$
$=-2(a-25)^2+31250$
따라서 노트북의 이번 달의 판매 금액이 지난달의 판매 금액보다 25 % 증가할 때, 총 판매 금액이 31250(만 원)으로 최대가 된다.
$\therefore \frac{b}{a^2}=\frac{31250}{25^2}=50$

443 ······························ 답 ⑤

두 직선 $y=x+4$, $y=-2x+7$이 만나는 점의 좌표는
$x+4=-2x+7$에서 $x=1$이므로 $(1,\ 5)$이다.
이때 직선 $y=x+4$ 위에 있는 직사각형의 한 꼭짓점을
$\mathrm{A}(a,\ a+4)$, 직선 $y=-2x+7$ 위에 있는 직사각형의 한 꼭짓점을
$\mathrm{B}(b,\ -2b+7)$이라 하면 두 점의 y좌표가 서로 같으므로
$a+4=-2b+7$에서 $a=3-2b$ ······ ㉠
직사각형의 가로의 길이는 $b-a$, 세로의 길이는 $a+4$이므로
이 직사각형의 넓이는

$$\begin{aligned}(b-a)(a+4)&=\{b-(3-2b)\}\{(3-2b)+4\}\ (\because ㉠)\\&=(3b-3)(-2b+7)\\&=-6b^2+27b-21\\&=-6\left(b-\frac{9}{4}\right)^2+\frac{243}{8}-21\\&=-6\left(b-\frac{9}{4}\right)^2+\frac{75}{8}\end{aligned}$$

따라서 $b=\frac{9}{4}$일 때, 직사각형의 넓이는 최댓값 $\frac{75}{8}$를 갖는다.

444 ······························ 답 ①

네 점 $\mathrm{A}(a,\ a^2-7)$, $\mathrm{B}(a,\ -2a^2+5)$, $\mathrm{C}(-a,\ -2a^2+5)$,
$\mathrm{D}(-a,\ a^2-7)$에서
$\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{BC}}=a-(-a)=2a$

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{BA}}=\overline{\mathrm{CD}}&=(-2a^2+5)-(a^2-7)\\&=-3a^2+12\end{aligned}$$

이므로 직사각형 ABCD의 둘레의 길이를 $h(a)$라 하면

$$\begin{aligned}h(a)&=\overline{\mathrm{AD}}+\overline{\mathrm{BC}}+\overline{\mathrm{BA}}+\overline{\mathrm{CD}}\\&=2(\overline{\mathrm{AD}}+\overline{\mathrm{BA}})\\&=2(2a-3a^2+12)\\&=-6\left(a-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{74}{3}\end{aligned}$$

따라서 직사각형 ABCD의 둘레의 길이는 $a=\frac{1}{3}$일 때 최대이다.

445 ······························ 답 ③

$y=-x^2+8x=-(x-4)^2+16$이므로 이 이차함수의 그래프는
직선 $x=4$에 대하여 대칭이다.
점 A의 좌표를 $(a,\ -a^2+8a)$ $(0<a<4)$라 하면
점 D의 x좌표는 $8-a$이므로 $\overline{\mathrm{AD}}=8-2a$이다.
따라서 직사각형 ABCD의 둘레의 길이는

$$\begin{aligned}2(\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{AD}})&=2(-a^2+8a+8-2a)\\&=-2(a^2-6a-8)\\&=-2(a-3)^2+34\end{aligned}$$

이므로 $a=3$일 때, 최댓값 34를 갖는다.

446 ······························ 답 ②

점 P에서 y축에 평행한 직선을 그어 직선 $y=x+1$과 만나는 점을
R이라 하면 $\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PR}}$ ······ TIP
$\mathrm{P}(a,\ b)$에서

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{PR}}&=(a^2+3)-(a+1)\\&=a^2-a+2\\&=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}\end{aligned}$$

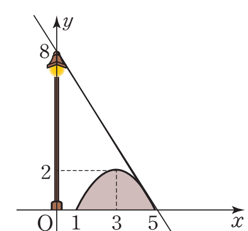
이므로 $a=\frac{1}{2}$일 때, $\overline{\mathrm{PQ}}$는 최솟값 $m=\frac{7}{4}$을 갖는다.
또한, 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$가 함수 $y=x^2+3$의 그래프 위의 점이므로
$b=a^2+3=\frac{1}{4}+3=\frac{13}{4}$

$$\begin{aligned}\therefore\ a+b+m&=\frac{1}{2}+\frac{13}{4}+\frac{7}{4}\\&=\frac{11}{2}\end{aligned}$$

TIP
직선 RQ의 기울기는 $\frac{(y\text{의 증가량})}{(x\text{의 증가량})}=\frac{\overline{\mathrm{PR}}}{\overline{\mathrm{PQ}}}=1$
이므로 $\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PR}}$이다.

447 ······························ 답 ②

다음과 같이 지면을 x축, 가로등을 y축으로 하여 좌표평면 위에
놓으면 가로등 불빛은 점 $(0,\ 8)$이고, 포물선의 꼭짓점의 좌표는
$(3,\ 2)$이고, 점 $(1,\ 0)$을 지난다.



포물선의 방정식을 $y=k(x-3)^2+2$ $(k\neq0)$라 하고,
$x=1$, $y=0$을 대입하면 $k=-\frac{1}{2}$이므로
$y=-\frac{1}{2}(x-3)^2+2$
조형물의 그림자의 끝은 빛이 지나는 경로가 포물선에 접할 때를
기준으로 구할 수 있다.
점 $(0,\ 8)$을 지나는 직선을 $y=mx+8$ $(m<0)$이라 하면
이차방정식 $-\frac{1}{2}(x-3)^2+2=mx+8$, 즉
$x^2+(2m-6)x+21=0$의 판별식을 D라 할 때,
$\frac{D}{4}=(m-3)^2-21=0$, $m^2-6m-12=0$
$\therefore\ m=3-\sqrt{21}$ $(\because m<0)$
따라서 직선은 $y=(3-\sqrt{21})x+8$이고,
직선이 x축과 만나는 점의 x좌표는
$\frac{8}{\sqrt{21}-3}=\frac{8(\sqrt{21}+3)}{12}=\frac{2(\sqrt{21}+3)}{3}$

448 ······························ 답 ②

함수 $y=f(x)$의 그래프는 아래로 볼록하고, 꼭짓점의 좌표는
$(a,\ b)$이므로

$x=a$일 때 최솟값 b를 갖는다.

ㄱ. $a=\frac{1}{2}$일 때, $f(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+b$이고 $x=\frac{1}{2}$에서 최솟값 3을 가지므로 $f\left(\frac{1}{2}\right)=b=3$이다. (참)

ㄴ. $a>2$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최솟값을 가지므로 $f(2)=(2-a)^2+b=3$이고 $b=-a^2+4a-1$이다. (참)

ㄷ. (i) $a\le 0$인 경우

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최솟값을 가지므로

$f(0)=a^2+b=3$, $b=-a^2+3$에서

$a+b=-a^2+a+3=-\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{13}{4}$

따라서 $a+b$는 $a=0$에서 최댓값 3을 갖는다.

(ii) $0<a\le 2$인 경우

$f(x)$는 $x=a$에서 최솟값 $b=3$을 가지므로

$3<a+b\le 5$이고 $a+b$는 $a=2$에서 최댓값 5를 가진다.

(iii) $a>2$인 경우

ㄴ에서 $b=-a^2+4a-1$이고

$a+b=-a^2+5a-1=-\left(a-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{21}{4}$이고

$a+b$는 $a=\frac{5}{2}$에서 최댓값 $\frac{21}{4}$을 가진다.

(i)~(iii)에 의하여 $a+b$의 최댓값은 $\frac{21}{4}$이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

449

답 ④

이차함수 $y=x^2+2ax+a^2-12$의 그래프와 직선 $y=2x-n$이 서로 다른 두 점에서 만나므로

방정식 $x^2+2ax+a^2-12=2x-n$, 즉

$x^2+2(a-1)x+a^2+n-12=0$이 서로 다른 두 실근을 가진다.

이 방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a-1)^2-(a^2+n-12)$

$=-2a-n+13>0$

에서 $n<13-2a$ …… ㉠

ㄱ. $a=2$를 ㉠에 대입하면 $n<13-4=9$이고, 이 부등식을 만족시키는 자연수 n의 개수는 8이므로 $f(2)=8$이다. (참)

ㄴ. $x_1=0.1$, $x_2=0.2$이면 ㉠에 대입했을 때,

$n<13-0.2=12.8$에서 $f(0.1)=12$이고

$n<13-0.4=12.6$에서 $f(0.2)=12$이다.

즉, $x_1<x_2$이지만 $f(x_1)=f(x_2)$이다. (거짓)

ㄷ. $a=0$일 때, $n<13$에서 $f(0)=12$

$a=1$일 때, $n<13-2=11$에서 $f(1)=10$

$a=2$일 때, $n<13-4=9$에서 $f(2)=8$

$a=3$일 때, $n<13-6=7$에서 $f(3)=6$

$a=4$일 때, $n<13-8=5$에서 $f(4)=4$

$a=5$일 때, $n<13-10=3$에서 $f(5)=2$

$a\ge 6$일 때, $n<13-2a\le 1$이므로 $f(a)=0$이다.

$\therefore f(0)+f(1)+f(2)+\cdots+f(100)=12+10+8+6+4+2$

$=42$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

450

답 ②

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 서로 다른 두 점의 x좌표를 각각 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면 $\beta-\alpha=a$이고,

$f(x)=k(x-\alpha)(x-\beta)$ $(k\ne 0)$이다.

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=2$와 만나는 두 점 사이의 거리가 $a+4$이므로 두 교점의 x좌표는 각각 $\alpha-2$, $\beta+2$이다.

즉, 방정식 $f(x)=2$의 두 실근이 $\alpha-2$, $\beta+2$이므로

$f(\beta+2)=2k(\beta-\alpha+2)=2$에서 $k(a+2)=1$ …… ㉠

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=6$과 만나는 두 점 사이의 거리가 $a+8$이므로 두 교점의 x좌표는 각각 $\alpha-4$, $\beta+4$이다.

즉, 방정식 $f(x)=6$의 두 실근이 $\alpha-4$, $\beta+4$이므로

$f(\beta+4)=4k(\beta-\alpha+4)=6$에서 $2k(a+4)=3$ …… ㉡

㉠, ㉡의 양변을 각각 나누면

$\frac{a+2}{2(a+4)}=\frac{1}{3}$, $3(a+2)=2(a+4)$

$\therefore a=2$

이를 ㉠에 대입하면 $k=\frac{1}{4}$

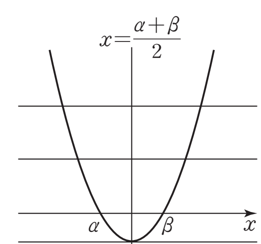
따라서 $f(x)=\frac{1}{4}(x-\alpha)(x-\beta)$이므로

$m=f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\frac{1}{4}\times\frac{\beta-\alpha}{2}\times\frac{\alpha-\beta}{2}$ …… TIP

$=-\frac{1}{16}a^2=-\frac{1}{4}$

TIP

이차함수의 그래프가 x축과 만나는 두 점의 x좌표가 각각 α, β $(\alpha<\beta)$이면 이차함수의 그래프는 다음과 같다.



즉, 이 이차함수의 그래프는 직선 $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$에 대하여 대칭이다.

451

답 ③

조건 (가)에 의하여 $c=0$이므로 $f(x)=ax^2+bx$

조건 (나)에 의하여

$f(-2)+f(2)=(4a-2b)+(4a+2b)=8a<0$

이므로 $a<0$

이때 조건 (다)에 의하여 $-2\le x\le 2$에서 x의 값이 커질수록 함숫값 $f(x)$는 작아져야 하고, 축이 직선 $x=-\frac{b}{2a}$이므로

$-\frac{b}{2a}\le -2$

ㄱ. $f(0)=0$이고, 조건 (다)에 의하여 $f(0)>f(1)$이므로 $f(1)<0$이다. (참)

ㄴ. $-\frac{b}{2a}\le-2$에서 $a<0$이므로 양변에 $-2a$를 곱하면

$b\le4a$ ($\because$ $-2a>0$)이다. (참)

ㄷ. 방정식 $f(x)=0$의 두 근의 합은 $-\frac{b}{a}$이고,

$-\frac{b}{2a}\le-2$에서 $-\frac{b}{a}\le-4$이다.

즉, 두 근의 합은 -4보다 작거나 같다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

452

답 ④

조건 (가)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 좌표를 $(p,\ kp)$라 하면

$f(x)=(x-p)^2+kp$ …… ㉠

조건 (나)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 x좌표가 $\frac{1}{2}\left(\alpha+\beta-\frac{1}{2}\right)$이므로 ㉠에서

$p=\frac{1}{2}\left(\alpha+\beta-\frac{1}{2}\right)$ …… ㉡

이때 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=kx+5$의 서로 다른 두 교점의 x좌표가 각각 α, β이므로 방정식 $f(x)=kx+5$의 서로 다른 두 실근이 α, β이다.

$$\begin{aligned}f(x)-(kx+5)&=(x-p)^2+kp-(kx+5)\\&=x^2-(2p+k)x+p^2+kp-5\end{aligned}$$

방정식 $x^2-(2p+k)x+p^2+kp-5=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=2p+k$이므로

$\alpha+\beta=\alpha+\beta-\frac{1}{2}+k$ ($\because$ ㉡) $\quad\therefore k=\frac{1}{2}$

따라서 $\alpha+\beta=2p+\frac{1}{2}$, $\alpha\beta=p^2+\frac{1}{2}p-5$이므로

$$\begin{aligned}(\alpha-\beta)^2&=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\\&=\left(2p+\frac{1}{2}\right)^2-4\left(p^2+\frac{1}{2}p-5\right)\\&=\left(4p^2+2p+\frac{1}{4}\right)-4\left(p^2+\frac{1}{2}p-5\right)\\&=\frac{1}{4}+20=\frac{81}{4}\end{aligned}$$

$\therefore\ |\alpha-\beta|=\sqrt{\frac{81}{4}}=\frac{9}{2}$

453

답 24

최고차항의 계수가 -1인 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 두 점 $\mathrm{A}(3,\ 0)$, $\mathrm{B}(k,\ 0)$을 지나므로 $f(x)=-(x-3)(x-k)$라 하면

$$\begin{aligned}f(x)&=-\{x^2-(k+3)x+3k\}\\&=-\left(x-\frac{k+3}{2}\right)^2+\frac{(k+3)^2}{4}-3k\\&=-\left(x-\frac{k+3}{2}\right)^2+\frac{(k-3)^2}{4}\end{aligned}$$

이므로 꼭짓점의 좌표는 $\mathrm{C}\left(\frac{k+3}{2},\ \frac{(k-3)^2}{4}\right)$이다.

이때 직선 BD는 직선 AC와 기울기가 같고,

직선 AC의 기울기는 $\dfrac{\frac{(k-3)^2}{4}}{\frac{k+3}{2}-3}=\frac{k-3}{2}$이므로

직선 BD의 방정식은 $y=\frac{k-3}{2}(x-k)$이다.

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{k-3}{2}(x-k)$가 두 점 B, D에서 만나므로

$-(x-3)(x-k)=\frac{k-3}{2}(x-k)$, $(x-k)\left\{\frac{k-3}{2}+(x-3)\right\}=0$

$(x-k)\left(x+\frac{k-9}{2}\right)=0$에서 $x=k$ 또는 $x=\frac{9-k}{2}$

따라서 점 D의 x좌표는 $x=\frac{9-k}{2}$이고,

y좌표는 $y=\frac{k-3}{2}\left(\frac{9-k}{2}-k\right)=-\frac{3(k-3)^2}{4}$

삼각형 AED의 넓이가 12이므로

$\frac{1}{2}\times\left(3-\frac{9-k}{2}\right)\times\frac{3(k-3)^2}{4}=12$, $(k-3)(k-3)^2=64$

$(k-3)^3=4^3$이므로 $k-3=4$에서 $k=7$

이때 삼각형 ADB의 밑변의 길이는 $\overline{\mathrm{AB}}=k-3=4$이고,

높이는 $\frac{3(k-3)^2}{4}=\frac{3}{4}\times4^2=12$이므로

넓이는 $\frac{1}{2}\times4\times12=24$이다.

454

답 ④

조건 (가)에서 등식에 $x=0$을 대입하면 $f(0)=f(-4)$이므로

이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축은 직선 $x=-2$이고,

조건 (나)에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프는 위로 볼록하다.

따라서 조건을 만족시키는 이차함수는

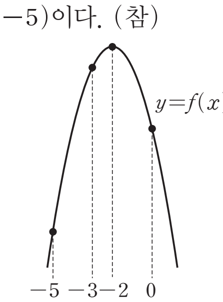
$f(x)=a(x+2)^2+b$ (a, b는 실수, $a<0$)이다.

① 함수 $y=f(x)$의 그래프는 위로 볼록하다. (참)

② $f(x)=a(x+2)^2+b$ $(a<0)$이므로 $x=-2$에서 최댓값을 갖는다. (참)

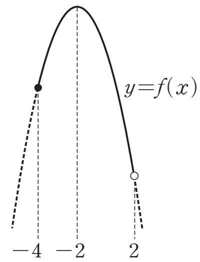
③ 함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같으므로

$f(-3)>f(0)>f(-5)$이다. (참)



④ $f(x)=a(x+2)^2+b=ax^2+4ax+4a+b$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 방정식 $f(x)=0$의 두 근의 합은 -4이다. (거짓)

⑤ $-4\le x<2$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음과 같다.



따라서 함수 $f(x)$의 최솟값은 존재하지 않는다. (참)

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

455

답 120

조건 ㈎에서 $f(x)=ax^2\ (a\neq0)$

조건 ㈏를 만족시키려면 $f(x)+g(x)$는 일차식이어야 하므로

$g(x)=-ax^2+bx+c\ (b\neq0)$으로 나타낼 수 있다.

$f(x)+g(x)=bx+c$이고 부등식 $bx+c\geq0$의 해가 $x\geq2$이므로

$b>0,\ -\dfrac{c}{b}=2$에서 $c=-2b$

조건 ㈐를 만족시키려면 함수 $f(x)-g(x)=2ax^2-bx+2b$가

$x=1$에서 최솟값을 가지므로

$a>0$이고, $\dfrac{b}{4a}=1$에서 $b=4a$

조건 ㈏에서 $c=-2b$이므로 $c=-8a$

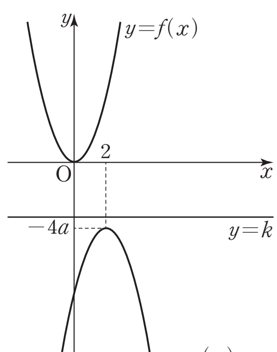
즉, $g(x)=-a(x^2-4x+8)=-a(x-2)^2-4a$이다.

방정식 $\{f(x)-k\}\times\{g(x)-k\}=0$이 실근을 갖지 않기 위해서는 두 방정식 $f(x)-k=0,\ g(x)-k=0$은 모두 실근을 갖지 않아야 한다.

즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 만나지 않고,

함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=k$도 만나지 않아야 하므로

직선 $y=k$는 두 함수 $y=f(x),\ y=g(x)$의 그래프 사이에 있다.



$-4a<k<0$을 만족시키는 정수 k의 개수가 5이므로

$-6\leq-4a<-5$에서

$\dfrac{5}{4}<a\leq\dfrac{3}{2}$

따라서 $f(22)+g(22)=4a(22-2)=80a$이므로

$f(22)+g(22)$의 최댓값은 120이다.

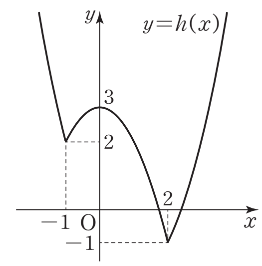
456

답 5

방정식 $f(x)=g(x)$에서 $x^2-2x-1=-x^2+3,\ 2x^2-2x-4=0$

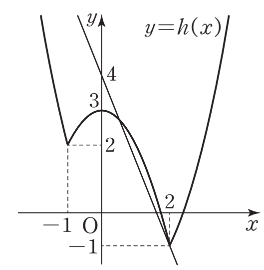
$2(x+1)(x-2)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$이므로 두 함수 $y=f(x),\ y=g(x)$의 그래프가 두 점 $(-1,\ 2),\ (2,\ -1)$에서 만난다.

따라서 함수 $h(x)=\begin{cases}f(x) & (x\leq-1 \text{ 또는 } x\geq2)\\ g(x) & (-1<x<2)\end{cases}$의 그래프는 다음 그림과 같다.



직선 $y=kx+4$는 점 $(0,\ 4)$를 지나는 직선이므로 함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=kx+4$가 서로 다른 세 점에서 만나는 경우는 다음 그림과 같다.

(i) 직선 $y=kx+4$가 점 $(2,\ -1)$을 지나는 경우



직선 $y=kx+4$에 점 $(2,\ -1)$을 대입하면

$-1=2k+4\qquad\therefore\ k=-\dfrac{5}{2}$

(ii) 직선 $y=kx+4$가 함수 $y=g(x)$의 그래프에 접하는 경우

방정식 $g(x)=kx+4$가 중근을 가지므로 방정식

$x^2+kx+1=0$의 판별식을 D라 하면 $D=k^2-4=0$

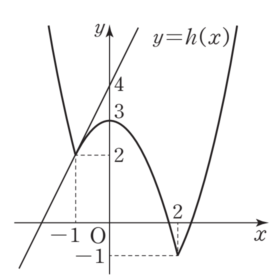
$\therefore\ k=2$ 또는 $k=-2$

$k=2$일 때 직선은 $y=2x+4$이고, 방정식 $g(x)=2x+4$에서

$-x^2+3=2x+4,\ x^2+2x+1=0,\ (x+1)^2=0$이므로

$x=-1$이다.

즉, 접하는 점이 $(-1,\ 2)$이므로 다음 그림과 같이 함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=2x+4$는 서로 다른 두 점에서 만난다.

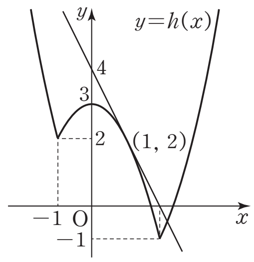


$k=-2$일 때 직선은 $y=-2x+4$이고, 방정식

$g(x)=-2x+4$에서 $-x^2+3=-2x+4,\ x^2-2x+1=0,$

$(x-1)^2=0$이므로 $x=1$이다.

즉, 접하는 점이 $(1,\ 2)$이므로 다음 그림과 같이 함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=-2x+4$는 점 $(1,\ 2)$를 포함한 서로 다른 세 점에서 만난다.



(i), (ii)에 의하여 모든 실수 k의 값의 곱은

$\left(-\frac{5}{2}\right)\times(-2)=5$

457

답 ③

조건 ㈎에서 $f(x)g(x)=(x+2)(x-2)(x+4)(x-4)$이고,
조건 ㈏에서 방정식 $f(x)=0$의 두 근의 차가 6이 되어야 하므로
0이 아닌 상수 a에 대하여

$f(x)=a(x+2)(x-4)$, $g(x)=\frac{1}{a}(x+4)(x-2)$ 또는

$f(x)=a(x+4)(x-2)$, $g(x)=\frac{1}{a}(x+2)(x-4)$이다.

ㄱ. $f(2)=0$이면 $f(x)=a(x+4)(x-2)$,
$g(x)=\frac{1}{a}(x+2)(x-4)$인 경우이므로 $g(4)=0$이다. (참)

ㄴ. $g(-2)>0$이면 $f(x)=a(x+2)(x-4)$,
$g(x)=\frac{1}{a}(x+4)(x-2)$이고,
함수 $y=g(x)$의 그래프가 위로 볼록해야 하므로 $a<0$이다.
함수 $f(x)=a(x+2)(x-4)$의 축은 $x=\frac{-2+4}{2}=1$이고,
$a<0$이므로 $-3\le x\le 3$에서 최솟값은 $f(-3)$이다. (거짓)

ㄷ. $f(x)=a(x+2)(x-4)$, $g(x)=\frac{1}{a}(x+4)(x-2)$인 경우
방정식 $f(x)-g(x)=0$에서

$\left(a-\frac{1}{a}\right)x^2-2\left(a+\frac{1}{a}\right)x-8\left(a-\frac{1}{a}\right)=0$ …… ㉠

이 이차방정식이 서로 다른 두 정수 m, n을 근으로 가지므로

$a-\frac{1}{a}=\frac{a^2-1}{a}\neq 0$이다.

따라서 ㉠의 양변에 $\frac{a}{a^2-1}$를 곱하면

$x^2-\frac{2(a^2+1)}{a^2-1}x-8=0$ …… ㉡

이때 $m+n=k$ (k는 정수)라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-\frac{2(a^2+1)}{a^2-1}=-k$, $2a^2+2=ka^2-k$

$(k-2)a^2=k+2$ $\quad\therefore a^2=\frac{k+2}{k-2}$

$a\neq 0$, 즉 $a^2>0$이므로

(i) $k-2<0$인 경우
$\frac{k+2}{k-2}>0$에서 $k+2<0$ $\quad\therefore k<-2$

(ii) $k-2>0$인 경우
$k+2>0$이므로 $\frac{k+2}{k-2}>0$

(i), (ii)에서 $k<-2$ 또는 $k>2$이다. …… ㉢

한편, ㉡에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$mn=-8$
따라서 가능한 순서쌍 (m, n)은
$(-1, 8)$, $(1, -8)$, $(8, -1)$, $(-8, 1)$, $(-2, 4)$, $(2, -4)$, $(4, -2)$, $(-4, 2)$의 8개이다.
이 8개의 순서쌍에 의하여 가능한 $m+n$의 값은 -7, -2, 2, 7의 4개이고, 이 중 ㉢을 만족시키는 $m+n$의 값은 -7, 7의 2개이다.
따라서 주어진 조건을 만족시킬 때, $|m+n|=7$이다.

$f(x)=a(x+4)(x-2)$, $g(x)=\frac{1}{a}(x+2)(x-4)$인 경우는
방정식 $f(x)-g(x)=0$에서 양변에 -1을 곱하여
$g(x)-f(x)=0$을 따질 때와 같으므로 앞과 동일한 결론을 얻을 수 있다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

458

답 9

$f(x)=ax^2-2abx+3=a(x-b)^2+3-ab^2$이므로
이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(b, 3-ab^2)$이다.
a의 부호에 따라서 경우를 나누면 다음과 같다.

(i) $a>0$인 경우
함수 $y=f(x)$의 그래프는 아래로 볼록하고 b의 값의 범위에 따라 최솟값을 구하면 다음과 같다.

ⓐ $b<-2$인 경우
$x=-2$일 때 최솟값을 가지므로
$4a+4ab+3=-5$, $a(1+b)=-2$이다.
조건을 만족시키는 정수 a, b의 순서쌍은
$(1, -3)$의 1개이다.

ⓑ $-2\le b\le 2$인 경우
$x=b$일 때 최솟값을 가지므로
$3-ab^2=-5$, $ab^2=8$이다.
조건을 만족시키는 정수 a, b의 순서쌍은
$(8, 1)$, $(8, -1)$, $(2, 2)$, $(2, -2)$의 4개이다.

ⓒ $b>2$인 경우
$x=2$일 때 최솟값을 가지므로
$4a-4ab+3=-5$, $a(b-1)=2$이다.
조건을 만족시키는 정수 a, b의 순서쌍은
$(1, 3)$의 1개이다.

(ii) $a<0$인 경우
함수 $y=f(x)$의 그래프는 위로 볼록하고 b의 값의 범위에 따라 최솟값을 구하면 다음과 같다.

ⓐ $b<0$인 경우
$x=2$일 때 최솟값을 가지므로
$4a-4ab+3=-5$, $a(b-1)=2$이다.
조건을 만족시키는 정수 a, b의 순서쌍은
$(-1, -1)$의 1개이다.

ⓑ $b\ge 0$인 경우
$x=-2$일 때 최솟값을 가지므로
$4a+4ab+3=-5$, $a(1+b)=-2$이다.
조건을 만족시키는 정수 a, b의 순서쌍은
$(-2, 0)$, $(-1, 1)$의 2개이다.

(i), (ii)에 의하여 구하는 순서쌍 (a, b)의 개수는
$1+4+1+1+2=9$

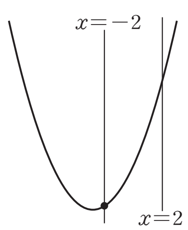
TIP 1

① $a>0$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $-2\le b\le 2$인 경우 꼭짓점에서 최솟값을 갖고, $b>2$인 경우 대칭축과 가장 가까운 점인 $x=2$일 때 최솟값을 갖고, $b<-2$인 경우 대칭축과 가장 가까운 점인 $x=-2$일 때 최솟값을 갖는다.
② $a<0$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 대칭축과 가장 멀리 떨어진 점에서 최솟값을 가지므로 $b\ge 0$인 경우 $x=-2$일 때 최솟값을 갖고, $b<0$인 경우 $x=2$일 때 최솟값을 갖는다.

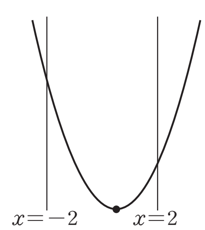
TIP 2

① $a>0$인 경우 함수 $y=f(x)$의 그래프는 b의 값의 범위에 따라 다음과 같다.

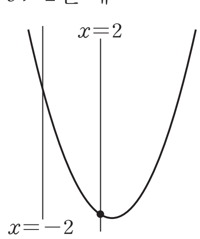
ⓐ $b<-2$일 때



ⓑ $-2\le b\le 2$일 때

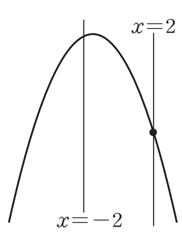


ⓒ $b>2$일 때

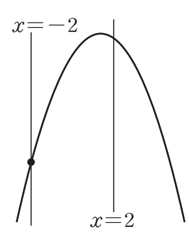


② $a<0$인 경우 함수 $y=f(x)$의 그래프는 b의 값의 범위에 따라 다음과 같다.

ⓐ $b<0$일 때



ⓑ $b\ge 0$일 때



459 …… 답 $-\frac{13}{3}$

조건 (나)에서 $f(x)-f(k)\ge h(x)-h(k)$이므로 양변을 $x-k$로 각각 나누면

$x>k$일 때 $\dfrac{f(x)-f(k)}{x-k}\ge\dfrac{h(x)-h(k)}{x-k}$이고,

$x<k$일 때 $\dfrac{f(x)-f(k)}{x-k}\le\dfrac{h(x)-h(k)}{x-k}$이다.

즉, $x>k$일 때 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 두 점 $(x, f(x))$, $(k, f(k))$를 지나는 직선의 기울기가 직선 $y=h(x)$의 기울기보다 항상 크거나 같고, $x<k$일 때 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 두 점 $(x, f(x))$, $(k, f(k))$를 지나는 직선의 기울기가 직선 $y=h(x)$의 기울기보다 항상 작거나 같다.

조건 (가)에서 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=h(x)$와 오직 한 점에서 만나므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $x=k$에서 직선 $y=h(x)$와 접한다.
마찬가지로 $g(x)-g(2k)\ge h(x)-h(2k)$에서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 $x=2k$에서 직선 $y=h(x)$와 접한다.
이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 최고차항의 계수가 각각 1, 4이므로
$f(x)-h(x)=(x-k)^2$
$g(x)-h(x)=4(x-2k)^2=(2x-4k)^2$
이때 두 식의 양변을 각각 빼주면

$$\begin{aligned}f(x)-g(x)&=(x-k)^2-(2x-4k)^2\\&=\{(x-k)+(2x-4k)\}\{(x-k)-(2x-4k)\}\\&=(3x-5k)(-x+3k)\quad\cdots\cdots\text{㉠}\end{aligned}$$

따라서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는
$x=\frac{5}{3}k$ 또는 $x=3k$에서 만난다.
조건 (다)에서 두 이차함수가 만나는 점의 x좌표 중 더 큰 값이 1이므로 $3k=1$ ($\because k>0$)에서 $k=\frac{1}{3}$이고, $a=\frac{5}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{5}{9}$이다.

이를 ㉠에 대입하면 $f(x)-g(x)=-\left(3x-\frac{5}{3}\right)(x-1)$

$$\begin{aligned}\therefore f(2)-g(2)&=-\left(3\times 2-\frac{5}{3}\right)(2-1)\\&=-\frac{13}{3}\end{aligned}$$

460 …… 답 ⑤

ㄱ. $g(x)-f(x)=2x^2-8ax+b$이므로
$g(x)-f(x)=0$에서 $2x^2-8ax+b=0$
$\therefore x=\dfrac{4a\pm\sqrt{16a^2-2b}}{2}$
조건 (나)에 의하여 $\sqrt{16a^2-2b}=4$이므로 $16a^2-2b=16$
이때 $a=1$이면 $b=0$이다. (참)

ㄴ. $f(x)=-x^2+2ax=-x^2+2ax-a^2+a^2$
$=-(x-a)^2+a^2$,
$g(x)=x^2-6ax+b=x^2-6ax+9a^2+b-9a^2$
$=(x-3a)^2+b-9a^2$
$=(x-3a)^2-a^2-8$ ($\because$ ㄱ)
이므로 $f(a)-g(3a)$의 값은 함수 $f(x)$의 최댓값과 함수 $g(x)$의 최솟값의 차를 의미한다.
이때 $f(\beta)\le f(a)$, $g(\alpha)\ge g(3a)$이므로
$f(\beta)-g(\alpha)\le f(a)-g(3a)$ (참)

ㄷ. $b=8(a^2-1)$에서 $10a^2-b=2a^2+8$이고
ㄴ에서 $f(a)-g(3a)=a^2-(-a^2-8)=2a^2+8$
따라서 $f(\alpha)=g(\beta)+10a^2-b^2$, 즉 $f(\alpha)-g(\beta)=2a^2+8$이면 $f(\alpha)$는 함수 $f(x)$의 최댓값이고 $g(\beta)$는 함수 $g(x)$의 최솟값이어야 한다.
$\therefore \alpha=a$, $\beta=3a$
이때 조건 (나)에 의하여 $\beta-\alpha=4$이므로
$a=2$이고 $b=8(a^2-1)$에서 $b=24$
$\therefore a+b=26$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

461 ⋯⋯⋯ 답 243

방정식 $x^2-4x+2=-2x^2+2x+8$, $3x^2-6x-6=0$, 즉
$x^2-2x-2=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=-2$
$|\alpha-\beta|^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=12$ $\quad\therefore |\alpha-\beta|=2\sqrt{3}$
(사각형 ADBC의 넓이)
=(삼각형 ADC의 넓이)+(삼각형 BCD의 넓이)이고,
삼각형 ADC의 밑변이 선분 CD일 때 높이를 h_1,
삼각형 BCD의 밑변이 선분 CD일 때 높이를 h_2라 하면

$$(\text{사각형 ADBC의 넓이})=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{CD}}\times h_1+\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{CD}}\times h_2$$
$$=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{CD}}\times(h_1+h_2)$$

이때 $h_1+h_2=|\alpha-\beta|=2\sqrt{3}$으로 일정하므로 $\overline{\mathrm{CD}}$가
최대일 때, 사각형 ADBC의 넓이가 최대이다.
직선 CD의 방정식이 $x=m\ (\alpha<m<\beta)$일 때,

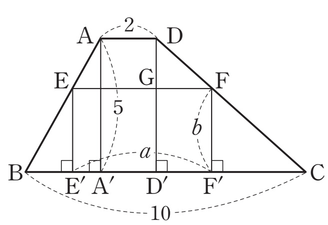
$$\overline{\mathrm{CD}}=(-2m^2+2m+8)-(m^2-4m+2)$$
$$=-3m^2+6m+6$$
$$=-3(m-1)^2+9$$

이므로 $\overline{\mathrm{CD}}$의 최댓값은 9이고,
이때의 사각형 ADBC의 넓이의 최댓값은

$k=\frac{1}{2}\times9\times2\sqrt{3}=9\sqrt{3}$ $\quad\therefore k^2=(9\sqrt{3})^2=243$

462 ⋯⋯⋯ 답 125

점 D에서 변 BC에 내린 수선의 발을 D′, 두 변 AB, DC 위에 존재하는 직사각형의 꼭짓점을 각각 E, F라 하고, 두 점 E, F에서 변 BC에 내린 수선의 발을 각각 E′, F′이라 하자.



이 사다리꼴의 영역 안에 그린 직사각형 EE′F′F의 가로의 길이를 a, 세로의 길이를 b라 하면 직사각형의 넓이는 ab이다.
한편, $\overline{\mathrm{A'B}}+\overline{\mathrm{D'C}}=8$ ⋯⋯ ㉠
두 삼각형 ABA′과 EBE′이 서로 닮음이고,
두 삼각형 DD′C와 FF′C가 서로 닮음이므로
$\overline{\mathrm{AA'}}:\overline{\mathrm{A'B}}=\overline{\mathrm{EE'}}:\overline{\mathrm{E'B}}$, $\overline{\mathrm{DD'}}:\overline{\mathrm{D'C}}=\overline{\mathrm{FF'}}:\overline{\mathrm{F'C}}$
이때 $\overline{\mathrm{AA'}}=\overline{\mathrm{DD'}}$, $\overline{\mathrm{EE'}}=\overline{\mathrm{FF'}}$이므로
$\overline{\mathrm{AA'}}:(\overline{\mathrm{A'B}}+\overline{\mathrm{D'C}})=\overline{\mathrm{EE'}}:(\overline{\mathrm{E'B}}+\overline{\mathrm{F'C}})$ ⋯⋯ ㉡
㉠, ㉡에 의하여 $5:8=b:(10-a)$이므로

$b=\frac{5}{8}(10-a)$

따라서 구하는 직사각형의 넓이는

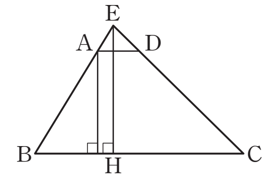
$ab=\frac{5}{8}a(10-a)=-\frac{5}{8}(a-5)^2+\frac{125}{8}$

이고, $a=5$일 때 최댓값 $S=\frac{125}{8}$를 갖는다.

$\therefore 8S=125$

다른 풀이

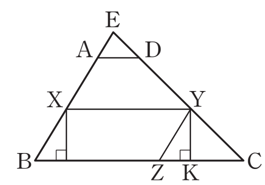
두 직선 AB, DC가 만나는 점을 E라 하고
점 E에서 직선 BC에 내린 수선의 발을 H라 하자.



두 삼각형 EAD, EBC는 서로 닮음이고 닮음비는 2 : 10,
즉 1 : 5이므로
$1:5=(\overline{\mathrm{EH}}-5):\overline{\mathrm{EH}}$에서

$5(\overline{\mathrm{EH}}-5)=\overline{\mathrm{EH}}$, $4\overline{\mathrm{EH}}=25$ $\quad\therefore \overline{\mathrm{EH}}=\frac{25}{4}$

한편, 두 변 AB, DC 위에 존재하는 직사각형의 꼭짓점을 각각 X, Y라 하고, 점 Y를 지나고 직선 AB와 평행한 직선이 선분 BC와 만나는 점을 Z라 하면 구하는 직사각형의 넓이는 평행사변형 XBZY의 넓이와 같다.



점 Y에서 직선 BC에 내린 수선의 발을 K라 하고
$\overline{\mathrm{ZC}}=a\ (0<a<10)$이라 하자.
두 삼각형 EBC, YZC는 서로 닮음이고 닮음비는 $10:a$이므로

$10:a=\frac{25}{4}:\overline{\mathrm{YK}}$에서

$10\overline{\mathrm{YK}}=\frac{25}{4}a$ $\quad\therefore \overline{\mathrm{YK}}=\frac{5}{8}a$

이때 $\overline{\mathrm{BZ}}=10-a$이므로 평행사변형 XBZY의 넓이는

$\overline{\mathrm{YK}}\times\overline{\mathrm{BZ}}=\frac{5}{8}a(10-a)=-\frac{5}{8}(a-5)^2+\frac{125}{8}$

이고, $a=5$일 때 최댓값 $S=\frac{125}{8}$를 갖는다.

$\therefore 8S=125$

TIP

$\overline{\mathrm{AA'}}=\overline{\mathrm{DD'}}$, $\overline{\mathrm{EE'}}=\overline{\mathrm{FF'}}$이고
$\overline{\mathrm{AA'}}:\overline{\mathrm{A'B}}=\overline{\mathrm{EE'}}:\overline{\mathrm{E'B}}$, $\overline{\mathrm{DD'}}:\overline{\mathrm{D'C}}=\overline{\mathrm{FF'}}:\overline{\mathrm{F'C}}$이므로
$\overline{\mathrm{AA'}}:\overline{\mathrm{A'B}}=\overline{\mathrm{EE'}}:\overline{\mathrm{E'B}}$, $\overline{\mathrm{AA'}}:\overline{\mathrm{D'C}}=\overline{\mathrm{EE'}}:\overline{\mathrm{F'C}}$
즉, $\dfrac{\overline{\mathrm{A'B}}}{\overline{\mathrm{AA'}}}=\dfrac{\overline{\mathrm{E'B}}}{\overline{\mathrm{EE'}}}$, $\dfrac{\overline{\mathrm{D'C}}}{\overline{\mathrm{AA'}}}=\dfrac{\overline{\mathrm{F'C}}}{\overline{\mathrm{EE'}}}$에서
$\dfrac{\overline{\mathrm{A'B}}+\overline{\mathrm{D'C}}}{\overline{\mathrm{AA'}}}=\dfrac{\overline{\mathrm{E'B}}+\overline{\mathrm{F'C}}}{\overline{\mathrm{EE'}}}$
$\therefore \overline{\mathrm{AA'}}:(\overline{\mathrm{A'B}}+\overline{\mathrm{D'C}})=\overline{\mathrm{EE'}}:(\overline{\mathrm{E'B}}+\overline{\mathrm{F'C}})$

03 여러 가지 방정식

463 ······ 답 ③

$x^3+8=(x+2)(x^2-2x+4)=0$에서

$x=-2$ 또는 $x^2-2x+4=0$이다.

이때 방정식 $x^2-2x+4=0$에서 $x=1\pm\sqrt{3}i$

ㄱ. 실근은 $x=-2$로 유일하다. (참)

ㄴ. 복소수 범위에서 실근 1개와 허근 2개를 가지므로 서로 다른 근의 개수는 3이다. (참)

ㄷ. 두 허근은 $x=1\pm\sqrt{3}i$이므로 합은 2이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

464 ······ 답 4

$f(x)=x^3+5x^2+10x+6$이라 하면

$f(-1)=-1+5-10+6=0$이므로

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

-1	1	5	10	6
		-1	-4	-6
	1	4	6	0

이므로 $f(x)=(x+1)(x^2+4x+6)$ ······ ㉠

㉠에서 이차방정식 $x^2+4x+6=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=2^2-6=-2<0$이므로 서로 다른 두 허근을 가진다.

α, β는 방정식 $x^2+4x+6=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-4$, $\alpha\beta=6$

$\therefore\ \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-4)^2-12=4$

다른 풀이

$f(x)=x^3+5x^2+10x+6$이라 하면

$f(-1)=(-1)+5-10+6=0$이므로

삼차방정식 $x^3+5x^2+10x+6=0$의 세 근은 -1, α, β이다.

따라서 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(-1)+\alpha+\beta=-5$, $(-1)\times\alpha\times\beta=-6$에서

$\alpha+\beta=-4$, $\alpha\beta=6$이다.

$\therefore\ \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-4)^2-12=4$

465 ······ 답 ④

사차방정식 $x^4+2x^3-x^2-2x-3=0$의 네 근이 α, β, γ, δ이므로

좌변을 복소수 범위에서 인수분해하면

$x^4+2x^3-x^2-2x-3=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)$

이고, 모든 실수 x에 대하여 등식이 성립하므로

양변에 $x=2$를 대입하면

$16+16-4-4-3=(2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma)(2-\delta)$

$\therefore\ (2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma)(2-\delta)=21$

466 ······ 답 ①

사차방정식 $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$의 모든 계수가 유리수이고

두 근이 $1-i$, $1+\sqrt{2}$이므로 나머지 두 근은 $1+i$, $1-\sqrt{2}$이다.

최고차항의 계수가 1이고 두 근이 $1-i$, $1+i$인 이차방정식은

두 근의 합이 2이고 곱이 2이므로 $x^2-2x+2=0$이다.

또한 최고차항의 계수가 1이고 두 근이 $1-\sqrt{2}$, $1+\sqrt{2}$인

이차방정식은 두 근의 합이 2이고 곱이 -1이므로

$x^2-2x-1=0$이다.

$\therefore\ x^4+ax^3+bx^2+cx+d=(x^2-2x+2)(x^2-2x-1)$

$=x^4-4x^3+5x^2-2x-2$

따라서 $a=-4$, $b=5$, $c=-2$, $d=-2$이므로

$abcd=-80$이다.

467 ······ 답 -3

$x^4-2x^3-x+2=0$에서

$x^3(x-2)-(x-2)=0$

$(x-2)(x^3-1)=0$

$(x-2)(x-1)(x^2+x+1)=0$

이고, 방정식 $x^2+x+1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=1^2-4=-3<0$

이므로 α, β는 방정식 $x^2+x+1=0$의 두 근이다.

이때 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-1$, $\alpha\beta=1$이므로

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(-1)^2-4=-3$

468 ······ 답 ①

$x(x+1)(x+2)(x+3)-15=0$에서

$x(x+3)\times(x+1)(x+2)-15=0$

$(x^2+3x)(x^2+3x+2)-15=0$

이때 $x^2+3x=t$로 치환하면

$t(t+2)-15=0$, $t^2+2t-15=0$

$(t+5)(t-3)=0$에서 $(x^2+3x+5)(x^2+3x-3)=0$이므로

$x^2+3x+5=0$ 또는 $x^2+3x-3=0$

이 중 허근을 갖는 방정식은 $x^2+3x+5=0$이므로 w는 이 방정식의 근이다.

따라서 $w^2+3w+5=0$이므로

$w^2+3w=-5$이다.

469 ······ 답 ④

$x^4-16x^2+36=0$에서 $x^4-12x^2+36-4x^2=0$

$(x^2-6)^2-(2x)^2=0$, 즉 $(x^2+2x-6)(x^2-2x-6)=0$에서

이차방정식 $x^2+2x-6=0$의 근은 $x=-1\pm\sqrt{7}$이고,

이차방정식 $x^2-2x-6=0$의 근은 $x=1\pm\sqrt{7}$이다.

따라서 $M=1+\sqrt{7}$, $m=-1-\sqrt{7}$에서

$M-m=2+2\sqrt{7}$

470 ······ 답 ①

주어진 방정식의 한 근이 -2이므로 이를 방정식에 대입하면

$16+32-4-32-a=0$에서 $a=12$

따라서 주어진 방정식은 $x^4-4x^3-x^2+16x-12=0$이고

$x=1$을 대입하면 등식을 만족시키며 주어진 조건에서 -2가 한 근이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면 다음과 같다.

-2	1	-4	-1	16	-12
		-2	12	-22	12
1	1	-6	11	-6	0
		1	-5	6	
	1	-5	6	0	

$x^4-4x^3-x^2+16x-12=(x+2)(x-1)(x^2-5x+6)$

$\qquad=(x+2)(x-1)(x-2)(x-3)$

따라서 -2를 제외한 나머지 세 근은 1, 2, 3이므로

구하는 나머지 세 근의 곱은

$1\times2\times3=6$이다.

471 ······ 답 $k>\frac{1}{4}$

$x^3+2kx^2+(k^2+2k-1)x+k^2=0$에 $x=-1$을 대입하면 등식이 성립하므로 조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면

-1	1	$2k$	k^2+2k-1	k^2
		-1	$-2k+1$	$-k^2$
	1	$2k-1$	k^2	0

$(x+1)\{x^2+(2k-1)x+k^2\}=0$

이고, 방정식 $x^2+(2k-1)x+k^2=0$이 두 허근을 가져야 하므로

이 방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(2k-1)^2-4k^2<0,\ -4k+1<0$

$\therefore k>\frac{1}{4}$

472 ······ 답 ②

삼차방정식 $x^3+kx-2=0$이 중근 α와 또 다른 실근 β를 가지므로

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$2\alpha+\beta=0$ ······ ㉠

$\alpha^2+2\alpha\beta=k$ ······ ㉡

$\alpha^2\beta=2$ ······ ㉢

㉢에 ㉠을 대입하면

$\alpha^2\times(-2\alpha)=2,\ \alpha^3=-1$

$\therefore \alpha=-1$

$\alpha=-1$을 ㉢에 대입하면 $\beta=2$

$\alpha=-1,\ \beta=2$를 ㉡에 대입하면 $k=-3$

$\therefore k+\alpha+\beta=-2$

473 ······ 답 (1) -25 (2) 28

(1) 삼차방정식 $x^3-2x^2+4x+3=0$에서 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=2,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=4,\ \alpha\beta\gamma=-3$ ······ ㉠

이때 $(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$에서

$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=2^2-2\times4=-4$ ······ ㉡

$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)+3\alpha\beta\gamma$

이므로

$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=2\times(-4-4)+3\times(-3)$ ($\because$ ㉠, ㉡)

$\qquad=-16-9=-25$

(2) (1)에서 구한 값을 이용하면

$(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2=\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2+2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)$

$\therefore \alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2=4^2-2\times(-3)\times2=28$

474 ······ 답 ①

$x^3+y^3=(2-\sqrt{5})+(2+\sqrt{5})=4$

$x^3y^3=(2-\sqrt{5})(2+\sqrt{5})=-1$이므로 $xy=-1$ ($\because$ x, y는 실수)

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$에서 $x+y=t$라 하면

$4=t^3+3t,\ t^3+3t-4=0,\ (t-1)(t^2+t+4)=0$

이므로 $t=1$ 또는 $t^2+t+4=0$

이때 방정식 $t^2+t+4=0$의 판별식을 D라 하면

$D=1-16=-15<0$이므로 두 허근을 갖는다.

따라서 두 실수 x, y에 대하여

$x+y=1$이다.

475 ······ 답 ③

두 근이 절댓값이 같고 부호가 서로 반대이므로

두 근의 합은 0이고 두 근의 곱은 음수이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

두 근의 합은 $-(k^3-4k^2+k+6)$, 두 근의 곱은 $-k$

$k^3-4k^2+k+6=0$에서 $k=2$를 대입하면 등식이 성립하므로

조립제법을 이용하여 인수분해하면

2	1	-4	1	6
		2	-4	-6
	1	-2	-3	0

$k^3-4k^2+k+6=(k-2)(k^2-2k-3)=(k+1)(k-2)(k-3)$

$(k+1)(k-2)(k-3)=0$에서

$k=-1$ 또는 $k=2$ 또는 $k=3$

이때 두 근의 곱이 음수이므로 $-k<0$, 즉 $k>0$

따라서 구하는 모든 실수 k의 값의 합은 $2+3=5$이다.

476 ······ 답 ③

방정식 $x^3-3x^2+4x-2=0$에서 $x=1$을 대입하면 등식이 성립하므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

1	1	-3	4	-2
		1	-2	2
	1	-2	2	0

$x^3-3x^2+4x-2=(x-1)(x^2-2x+2)$

$(x-1)(x^2-2x+2)=0$에서 이차방정식 $x^2-2x+2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-2=-1<0$이므로

방정식 $x^2-2x+2=0$은 두 허근 α, $\overline{\alpha}$를 갖는다.
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\overline{\alpha}=2$, $\alpha\overline{\alpha}=2$
$\therefore \left(\dfrac{\alpha+\overline{\alpha}+\alpha\overline{\alpha}i}{2}\right)^8=\{(1+i)^2\}^4=(2i)^4=16$

477 답 ②

삼차방정식 $x^3-1=0$의 한 허근이 ω이므로 $\omega^3=1$이고,
$x^3-1=0$, $(x-1)(x^2+x+1)=0$에서 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 한 허근이 ω이므로
$\omega^2+\omega+1=0$
$\therefore \omega^5+\omega^4+\omega^3+\omega^2+\omega$
$=\omega^3(\omega^2+\omega+1)+(\omega^2+\omega+1)-1$
$=0+0-1=-1$

478 답 ②

삼차방정식 $x^3-1=0$의 한 허근이 ω이므로 $\omega^3=1$이고,
$x^3-1=0$, $(x-1)(x^2+x+1)=0$에서 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 한 허근이 ω이므로 $\omega^2+\omega+1=0$이고, 다른 한 근은 $\overline{\omega}$이다.
이때 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\omega+\overline{\omega}=-1$이므로
$\omega^4+2\omega^3-2\omega^2+2\omega+1$
$=\omega+2-2\omega^2+2\omega+1$ ($\because \omega^3=1$)
$=3\omega+3-2(-\omega-1)$ ($\because \omega^2=-\omega-1$)
$=5(\omega+1)=-5\overline{\omega}$ ($\because -\overline{\omega}=\omega+1$)

479 답 ②

삼차방정식 $x^3+1=0$의 한 허근이 ω이므로 $\omega^3=-1$이다.
이때 $x^3+1=0$, $(x+1)(x^2-x+1)=0$에서 ω는 이차방정식 $x^2-x+1=0$의 한 근이고 나머지 한 근은 $\overline{\omega}$이므로
$\omega^3=-1$, $\overline{\omega}^3=-1$이고,
$\omega^2-\omega+1=0$, $\overline{\omega}^2-\overline{\omega}+1=0$
$\therefore \omega^2+\overline{\omega}^4+\omega^6+\overline{\omega}^8+\omega^{10}=\omega^2-\overline{\omega}+1+\overline{\omega}^2-\omega$
$=(\omega^2-\omega+1)+(\overline{\omega}^2-\overline{\omega}+1)-1$
$=0+0-1=-1$

480 답 ④

방정식 $x^3+1=0$의 한 허근이 ω이므로 $\omega^3=-1$이다. …… ㉠
$x^3+1=0$, $(x+1)(x^2-x+1)=0$에서
이차방정식 $x^2-x+1=0$의 한 허근이 ω이고,
ω가 근이면 $\overline{\omega}$도 근이므로
$\omega^2-\omega+1=0$, $\overline{\omega}^2-\overline{\omega}+1=0$ …… ㉡
이때 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\omega+\overline{\omega}=1$, $\omega\overline{\omega}=1$ …… ㉢
ㄱ. ㉠에서 $\omega^9=(\omega^3)^3=(-1)^3=-1$ (참)
ㄴ. ㉡에서 $\omega^2-\omega+1=0$, $\omega=\omega^2+1$ (참)
ㄷ. $\dfrac{1}{\omega}+\dfrac{1}{\overline{\omega}}=\dfrac{\omega+\overline{\omega}}{\omega\overline{\omega}}=1$ ($\because$ ㉢) (참)
ㄹ. ㉡에서 $\overline{\omega}^2-\overline{\omega}+1=0$, $\overline{\omega}^2-\overline{\omega}=-1$ (거짓)
ㅁ. $(1-\omega)(1-\overline{\omega})=1-(\omega+\overline{\omega})+\omega\overline{\omega}$
$=1-1+1=1$ ($\because$ ㉢) (참)
ㅂ. $\dfrac{1}{1+\omega}+\dfrac{1}{1+\overline{\omega}}=\dfrac{2+\omega+\overline{\omega}}{(1+\omega)(1+\overline{\omega})}=\dfrac{2+\omega+\overline{\omega}}{1+(\omega+\overline{\omega})+\omega\overline{\omega}}$
$=\dfrac{2+1}{1+1+1}=1$ ($\because$ ㉢) (참)
따라서 옳은 것의 개수는 5이다.

481 답 2

$\begin{cases} x+2y=3 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+xy+y^2=3 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
㉠에서 $x=3-2y$를 ㉡에 대입하면
$(3-2y)^2+(3-2y)y+y^2=3$
$y^2-3y+2=0$, $(y-1)(y-2)=0$
$\therefore y=1$ 또는 $y=2$
즉, $x=1$, $y=1$ 또는 $x=-1$, $y=2$이므로
$\alpha^2+\beta^2$의 값이 될 수 있는 것은 2 또는 5이다.
따라서 $\alpha^2+\beta^2$의 최솟값은 2이다.

482 답 풀이 참조

$\begin{cases} x^2-y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+2y^2-xy-8=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
㉠에서 $x^2-y^2=(x+y)(x-y)=0$이므로
$x=y$ 또는 $x=-y$
(i) $x=y$를 ㉡에 대입하면
$y^2+2y^2-y^2-8=0$, $y^2-4=0$에서
$y=2$ 또는 $y=-2$이므로
$x=2$, $y=2$ 또는 $x=-2$, $y=-2$
(ii) $x=-y$를 ㉡에 대입하면
$y^2+2y^2+y^2-8=0$, $y^2-2=0$에서
$y=\sqrt{2}$ 또는 $y=-\sqrt{2}$이므로
$x=-\sqrt{2}$, $y=\sqrt{2}$ 또는 $x=\sqrt{2}$, $y=-\sqrt{2}$
(i), (ii)에서 연립방정식의 해는
$\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$, $\begin{cases} x=-2 \\ y=-2 \end{cases}$, $\begin{cases} x=-\sqrt{2} \\ y=\sqrt{2} \end{cases}$, $\begin{cases} x=\sqrt{2} \\ y=-\sqrt{2} \end{cases}$

483 답 ④

$\begin{cases} x^2-3xy-4y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+2y^2=18 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
㉠에서 $x^2-3xy-4y^2=(x-4y)(x+y)=0$이므로
$x=4y$ 또는 $x=-y$
(i) $x=4y$를 ㉡에 대입하면
$(4y)^2+2y^2=18y^2=18$, $y^2=1$에서 $y=1$ 또는 $y=-1$이므로
$x=4$, $y=1$ 또는 $x=-4$, $y=-1$
따라서 $x+y$의 값은 5 또는 -5이다.

(ii) $x=-y$를 ㉡에 대입하면

$(-y)^2+2y^2=3y^2=18$, $y^2=6$에서

$y=\sqrt{6}$ 또는 $y=-\sqrt{6}$이므로

$x=\sqrt{6}$, $y=-\sqrt{6}$ 또는 $x=-\sqrt{6}$, $y=\sqrt{6}$

따라서 $x+y$의 값은 0이다.

(i), (ii)에서 $\alpha=4$, $\beta=1$일 때, $\alpha+\beta$의 최댓값은 5이다.

484 답 2

$$\begin{cases} x+y=2 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=a & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $y=2-x$를 ㉡에 대입하면

$x^2+(2-x)^2=a$, $2x^2-4x+4-a=0$

이 이차방정식이 실근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4-2(4-a)=2a-4\geq0$ $\quad\therefore a\geq2$

따라서 구하는 양의 실수 a의 최솟값은 2이다.

485 답 -3

$\begin{cases} x+y=2k+8 \\ xy=k^2 \end{cases}$에서 x, y를 두 근으로 갖는 이차방정식은 두 근의 합이 $2k+8$, 두 근의 곱이 k^2이므로 방정식

$t^2-(2k+8)t+k^2=0$, $t^2-2(k+4)t+k^2=0$

이 실근을 갖지 않아야 하므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k+4)^2-k^2<0$, $8k+16<0$

$\therefore k<-2$

따라서 정수 k의 최댓값은 -3이다.

486 답 7

1, 2, 3학년 학생 수를 각각 x, y, z라 하자.

조건 ㈏에서 $y=x-1=z+1$이므로 $z=x-2$ $\cdots\cdots$ ㉠

조건 ㈎에서 $xyz=210$이므로 ㉠을 대입하면

$x(x-1)(x-2)=210$

이때 x는 자연수이고 $210=5\times6\times7$이므로

$x=7$, $y=6$, $z=5$

따라서 1학년 학생 수는 7이다.

487 답 48

$\overline{AB}=x$, $\overline{CD}=y$라 하면

$x+y+3+7=30$이므로 $x+y=20$ $\cdots\cdots$ ㉠

두 직각삼각형 BAD, BCD에서 피타고라스 정리에 의하여

$x^2+7^2=y^2+3^2$, $y^2-x^2=40$, $(y+x)(y-x)=40$이고,

㉠을 대입하면 $20(y-x)=40$이므로 $y-x=2$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=9$, $y=11$

따라서 사각형 ABCD의 넓이는 두 직각삼각형 BAD, BCD의 넓이의 합과 같으므로

$\frac{1}{2}\times9\times7+\frac{1}{2}\times3\times11=48$

488 답 2

정육면체 A의 한 모서리의 길이를 a라 하면 직육면체 B의 밑면의 가로와 세로의 길이는 모두 $a+2$이고 높이는 $a-1$이다.

직육면체 B의 부피가 정육면체 A의 부피의 2배이므로

$2a^3=(a+2)^2(a-1)$, $2a^3=a^3+3a^2-4$

$a^3-3a^2+4=0$에서 조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면

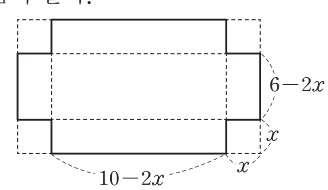
$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -3 & 0 & 4 \\ & & -1 & 4 & -4 \\ \hline & 1 & -4 & 4 & \boxed{0} \end{array}$$

$a^3-3a^2+4=(a+1)(a^2-4a+4)=(a+1)(a-2)^2=0$

$\therefore a=2$ ($\because a>0$)

489 답 ③

철판 네 귀퉁이를 잘라낸 후 가로의 길이는 $10-2x$, 세로의 길이는 $6-2x$이므로 다음과 같다.



직육면체 모양의 상자의 부피는

$(10-2x)(6-2x)x=24$, $x^3-8x^2+15x-6=0$

조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -8 & 15 & -6 \\ & & 2 & -12 & 6 \\ \hline & 1 & -6 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

$x^3-8x^2+15x-6=(x-2)(x^2-6x+3)$

$(x-2)(x^2-6x+3)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=3-\sqrt{6}$ ($\because 0<x<3$)

따라서 가능한 모든 x의 값의 합은

$2+(3-\sqrt{6})=5-\sqrt{6}$

490 답 5

문제의 조건에 의하여 a, b는 다음을 만족시킨다.

$$\begin{cases} a^2+b^2=\frac{25}{4} & \cdots\cdots ㉠ \\ 2\{(a+2)+(b+2)\}=15 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉡에서 $b=\frac{7}{2}-a$를 ㉠에 대입하면

$a^2+\left(\frac{7}{2}-a\right)^2=\frac{25}{4}$, $2a^2-7a+6=0$, $(2a-3)(a-2)=0$

$\therefore a=2$, $b=\frac{3}{2}$ ($\because a>b$)

$\therefore a+2b=2+2\times\frac{3}{2}=5$

다른 풀이

위의 풀이의 연립방정식 중 ㉡에서 $a+b=\frac{7}{2}$이므로

$2ab=(a+b)^2-(a^2+b^2)=\left(\frac{7}{2}\right)^2-\frac{25}{4}=6$

$\therefore ab=3$

따라서 이차항의 계수가 1이고 a, b를 두 근으로 하는 이차방정식은

$x^2-\frac{7}{2}x+3=0$이므로

$2x^2-7x+6=0$, $(2x-3)(x-2)=0$

$\therefore a=2$, $b=\frac{3}{2}$ ($\because a>b$)

491 .... 답 14

a, x, y가 모두 자연수이므로

$ax-y-2$와 $x-y+3$은 모두 정수이고,

두 정수의 곱 $(ax-y-2)(x-y+3)$이 1이기 위해서는

$ax-y-2=x-y+3=1$이거나 $ax-y-2=x-y+3=-1$이어야 한다.

$ax-y-2=x-y+3$에서 $(a-1)x=5$

$\therefore a=2$, $x=5$ ($\because a>1$, $x>1$)

$x-y+3=8-y=\pm1$이므로 $y=7$ 또는 $y=9$

따라서 구하는 $a+x+y$의 최솟값은

$2+5+7=14$이다.

492 .... 답 ③

방정식 $x^3-4x^2+(m-14)x+2m-4=0$에 $x=-2$를 대입하면

등식이 성립하므로 조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & -4 & m-14 & 2m-4 \\ & & -2 & 12 & -2m+4 \\ \hline & 1 & -6 & m-2 & 0 \end{array}$$

$(x+2)(x^2-6x+m-2)=0$

이때 1보다 작거나 같은 근은 오직 한 개이므로 방정식

$x^2-6x+m-2=0$의 서로 다른 두 근은 모두 1보다 크다.

이 방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=9-(m-2)>0$에서 $m<11$ ...... ㉠

이차함수 $y=x^2-6x+m-2$의 그래프의 축이 직선 $x=3$이므로

이 함수의 x절편이 모두 1보다 크려면 $x=1$일 때의 함숫값이 0보다 커야 한다.

$1-6+m-2>0$에서 $m>7$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 m의 값의 범위가 $7<m<11$이므로

모든 정수 m의 값의 합은 $8+9+10=27$

493 .... 답 풀이 참조

$x^3-kx^2+k-1=0$에서 $x=1$을 대입하면 등식이 성립하므로

조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -k & 0 & k-1 \\ & & 1 & -k+1 & -k+1 \\ \hline & 1 & -k+1 & -k+1 & 0 \end{array}$$

$(x-1)\{x^2-(k-1)x-(k-1)\}=0$

이고, 이 방정식이 중근을 갖는 경우는 다음과 같다.

(i) 방정식 $x^2-(k-1)x-(k-1)=0$이 $x=1$을 근으로 갖는 경우

$x=1$을 대입하면

$1-(k-1)-(k-1)=0$에서 $2k=3$ $\therefore k=\frac{3}{2}$

(ii) 방정식 $x^2-(k-1)x-(k-1)=0$이 중근을 갖는 경우

방정식 $x^2-(k-1)x-(k-1)=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(k-1)^2+4(k-1)=0$

$(k-1)(k-1+4)=0$, $(k+3)(k-1)=0$

$\therefore k=-3$ 또는 $k=1$

(i), (ii)에서 모든 실수 k의 값의 합은

$\frac{3}{2}+(-3)+1=-\frac{1}{2}$

채점 요소	배점
인수 정리와 조립제법을 이용하여 $(x-1)\{x^2-(k-1)x-(k-1)\}=0$으로 인수분해하기	30%
방정식 $x^2-(k-1)x-(k-1)=0$이 $x=1$을 근으로 가질 때의 k의 값 구하기	30%
방정식 $x^2-(k-1)x-(k-1)=0$이 중근을 가질 때의 k의 값 구하기	30%
모든 실수 k의 값의 합 구하기	10%

494 .... 답 ⑤

사차방정식 $(x^2-4x)^2+(x^2-4x)-20=0$에서

$x^2-4x=X$라 하면

$X^2+X-20=0$, $(X+5)(X-4)=0$

(i) $X=4$일 때

방정식 $x^2-4x=4$, 즉 $x^2-4x-4=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=4+4>0$이므로 두 실근을 갖는다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 실근의 합은 4이다.

(ii) $X=-5$일 때

방정식 $x^2-4x=-5$, 즉 $x^2-4x+5=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=4-5<0$이므로 두 허근을 갖는다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 허근의 곱은 5이다.

(i), (ii)에서 $A=4$, $B=5$이므로

$A+B=4+5=9$

495 .... 답 ④

사차방정식 $x^4-6x^2+a-5=0$에서 $x^2=X$라 하면

$X^2-6X+a-5=0$ ...... ㉠

주어진 사차방정식의 근이 모두 실수가 되려면 이차방정식 ㉠이

음이 아닌 두 실근을 가져야 한다. ...... TIP

방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=9-(a-5)\geq0$ $\therefore a\leq14$ ...... ㉡

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱이 0보다 크거나 같으므로

$a-5\geq0$ $\therefore a\geq5$ ...... ㉢

㉡, ㉢에서 실수 a의 값의 범위는 $5\leq a\leq14$이므로

정수 a는 5, 6, 7, …, 14의 10개이다.

TIP

사차방정식 $ax^4+bx^2+c=0$ ($a\neq0$이고 a, b, c는 실수)에서 $x^2=X$라 할 때, X에 대한 이차방정식 $aX^2+bX+c=0$이 음이 아닌 두 실근 α, β를 가지면
(i) $x^2=\alpha$에서
$\alpha\neq0$인 경우 $x=\pm\sqrt{\alpha}$ (서로 다른 두 실근)이고,
$\alpha=0$인 경우 $x=0$을 중근으로 갖는다.
(ii) $x^2=\beta$에서
$\beta\neq0$인 경우 $x=\pm\sqrt{\beta}$ (서로 다른 두 실근)이고,
$\beta=0$인 경우 $x=0$을 중근으로 갖는다.
따라서 주어진 사차방정식의 근이 모두 실수이다.

496 ········· 답 ④

사차방정식 $x^4+(2-2a)x^2+10-5a=0$에서 $x^2=X$라 하면
$X^2+2(1-a)X+10-5a=0$ ······ ㉠
주어진 사차방정식이 서로 다른 두 실근과 두 허근을 가지려면 이차방정식 ㉠이 서로 다른 부호의 두 실근을 가져야 한다. ······ TIP
즉, ㉠의 두 근의 곱은 음수이어야 하므로
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$10-5a<0$ $\quad\therefore a>2$
$\therefore p=2$

TIP

사차방정식 $ax^4+bx^2+c=0$ ($a\neq0$이고 a, b, c는 실수)에서 $x^2=X$라 할 때, X에 대한 이차방정식 $aX^2+bX+c=0$이 양의 실수 α와 음의 실수 β를 근으로 가지면
$x^2=\alpha$에서 $x=\pm\sqrt{\alpha}$ (서로 다른 두 실근),
$x^2=\beta$에서 $x=\pm\sqrt{-\beta}i$ (서로 다른 두 허근)
이므로 주어진 사차방정식은 서로 다른 두 실근과 서로 다른 두 허근을 가진다.

497 ········· 답 ①

방정식 $P(x)=0$의 한 실근을 α라 하고, 서로 다른 두 허근을 β, γ라 하면
조건 (가)에 의하여 $\beta\gamma=5$ ······ ㉠
또한 방정식 $P(3x-1)=0$의 세 근은
$\frac{\alpha+1}{3}$, $\frac{\beta+1}{3}$, $\frac{\gamma+1}{3}$
이므로 조건 (나)에 의하여
$\frac{\alpha+1}{3}=0$이고 $\frac{\beta+1}{3}+\frac{\gamma+1}{3}=2$
$\therefore \alpha=-1$, $\beta+\gamma=4$ ······ ㉡
㉠, ㉡에 의하여 α, β, γ를 세 근으로 하고 삼차항의 계수가 1인 삼차방정식은
$(x+1)(x^2-4x+5)=0$
$P(x)=(x+1)(x^2-4x+5)=x^3-3x^2+x+5$
따라서 $a=-3$, $b=1$, $c=5$이므로
$a+b+c=3$이다.

498 ········· 답 $x=\frac{1}{2}$

삼차방정식 $2x^3-(2k+1)x^2+(5k+2)x-2k-1=0$에서
$k(-2x^2+5x-2)+(2x^3-x^2+2x-1)=0$
이때 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면
$-2x^2+5x-2=0$이고, $2x^3-x^2+2x-1=0$이어야 한다.
$-2x^2+5x-2=(-2x+1)(x-2)=0$에서
$x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=2$ ······ ㉠
$2x^3-x^2+2x-1=0$, $x^2(2x-1)+(2x-1)=0$
$(x^2+1)(2x-1)=0$에서
$x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=\pm i$ ······ ㉡
㉠, ㉡에서 구하는 근은 ······ TIP
$x=\frac{1}{2}$

TIP

㉠에서 방정식 $-2x^2+5x-2=0$의 해가 $x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=2$라는 것을 구했으므로 방정식 $2x^3-x^2+2x-1=0$에 대입하여 등식을 만족시키는 값 $x=\frac{1}{2}$을 바로 구할 수도 있다.

499 ········· 답 ①

$x^4+4x^3-7x^2+4x+1=0$에 $x=0$을 대입하면 등호가 성립하지 않으므로
$x^2+4x-7+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}=0$
$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+4\left(x+\frac{1}{x}\right)-7=0$
$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+4\left(x+\frac{1}{x}\right)-9=0$
이때 $x+\frac{1}{x}=k$이므로 $k^2+4k-9=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 모든 k의 값의 곱은 -9이다.

500 ········· 답 ⑤

$x^4-7x^2+1=0$에서
$(x^4+2x^2+1)-9x^2=0$, $(x^2+1)^2-(3x)^2=0$
$(x^2+3x+1)(x^2-3x+1)=0$
$x^2+3x+1=0$ 또는 $x^2-3x+1=0$이므로
$\alpha^2+3\alpha+1=0$ 또는 $\alpha^2-3\alpha+1=0$이다. ······ ㉠
ㄱ. ㉠에 의하여 $\alpha^2+3\alpha=-1$ 또는 $\alpha^2-3\alpha=-1$이다. (참)
ㄴ. $x^4-7x^2+1=0$에 $x=0$을 대입하면 식을 만족시키지 못하므로 $\alpha\neq0$이다.
$\alpha^2-3\alpha+1=0$에서 양변을 각각 α로 나누면
$\alpha-3+\frac{1}{\alpha}=0$에서 $\alpha+\frac{1}{\alpha}=3$
이므로 만족시키는 α가 존재한다. (참)
ㄷ. 방정식 $x^2+3x+1=0$의 판별식 $D_1=9-4=5>0$이고
방정식 $x^2-3x+1=0$의 판별식 $D_2=9-4=5>0$이므로
두 방정식은 항상 서로 다른 두 실근을 갖는다.

즉, α는 항상 실수이다. (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

501 ··· 답 10

$f(-2)=f(1)=f(3)=k$ (k는 상수)라 하면
방정식 $f(x)-k=0$의 세 근이 -2, 1, 3이므로
$f(x)-k=(x+2)(x-1)(x-3)$
이때 방정식 $f(x)=0$의 한 근이 $x=2$이므로 $f(2)=0$이고,
이를 위의 식에 대입하면
$f(2)-k=4\times1\times(-1)$ $\quad\therefore k=4$
$\therefore f(x)=(x+2)(x-1)(x-3)+4$
$=x^3-2x^2-5x+10$
$=(x-2)(x^2-5)$
$=(x-2)(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})$
따라서 방정식 $f(x)=0$의 나머지 두 근은
$x=\sqrt{5}$ 또는 $x=-\sqrt{5}$이므로
$\alpha^2+\beta^2=5+5=10$

다른 풀이

$f(-2)=f(1)=f(3)=k$ (k는 상수)라 하면
방정식 $f(x)-k=0$의 세 근이 -2, 1, 3이므로
$f(x)-k=(x+2)(x-1)(x-3)$
$=x^3-2x^2-5x+6$
$\therefore f(x)=x^3-2x^2-5x+6+k$
방정식 $f(x)=0$의 세 근이 2, α, β이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$2+\alpha+\beta=2$ ······ ㉠
$2\alpha+2\beta+\alpha\beta=-5$ ······ ㉡
㉠의 $\alpha+\beta=0$을 ㉡에 대입하면 $\alpha\beta=-5$
$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$
$=0^2-2\times(-5)=10$

502 ··· 답 11

삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+20=0$의 모든 항의 계수가 실수이고
한 근이 $2+i$이므로 $2-i$도 근이다.
이때 나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$(2+i)+(2-i)+\alpha=-a$ ······ ㉠
$(2+i)(2-i)+(2-i)\alpha+\alpha(2+i)=b$ ······ ㉡
$(2+i)(2-i)\alpha=-20$ ······ ㉢
㉢에서 $5\alpha=-20$ $\quad\therefore \alpha=-4$
㉠에서 $4-4=-a$ $\quad\therefore a=0$
㉡에서 $5-4\times4=b$ $\quad\therefore b=-11$
$\therefore a-b=11$

다른 풀이

삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+20=0$의 모든 항의 계수가 실수이고
한 근이 $2+i$이므로 $2-i$도 근이다.
이때 나머지 한 근을 α라 하면
$x^3+ax^2+bx+20=(x-\alpha)\{x-(2+i)\}\{x-(2-i)\}$
$=(x-\alpha)(x^2-4x+5)$ ······ 참고
$=x^3+(-\alpha-4)x^2+(4\alpha+5)x-5\alpha$
위 식의 양변에 $x=0$을 대입하면
$20=-5\alpha$ $\quad\therefore \alpha=-4$ ······ ㉣
$x=-1$을 대입하면
$-1+a-b+20=-1-\alpha-4-4\alpha-5-5\alpha$
$\therefore a-b=-10\alpha-29$
$=-10\times(-4)-29=11$ ($\because$ ㉣)

참고

이차항의 계수가 1이고 두 근이 $2+i$, $2-i$인 이차방정식은
(두 근의 합)$=4$, (두 근의 곱)$=5$임을 이용하여
$x^2-4x+5=0$으로 식을 세울 수 있다.

503 ··· 답 ①

a, b, c가 실수이므로 조건 (가)에서 주어진 삼차방정식의
한 근이 $-1+\sqrt{2}i$이면 $-1-\sqrt{2}i$도 근이다.
이때 나머지 한 근을 p라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$(-1+\sqrt{2}i)+(-1-\sqrt{2}i)+p=-a$
$\therefore a=2-p$ ······ ㉠
이때 이차방정식이 허근을 가지면 이 허근의 켤레복소수 또한 근이 되므로 조건 (나)에서 이차방정식 $x^2+ax-8=0$의 한 근이 p가 되어야 한다. 따라서 $x=p$를 대입하면
$p^2+ap-8=p^2+(2-p)p-8=0$ ($\because$ ㉠)
$2p=8$ $\quad\therefore p=4$
따라서 삼차방정식의 세 근이
$-1+\sqrt{2}i$, $-1-\sqrt{2}i$, 4
이므로 구하는 값은 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$c=-(-1+\sqrt{2}i)\times(-1-\sqrt{2}i)\times4=-12$

504 ··· 답 $A=17$, $B=-6$

주어진 삼차방정식의 세 근이 α, β, γ이므로
$x^3-4x+2=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$
위 식의 양변에 $x=3$을 대입하면
$A=(3-\alpha)(3-\beta)(3-\gamma)=3^3-4\times3+2=17$
이때 $x^3=4x-2$이므로
$\alpha^3=4\alpha-2$
$\beta^3=4\beta-2$
$\gamma^3=4\gamma-2$
변끼리 더하면
$B=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=4(\alpha+\beta+\gamma)-6$
이고, 삼차방정식 $x^3-4x+2=0$의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta+\gamma=0$이므로 $B=-6$
$\therefore A=17$, $B=-6$

505 ··· 답 ①

$f(1-\sqrt{2}i)=-1$, 즉 $f(1-\sqrt{2}i)+1=0$에서 방정식 $f(x)+1=0$의 한 근이 $1-\sqrt{2}i$이고, 모든 계수가 실수이므로 $1+\sqrt{2}i$도 이 방정식의 근이다.

사차식 $f(x)+1$이
$\{x-(1-\sqrt{2}i)\}\{x-(1+\sqrt{2}i)\}=x^2-2x+3$
을 인수로 가지므로
$f(x)+1=(x^2-2x+3)(x^2+px+q)$ (p, q는 실수)라 하면
$x^4+2x^3+ax^2+bx+6=(x^2-2x+3)(x^2+px+q)$
이 식은 x에 대한 항등식이므로 양변의 계수를 비교하면
$-2+p=2$에서 $p=4$, $3q=6$에서 $q=2$
$f(x)+1=(x^2-2x+3)(x^2+4x+2)$
$\qquad=x^4+2x^3-3x^2+8x+6$
$\therefore f(x)=x^4+2x^3-3x^2+8x+5$
$\therefore a+b=(-3)+8=5$

506 …… 답 11

삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$의 세 근이 α, β, γ이므로
삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta+\gamma=-a$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=b$, $\alpha\beta\gamma=-c$
$\frac{1}{\alpha\beta}$, $\frac{1}{\beta\gamma}$, $\frac{1}{\gamma\alpha}$을 세 근으로 하는 삼차방정식이
$x^3-x^2+3x-1=0$이므로
삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=\frac{-a}{-c}=\frac{a}{c}=1 \quad\cdots\cdots ㉠$$

$$\frac{1}{\alpha\beta}\times\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\beta\gamma}\times\frac{1}{\gamma\alpha}+\frac{1}{\gamma\alpha}\times\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{1}{\alpha\beta\gamma}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)$$
$$=\frac{1}{\alpha\beta\gamma}\times\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}$$
$$=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{(\alpha\beta\gamma)^2}$$
$$=\frac{b}{c^2}=3 \quad\cdots\cdots ㉡$$

$$\frac{1}{\alpha\beta}\times\frac{1}{\beta\gamma}\times\frac{1}{\gamma\alpha}=\frac{1}{(\alpha\beta\gamma)^2}=\frac{1}{c^2}=1 \quad\cdots\cdots ㉢$$

㉢에서 $c^2=1$이므로 ㉠에서 $a^2=1$
㉡에서 $\frac{b}{c^2}=b=3$이므로 $b^2=9$
$\therefore a^2+b^2+c^2=11$

507 …… 답 ②

$3x^3+5x^2+(a+2)x+a=0$에 $x=-1$을 대입하면 등식이 성립하므로 조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면

-1	3	5	$a+2$	a
		-3	-2	$-a$
	3	2	a	0

$(x+1)(3x^2+2x+a)=0$
이 삼차방정식이 $x=-1$을 근으로 가지므로 이차방정식 $3x^2+2x+a=0$이 양의 실근과 -1이 아닌 음의 실근을 각각 하나씩 가져야 한다.
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
두 근의 곱이 음수이어야 하므로
$\frac{a}{3}<0 \qquad \therefore a<0$
이때 방정식 $3x^2+2x+a=0$에 $x=-1$을 대입하면
$3\times(-1)^2+2\times(-1)+a=0$에서 $a=-1$이고, 이차방정식이 -1이 아닌 음의 실근을 가져야 하므로 $a\neq-1$이어야 한다.
따라서 $a<0$, $a\neq-1$인 정수 a의 최댓값은 -2이다.

508 …… 답 ③

삼차방정식 $ax^3+3x^2-3x-a=0$ $(a\neq0)$에 $x=1$을 대입하면 등식이 성립하므로 조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면

1	a	3	-3	$-a$
		a	$a+3$	a
	a	$a+3$	a	0

$(x-1)\{ax^2+(a+3)x+a\}=0$
이때 $ax^2+(a+3)x+a=0$에 $x=1$을 대입하면
$a+(a+3)+a=0$, $3a+3=0 \qquad \therefore a=-1$
$a=-1$이면 $ax^2+(a+3)x+a=-x^2+2x-1$이므로
삼차방정식 $ax^3+3x^2-3x-a=0$은 $x=1$만을 근으로 갖게 된다.
따라서 $a\neq-1$이고 …… ㉠
이차방정식 $ax^2+(a+3)x+a=0$은 중근을 갖는다.
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$D=(a+3)^2-4a^2=0$, $\{(a+3)+2a\}\{(a+3)-2a\}=0$
$(3a+3)(-a+3)=0$, $3(a+1)(a-3)=0$에서
$a=-1$ 또는 $a=3$
㉠에 의하여 주어진 조건을 만족시키는 실수 a는 3이다.

509 …… 답 ③

삼차방정식 $x^3=8$의 한 허근이 w이므로 $w^3=8$이다.
$x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4)=0$에서
이차방정식 $x^2+2x+4=0$의 한 허근이 w이므로
다른 한 근은 $\overline{w}$이다.
이때 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$w+\overline{w}=-2$, $w\overline{w}=4$
ㄱ. $\overline{w}^2+2\overline{w}+4=0$에서
$\overline{w}^2=-2\overline{w}-4$
$\quad=-2(-2-w)-4$ ($\because w+\overline{w}=-2$)
$\quad=2w$ (거짓)
ㄴ. $w^2+4=-2w$이고, ㄱ에서 $\overline{w}^2=2w$이므로
$\frac{\overline{w}^2}{w^2+4}=\frac{2w}{-2w}=-1$ (참)
ㄷ. $-w+\overline{w}+2=-w+(-2-w)+2=-2w$
이므로
$(-w+\overline{w}+2)^3=(-2w)^3=-8w^3$
$\quad=(-8)\times8=-2^6$ (거짓)
ㄹ. $w^2-2w-4=w^2+w^2=2w^2$이므로
$(w^2-2w-4)^3=(2w^2)^3=8w^6$
$\quad=8\times8^2=2^9$ (참)
따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ의 2개이다.

510 ⋯⋯ 답 ⑤

$x^4-2x^3-x+2=(x-1)(x-2)(x^2+x+1)$이므로
허근 ω는 방정식 $x^2+x+1=0$의 근이다.
즉, $\omega^2+\omega+1=0$이고 양변에 $\omega-1$을 곱하면
$(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0$에서 $\omega^3-1=0$
$\therefore \omega^3=1$

$$\begin{aligned}\therefore\ & 1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4+\omega^5+\cdots+\omega^{100}\\ &=(1+\omega+\omega^2)+\omega^3(1+\omega+\omega^2)+\omega^6(1+\omega+\omega^2)\\ &\qquad+\cdots+\omega^{96}(1+\omega+\omega^2)+\omega^{99}(1+\omega)\\ &=\omega^{99}(1+\omega)=(\omega^3)^{33}(1+\omega)\\ &=1+\omega\end{aligned}$$

511 ⋯⋯ 답 17

삼차방정식 $x^3-1=0$의 한 허근이 ω이므로 $\omega^3=1$이다.
$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=0$에서 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 한 허근이 ω이므로 $\omega^2+\omega+1=0$이다.
$\left(\dfrac{\omega^3+2\omega^2+\omega+1}{\omega^4+\omega^3-\omega}\right)^n$에서 분모를 정리하면
$\omega^4+\omega^3-\omega=\omega+1-\omega=1$
분자를 정리하면

$$\begin{aligned}\omega^3+2\omega^2+\omega+1&=1+\omega^2+(\omega^2+\omega+1)\\ &=1+\omega^2=-\omega\end{aligned}$$

이므로
$\left(\dfrac{\omega^3+2\omega^2+\omega+1}{\omega^4+\omega^3-\omega}\right)^n=(-\omega)^n=(-1)^n\times\omega^n$
이고, 이 값이 음의 실수가 되려면 n은 홀수이면서 3의 배수가 되어야 한다.
따라서 n은 100 이하의 3의 배수 중 6의 배수를 제외해주면 되므로 구하는 자연수 n의 개수는 $33-16=17$이다.

512 ⋯⋯ 답 ④

삼차방정식 $x^3-1=0$의 한 허근이 ω이므로 $\omega^3=1$이다.
$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=0$에서 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 한 허근이 ω이므로 $\omega^2+\omega+1=0$이다.

$f(1)=\dfrac{\omega}{1+\omega}=\dfrac{\omega}{-\omega^2}=-\dfrac{1}{\omega}$

$f(2)=\dfrac{\omega^2}{1+\omega^2}=\dfrac{\omega^2}{-\omega}=-\omega$

$f(3)=\dfrac{\omega^3}{1+\omega^3}=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$

$f(4)=\dfrac{\omega^4}{1+\omega^4}=\dfrac{\omega}{1+\omega}=f(1)$

⋮

$$\begin{aligned}\therefore\ & f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(300)\\ &=\left(-\frac{1}{\omega}-\omega+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{\omega}-\omega+\frac{1}{2}\right)+\cdots+\left(-\frac{1}{\omega}-\omega+\frac{1}{2}\right)\\ &=100\times\left(-\frac{1}{\omega}-\omega+\frac{1}{2}\right)=100\times\left(-\frac{\omega^2+1}{\omega}+\frac{1}{2}\right)\\ &=100\times\frac{3}{2}=150\end{aligned}$$

513 ⋯⋯ 답 ④

$\begin{cases}x^2-xy=5 & \cdots\cdots ㉠\\ xy-y^2=2 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

에서 $2\times$㉠$-5\times$㉡을 하면
$2x^2-7xy+5y^2=0$, $(2x-5y)(x-y)=0$
$\therefore 2x=5y$ 또는 $x=y$
(i) $2x=5y$일 때
㉠에 $y=\dfrac{2}{5}x$를 대입하면
$x^2-\dfrac{2}{5}x^2=5$, $\dfrac{3}{5}x^2=5$, $x^2=\dfrac{25}{3}$
$\therefore x=\dfrac{5}{\sqrt{3}}$, $y=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ 또는 $x=-\dfrac{5}{\sqrt{3}}$, $y=-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$
(ii) $x=y$일 때
㉠에 $x=y$를 대입하면 $0=5$가 되므로 주어진 식을 만족시키지 못한다.
(i), (ii)에서 구하는 값은
$\alpha\beta=\dfrac{5}{\sqrt{3}}\times\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\left(-\dfrac{5}{\sqrt{3}}\right)\times\left(-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)=\dfrac{10}{3}$

다른 풀이 1

$\begin{cases}x^2-xy=5 & \cdots\cdots ㉠\\ xy-y^2=2 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠에서 ㉡을 빼면
$x^2-2xy+y^2=(x-y)^2=3$
에서 $|x-y|=\sqrt{3}$이므로
$x-y=\sqrt{3}$ 또는 $x-y=-\sqrt{3}$
㉠과 ㉡을 더하면
$x^2-y^2=7$ ⋯⋯ ㉢
(i) $x-y=\sqrt{3}$인 경우
㉢에 대입하면 $x^2-(x-\sqrt{3})^2=7$, $2\sqrt{3}x=10$
$\therefore x=\dfrac{5}{\sqrt{3}}$이고 $y=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$
(ii) $x-y=-\sqrt{3}$인 경우
㉢에 대입하면 $x^2-(x+\sqrt{3})^2=7$, $-2\sqrt{3}x=10$
$\therefore x=-\dfrac{5}{\sqrt{3}}$이고 $y=-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$
(i), (ii)에서 구하는 값은 $\alpha\beta=\dfrac{10}{3}$

다른 풀이 2

$\begin{cases}x^2-xy=5 & \cdots\cdots ㉠\\ xy-y^2=2 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠에서 $x(x-y)=5$이고
㉡에서 $y(x-y)=2$이므로
x, y, $x-y$는 모두 0이 아니고
$x:y=5:2$ $\quad\therefore y=\dfrac{2}{5}x$
이를 ㉠에 대입하면
$x^2-\dfrac{2}{5}x^2=5$, $\dfrac{3}{5}x^2=5$ $\quad\therefore x^2=\dfrac{25}{3}$
$\therefore \alpha\beta=\dfrac{2}{5}\alpha^2=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{25}{3}=\dfrac{10}{3}$

514 ······ 답 ③

$x+y=A$, $xy=B$라 하면 ······ TIP

$x+y+xy=A+B=-2$ ······ ㉠

$x^2y+y^2x=xy(x+y)=AB=-24$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 A, B를 두 근으로 하고

이차항의 계수가 1인 이차방정식은

$t^2+2t-24=0$, 즉 $(t+6)(t-4)=0$이므로

$A=-6$, $B=4$ 또는 $A=4$, $B=-6$이다.

따라서 xy의 값이 될 수 있는 것은 -6 또는 4이므로 구하는 합은

$(-6)+4=-2$이다.

TIP

주어진 연립방정식은 x, y에 대한 삼차식을 포함하고 있으므로 풀이가 어렵다.

따라서 x, y의 합과 곱을 치환해서 주어진 식을 간단하게 변형한 다음 x, y의 각각의 값을 구한다.

515 ······ 답 9

$\begin{cases}(x+2)(y+2)=a & \cdots\cdots ㉠\\(x-4)(y-4)=a & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠에서 ㉡을 빼면

$(x+2)(y+2)-(x-4)(y-4)=0$

$xy+2(x+y)+4-\{xy-4(x+y)+16\}=0$

$6(x+y)=12$에서 $x+y=2$ ······ ㉢

㉠에 ㉢을 대입하면

$(x+2)(4-x)=a$, $x^2-2x+a-8=0$

이고, 주어진 연립방정식의 해가 오직 한 쌍만 존재하기 위해서는

이차방정식 $x^2-2x+a-8=0$이 중근을 가져야 한다.

이 방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1-(a-8)=0$

$\therefore a=9$

516 ······ 답 45

$(x-y)^2-(x-y)-2=0$에서 $x-y=X$라 하면

$X^2-X-2=0$, $(X+1)(X-2)=0$

에서 $X=-1$ 또는 $X=2$이므로

$x-y=-1$ 또는 $x-y=2$

(i) $x-y=-1$인 경우

$x^2=y^2+5$에 대입하면

$x^2=(x+1)^2+5$, $2x+6=0$

$\therefore x=-3$, $y=-2$

이때 x, y는 양수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $x-y=2$인 경우

$x^2=y^2+5$에 대입하면

$x^2=(x-2)^2+5$, $-4x+9=0$

$\therefore x=\frac{9}{4}$, $y=\frac{1}{4}$

(i), (ii)에서 구하는 값은

$80xy=80\times\frac{9}{4}\times\frac{1}{4}=45$

517 ······ 답 ③

두 연립방정식 $\begin{cases}x+y=3\\x^2+py^2=15\end{cases}$, $\begin{cases}qx-y=5\\x^2+y^2=17\end{cases}$의 한 근이

$x=\alpha$, $y=\beta$이므로 이를 각각 대입하면

$\begin{cases}\alpha+\beta=3 & \cdots\cdots ㉠\\\alpha^2+p\beta^2=15 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$, $\begin{cases}q\alpha-\beta=5 & \cdots\cdots ㉢\\\alpha^2+\beta^2=17 & \cdots\cdots ㉣\end{cases}$

㉠, ㉣에서

$\alpha^2+(3-\alpha)^2=17$, $2\alpha^2-6\alpha-8=0$, $\alpha^2-3\alpha-4=0$,

$(\alpha+1)(\alpha-4)=0$

$\alpha=-1$일 때 $\beta=4$, $\alpha=4$일 때 $\beta=-1$

이때 $\alpha>\beta$이므로 $\alpha=4$, $\beta=-1$

따라서 ㉡에서 $4^2+p\times(-1)^2=15$, 즉 $p=-1$이고,

㉢에서 $4q-(-1)=5$, 즉 $q=1$이다.

$\therefore \alpha+\beta+p+q=4+(-1)+(-1)+1=3$

518 ······ 답 $10<k\le11$

$\begin{cases}x^2+y^2+2(x+y)=k\\x^2+xy+y^2=5\end{cases}$에서 $x+y=A$, $xy=B$라 하면

$x^2+y^2=A^2-2B$이므로

$\begin{cases}A^2-2B+2A=k\\A^2-2B+B=5\end{cases}$, 즉 $\begin{cases}A^2-2B+2A=k & \cdots\cdots ㉠\\B=A^2-5 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉡을 ㉠에 대입하면

$A^2-2(A^2-5)+2A=k$에서

$A^2-2A+k-10=0$

이 A에 대한 이차방정식이 실근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-(k-10)\ge0$에서 $k\le11$

이때 $\alpha+\beta$의 값이 항상 양수가 되기 위해서는 이차방정식

$A^2-2A+k-10=0$의 두 근이 모두 양수이어야 하므로

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은

$k-10>0$에서 $k>10$

따라서 구하는 실수 k의 값의 범위는 $10<k\le11$이다.

519 ······ 답 147

$\begin{cases}a+b+c=12 & \cdots\cdots ㉠\\2b=a+c & \cdots\cdots ㉡\\100c+10b+a=(100a+10b+c)+594 & \cdots\cdots ㉢\end{cases}$

㉢에서 $a-c=-6$ ······ ㉣

㉡을 ㉠에 대입하면

$b=4$, $a+c=8$ ······ ㉤

㉣, ㉤의 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $c=7$

따라서 $N=147$이다.

520 ······ 답 $x=500,\ y=300,\ z=200$

X, Y, Z의 총 무게가 1 kg이므로

$x+y+z=1000$ ······ ㉠

조건 ㈎, ㈏에 의하여

$x\times\frac{1}{100}+y\times\frac{2}{100}+z\times\frac{3}{100}=17$

$x+2y+3z=1700$ ······ ㉡

조건 ㈐에 의하여

$x+y=4z$ ······ ㉢

㉠, ㉢에서 $5z=1000$이므로 $z=200$

㉠, ㉡에 $z=200$을 각각 대입한 후 연립하여 풀면

$x=500,\ y=300$

$\therefore\ x=500,\ y=300,\ z=200$

521 ······ 답 ②

갑의 속력을 x km/시, 을의 속력을 y km/시,

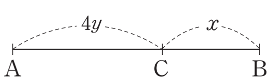
갑과 을이 만난 지점을 C라 하자.

갑과 을이 만날 때까지 걸린 시간을 t시간이라 하면

A 지점에서 C 지점까지 거리는 xt km

B 지점에서 C 지점까지 거리는 yt km

이때 두 사람이 만나고 난 후 갑이 1시간 후에 B 지점, 을이 4시간 후에 A 지점에 도착하므로 A 지점에서 C 지점까지 거리는 $4y$ km, B 지점에서 C 지점까지 거리는 x km이다.



따라서

$xt=4y$ ······ ㉠

$yt=x$ ······ ㉡

㉡에서 $t=\frac{x}{y}$이고, 이를 ㉠에 대입하면

$\frac{x^2}{y}=4y,\ x^2=4y^2$이므로 $x=2y$ ($\because\ x>0,\ y>0$)

이때 C 지점까지 갈 때, 갑이 을보다 8 km를 더 걸었으므로

$4y-x=8$이고, $x=2y$를 대입하면 $2y=8$이므로

$x=8,\ y=4$

따라서 A 지점에서 B 지점까지의 거리 S는

$S=x+4y=8+4\times4=24$

$\therefore\ x+S=8+24=32$

522 ······ 답 ⑤

알약의 반구 부분의 반지름의 길이를 x mm라 하면

원기둥 부분의 높이는 $(x+6)$ mm이다.

알약의 전체 부피가 117π mm^3이므로

$\frac{4}{3}\pi x^3+\pi x^2(x+6)=117\pi,\ \frac{7}{3}x^3+6x^2-117=0$

이 방정식에 $x=3$을 대입하면 등식이 성립하므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

3	$\frac{7}{3}$	6	0	-117
		7	39	117
	$\frac{7}{3}$	13	39	0

$(x-3)\left(\frac{7}{3}x^2+13x+39\right)=0$

이차방정식 $\frac{7}{3}x^2+13x+39=0$의 판별식을 D라 하면

$D=13^2-4\times\frac{7}{3}\times39<0$이므로 이 방정식을 만족시키는 실수가 존재하지 않는다.

따라서 $x=3$이므로 알약의 겉넓이는

$4\pi\times3^2+2\pi\times3\times9=36\pi+54\pi=90\pi(\text{mm}^2)$

523 ······ 답 ⑤

이차방정식 $x^2+(m-1)x+2m+3=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta\ (\alpha\le\beta)$라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=1-m$ ······ ㉠

$\alpha\beta=2m+3$ ······ ㉡

㉠$\times2+$㉡을 하면

$2\alpha+2\beta+\alpha\beta=5,\ (\alpha+2)(\beta+2)=9$

두 근 $\alpha,\ \beta$는 모두 정수이므로

(i) $\alpha+2=1,\ \beta+2=9$일 때, $\alpha=-1,\ \beta=7$

(ii) $\alpha+2=3,\ \beta+2=3$일 때, $\alpha=1,\ \beta=1$

(iii) $\alpha+2=-3,\ \beta+2=-3$일 때, $\alpha=-5,\ \beta=-5$

(iv) $\alpha+2=-9,\ \beta+2=-1$일 때, $\alpha=-11,\ \beta=-3$

㉠에 의하여 $m=1-(\alpha+\beta)$이므로 (i)~(iv)에서

$m=-5$ 또는 $m=-1$ 또는 $m=11$ 또는 $m=15$

따라서 구하는 모든 실수 m의 값의 합은

$(-5)+(-1)+11+15=20$

524 ······ 답 ④

방정식 $2x^3-kx^2+49=0$의 한 근이 정수 α이므로 $x=\alpha$를 대입하면

$2\alpha^3-k\alpha^2+49=0$에서 $\alpha^2(2\alpha-k)=-49$이고, α와 k가 모두 정수이므로 α^2과 $2\alpha-k$도 정수이다.

$-49=(-1)\times7^2$이고, α는 1보다 큰 자연수이므로

$\alpha^2=7^2,\ 2\alpha-k=-1$ $\quad\therefore\ \alpha=7,\ k=15$

따라서 방정식은 $2x^3-15x^2+49=0$이고 $x=7$을 대입하면 등식이 성립하므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

7	2	-15	0	49
		14	-7	-49
	2	-1	-7	0

$(x-7)(2x^2-x-7)=0$

이때 이차방정식 $2x^2-x-7=0$의 두 근이 $\beta,\ \gamma$이고 근과 계수의 관계에 의하여

$\beta+\gamma=\frac{1}{2},\ \beta\gamma=-\frac{7}{2}$

$\beta^2+\gamma^2=(\beta+\gamma)^2-2\beta\gamma$

$\quad=\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\times\left(-\frac{7}{2}\right)$

$\quad=\frac{1}{4}+7=\frac{29}{4}$

$\therefore\ 4(\beta^2+\gamma^2)-k=4\times\frac{29}{4}-15=14$

525

답 8

$x^2+y^2-2x+4y-8=0$에서

$(x^2-2x+1)+(y^2+4y+4)=13$

$(x-1)^2+(y+2)^2=13$이고 x, y가 정수이므로

(i) $(x-1)^2=2^2$, $(y+2)^2=3^2$인 경우

$x-1=2$ 또는 $x-1=-2$이므로

$x=3$ 또는 $x=-1$

$y+2=3$ 또는 $y+2=-3$이므로

$y=1$ 또는 $y=-5$

가능한 x, y의 순서쌍 (x, y)는

$(3, 1)$, $(3, -5)$, $(-1, 1)$, $(-1, -5)$이다.

(ii) $(x-1)^2=3^2$, $(y+2)^2=2^2$인 경우

$x-1=3$ 또는 $x-1=-3$이므로

$x=4$ 또는 $x=-2$

$y+2=2$ 또는 $y+2=-2$이므로

$y=0$ 또는 $y=-4$

가능한 x, y의 순서쌍 (x, y)는

$(4, 0)$, $(4, -4)$, $(-2, 0)$, $(-2, -4)$이다.

(i), (ii)에서 $x=-2$, $y=-4$일 때, xy는 최댓값 8을 갖는다.

526

답 42

방정식 $ax^3-2bx^2+4(a+b)x-16a=0$에서 $x=2$를 대입하면 등식이 성립하므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|cccc} 2 & a & -2b & 4(a+b) & -16a \\ & & 2a & 4a-4b & 16a \\ \hline & a & 2a-2b & 8a & \boxed{0} \end{array}$$

$(x-2)\{ax^2+2(a-b)x+8a\}=0$

주어진 방정식이 서로 다른 세 정수를 근으로 가지므로 방정식 $ax^2+2(a-b)x+8a=0$은 $x=2$를 근으로 갖지 않아야 한다.

이차방정식 $ax^2+2(a-b)x+8a=0$이 …… ㉠

2가 아닌 서로 다른 정수근을 가져야 하므로

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

두 근의 합은 $\frac{-2(a-b)}{a}=\frac{2b}{a}-2$

두 근의 곱은 $\frac{8a}{a}=8$

따라서 방정식 ㉠의 2가 아닌 서로 다른 두 정수근은

1, 8 또는 -1, -8 또는 -2, -4이다.

(i) 방정식 ㉠의 두 근이 1, 8인 경우

두 근의 합은 $1+8=\frac{2b}{a}-2$에서 $b=\frac{11}{2}a$이므로

가능한 정수 a, b의 순서쌍은

$(2, 11)$, $(4, 22)$, $(-2, -11)$, $(-4, -22)$의 4개이다.

(ii) 방정식 ㉠의 두 근이 -1, -8인 경우

두 근의 합은 $-1-8=\frac{2b}{a}-2$에서 $b=-\frac{7}{2}a$이므로

가능한 정수 a, b의 순서쌍은

$(2, -7)$, $(4, -14)$, $(6, -21)$, $(8, -28)$,

$(-2, 7)$, $(-4, 14)$, $(-6, 21)$, $(-8, 28)$의 8개이다.

(iii) 방정식 ㉠의 두 근이 -2, -4인 경우

두 근의 합은 $-2-4=\frac{2b}{a}-2$에서 $b=-2a$이므로

가능한 정수 a, b의 순서쌍은

$(1, -2)$, $(2, -4)$, $(3, -6)$, $\cdots$, $(15, -30)$,

$(-1, 2)$, $(-2, 4)$, $(-3, 6)$, $\cdots$, $(-15, 30)$의 30개이다.

(i)~(iii)에서 순서쌍 (a, b)의 개수는 $4+8+30=42$이다.

527

답 9

$x=-1$, $x=k$를 대입하면 주어진 방정식을 만족시키므로 조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면

$$\begin{array}{r|ccccc} -1 & 1 & -k & -(k+1) & k^2 & k^2 \\ & & -1 & k+1 & 0 & -k^2 \\ \hline k & 1 & -k-1 & 0 & k^2 & \boxed{0} \\ & & k & -k & -k^2 & \\ \hline & 1 & -1 & -k & \boxed{0} & \end{array}$$

$(x+1)(x-k)(x^2-x-k)=0$

이 방정식이 서로 다른 네 실근을 가지려면

$k\neq-1$ …… ㉠

이고, 방정식 $x^2-x-k=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

방정식 $x^2-x-k=0$의 판별식을 D라 하면

$D=1+4k>0$에서 $k>-\frac{1}{4}$ …… ㉡

이때 $x=-1$이 방정식 $x^2-x-k=0$의 근이 아니어야 하므로

$1+1-k\neq0$에서 $k\neq2$ …… ㉢

또한, $x=k$도 방정식 $x^2-x-k=0$의 근이 아니어야 하므로

$k^2-2k=k(k-2)\neq0$에서 $k\neq0$, $k\neq2$ …… ㉣

따라서 ㉠~㉣에서 조건을 만족시키는 10 이하의 정수 k는

1, 3, 4, 5, $\cdots$, 10의 9개이다.

528

답 ⑤

방정식 $x^3-2x^2+x=k^3-2k^2+k$에서

$x^3-2x^2+x-k^3+2k^2-k=0$이고, $x=k$를 대입하면 방정식을 만족시키므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|cccc} k & 1 & -2 & 1 & -k^3+2k^2-k \\ & & k & k^2-2k & k^3-2k^2+k \\ \hline & 1 & k-2 & k^2-2k+1 & \boxed{0} \end{array}$$

$(x-k)\{x^2+(k-2)x+k^2-2k+1\}=0$

이 방정식이 중근을 가지려면 방정식

$x^2+(k-2)x+k^2-2k+1=0$이 $x=k$를 한 근으로 갖거나 중근을 가져야 한다.

(i) 방정식 $x^2+(k-2)x+k^2-2k+1=0$이 $x=k$를 한 근으로 갖는 경우
이 방정식에 $x=k$를 대입하면
$k^2+k(k-2)+k^2-2k+1=0$
$3k^2-4k+1=0$, $(3k-1)(k-1)=0$
$\therefore k=\frac{1}{3}$ 또는 $k=1$

(ii) 방정식 $x^2+(k-2)x+k^2-2k+1=0$이 중근을 갖는 경우
이 방정식의 판별식을 D라 하면
$D=(k-2)^2-4(k^2-2k+1)=0$
$-3k^2+4k=0$, $-k(3k-4)=0$
$\therefore k=0$ 또는 $k=\frac{4}{3}$

(i), (ii)에서 모든 실수 k의 값의 합은
$\frac{1}{3}+1+0+\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$

529

답 6

삼차방정식 $x^3+ax^2+bx-2=0$의 계수가 모두 실수이므로 $\alpha=p+qi$ (p, q는 실수, $q\neq0$)라 할 때, α를 허근으로 가지면 켤레복소수 $\overline{\alpha}$도 근으로 갖는다.
$\frac{\alpha^2}{2}=\overline{\alpha}$에서 $\frac{(p+qi)^2}{2}=p-qi$
$p^2-q^2+2pqi=2p-2qi$
이때 복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$2pq=-2q$ …… ㉠
$p^2-q^2=2p$ …… ㉡
㉠에서 $q(p+1)=0$이므로 $p=-1$ ($\because q\neq0$)
㉡에 $p=-1$을 대입하면 $q^2=3$에서
$q=\sqrt{3}$ 또는 $q=-\sqrt{3}$
따라서 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx-2=0$의 두 허근은 $-1+\sqrt{3}i$, $-1-\sqrt{3}i$이다.
이 방정식의 나머지 한 실근을 k라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$k(-1+\sqrt{3}i)(-1-\sqrt{3}i)=4k=2$에서 $k=\frac{1}{2}$
두 근이 $-1+\sqrt{3}i$, $-1-\sqrt{3}i$인 이차방정식은 $x^2+2x+4=0$이고,
나머지 한 실근이 $x=\frac{1}{2}$이므로 주어진 삼차방정식은
$\left(x-\frac{1}{2}\right)(x^2+2x+4)=0$, $x^3+\frac{3}{2}x^2+3x-2=0$
에서 $a=\frac{3}{2}$, $b=3$
$\therefore 2a+b=6$

다른 풀이

삼차방정식 $x^3+ax^2+bx-2=0$의 계수가 모두 실수이므로 α를 허근으로 가지면 켤레복소수 $\overline{\alpha}$도 근으로 갖는다.
즉, $\frac{\alpha^2}{2}=\overline{\alpha}$이므로 $\alpha+\frac{\alpha^2}{2}$는 실수이다.
따라서 $\alpha+\frac{\alpha^2}{2}=\overline{\left(\alpha+\frac{\alpha^2}{2}\right)}=\overline{\alpha}+\frac{\overline{\alpha}^2}{2}$에서
$\alpha-\overline{\alpha}+\frac{1}{2}(\alpha-\overline{\alpha})(\alpha+\overline{\alpha})=0$
$\therefore \alpha+\overline{\alpha}=-2$ ($\because \alpha-\overline{\alpha}\neq0$) …… ㉠
한편, $\alpha-\frac{\alpha^2}{2}$는 순허수이므로
$\alpha-\frac{\alpha^2}{2}+\overline{\left(\alpha-\frac{\alpha^2}{2}\right)}=\alpha-\frac{\alpha^2}{2}+\overline{\alpha}-\frac{\overline{\alpha}^2}{2}=0$
$\alpha+\overline{\alpha}-\frac{1}{2}(\alpha^2+\overline{\alpha}^2)=0$
$\alpha+\overline{\alpha}-\frac{1}{2}\{(\alpha+\overline{\alpha})^2-2\alpha\overline{\alpha}\}=0$
$-2-\frac{1}{2}(4-2\alpha\overline{\alpha})=0$ ($\because$ ㉠)
$\therefore \alpha\overline{\alpha}=4$ …… ㉡
㉠, ㉡에 의하여 두 허수 α, $\overline{\alpha}=\frac{\alpha^2}{2}$을 근으로 갖고
최고차항의 계수가 1인 이차방정식은 $x^2+2x+4=0$이다.
따라서 x^3+ax^2+bx-2는 상수항이 -2이고,
x^2+2x+4를 인수로 가지므로
$x^3+ax^2+bx-2=\left(x-\frac{1}{2}\right)(x^2+2x+4)$
양변에 $x=2$를 대입하면
$4a+2b+6=18$
$\therefore 2a+b=6$

530

답 ①

삼차방정식 $x^3-1=0$의 한 허근이 ω이므로
$\omega^3=1$
$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=0$에서
이차방정식 $x^2+x+1=0$의 한 허근이 ω이므로
$\omega^2+\omega+1=0$
ㄱ. $f(3)=\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}+\frac{1}{\omega^3}=\frac{\omega^2+\omega+1}{\omega^3}=\frac{0}{1}=0$ (참)
ㄴ. $f(3k-2)=\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}+\frac{1}{\omega^3}+\cdots+\frac{1}{\omega^{3k-2}}$
$=\left(\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}+\frac{1}{\omega^3}\right)+\frac{1}{\omega^3}\left(\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}+\frac{1}{\omega^3}\right)$
$+\cdots+\frac{1}{\omega^{3(k-2)}}\left(\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}+\frac{1}{\omega^3}\right)+\frac{1}{\omega^{3(k-1)}}\times\frac{1}{\omega}$
$=0+1\times0+\cdots+1\times0+1\times\frac{1}{\omega}=\frac{1}{\omega}$ (거짓)
ㄷ. 자연수 k에 대하여
(i) $n=3k$일 때
$f(3k)=0$이므로 $\{f(n)\}^2+f(n)=0+0=0$
(ii) $n=3k-1$일 때
$f(3k-1)=\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}+\frac{1}{\omega^3}+\cdots+\frac{1}{\omega^{3k-2}}+\frac{1}{\omega^{3k-1}}$
$=\frac{1}{\omega^{3(k-1)}}\times\left(\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}\right)$
$=\frac{\omega+1}{\omega^2}$
$=\frac{-\omega^2}{\omega^2}=-1$
이므로 $\{f(n)\}^2+f(n)=(-1)^2+(-1)=0$

Ⅱ 방정식과 부등식

(iii) $n=3k-2$일 때

ㄴ에서 $f(3k-2)=\frac{1}{\omega}$이므로

$\{f(n)\}^2+f(n)=\frac{1}{\omega^2}+\frac{1}{\omega}=-1\neq 0$

즉, (i), (ii)일 때 주어진 조건을 만족시키므로 구하는 값은

$90-30=60$ ($\because$ $10\leq 3k-2<100$, $4\leq k<34$) (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

참고

방정식 $x^2+x+1=0$의 한 근이 ω이므로

$\overline{\omega}$ ($\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수)도 이 방정식의 근이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega\overline{\omega}=1$에서 $\overline{\omega}=\frac{1}{\omega}$

이를 $f(n)=\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}+\frac{1}{\omega^3}+\cdots+\frac{1}{\omega^n}$에 대입하면

$f(n)=\overline{\omega}+\overline{\omega}^2+\overline{\omega}^3+\cdots+\overline{\omega}^n$으로 해석하여 풀이할 수도 있다.

531

답 ⑤

$[x]^2+[x]-6=0$에서 $([x]+3)([x]-2)=0$

즉, $[x]=-3$ 또는 $[x]=2$이므로

$-3\leq x<-2$ 또는 $2\leq x<3$

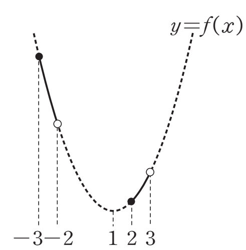
$x+y=2$를 $x^2+2x+2y^2$에 대입하면

$x^2+2x+2(2-x)^2=3x^2-6x+8=3(x^2-2x+1)+5$

$=3(x-1)^2+5$

$f(x)=3(x-1)^2+5$라 하면 $-3\leq x<-2$ 또는 $2\leq x<3$에서

함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 이차함수 $f(x)$는

$x=-3$일 때 최댓값 $M=f(-3)=48+5=53$을 갖고,

$x=2$일 때 최솟값 $m=f(2)=3+5=8$을 갖는다.

$\therefore M+m=53+8=61$

532

답 $\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$, $\begin{cases}x=-\frac{3}{5}\\y=\frac{1}{5}\end{cases}$, $\begin{cases}x=0\\y=-1\end{cases}$

방정식 $2x^2+3xy+y^2-3x-y-2=0$의 좌변을 x에 대한 내림차순으로 정리하면

$2x^2+3(y-1)x+y^2-y-2=0$

$2x^2+3(y-1)x+(y+1)(y-2)=0$

$(x+y-2)(2x+y+1)=0$

$\therefore x+y-2=0$ 또는 $2x+y+1=0$ …… ㉠

방정식 $2x^2-5xy+2y^2+x+y-1=0$의 좌변을 x에 대한 내림차순으로 정리하면

$2x^2+(1-5y)x+2y^2+y-1=0$

$2x^2+(1-5y)x+(y+1)(2y-1)=0$

$(x-2y+1)(2x-y-1)=0$

$\therefore x-2y+1=0$ 또는 $2x-y-1=0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 다음과 같이 경우를 나누어 살펴보면

(i) $x+y-2=0$이고 $x-2y+1=0$인 경우

두 식을 연립하여 풀면 $x=1$, $y=1$

(ii) $x+y-2=0$이고 $2x-y-1=0$인 경우

두 식을 연립하여 풀면 $x=1$, $y=1$

(iii) $2x+y+1=0$이고 $x-2y+1=0$인 경우

두 식을 연립하여 풀면 $x=-\frac{3}{5}$, $y=\frac{1}{5}$

(iv) $2x+y+1=0$이고 $2x-y-1=0$인 경우

두 식을 연립하여 풀면 $x=0$, $y=-1$

(i)~(iv)에서 구하는 해는

$\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$, $\begin{cases}x=-\frac{3}{5}\\y=\frac{1}{5}\end{cases}$, $\begin{cases}x=0\\y=-1\end{cases}$

533

답 3

이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2x+1$이 접하므로

방정식 $f(x)=2x+1$이 중근을 갖는다.

$\{f(x)-2x\}^3-2\{f(x)-2x\}^2-5\{f(x)-2x\}+6=0$에서

$f(x)-2x=t$라 하면

$t^3-2t^2-5t+6=0$

$t=1$을 대입하면 등식이 성립하므로 조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면

1	1	-2	-5	6
		1	-1	-6
	1	-1	-6	0

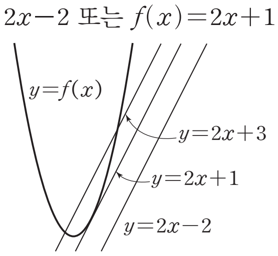
$(t-1)(t^2-t-6)=0$

$(t+2)(t-1)(t-3)=0$

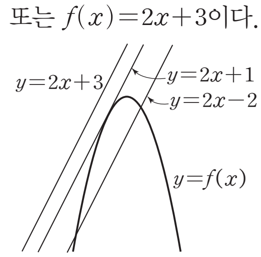
$\therefore t=-2$ 또는 $t=1$ 또는 $t=3$

즉, $f(x)-2x=-2$ 또는 $f(x)-2x=1$ 또는 $f(x)-2x=3$에서

$f(x)=2x-2$ 또는 $f(x)=2x+1$ 또는 $f(x)=2x+3$이다.



[그림 1]



[그림 2]

이차함수 $y=f(x)$의 그래프는

[그림 1]과 같이 아래로 볼록한 경우와

[그림 2]와 같이 위로 볼록한 경우 모두 세 직선

$y=2x+1$, $y=2x+3$, $y=2x-2$와 만나는 점의 개수가 항상 3이다. …… TIP

따라서 방정식 $f(x)=2x+1$ 또는 $f(x)=2x+3$ 또는 $f(x)=2x-2$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

TIP

[그림 1]에서
함수 $y=f(x)$의 그래프가 아래로 볼록한 경우
직선 $y=2x+1$과 한 점에서 만나고,
직선 $y=2x+3$과 두 점에서 만나고,
직선 $y=2x-2$와 만나지 않는다.
[그림 2]에서
함수 $y=f(x)$의 그래프가 위로 볼록한 경우
직선 $y=2x+1$과 한 점에서 만나고,
직선 $y=2x-2$와 두 점에서 만나고,
직선 $y=2x+3$과 만나지 않는다.

534 ······ 답 ⑤

$x^4+2(1-a)x^2+a^2-2a-8=0$에서
$x^4+(2-2a)x^2+(a+2)(a-4)=0$
$(x^2-a+4)(x^2-a-2)=0$　　$\therefore x^2=a-4$ 또는 $x^2=a+2$

ㄱ. 방정식 $x^2=a-4$에서 $a-4\geq 0$이면 실근을 갖고, $a-4<0$이면 허근을 갖는다.
방정식 $x^2=a+2$에서 $a+2\geq 0$이면 실근을 갖고, $a+2<0$이면 허근을 갖는다.
방정식 $x^4+2(1-a)x^2+a^2-2a-8=0$이 실근과 허근을 모두 가지려면 $a+2\geq 0$, $a-4<0$이어야 한다.
이때 실근은 $x^2=a+2$에서 $x=\sqrt{a+2}$ 또는 $x=-\sqrt{a+2}$이고,
모든 실근의 곱이 -4이므로
$\sqrt{a+2}\times(-\sqrt{a+2})=-(a+2)=-4$　　$\therefore a=2$
따라서 허근은 $x^2=a-4=-2$에서
$x=\sqrt{2}i$ 또는 $x=-\sqrt{2}i$이므로
모든 허근의 곱은 $\sqrt{2}i\times(-\sqrt{2}i)=2$ (참)

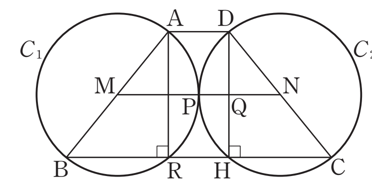
ㄴ. 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면
두 이차방정식 $x^2=a-4$, $x^2=a+2$ 중 하나는 서로 다른 두 실근을 가지고 나머지 하나는 중근 0을 가져야 한다.
방정식 $x^2=a-4$가 중근 0을 가질 때 $a=4$이고, 이를 방정식 $x^2=a+2$에 대입하면 $x^2=6$에서 $x=\sqrt{6}$ 또는 $x=-\sqrt{6}$이므로 조건을 만족시킨다.
방정식 $x^2=a+2$이 중근 0을 가질 때 $a=-2$이고, 이를 방정식 $x^2=a-4$에 대입하면 $x^2=-6$에서 $x=\sqrt{6}i$ 또는 $x=-\sqrt{6}i$로 두 허근을 가지므로 조건을 만족시키지 않는다. 따라서 방정식의 실근의 개수가 3이 되도록 하는 실수 a는 4의 1개이다. (참)

ㄷ. 방정식이 정수인 근을 가지려면 $x^2=a-4$ 또는 $x^2=a+2$에서
$a-4$ 또는 $a+2$가 어떤 정수의 제곱이어야 한다.　······ ㉠
이때 정수의 제곱을 크기가 작은 수부터 차례대로 나열하면
0, 1, 4, 9, 16, $\cdots$
이고 10 이하의 자연수 a에 대하여 $-3\leq a-4\leq 6$,
$3\leq a+2\leq 12$이므로
㉠을 만족시키려면 $a-4=0$, 1, 4 또는 $a+2=4$, 9이어야 한다.
즉, $a=2$, 4, 5, 7, 8이므로
조건을 만족시키는 모든 자연수 a의 값의 합은
$2+4+5+7+8=26$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

535 ······ 답 164

선분 AB를 지름으로 하는 원을 C_1, 선분 CD를 지름으로 하는 원을 C_2라 하자. 두 선분 AB, CD의 중점을 각각 M, N이라 하면 두 점 M, N은 각각 두 원 C_1, C_2의 중심이다. $\overline{AB}=\overline{CD}$이므로 두 원 C_1, C_2의 반지름의 길이가 서로 같고, 원 C_1과 원 C_2는 오직 한 점에서 만나므로 원 C_1과 원 C_2가 만나는 점은 선분 MN의 중점이다. 선분 MN의 중점을 P, 점 D에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H, 선분 DH와 선분 MN이 만나는 점을 Q라 하자.



두 원 C_1, C_2의 반지름의 길이를 r이라 하면
$\overline{QN}=\overline{PN}-\overline{PQ}=r-2$에서 $\overline{HC}=2\times\overline{QN}=2r-4$이므로
$\overline{DH}^2=\overline{CD}^2-\overline{HC}^2=16r-16$　······ ㉠
점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 R이라 하면
$\overline{BR}=\overline{HC}=2r-4$, $\overline{RH}=4$이므로
$\overline{BC}=\overline{BR}+\overline{RH}+\overline{HC}=(2r-4)+4+(2r-4)=4r-4$　······ ㉡
㉠, ㉡에서
$S^2=\left\{\frac{1}{2}\times(\overline{BC}+\overline{AD})\times\overline{DH}\right\}^2=\frac{1}{4}\times(\overline{BC}+\overline{AD})^2\times\overline{DH}^2$
$=\frac{1}{4}\times\{(4r-4)+4\}^2\times(16r-16)=64r^2(r-1)$
$l=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{AD}=2r+(4r-4)+2r+4=8r$
$S^2+8l=6720$에서 $64r^2(r-1)+64r=6720$
$r^3-r^2+r-105=(r-5)(r^2+4r+21)=0$
$\therefore r=5$ 또는 $r^2+4r+21=0$
이때 이차방정식 $r^2+4r+21=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=2^2-21=-17<0$이므로 방정식 $r^2+4r+21=0$을 만족시키는 실수 r이 존재하지 않는다.
따라서 $r=5$이고, $\overline{BD}^2=\overline{BH}^2+\overline{DH}^2=100+64=164$

536 ······ 답 ④

방정식 $(x-p)(x-q)(x-r)=14$의 한 근이 정수 α이므로
$(\alpha-p)(\alpha-q)(\alpha-r)=14$
p, q, r이 정수이므로 $\alpha-p$, $\alpha-q$, $\alpha-r$도 정수이고,
$p<q<r$이므로 $\alpha-p>\alpha-q>\alpha-r$이다.　······ ㉠
이때 세 정수를 곱해서 14가 되는 경우를 다음과 같이 나누어 보자.
(i) $1\times2\times7$인 경우
$\alpha-p=7$, $\alpha-q=2$, $\alpha-r=1$ ($\because$ ㉠)이고, 변끼리 더하면
$3\alpha-p-q-r=10$, $3\alpha=p+q+r+10$
$\therefore \alpha=\frac{p+q+r+10}{3}$
(ii) $(-1)\times(-2)\times7$인 경우
$\alpha-p=7$, $\alpha-q=-1$, $\alpha-r=-2$ ($\because$ ㉠)이고, 변끼리 더하면
$3\alpha-p-q-r=4$, $3\alpha=p+q+r+4$
$\therefore \alpha=\frac{p+q+r+4}{3}$

(iii) $(-1)\times 2\times(-7)$인 경우

$\alpha-p=2$, $\alpha-q=-1$, $\alpha-r=-7$ ($\because$ ㉠)이고, 변끼리 더하면

$3\alpha-p-q-r=-6$, $3\alpha=p+q+r-6$

$\therefore \alpha=\dfrac{p+q+r-6}{3}$

(iv) $1\times(-2)\times(-7)$인 경우

$\alpha-p=1$, $\alpha-q=-2$, $\alpha-r=-7$ ($\because$ ㉠)이고, 변끼리 더하면

$3\alpha-p-q-r=-8$, $3\alpha=p+q+r-8$

$\therefore \alpha=\dfrac{p+q+r-8}{3}$

(v) $1\times(-1)\times(-14)$인 경우

$\alpha-p=1$, $\alpha-q=-1$, $\alpha-r=-14$ ($\because$ ㉠)이고, 변끼리 더하면

$3\alpha-p-q-r=-14$, $3\alpha=p+q+r-14$

$\therefore \alpha=\dfrac{p+q+r-14}{3}$

(i)~(v)에서 α의 값이 될 수 없는 것은 ④이다.

537

답 $-\dfrac{1}{2}$

$x^7=1$에서

$x^7-1=(x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)=0$

이므로 $x=1$ 또는 $x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0$이다.

(i) $x=1$인 경우

$\dfrac{x}{1+x^2}+\dfrac{x^2}{1+x^4}+\dfrac{x^3}{1+x^6}=\dfrac{1}{1+1}+\dfrac{1}{1+1}+\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{3}{2}$

(ii) $x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0$인 경우

$\dfrac{x}{1+x^2}+\dfrac{x^2}{1+x^4}+\dfrac{x^3}{1+x^6}$에서 분자는

$x(1+x^4)(1+x^6)+x^2(1+x^2)(1+x^6)+x^3(1+x^2)(1+x^4)$

$=x+x^5+x^7+x^{11}+x^2+x^4+x^8+x^{10}+x^3+x^5+x^7+x^9$

$=2+2x+2x^2+2x^3+2x^4+2x^5$ ($\because x^7=1$)

$=2(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)$

$=-2x^6$ ($\because x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0$)

이때 분모는

$(1+x^2)(1+x^4)(1+x^6)$

$=(1+x^2+x^4+x^6)(1+x^6)$

$=1+x^2+x^4+2x^6+x^8+x^{10}+x^{12}$

$=(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)+x^6$ ($\because x^7=1$)

$=x^6$ ($\because x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0$)

$\therefore \dfrac{x}{1+x^2}+\dfrac{x^2}{1+x^4}+\dfrac{x^3}{1+x^6}=\dfrac{-2x^6}{x^6}=-2$

(i), (ii)에서 구하는 값의 합은

$\dfrac{3}{2}+(-2)=-\dfrac{1}{2}$

538

답 3

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=1$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3$, $\alpha\beta\gamma=1$ $\cdots\cdots$ ㉠

이때 $f\left(\dfrac{2\beta+2\gamma}{\alpha}\right)=f\left(\dfrac{2\alpha+2\gamma}{\beta}\right)=f\left(\dfrac{2\alpha+2\beta}{\gamma}\right)=0$에서

$\dfrac{2(\beta+\gamma)}{\alpha}=\dfrac{2(1-\alpha)}{\alpha}=\dfrac{2}{\alpha}-2$, $\dfrac{2(\alpha+\gamma)}{\beta}=\dfrac{2(1-\beta)}{\beta}=\dfrac{2}{\beta}-2$

$\dfrac{2(\alpha+\beta)}{\gamma}=\dfrac{2(1-\gamma)}{\gamma}=\dfrac{2}{\gamma}-2$이므로

$f\left(\dfrac{2}{\alpha}-2\right)=f\left(\dfrac{2}{\beta}-2\right)=f\left(\dfrac{2}{\gamma}-2\right)=0$이다.

이를 삼차식 $f(x)=(x+2)^3+p(x+2)^2+q(x+2)+r$에 대입하면

$\left(\dfrac{2}{\alpha}\right)^3+p\left(\dfrac{2}{\alpha}\right)^2+q\left(\dfrac{2}{\alpha}\right)+r=\left(\dfrac{2}{\beta}\right)^3+p\left(\dfrac{2}{\beta}\right)^2+q\left(\dfrac{2}{\beta}\right)+r$

$=\left(\dfrac{2}{\gamma}\right)^3+p\left(\dfrac{2}{\gamma}\right)^2+q\left(\dfrac{2}{\gamma}\right)+r=0$

따라서 방정식 $x^3+px^2+qx+r=0$의 세 근은 $\dfrac{2}{\alpha}$, $\dfrac{2}{\beta}$, $\dfrac{2}{\gamma}$이다.

$\dfrac{2}{\alpha}+\dfrac{2}{\beta}+\dfrac{2}{\gamma}=\dfrac{2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)}{\alpha\beta\gamma}=\dfrac{2\times 3}{1}=6$ ($\because$ ㉠)이므로

$-p=6$에서 $p=-6$

$\dfrac{2}{\alpha}\times\dfrac{2}{\beta}+\dfrac{2}{\beta}\times\dfrac{2}{\gamma}+\dfrac{2}{\gamma}\times\dfrac{2}{\alpha}=\dfrac{4}{\alpha\beta}+\dfrac{4}{\beta\gamma}+\dfrac{4}{\gamma\alpha}$

$=\dfrac{4(\alpha+\beta+\gamma)}{\alpha\beta\gamma}$

$=\dfrac{4\times 1}{1}=4$

이므로 $q=4$

$\dfrac{2}{\alpha}\times\dfrac{2}{\beta}\times\dfrac{2}{\gamma}=\dfrac{8}{\alpha\beta\gamma}=\dfrac{8}{1}=8$이므로

$-r=8$에서 $r=-8$

$\therefore \dfrac{pq}{r}=\dfrac{(-6)\times 4}{-8}=3$

다른 풀이

본풀이에서 방정식 $x^3+px^2+qx+r=0$의 세 근은

$\dfrac{2}{\alpha}$, $\dfrac{2}{\beta}$, $\dfrac{2}{\gamma}$이다.

방정식 $x^3-x^2+3x-1=0$의 세 근은 α, β, γ이므로

방정식 $-x^3+3x^2-x+1=0$, 즉

$x^3-3x^2+x-1=0$의 세 근은 $\dfrac{1}{\alpha}$, $\dfrac{1}{\beta}$, $\dfrac{1}{\gamma}$이다.

따라서 $\left(\dfrac{x}{2}\right)^3-3\left(\dfrac{x}{2}\right)^2+\dfrac{x}{2}-1=0$, 즉

$x^3-6x^2+4x-8=0$의 세 근은 $\dfrac{2}{\alpha}$, $\dfrac{2}{\beta}$, $\dfrac{2}{\gamma}$이다.

$\dfrac{pq}{r}=\dfrac{(-6)\times 4}{-8}=3$

04 여러 가지 부등식

539 ········ 답 3

$|3x-1|<5$에서 $-5<3x-1<5$

$-4<3x<6 \qquad \therefore -\frac{4}{3}<x<2$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x는

-1, 0, 1의 3개이다.

540 ········ 답 $x\le\frac{a+b}{2}$

$a<b$이므로 $|x-a|\le|x-b|$에서 x의 값의 범위에 따라 경우를 나누면 다음과 같다.

(i) $x<a$일 때

$-(x-a)\le-(x-b)$, $a\le b$이므로 부등식이 성립한다.

(ii) $a\le x<b$일 때

$x-a\le-(x-b)$, $2x\le a+b$, $x\le\frac{a+b}{2}$이므로

만족시키는 x의 값의 범위는 $a\le x\le\frac{a+b}{2}$이다.

(iii) $x\ge b$

$x-a\le x-b$, $a\ge b$이므로 부등식을 만족시키는 x의 값이 존재하지 않는다.

(i)~(iii)에서 부등식의 해는 $x\le\frac{a+b}{2}$이다.

541 ········ 답 ④

$|ax-b|\le3$에서 $-3\le ax-b\le3$

$-3+b\le ax\le3+b$

$\therefore \frac{-3+b}{a}\le x\le\frac{3+b}{a}$ ($\because a>0$)

이때 해가 $-1\le x\le2$이므로

$\frac{-3+b}{a}=-1$, $\frac{3+b}{a}=2$

에서 $a+b=3$, $2a-b=3$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=1$

$\therefore a-b=1$

542 ········ 답 ④

절댓값 기호 안의 식의 부호에 따라 경우를 나누면 다음과 같다.

(i) $x<-1$인 경우

$-(x+1)-(x-2)<9$, $2x>-8$에서 $x>-4$

이므로 x의 값의 범위는 $-4<x<-1$

(ii) $-1\le x<2$인 경우

$x+1-(x-2)=3<9$이므로

$-1\le x<2$에서 주어진 부등식을 항상 만족시킨다.

(iii) $x\ge2$인 경우

$x+1+x-2<9$, $2x<10$에서 $x<5$

이므로 x의 값의 범위는 $2\le x<5$

(i)~(iii)에서 부등식을 만족시키는 x의 값의 범위는

$-4<x<5$이므로 정수 x는 -3, -2, -1, $\cdots$, 4의 8개이다.

543 ········ 답 ①

ㄱ. $a<b$에서 양변에 각각 c를 더해도 부등식이 성립하므로

$a+c<b+c$ (참)

ㄴ. $a=-1$, $b=2$인 경우

$ab=-2\ne0$이고 $a<b$이지만 $-1<\frac{1}{2}$이므로 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$이다. (거짓) ······ TIP 1

ㄷ. $a=1$, $b=-3$인 경우

$1^2<(-3)^2$이므로 $a^2<b^2$이지만 $a>b$이다. (거짓) ······ TIP 2

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

TIP 1

'$a<b$이면 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$이다.'가 항상 성립하기 위해서는 두 실수 a, b의 부호가 서로 같으면 된다.

즉, $ab>0$이고 $a<b$이면 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$이다.

TIP 2

a, b가 모두 양수일 때 $a^2<b^2$이면 $a<b$이다.

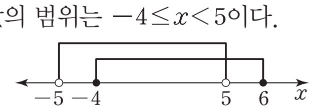
a, b가 모두 음수일 때 $a^2<b^2$이면 $a>b$이다.

544 ········ 답 9

$-11<2x-1<9$에서 $-10<2x<10$이므로 $-5<x<5$

연립부등식 $\begin{cases}-4\le x\le6\\-11<2x-1<9\end{cases}$, 즉 $\begin{cases}-4\le x\le6\\-5<x<5\end{cases}$를 동시에

만족시키는 x의 값의 범위는 $-4\le x<5$이다.



따라서 주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x는

-4, -3, -2, $\cdots$, 3, 4의 9개이다.

545 ········ 답 5

$-15<2x-3<x+8$에서

(i) $-15<2x-3$인 경우

$2x>-12$에서 $x>-6$

(ii) $2x-3<x+8$인 경우

$x<11$

(i), (ii)에서 주어진 연립부등식의 해는 $-6<x<11$이다.

따라서 $p=-6$, $q=11$이므로 $p+q=(-6)+11=5$

546 ········ 답 ④

① $x^2+4x+5>0$에서 $(x+2)^2+1>0$이므로 모든 실수 x에 대하여 $x^2+4x+5>0$이 성립한다. (참)

② $x^2+2x-8\le0$에서 $(x+4)(x-2)\le0$이므로

$-4\le x\le2$ (참)

③ $x^2+6x+10\le 0$에서 $(x+3)^2+1\le 0$

이때 모든 실수 x에 대하여 $x^2+6x+10>0$이므로 해는 없다. (참)

④ $-x^2+4x-4<0$의 양변에 -1을 곱하면

$x^2-4x+4>0$, $(x-2)^2>0$

따라서 해는 $x\ne 2$인 모든 실수이다. (거짓)

⑤ $3x^2-x-2>0$에서 $(3x+2)(x-1)>0$이므로

$x<-\dfrac{2}{3}$ 또는 $x>1$ (참)

따라서 해를 잘못 구한 것은 ④이다.

547

답 ③

이차항의 계수가 1이고, 해가 $-\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{7}{3}$인 이차부등식은

$\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\left(x-\dfrac{7}{3}\right)<0$

주어진 부등식에서 이차항의 계수가 6이므로 양변에 6을 곱하면

$6\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\left(x-\dfrac{7}{3}\right)<0$, $(2x+1)(3x-7)<0$

$\therefore\ 6x^2-11x-7<0$

따라서 $a=11$, $b=-7$이므로

$a+b=11+(-7)=4$

548

답 ②

이차부등식 $x^2+(a+1)x+a\ge 0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면 이차함수 $y=x^2+(a+1)x+a$의 그래프가 x축과 한 점에서 만나거나 x축과 만나지 않아야 한다.

방정식 $x^2+(a+1)x+a=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(a+1)^2-4a\le 0$, $a^2-2a+1\le 0$, $(a-1)^2\le 0$

따라서 구하는 실수 a의 값은 1이다.

다른 풀이

이차부등식 $x^2+(a+1)x+a\ge 0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면 이차함수 $y=x^2+(a+1)x+a$의 그래프가 x축과 한 점에서 만나거나 x축과 만나지 않아야 한다.

함수 $y=x^2+(a+1)x+a=(x+1)(x+a)$에서 이차함수의 그래프가 점 $(-1,\ 0)$을 반드시 지나므로 x축과 점 $(-1,\ 0)$에서 접해야 한다.

따라서 구하는 실수 a의 값은 1이다.

549

답 ③

이차부등식 $f(x)>0$의 해가 $-3<x<1$이므로 이차식 $f(x)$의 최고차항의 계수는 음수이고 방정식 $f(x)=0$의 두 근이 $x=-3$, $x=1$이다.

$f(x)=a(x+3)(x-1)\ (a<0)$

부등식 $f(2x-1)\ge f(2)$에서

$a\{(2x-1)+3\}\{(2x-1)-1\}\ge a\times 5\times 1$

$(2x+2)(2x-2)\le 5\ (\because a<0)$, $4x^2-9\le 0$,

$(2x+3)(2x-3)\le 0$에서 $-\dfrac{3}{2}\le x\le\dfrac{3}{2}$

따라서 부등식을 만족시키는 정수 x는 -1, 0, 1의 3개이다.

550

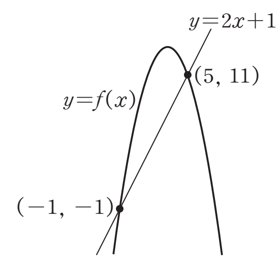
답 $-1\le x\le 5$

이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2x+1$이 만나는 두 점의 y좌표가 각각 -1, 11이므로 $y=2x+1$에

$y=-1$을 대입하면 $-1=2x+1$에서 $x=-1$

$y=11$을 대입하면 $11=2x+1$에서 $x=5$

즉, 두 교점의 좌표는 $(-1,\ -1)$, $(5,\ 11)$이고, 그래프는 다음 그림과 같다.



부등식 $f(x)-2x-1\ge 0$, 즉 $f(x)\ge 2x+1$을 만족시키려면 함수 $y=f(x)$의 함숫값이 함수 $y=2x+1$의 함숫값보다 크거나 같도록 하는 x의 값의 범위를 구하면 되므로 $-1\le x\le 5$이다.

551

답 ①

함수 $y=f(x)$의 그래프의 x절편이 -6, 2이므로 방정식 $f(x)=0$의 두 실근이 각각 -6, 2이다.

$f(x)=a(x+6)(x-2)\ (a>0)$ ...... ㉠

이때 함수 $f(x)$의 그래프의 y절편이 -12이므로

㉠에 $x=0$, $y=-12$를 대입하면

$-12=-12a$에서 $a=1$

즉, $f(x)=(x+6)(x-2)$이므로 부등식 $f(x)+7\ge 0$에서

$(x+6)(x-2)+7\ge 0$, $x^2+4x-5\ge 0$

$(x+5)(x-1)\ge 0$

$\therefore\ x\le -5$ 또는 $x\ge 1$

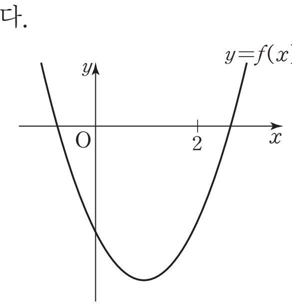
552

답 $\dfrac{5}{7}\le k\le 3$

$-2x^2+4kx-k+3>0$에서 $2x^2-4kx+k-3<0$

$f(x)=2x^2-4kx+k-3$이라 하면 $0<x<2$인 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)<0$을 만족시켜야 한다.

함수 $y=f(x)$의 그래프는 아래로 볼록하므로 $f(0)\le 0$, $f(2)\le 0$이어야 한다.



$f(0)=k-3\le 0$에서 $k\le 3$ ...... ㉠

$f(2)=8-8k+k-3\le 0$, $7k\ge 5$에서 $k\ge\dfrac{5}{7}$ ...... ㉡

따라서 ㉠, ㉡에서 구하는 실수 k의 값의 범위는

$\dfrac{5}{7}\le k\le 3$

553

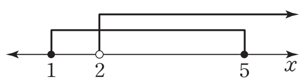
답 (1) $2<x\le5$　(2) $2\le x<3$

(1) $\begin{cases} 2x-3>1 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-6x+5\le0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $2x>4$이므로 $x>2$

㉡에서 $(x-1)(x-5)\le0$이므로 $1\le x\le5$

각각의 범위를 수직선에 나타내면 다음 그림과 같다.



따라서 주어진 부등식의 해는 $2<x\le5$이다.

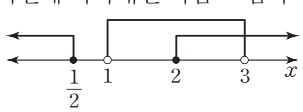
(2) $\begin{cases} x^2+3<4x & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x^2-5x+2\ge0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x^2-4x+3<0$, $(x-1)(x-3)<0$이므로 $1<x<3$

㉡에서 $2x^2-5x+2\ge0$, $(2x-1)(x-2)\ge0$이므로

$x\le\frac{1}{2}$ 또는 $x\ge2$

각각의 범위를 수직선에 나타내면 다음 그림과 같다.



따라서 주어진 부등식의 해는 $2\le x<3$이다.

554

답 4

$x+2<x^2$에서

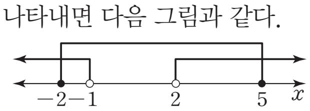
$x^2-x-2>0$, $(x+1)(x-2)>0$이므로

$x<-1$ 또는 $x>2$ $\cdots\cdots$ ㉠

$x^2\le3x+10$에서

$x^2-3x-10\le0$, $(x+2)(x-5)\le0$이므로 $-2\le x\le5$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 수직선에 나타내면 다음 그림과 같다.



따라서 부등식의 해는 $-2\le x<-1$ 또는 $2<x\le5$이므로

정수 x는 -2, 3, 4, 5의 4개이다.

555

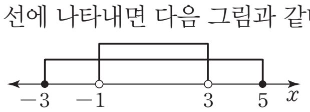
답 ③

$\begin{cases} |x-1|\le4 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-2x-3<0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $-4\le x-1\le4$이므로 $-3\le x\le5$

㉡에서 $x^2-2x-3<0$, $(x+1)(x-3)<0$이므로 $-1<x<3$

각각의 범위를 수직선에 나타내면 다음 그림과 같다.



따라서 부등식의 해는 $-1<x<3$이므로

정수 x는 0, 1, 2의 3개이다.

556

답 ⑤

$x^2+6\le2x^2+x<x^2-2x+4$에서

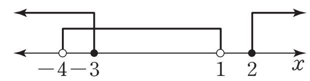
(i) $x^2+6\le2x^2+x$일 때

$x^2+x-6\ge0$, $(x+3)(x-2)\ge0$, $x\le-3$ 또는 $x\ge2$

(ii) $2x^2+x<x^2-2x+4$

$x^2+3x-4<0$, $(x+4)(x-1)<0$, $-4<x<1$

(i), (ii)에서 각각의 범위를 수직선에 나타내면 다음과 같다.



따라서 연립부등식의 해는 $-4<x\le-3$이다.

557

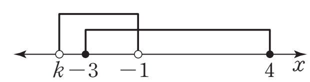
답 ③

$\begin{cases} x^2-x-12\le0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+(1-k)x-k<0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(x+3)(x-4)\le0$이므로 $-3\le x\le4$

㉡에서 $(x+1)(x-k)<0$

이때 연립부등식의 해가 $-3\le x<-1$이어야 하므로 조건을 만족시키는 경우를 수직선에 나타내면 다음 그림과 같다.



따라서 구하는 실수 k의 값의 범위는 $k<-3$이다.

558

답 ①

방정식 $x^2+(a-2)x+4=0$이 실근을 가져야 하므로

이 방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(a-2)^2-16\ge0$, $a^2-4a-12\ge0$

$(a+2)(a-6)\ge0$이므로 $a\le-2$ 또는 $a\ge6$ $\cdots\cdots$ ㉠

이때 이 방정식의 두 근이 모두 양수이므로

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-(a-2)>0$　$\therefore a<2$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 실수 a의 값의 범위는 $a\le-2$이다.

559

답 $k<-\frac{1}{4}$

이차방정식 $x^2-4kx-4k-1=0$이 실근을 가져야 하므로 판별식 D에 대하여 $D\ge0$이어야 한다.

이때 두 근을 각각 α, β라 하면 $\alpha+\beta<0$, $\alpha\beta>0$을 만족시켜야 한다.

(i) $\frac{D}{4}=4k^2-(-4k-1)=(2k+1)^2\ge0$에서

모든 실수 k에 대하여 $(2k+1)^2\ge0$이 성립한다. $\cdots\cdots$ TIP

(ii) $\alpha+\beta=4k<0$, $\alpha\beta=-4k-1>0$에서

$k<0$, $k<-\frac{1}{4}$이므로 $k<-\frac{1}{4}$이다.

따라서 (i), (ii)에 의하여 실수 k의 값의 범위는 $k<-\frac{1}{4}$이다.

TIP

모든 실수는 제곱하면 항상 0보다 크거나 같다.
k가 실수이면 $2k+1$도 실수이므로
모든 실수 k에 대하여 $(2k+1)^2\ge0$이다.

560 ······ 답 ④

방정식의 두 근을 α, β라 할 때,
주어진 조건에서 두 근의 합과 곱이 모두 음수가 되어야 하므로 ······ TIP

$k^2-4k+3=(k-1)(k-3)<0$에서

$1<k<3$ ······ ㉠

$-k+2<0$에서 $k>2$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 실수 k의 값의 범위는 $2<k<3$

TIP

이 문제에서 판별식 조건을 생각해 줄 필요가 없다.
왜냐하면 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근의 곱이 음수이면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\frac{c}{a}<0$, 즉 $ac<0$이다.
이때 주어진 방정식의 판별식을 D라 하면 $D=b^2-4ac$에서 $b^2\ge0$이고 $-4ac>0$이므로 항상 $D>0$을 만족시킨다.
따라서 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 두 근의 곱이 음수인 것을 보이면 반드시 서로 다른 두 실근을 가지므로 판별식 조건을 따로 풀이해 주지 않아도 된다.

561 ······ 답 ②

물체를 위쪽으로 던지고 t초 후의 지면으로부터 이 물체의 높이가 $-5t^2+15t+50$이므로 물체의 지면으로부터의 높이가 건물의 높이보다 낮으려면 $0<-5t^2+15t+50<50$, 즉 $0<-t^2+3t+10<10$을 만족시켜야 한다.

(i) $0<-t^2+3t+10$인 경우

$t^2-3t-10=(t+2)(t-5)\le0$

$\therefore 0<t<5\ (\because t>0)$

(ii) $-t^2+3t+10<10$인 경우

$t^2-3t=t(t-3)>0$

$\therefore t>3\ (\because t>0)$

(i), (ii)에서 이 물체가 움직이면서 지면으로부터의 높이가 건물의 높이보다 낮은 시간은 $3<t<5$에서 2초 동안이다.

562 ······ 답 ②

부등식 $|2-3x|+|x-4|\ge14$에서

(i) $x<\frac{2}{3}$일 때

$$|2-3x|+|x-4|=2-3x-(x-4)$$
$$=-4x+6\ge14$$

이므로 $x\le-2$

(ii) $\frac{2}{3}\le x<4$일 때

$$|2-3x|+|x-4|=-(2-3x)-(x-4)$$
$$=2x+2\ge14$$

이므로 $x\ge6$에서 조건을 만족시키는 실수 x의 값이 존재하지 않는다.

(iii) $x\ge4$일 때

$$|2-3x|+|x-4|=-(2-3x)+(x-4)$$
$$=4x-6\ge14$$

이므로 $x\ge5$

(i)~(iii)에서 주어진 부등식의 해는

$x\le-2$ 또는 $x\ge5$

563 ······ 답 ⑤

이차방정식 $ax^2+b=0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로
주어진 방정식의 판별식을 D라 하면

$D=-4ab>0$, 즉 $ab<0$

또한 $|ax+4|\ge b$에서 부등식의 해가

$x\ge6$ 또는 $x\le-2$이므로 $a<0$이고 $b>0$이다. ······ TIP

$|ax+4|\ge b$에서 $ax+4\le-b$ 또는 $ax+4\ge b$

$x\ge-\frac{b}{a}-\frac{4}{a}$ 또는 $x\le\frac{b}{a}-\frac{4}{a}$

$$\begin{cases} -\frac{b}{a}-\frac{4}{a}=6 & \cdots\cdots ㉠ \\ \frac{b}{a}-\frac{4}{a}=-2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠+㉡에서 $-\frac{8}{a}=4$ $\quad\therefore a=-2$

이를 ㉠에 대입하면 $\frac{b}{2}=4$ $\quad\therefore b=8$

$\therefore a+b=-2+8=6$

TIP

절댓값의 성질에 의하여 실수 x의 값에 관계없이 $|ax+4|\ge0$이므로 만약 $b\le0$이면 부등식 $|ax+4|\ge b$는 모든 실수 x에 대하여 성립한다.
즉, 해가 모든 실수가 되므로 문제에서 주어진 해를 만족시키지 못한다.

564 ······ 답 ①

주어진 조건에서

$|x-(-2)|+|x-5|\ge9$

$|x+2|+|x-5|\ge9$

이므로 범위를 나누어서 풀이하면 다음과 같다.

(i) $x<-2$인 경우

$-(x+2)-(x-5)\ge9$, $-2x\ge6$

이므로 $x\le-3$

(ii) $-2\le x<5$인 경우

$(x+2)-(x-5)\ge9$, $7\ge9$

이므로 조건을 만족시키는 실수 x가 존재하지 않는다.

(iii) $x\ge5$인 경우

$(x+2)+(x-5)\ge9$, $2x\ge12$

이므로 $x\ge6$

(i)~(iii)에서 구하는 실수 x의 값의 범위는

$x\le-3$ 또는 $x\ge6$

565 ······ 답 ④

ㄱ. $a<b$이고 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$이면 $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}<0$, $\frac{b-a}{ab}<0$

이때 $a<b$에서 $b-a>0$이므로 $ab<0$

$\therefore$ $a<0$, $b>0$ (참)

ㄴ. $a^2+2ab>3b^2$에서 $a^2+2ab-3b^2=(a+3b)(a-b)$이고,

$0<a<b$에서 $a+3b>0$, $a-b<0$이므로 $(a+3b)(a-b)<0$

$\therefore$ $a^2+2ab<3b^2$ (거짓)

ㄷ. $a+\frac{1}{a}>b+\frac{1}{b}$에서

$$a-b+\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=a-b+\frac{b-a}{ab}$$
$$=(a-b)\left(1-\frac{1}{ab}\right)$$
$$=(a-b)\times\frac{ab-1}{ab}$$

이때 $0<a<b<1$에서 $a-b<0$, $ab>0$, $ab-1<0$이므로

$(a-b)\times\frac{ab-1}{ab}>0$ (참)

ㄹ. $a\ge0$, $b\ge0$이면 $|a|-|b|=a-b$이므로

$|a-b|\ge|a|-|b|$가 항상 성립한다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ의 3개이다.

566 ······ 답 ③

$|x+1|+|x-3|\le k$에서 $f(x)=|x+1|+|x-3|$이라 하면

(i) $x<-1$일 때

$f(x)=-(x+1)-(x-3)=-2x+2$

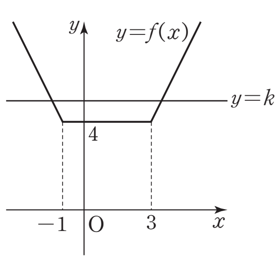
(ii) $-1\le x<3$일 때

$f(x)=(x+1)-(x-3)=4$

(iii) $x\ge3$일 때

$f(x)=(x+1)+(x-3)=2x-2$

(i)~(iii)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 부등식 $|x+1|+|x-3|\le k$의 해가 존재하려면

$k\ge4$이어야 한다.

따라서 실수 k의 최솟값은 4이다.

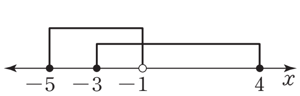
567 ······ 답 2

조건 (가)에서 $x-4\le0$, $-3-x\le0$이므로

$-3\le x\le4$ ······ ㉠

조건 (나)에서 $x+5\ge0$, $x+1<0$이므로

$-5\le x<-1$ ······ ㉡



㉠, ㉡에서 x의 값의 범위는 $-3\le x<-1$이므로

정수 x는 -3, -2의 2개이다.

568 ······ 답 ③

$x-1<|x+3|\le|x-5|$에서

(i) $x<-3$일 때

$x-1<-(x+3)\le-(x-5)$

$x-1<-(x+3)$에서 $2x<-2$, $x<-1$

$-(x+3)\le-(x-5)$에서 $-3\le5$이므로 부등식을 만족시킨다.

$\therefore$ $x<-3$

(ii) $-3\le x<5$일 때

$x-1<x+3\le-(x-5)$

$x-1<x+3$에서 $-1<3$이므로 부등식을 만족시킨다.

$x+3\le-(x-5)$에서 $2x\le2$, $x\le1$

$\therefore$ $-3\le x\le1$

(iii) $x\ge5$일 때

$x-1<x+3\le x-5$

$x-1<x+3$에서 $-1<3$이므로 부등식을 만족시킨다.

$x+3\le x-5$에서 $3\le-5$이므로 부등식을 만족시키지 않는다.

(i)~(iii)에서 주어진 연립부등식의 해는 $x\le1$이다.

569 ······ 답 $\frac{5}{3}<a\le5$

$4x+a>3x+5>5x-a$에서

(i) $4x+a>3x+5$일 때, $x>5-a$

(ii) $3x+5>5x-a$일 때, $2x<5+a$, $x<\frac{5+a}{2}$

(i), (ii)에서 주어진 연립부등식의 해는 $5-a<x<\frac{5+a}{2}$이다.

이 부등식의 해가 존재하려면

$5-a<\frac{5+a}{2}$에서 $10-2a<5+a$, $3a>5$, $a>\frac{5}{3}$이어야 하고,

해가 모두 양수이려면 $5-a\ge0$에서 $a\le5$이어야 한다.

따라서 구하는 실수 a의 값의 범위는 $\frac{5}{3}<a\le5$이다.

570 ······ 답 5

이차부등식 $ax^2+bx+c>0$의 해가 $x<-\frac{1}{2}$ 또는 $x>\frac{1}{4}$이므로

$a>0$

$ax^2+bx+c>0$의 양변을 각각 a로 나누면

$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}>0$

이차방정식 $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$의 두 근이 $x=-\frac{1}{2}$, $x=\frac{1}{4}$이므로

$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}>0$에서 $\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{4}\right)>0$

$\therefore$ $\frac{b}{a}=\frac{1}{4}$, $\frac{c}{a}=-\frac{1}{8}$ ······ ㉠

부등식 $cx^2+bx+a>0$에서 양변을 각각 a로 나누면

$\frac{c}{a}x^2+\frac{b}{a}x+1>0$에서 $-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{4}x+1>0$ ($\because$ ㉠)

위 식의 양변에 각각 -8을 곱하면

$x^2-2x-8<0$, $(x+2)(x-4)<0$ $\quad\therefore -2<x<4$

따라서 구하는 모든 정수 x의 값의 합은

$(-1)+0+1+2+3=5$

571

답 ③

ㄱ. $x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축 아래쪽에 있으므로

$f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)<0$

$x=\gamma$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축 위쪽에 있으므로

$f(\gamma)>0$

$\therefore f(\gamma)>f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$ (참)

ㄴ. 방정식 $f(x)\{f(x)-g(x)\}=0$에서

$f(x)=0$ 또는 $f(x)-g(x)=0$

방정식 $f(x)=0$의 해는 $x=\alpha$ 또는 $x=\beta$이고,

방정식 $f(x)=g(x)$의 해는 $x=\beta$ 또는 $x=\gamma$이다.

즉, 방정식 $f(x)\{f(x)-g(x)\}=0$은 $x=\beta$를 중근으로 갖고 $x=\alpha$ 또는 $x=\gamma$를 근으로 가지므로 서로 다른 실근의 개수는 3이다. (참)

ㄷ. 부등식 $f(x)<g(x)$의 해는 함수 $y=f(x)$의 그래프보다 함수 $y=g(x)$의 그래프가 더 위쪽에 그려지는 x의 범위이다.

따라서 부등식 $f(x)<g(x)$의 해는 $\gamma<x<\beta$이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

572

답 ③

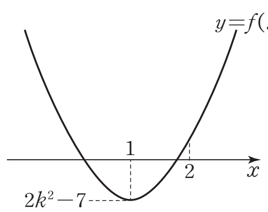
$x^2-6x+8<0$에서 $(x-2)(x-4)<0$이므로

$2<x<4$

$f(x)=x^2-2x+2k^2-6$이라 하면

$f(x)=x^2-2x+2k^2-6=(x-1)^2+2k^2-7$

이므로 $x=1$일 때 최소이고, 그래프는 다음 그림과 같다.



$2<x<4$인 모든 x에 대하여 이차부등식 $x^2-2x+2k^2-6>0$, 즉 $f(x)>0$이 성립하려면 $f(2)\ge0$이어야 하므로

$f(2)=2k^2-6\ge0$, $k^2\ge3$

$\therefore k\ge\sqrt{3}$ 또는 $k\le-\sqrt{3}$

따라서 $\alpha=\sqrt{3}$, $\beta=-\sqrt{3}$이므로

$\alpha\beta=-3$

573

답 ③

$(k+1)x^2+k-2\le x^2-kx$에서

$kx^2+kx+k-2\le0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

(i) $k=0$일 때

㉠에 대입하면 $-2\le0$이므로 부등식을 만족시킨다.

(ii) $k>0$일 때

이차부등식 $kx^2+kx+k-2\le0$을 만족시키는 실수 x의 값이 존재하려면 이차함수 $y=kx^2+kx+k-2$의 그래프가 x축과 적어도 한 점에서 만나야 하므로 방정식 $kx^2+kx+k-2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=k^2-4k(k-2)\ge0$, $3k^2-8k\le0$, $k(3k-8)\le0$

$\therefore 0<k\le\dfrac{8}{3}$

(i), (ii)에서 k의 값의 범위는 $0\le k\le\dfrac{8}{3}$이므로

정수 k는 0, 1, 2의 3개이다.

574

답 ③

부등식 $x^2-2yx+(3y^2+4ay+2)\ge0$이 항상 성립하려면 이차방정식 $x^2-2yx+(3y^2+4ay+2)=0$의 판별식을 D_1이라 할 때, $D_1\le0$이어야 한다.

$\dfrac{D_1}{4}=y^2-(3y^2+4ay+2)\le0$, $2y^2+4ay+2\ge0$

$\therefore y^2+2ay+1\ge0$

이때 위 부등식 $y^2+2ay+1\ge0$이 항상 성립하려면 이차방정식 $y^2+2ay+1=0$의 판별식을 D_2라 할 때, $D_2\le0$이어야 한다.

$\dfrac{D_2}{4}=a^2-1\le0$, $(a-1)(a+1)\le0$

$\therefore -1\le a\le1$

따라서 주어진 부등식이 성립하도록 하는 정수 a는 -1, 0, 1의 3개이다.

다른 풀이

$x^2-2xy+3y^2+4ay+2\ge0$에서 완전제곱식을 이용하면

$(x^2-2xy+y^2)+2(y^2+2ay+1)\ge0$

$(x-y)^2+2(y^2+2ay+1)\ge0$

이고, 두 실수 x, y의 값에 관계없이 $(x-y)^2\ge0$이므로

$y^2+2ay+1\ge0$이 성립하면 된다.

이차방정식 $y^2+2ay+1=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=a^2-1\le0$이므로 $(a+1)(a-1)\le0$

$\therefore -1\le a\le1$

따라서 주어진 부등식이 성립하도록 하는 정수 a는 -1, 0, 1의 3개이다.

575

답 3

이차함수 $y=f(x)$의 그래프에서

부등식 $f(x)<0$의 해는 $x<-1$ 또는 $x>3$이므로

부등식 $f\left(\dfrac{x-a}{2}\right)<0$의 해는

$\dfrac{x-a}{2}<-1$ 또는 $\dfrac{x-a}{2}>3$

즉, $x<a-2$ 또는 $x>a+6$이다.

따라서 $a-2=1$, $a+6=9$이므로

$a=3$이다.

576 ⋯⋯ 답 $2\le m<3$

(i) $m=2$일 때

$1>0$이므로 부등식을 만족시킨다.

(ii) $m\ne2$일 때

부등식 $(m-2)x^2-(2m-4)x+1>0$이 모든 실수 x에 대하여 항상 성립하려면 함수 $y=(m-2)x^2-(2m-4)x+1$의 그래프가 항상 x축 위쪽에 위치해야 한다.

즉, 함수 $y=(m-2)x^2-(2m-4)x+1$의 그래프는 아래로 볼록하면서 x축과 만나지 않아야 하므로

$m-2>0$, 즉 $m>2$이고,

방정식 $(m-2)x^2-(2m-4)x+1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(m-2)^2-(m-2)<0$, $(m-2)\{(m-2)-1\}<0$

$(m-2)(m-3)<0$

$\therefore 2<m<3$

(i), (ii)에서 실수 m의 값의 범위는 $2\le m<3$이다.

577 ⋯⋯ 답 4

부등식 $x^2+2|x-2|\ge4$에서

(i) $x<2$인 경우

$x^2-2(x-2)\ge4$, $x^2-2x\ge0$

$x(x-2)\ge0$에서 $x\le0$ 또는 $x\ge2$

$\therefore x\le0$

(ii) $x\ge2$인 경우

$x^2+2(x-2)\ge4$, $x^2+2x-8\ge0$

$(x+4)(x-2)\ge0$에서 $x\le-4$ 또는 $x\ge2$

$\therefore x\ge2$

(i), (ii)에서 부등식 $x^2+2|x-2|\ge4$의 해는

$x\le0$ 또는 $x\ge2$ ⋯⋯ ㉠

이때 부등식 $x^2+ax+b\ge0$의 해가 ㉠과 같으므로 방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 실근은 0, 2이다.

따라서 $x^2+ax+b=x(x-2)$에서 $a=-2$, $b=0$이므로

$a^2+b^2=4$

578 ⋯⋯ 답 ⑤

조건 (가)에서

$f(x)=\frac{1}{2}(x-p)^2+a$, $g(x)=2(x-p)^2+b$ (a, b는 상수)라 하면

두 이차식 $f(x)$, $g(x)$의 최고차항의 계수가 각각 $\frac{1}{2}$, 2이므로

이차식 $f(x)-g(x)$의 최고차항의 계수는 $\frac{1}{2}-2=-\frac{3}{2}$이고,

조건 (나)에서 부등식 $f(x)-g(x)\ge0$의 해가 $-2\le x\le3$이므로

$f(x)-g(x)=-\frac{3}{2}(x+2)(x-3)$ ⋯⋯ ㉠

즉, $\frac{1}{2}(x-p)^2+a-\{2(x-p)^2+b\}=-\frac{3}{2}(x+2)(x-3)$에서

$-\frac{3}{2}x^2+3px-\frac{3}{2}p^2+a-b=-\frac{3}{2}(x^2-x-6)$

이 식이 x에 대한 항등식이므로 양변의 계수를 비교하면

$3p=\frac{3}{2}$에서 $p=\frac{1}{2}$이다.

$\therefore 4p\times\{f(2)-g(2)\}=4\times\frac{1}{2}\times\left\{-\frac{3}{2}(2+2)(2-3)\right\}$ ($\because$ ㉠)

$=2\times6=12$

579 ⋯⋯ 답 56

부등식 $f(x)\le g(x)$의 해가 $-2\le x\le3$이므로

$f(x)-g(x)=h(x)$라 하면 부등식 $h(x)\le0$의 해가

$-2\le x\le3$이므로 함수 $h(x)$의 최고차항의 계수가 양수이고,

이차방정식 $h(x)=0$의 두 실근은 $x=-2$ 또는 $x=3$이다.

따라서 함수 $h(x)$를 구하면

$h(x)=a(x+2)(x-3)$ $(a>0)$

이때 $f(1)-g(1)=-24$이므로

$h(1)=a\times3\times(-2)=-24$에서 $a=4$

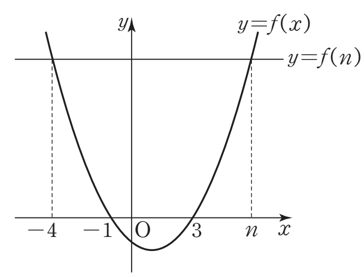
$\therefore h(x)=4(x+2)(x-3)$

$\therefore f(5)-g(5)=h(5)=4\times7\times2=56$

580 ⋯⋯ 답 52

$f(x)=(x-3)(x+1)$이라 하면 $f(n)=(n-3)(n+1)$

함수 $y=f(x)$의 그래프를 나타내면 다음 그림과 같다.



부등식 $(x-3)(x+1)<(n-3)(n+1)$의 해가 $-4<x<n$이므로

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=f(n)$의 두 교점의 x좌표가 -4, n이다.

이때 $(m-3)(m+1)=(n-3)(n+1)$에서 $f(m)=f(n)$이므로

$m=-4$ ($\because m<n$)이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선

$x=\frac{(-1)+3}{2}=1$에 대하여 대칭이므로 $\frac{(-4)+n}{2}=1$에서 $n=6$

$\therefore m^2+n^2=(-4)^2+6^2=52$

581 ⋯⋯ 답 $2\le k<6$

조건 (가)에서

$f(2)=4-2(2k+1)+k^2-14<0$

$k^2-4k-12<0$, $(k-6)(k+2)<0$

$\therefore -2<k<6$ ⋯⋯ ㉠

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프의 축이 $x=\frac{2k+1}{2}$이고, 이 축이 조건

(나)에서 직선 $x=\frac{1+4}{2}=\frac{5}{2}$와 같거나 오른쪽에 존재해야 하므로

$\frac{2k+1}{2}\ge\frac{5}{2}$, $2k+1\ge5$

$\therefore k\ge2$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 구하는 실수 k의 값의 범위는

$2\le k<6$

582 답 $\frac{13}{2}$

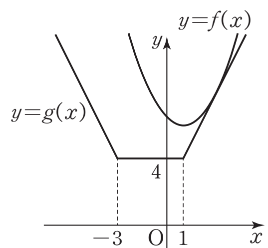
$f(x)=\frac{1}{2}x^2-x+a$, $g(x)=|x+3|+|x-1|$이라 하자.

$f(x)=\frac{1}{2}(x-1)^2+a-\frac{1}{2}$이고,

$x<-3$일 때, $g(x)=-(x+3)-(x-1)=-2x-2$
$-3\le x<1$일 때, $g(x)=(x+3)-(x-1)=4$
$x\ge 1$일 때, $g(x)=(x+3)+(x-1)=2x+2$

이므로 부등식 $\frac{1}{2}x^2-x+a\ge|x+3|+|x-1|$을 만족시키면서

실수 a의 값이 최소일 때는 다음과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프가 $x\ge 1$에서 함수 $y=g(x)$의 그래프에 접할 때이다.



방정식 $\frac{1}{2}x^2-x+a=2x+2$, 즉 $x^2-6x+2a-4=0$의 판별식을

D라 하면

$\frac{D}{4}=(-3)^2-(2a-4)=0$, $2a=13$, $a=\frac{13}{2}$

따라서 구하는 실수 a의 최솟값은 $\frac{13}{2}$이다.

583 답 ④

부등식 $0\le f(x)<g(x)$를 만족시키려면 함수 $f(x)$의 함숫값이 0보다 크거나 같아야 하므로 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축 또는 x축보다 위쪽에 있어야 한다.

즉, 부등식 $f(x)\ge 0$을 만족시키는 범위는

$x\le a$ 또는 $x\ge d$ …… ㉠

또한 $f(x)$의 함숫값보다 $g(x)$의 함숫값이 더 커야 하므로 함수 $y=g(x)$의 그래프가 함수 $y=f(x)$의 그래프보다 더 위쪽에 있어야 한다.

즉, $f(x)<g(x)$를 만족시키는 범위는

$b<x<e$ …… ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 범위는 $d\le x<e$이다.

584 답 ③

$\begin{cases} |x+2|\le 5 & \cdots\cdots ㉠ \\ [x]^2-2[x]-8<0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $-5\le x+2\le 5$ $\quad\therefore -7\le x\le 3$

㉡에서 $([x]+2)([x]-4)<0$, $-2<[x]<4$ $\quad\therefore -1\le x<4$

이를 수직선에 나타내면 다음 그림과 같다.

따라서 구하는 실수 x의 값의 범위는 $-1\le x\le 3$이다.

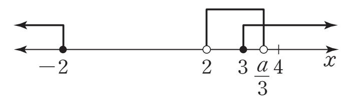
585 답 ④

$\begin{cases} x^2-x-6\ge 0 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x^2-(a+6)x+2a<0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(x+2)(x-3)\ge 0$ $\quad\therefore x\le -2$ 또는 $x\ge 3$

㉡에서 $(3x-a)(x-2)<0$

이므로 주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x가 3뿐인 경우는 다음 그림과 같다.



따라서 부등식 $(3x-a)(x-2)<0$의 해는

$2<x<\frac{a}{3}$이고, $3<\frac{a}{3}\le 4$이다.

따라서 구하는 실수 a의 값의 범위는 $9<a\le 12$이다.

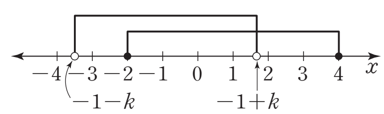
586 답 ⑤

$\begin{cases} x^2-2x-8\le 0 & \cdots\cdots ㉠ \\ |x+1|<k & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(x+2)(x-4)\le 0$ $\quad\therefore -2\le x\le 4$

㉡에서 $-k<x+1<k$ $\quad\therefore -1-k<x<-1+k$

이때 조건을 만족시키도록 수직선에 나타내면 다음 그림과 같아야 한다.



…… TIP

즉, 연립부등식을 만족시키는 정수 x가 -2, -1, 0, 1의 4개로 조건을 만족시키므로

$1<-1+k\le 2$

$\therefore 2<k\le 3$

TIP

부등식 $|x+1|<k$가 해를 가지려면 $k>0$이므로

$-1-k<-1$이다.

따라서 $-1-k<x<-1+k$에 -2, -1, 0, 1을 포함하도록 해야 한다.

587 답 $k\ge 1$

$\begin{cases} 3x-3k>2x-1 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-(k+2)x+2k\le 0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x>3k-1$

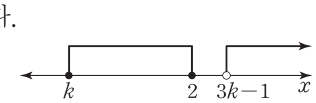
㉡에서 $(x-k)(x-2)\le 0$

이때 $k\le 2$이면 $k\le x\le 2$이고, $k>2$이면 $2\le x\le k$

따라서 연립부등식의 해가 존재하지 않는 경우는 다음과 같다.

(i) $k\le 2$일 때

㉠, ㉡에서 각각의 부등식의 해가 $x>3k-1$, $k\le x\le 2$이므로 연립부등식의 해가 존재하지 않는 경우를 수직선에 나타내면 다음 그림과 같다.

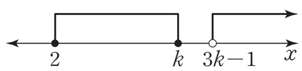


따라서 $2 \le 3k-1$, 즉 $k \ge 1$이므로 실수 k의 값의 범위는

$1 \le k \le 2$이다.

(ii) $k>2$일 때

㉠, ㉡에서 각각의 부등식의 해가 $x>3k-1$, $2 \le x \le k$이므로 연립부등식의 해가 존재하지 않는 경우를 수직선에 나타내면 다음 그림과 같다.



따라서 $k \le 3k-1$, 즉 $k \ge \frac{1}{2}$이므로 실수 k의 값의 범위는

$k>2$이다.

(i), (ii)에서 실수 k의 값의 범위는 $k \ge 1$이다.

588

답 ⑤

연립부등식 $\begin{cases} -3x^2+4x \le a \\ |2x-a| \ge 3-b \end{cases}$의 해가 모든 실수가 되려면 각각의 부등식의 해가 모든 실수이어야 한다.

(i) $-3x^2+4x \le a$의 해가 모든 실수일 때

$3x^2-4x+a \ge 0$에서 이차함수 $y=3x^2-4x+a$의 그래프가 x축과 만나거나 위쪽에 위치해야 하므로 이차방정식 $3x^2-4x+a=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-3a \le 0$, $3a \ge 4$ $\qquad \therefore a \ge \frac{4}{3}$

(ii) $|2x-a| \ge 3-b$의 해가 모든 실수일 때

좌변의 $|2x-a|$는 x의 값에 관계없이 항상 0보다 크거나 같으므로 부등식의 해가 모든 실수이려면 $3-b \le 0$이어야 한다.

$\therefore b \ge 3$

(i), (ii)에서 $a \ge \frac{4}{3}$, $b \ge 3$이므로 두 정수 a, b에 대하여

$a+b$의 최솟값은 $2+3=5$

589

답 ③

$\begin{cases} x^2-3x-4 \ge 0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-2(k+1)x+(k+3)(k-1) \le 0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(x-4)(x+1) \ge 0$

$\therefore x \ge 4$ 또는 $x \le -1$

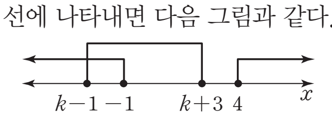
㉡에서 $x^2-2(k+1)x+(k+3)(k-1) \le 0$

$\{x-(k+3)\}\{x-(k-1)\} \le 0$

$\therefore k-1 \le x \le k+3$

(i) $k-1<-1$인 경우

$k<0$이고, 연립부등식의 해는 $k-1 \le x \le -1$이므로 정수 x가 2개인 때를 수직선에 나타내면 다음 그림과 같다.



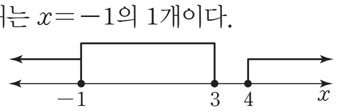
부등식을 만족시키는 정수인 x가 2개이려면

$k-1=-2$에서 $k=-1$

(ii) $k-1=-1$ 또는 $k+3=4$인 경우

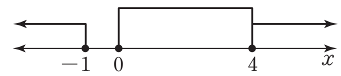
$k-1=-1$, 즉 $k=0$일 때

연립부등식의 해는 $x=-1$의 1개이다.



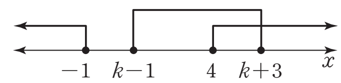
$k+3=4$, 즉 $k=1$일 때

연립부등식의 해는 $x=4$의 1개이다.



(iii) $k+3>4$, 즉 $k>1$인 경우

$k>1$이고, 연립부등식의 해는 $4 \le x \le k+3$이므로 정수 x가 2개인 때를 수직선에 나타내면 다음 그림과 같다.



부등식을 만족시키는 정수인 x가 2개이려면

$k+3=5$에서 $k=2$

(i)~(iii)에서 조건을 만족시키는 모든 정수 k의 값의 합은

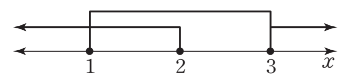
$(-1)+2=1$

590

답 2

연립부등식 $\begin{cases} x^2+ax+b \ge 0 \\ x^2+cx+d \le 0 \end{cases}$의 해가 $x=3$ 또는 $1 \le x \le 2$이므로

각각의 부등식이 나타내는 범위가 다음과 같아야 한다.



따라서 부등식 $x^2+ax+b \ge 0$의 해는

$x \le 2$ 또는 $x \ge 3$ $\qquad \cdots\cdots ㉠$

부등식 $x^2+cx+d \le 0$의 해는

$1 \le x \le 3$ $\qquad \cdots\cdots ㉡$

㉠에서 방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 실근이 $x=2$ 또는 $x=3$이므로

$x^2+ax+b=(x-2)(x-3)=x^2-5x+6$

$\therefore a=-5$, $b=6$

㉡에서 방정식 $x^2+cx+d=0$의 두 실근이 $x=1$ 또는 $x=3$이므로

$x^2+cx+d=(x-1)(x-3)=x^2-4x+3$

$\therefore c=-4$, $d=3$

$\therefore (a+b)-(c+d)=\{(-5)+6\}-\{(-4)+3\}=2$

591

답 5

$f(x)=-x^2+5x-2$, $g(x)=x^2-3x+6$이라 하면

방정식 $f(x)=g(x)$는

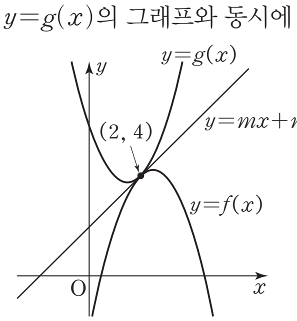
$-x^2+5x-2=x^2-3x+6$에서

$2x^2-8x+8=0$, $2(x-2)^2=0$

이므로 $x=2$를 중근으로 갖는다. 즉 $f(2)=g(2)=4$이므로

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 점 $(2, 4)$에서 서로 접한다.

모든 실수 x에 대하여 부등식 $-x^2+5x-2 \le mx+n \le x^2-3x+6$이 성립하려면 다음 그림과 같이 직선 $y=mx+n$이 점 $(2, 4)$에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프와 동시에 접해야 한다.



$y=mx+n$에 $x=2$, $y=4$를 대입하면

$4=2m+n$, $n=4-2m$ ...... ㉠

함수 $f(x)=-x^2+5x-2$와 직선 $y=mx+4-2m$이 접하므로

이차방정식 $-x^2+5x-2=mx+4-2m$, 즉

$x^2+(m-5)x+6-2m=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(m-5)^2-4(6-2m)=0$, $m^2-2m+1=0$, $(m-1)^2=0$

따라서 $m=1$이고 $n=2$ (∵ ㉠)이다.

$\therefore m^2+n^2=1^2+2^2=5$

592

답 ①

이차방정식 $kx^2+4x-5k=0$의 두 근을 α, β라 하고,

판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4+5k^2>0$

이므로 0이 아닌 모든 실수 k에 대하여 주어진 방정식이 항상 서로 다른 두 실근을 갖는다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\frac{4}{k}$, $\alpha\beta=-5$

이고, $|\alpha-\beta|\le 6$이므로

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=\frac{16}{k^2}+20\le 36$

$\frac{16}{k^2}\le 16$, $\frac{1}{k^2}\le 1$

$k^2-1\ge 0$, $(k+1)(k-1)\ge 0$

$\therefore k\le -1$ 또는 $k\ge 1$

593

답 풀이 참조

주어진 방정식이 실근을 가져야 하므로 이 방정식의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=(2k-a)^2-(k^2+4k-a)\ge 0$

$4k^2-4ak+a^2-(k^2+4k-a)\ge 0$

$3k^2-2(2a+2)k+a^2+a\ge 0$

이때 모든 실수 k에 대하여 이 부등식이 항상 성립해야 하므로 방정식 $3k^2-2(2a+2)k+a^2+a=0$이 허근 또는 중근을 가져야 한다. 이 방정식의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=(2a+2)^2-3(a^2+a)\le 0$

$4a^2+8a+4-3(a^2+a)\le 0$

$a^2+5a+4\le 0$, $(a+4)(a+1)\le 0$

따라서 구하는 실수 a의 값의 범위는

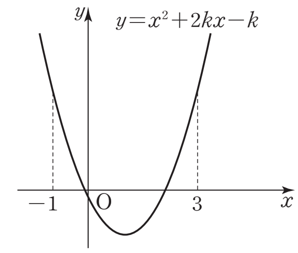
$-4\le a\le -1$

채점 요소	배점
주어진 방정식의 판별식 조건으로 부등식 세우기	40%
실수 k의 값에 관계없이 부등식이 성립하도록 하는 판별식 조건으로 부등식 세우기	40%
실수 a의 값의 범위 구하기	20%

594

답 ⑤

$f(x)=x^2+2kx-k$라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을 α, β $(\alpha<\beta)$라 할 때, $-1<\alpha<\beta<3$이어야 하므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같다.



즉, $f(x)=(x+k)^2-k^2-k$에서 이차함수의 그래프의 축이 두 직선 $x=-1$, $x=3$ 사이에 있어야 한다.

또한 $f(-k)<0$이고, $f(-1)>0$, $f(3)>0$이어야 한다.

(i) $-1<-k<3$

$-3<k<1$

(ii) $f(-k)<0$

$-k^2-k<0$, $k(k+1)>0$ $\therefore k>0$ 또는 $k<-1$

(iii) $f(-1)>0$, $f(3)>0$

$1-2k-k>0$, $9+6k-k>0$에서 $k<\frac{1}{3}$, $k>-\frac{9}{5}$

$\therefore -\frac{9}{5}<k<\frac{1}{3}$

(i), (ii), (iii)을 모두 만족시키는 실수 k의 값의 범위는

$-\frac{9}{5}<k<-1$ 또는 $0<k<\frac{1}{3}$

595

답 5

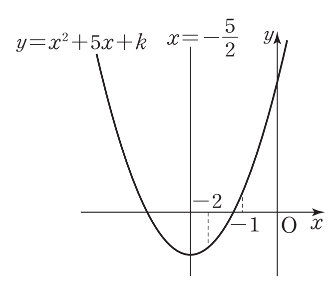
이차방정식 $x^2+3x+2=0$, 즉 $(x+2)(x+1)=0$에서

$x=-2$ 또는 $x=-1$

이므로 이차방정식 $x^2+5x+k=0$의 한 근이 -2와 -1 사이에 존재해야 한다.

이때 이차함수 $y=x^2+5x+k=\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+k-\frac{25}{4}$에서

축이 $x=-\frac{5}{2}$이므로 이 함수의 그래프는 다음 그림과 같다.



즉, $f(-2)<0$이고 $f(-1)>0$이므로

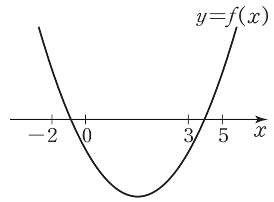
$f(-2)=4-10+k<0$에서 $k<6$

$f(-1)=1-5+k>0$에서 $k>4$

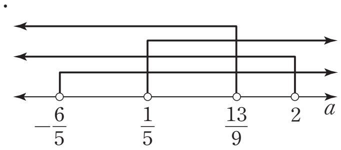
따라서 $4<k<6$에서 구하는 정수 k의 값은 5이다.

596 ······ 답 $\frac{1}{5}<a<\frac{13}{9}$

이차방정식 $x^2-2(a+1)x+a-2=0$에서
$f(x)=x^2-2(a+1)x+a-2$라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



따라서 $f(-2)>0$, $f(0)<0$이고, $f(3)<0$, $f(5)>0$이다.
$f(-2)=4+4(a+1)+a-2=5a+6>0$에서 $a>-\frac{6}{5}$
$f(0)=a-2<0$에서 $a<2$
$f(3)=9-6(a+1)+a-2=-5a+1<0$에서 $a>\frac{1}{5}$
$f(5)=25-10(a+1)+a-2=-9a+13>0$에서 $a<\frac{13}{9}$
이므로 이 조건을 모두 만족시키는 범위를 수직선에 나타내면 다음 그림과 같다.



따라서 구하는 실수 a의 값의 범위는 $\frac{1}{5}<a<\frac{13}{9}$이다.

597 ······ 답 ④

테이블의 개수를 x, 이 특별활동 반 학생 수를 y라 하자.
3명씩 앉으면 2명이 앉지 못하므로
$y=3x+2$ ······ ㉠
5명씩 앉으면 테이블 2개가 비고, 마지막 학생이 앉은 테이블에는 학생이 1명 이상 5명 이하가 앉을 수 있으므로
$5(x-3)+1\le y\le 5(x-2)$에서
$5x-14\le 3x+2\le 5x-10$ ($\because$ ㉠)
(i) $5x-14\le 3x+2$에서 $2x\le 16$ $\quad\therefore x\le 8$
(ii) $3x+2\le 5x-10$에서 $2x\ge 12$ $\quad\therefore x\ge 6$
(i), (ii)에서 $6\le x\le 8$이므로 $20\le 3x+2\le 26$
따라서 이 반의 학생 수가 될 수 있는 가장 큰 수와 가장 작은 수의 합은 $20+26=46$

598 ······ 답 4

$a+1$, $a+2$, $a+4$는 각각 변의 길이이므로
$a+1>0$, $a+2>0$, $a+4>0$에서 $a>-1$ ······ ㉠
삼각형이 되려면 가장 긴 변의 길이가 나머지 두 변의 길이의 합보다 작아야 하므로
$(a+1)+(a+2)>a+4$에서 $a>1$ ······ ㉡
또한 둔각삼각형이 되기 위해서는
$(a+1)^2+(a+2)^2<(a+4)^2$
즉, $a^2-2a-11<0$이어야 하므로
$1-2\sqrt{3}<a<1+2\sqrt{3}$ ······ ㉢

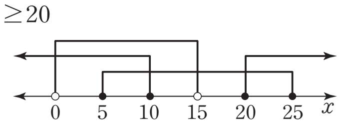
㉠, ㉡, ㉢을 모두 만족시키는 실수 a의 값의 범위는
$1<a<1+2\sqrt{3}$
따라서 $p=1$, $q=1$, $r=2$이므로
$p+q+r=4$

599 ······ 답 ⑤

이 커피숍의 녹차라떼 가격을 a(원),
녹차라떼를 주문하는 사람의 수를 b(명)이라 하자.
가격을 x % 인상하면 $a\left(1+\frac{x}{100}\right)$(원)이고,
녹차라떼를 주문하는 사람의 수는 $b\left(1-\frac{x}{200}\right)$(명)이다.
녹차라떼의 총 판매액이 12 % 이상 증가해야 하므로
$a\left(1+\frac{x}{100}\right)\times b\left(1-\frac{x}{200}\right)\ge ab\left(1+\frac{12}{100}\right)$
$\frac{100+x}{100}\times\frac{200-x}{200}\ge\frac{112}{100}$
$(100+x)(200-x)\ge 22400$
$x^2-100x+2400\le 0$
$(x-60)(x-40)\le 0$
$\therefore 40\le x\le 60$
따라서 x의 최댓값은 60이다.

600 ······ 답 15

둘레의 길이가 60 m인 직사각형 모양의 화단의 짧은 변의 길이를 x(m)라 하면 긴 변의 길이는 $(30-x)$m이다.
$0<x<30-x$에서 $0<x<15$ ······ ㉠
이때 화단의 넓이가 125 m^2 이상 200 m^2 이하이므로
$125\le x(30-x)\le 200$
$125\le x(30-x)$에서
$x^2-30x+125\le 0$, $(x-5)(x-25)\le 0$
$\therefore 5\le x\le 25$ ······ ㉡
$x(30-x)\le 200$에서
$x^2-30x+200\ge 0$, $(x-10)(x-20)\ge 0$
$\therefore x\le 10$ 또는 $x\ge 20$ ······ ㉢



㉠~㉢에서 x의 값의 범위는
$5\le x\le 10$
따라서 x의 최댓값과 최솟값의 합은 $10+5=15$이다.

601 ······ 답 61

사차방정식 $(x^2+2ax+2a)(x^2+bx+4)=0$의 근 중 서로 다른 실근의 개수가 2인 경우는 다음과 같다.
(i) 두 이차방정식 $x^2+2ax+2a=0$, $x^2+bx+4=0$이 각각 중근을 가질 때
방정식 $x^2+2ax+2a=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=a^2-2a=0$, $a(a-2)=0$에서 $a=0$ 또는 $a=2$

방정식 $x^2+bx+4=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=b^2-16=0$, $(b+4)(b-4)=0$에서 $b=4$ 또는 $b=-4$

이때 $a=2$, $b=4$인 경우 주어진 방정식은 $(x+2)^4=0$으로 서로 다른 실근의 개수는 1이다.

따라서 순서쌍 (a, b)의 개수는 $2\times2-1=3$이다.

(ii) 한 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖고, 나머지 한 이차방정식은 두 허근을 가질 때

방정식 $x^2+2ax+2a=0$이 서로 다른 두 실근을 갖고, 방정식 $x^2+bx+4=0$이 두 허근을 갖는 경우는

$\frac{D_1}{4}=a(a-2)>0$에서 $a<0$ 또는 $a>2$

$D_2=(b-4)(b+4)<0$에서 $-4<b<4$

따라서 순서쌍 (a, b)의 개수는 $8\times7=56$이다.

방정식 $x^2+2ax+2a=0$이 두 허근을 갖고, 방정식 $x^2+bx+4=0$이 서로 다른 두 실근을 갖는 경우는

$\frac{D_1}{4}=a(a-2)<0$에서 $0<a<2$

$D_2=(b-4)(b+4)>0$에서 $b<-4$ 또는 $b>4$

따라서 순서쌍 (a, b)의 개수는 $1\times2=2$이다.

(i), (ii)에서 순서쌍 (a, b)의 개수는 $3+56+2=61$이다.

602

답 ③

$|2x-2|+|x+1|\le k$에서 $f(x)=|2x-2|+|x+1|$이라 하자.

(i) $x<-1$일 때

$f(x)=-(2x-2)-(x+1)=-3x+1$

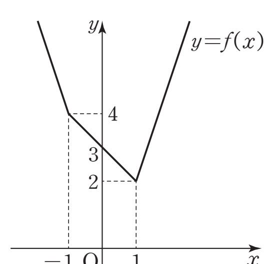
(ii) $-1\le x<1$일 때

$f(x)=-(2x-2)+(x+1)=-x+3$

(iii) $x\ge1$일 때

$f(x)=(2x-2)+(x+1)=3x-1$

(i)~(iii)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 부등식 $|2x-2|+|x+1|\le k$를 만족시키는 모든 정수 x의 값의 합이 0이 되려면 함수 $y=f(x)$의 그래프보다 직선 $y=k$가 더 위쪽에 위치할 때의 x의 값의 범위가 자연수 n에 대하여 $-n\le x\le n$이어야 한다.

$x=-n$일 때 $f(-n)=3n+1$이고,

$x=n+1$일 때 $f(n+1)=3(n+1)-1=3n+2$이므로

$3n+1\le k<3n+2$일 때 부등식 $|2x-2|+|x+1|\le k$의 해가 $-n\le x\le n$이 된다.

즉, k가 정수이므로 $k=3n+1$일 때 조건을 만족시킨다.

따라서 30 이하의 자연수 k는 4, 7, 10, $\cdots$, 28의 9개이다.

603

답 ①

$1<\alpha<2$, $5<\beta<6$ …… ㉠

에서 $6<\alpha+\beta<8$, $5<\alpha\beta<12$

이므로 이차방정식 $ax^2-bx+2c=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $6<\frac{b}{a}<8$, $5<\frac{2c}{a}<12$

이때 a, b, c는 10보다 작은 자연수이므로 $a=1$, $b=7$이고, $c=3$ 또는 $c=4$ 또는 $c=5$

(i) $c=3$일 때

$x^2-7x+6=0$이므로

$(x-1)(x-6)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=6$

이는 조건 ㉠을 만족시키지 않는다.

(ii) $c=4$일 때

$x^2-7x+8=0$이므로 $x=\frac{7\pm\sqrt{17}}{2}$

이는 조건 ㉠을 만족시킨다.

(iii) $c=5$일 때

$x^2-7x+10=0$이므로 $(x-2)(x-5)=0$

이는 조건 ㉠을 만족시키지 않는다.

(i)~(iii)에서 $a=1$, $b=7$, $c=4$이므로 $f(x)=x^2-7x+8$

이차부등식 $f(x)<-2$는 $x^2-7x+8<-2$, $x^2-7x+10<0$

$(x-2)(x-5)<0$에서 $2<x<5$

따라서 부등식을 만족시키는 정수 x는 3, 4의 2개이다.

604

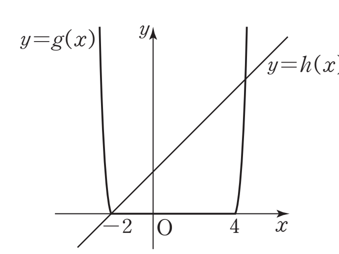
답 $1\le a<2$

$g(x)=\frac{|f(x)|+f(x)}{2}$라 할 때, $f(x)=(x+2)(x-4)$에서

$x<-2$ 또는 $x>4$일 때, $f(x)>0$이므로 $g(x)=\frac{2f(x)}{2}=f(x)$

$-2\le x\le4$일 때, $f(x)\le0$이므로 $g(x)=\frac{-f(x)+f(x)}{2}=0$

이때 $h(x)=a(x+2)$라 하면 직선 $y=h(x)$는 기울기가 a이고, 점 $(-2, 0)$을 반드시 지나므로 두 함수 $y=g(x)$, $y=h(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



부등식 $\frac{|f(x)|+f(x)}{2}\le a(x+2)$를 만족시키는 정수 x의 개수가 8이 되려면

부등식의 해가 $-2\le x\le k$라 할 때, $5\le k<6$이어야 한다.

즉, 두 함수 $y=g(x)$, $y=h(x)$의 그래프가 만나는 점 중 $(-2, 0)$을 제외한 나머지 점의 x좌표가 5보다 크거나 같고 6보다 작아야 한다.

방정식 $x^2-2x-8=a(x+2)$이 $x=5$를 근으로 가질 때

$5^2-2\times5-8=a(5+2)$, $7a=7$ $\quad\therefore a=1$

방정식 $x^2-2x-8=a(x+2)$이 $x=6$을 근으로 가질 때

$6^2-2\times6-8=a(6+2)$, $8a=16$ $\quad\therefore a=2$

따라서 구하는 실수 a의 값의 범위는 $1\le a<2$이다.

605 ······ 답 ④

절댓값 안의 부호를 기준으로 경우를 나누면 다음과 같다.

(i) $x<0$일 때

$-2x-(2x-m)<n$, $4x>m-n$에서

$x>\dfrac{m-n}{4}$

(ii) $0\le x<\dfrac{m}{2}$일 때

$2x-(2x-m)<n$, $m<n$이므로

$0\le x<\dfrac{m}{2}$일 때 항상 주어진 부등식을 만족시킨다.

(iii) $x\ge\dfrac{m}{2}$일 때

$2x+2x-m<n$, $4x<m+n$에서

$x<\dfrac{m+n}{4}$

(i)~(iii)에서 부등식을 만족시키는 x의 값의 범위는

$\dfrac{m-n}{4}<x<\dfrac{m+n}{4}$ ······ ㉠

ㄱ. ㉠에 $m=5$, $n=7$을 대입하면

$-\dfrac{1}{2}<x<3$이므로 정수 x는 0, 1, 2의 3개이다.

$F(5,\ 7)=3$ (참)

ㄴ. ㉠에 $m=2a$, $n=6a+4$를 대입하면

$\dfrac{-4a-4}{4}<x<\dfrac{8a+4}{4}$, $-a-1<x<2a+1$이므로

정수 x의 개수는 $2a+1-(-a-1)-1=3a+1$

$F(2a,\ 6a+4)=3a+1$ (거짓)

ㄷ. $F(2a,\ 10a)>100$을 만족시키려면 ㉠에서

$\dfrac{2a+10a}{4}-\dfrac{2a-10a}{4}-1>100$, $5a>101$이므로

$a>\dfrac{101}{5}$

따라서 자연수 a의 최솟값은 21이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

606 ······ 답 14

임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 부등식 $f(x_1)\ge g(x_1)$이 성립하기 위해서는 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)\ge g(x)$가 성립해야 한다.

$x^2+4x+6\ge -x^2-2ax-2$, $2x^2+2(a+2)x+8\ge 0$

$x^2+(a+2)x+4\ge 0$

이때 방정식 $x^2+(a+2)x+4=0$이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 이 방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(a+2)^2-16\le 0$, $a^2+4a-12\le 0$, $(a+6)(a-2)\le 0$

$\therefore\ -6\le a\le 2$

즉, 정수 a는 -6, -5, -4, $\cdots$, 2의 9개이므로

$p=9$

임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 부등식 $f(x_1)\ge g(x_2)$가 성립하기 위해서는 함수 $y=f(x)$의 최솟값이 함수 $y=g(x)$의 최댓값보다 크거나 같아야 하므로 ······ TIP

$f(x)=(x+2)^2+2$, $g(x)=-(x+a)^2+a^2-2$

에서 $2\ge a^2-2$, $a^2-4\le 0$, $(a+2)(a-2)\le 0$

$\therefore\ -2\le a\le 2$

따라서 정수 a는 -2, -1, 0, 1, 2의 5개이므로

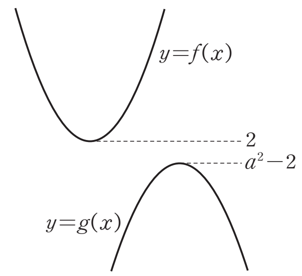
$q=5$

$\therefore\ p+q=9+5=14$

TIP

임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 부등식 $f(x_1)\ge g(x_2)$가 성립하기 위해서는 x에 서로 다른 값을 대입해도 항상 $f(x)$의 함숫값이 $g(x)$의 함숫값보다 크거나 같아야 한다.

따라서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같아야 한다.

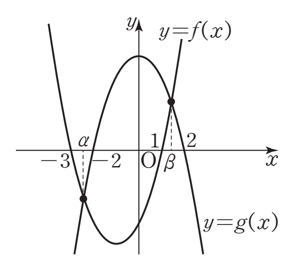


즉, 함수 $y=f(x)$의 최솟값이 함수 $y=g(x)$의 최댓값보다 크거나 같아야 한다.

607 ······ 답 ④

$\{f(x)\}^2>f(x)g(x)$에서 $f(x)\{f(x)-g(x)\}>0$

두 이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점의 x좌표를 각각 α, β라 하면 $-3<\alpha<-2$, $1<\beta<2$이다.



주어진 부등식을 만족시키는 경우는 다음과 같다.

(i) $f(x)>0$, $f(x)-g(x)>0$인 경우

$f(x)>0$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축보다 위쪽에 있어야 하므로

$x<-3$ 또는 $x>1$ ······ ㉠

$f(x)>g(x)$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 함수 $y=g(x)$의 그래프보다 더 위쪽에 있어야 하므로

$x<\alpha$ 또는 $x>\beta$ ······ ㉡

이때 ㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 x의 값의 범위는 $x<-3$ 또는 $x>\beta$이므로 정수 x는 -5, -4, 2, 3, 4, 5의 6개이다.

(ii) $f(x)<0$, $f(x)-g(x)<0$인 경우

$f(x)<0$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축보다 아래쪽에 있어야 하므로

$-3<x<1$ ······ ㉢

$f(x)<g(x)$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 함수 $y=g(x)$의 그래프보다 더 아래쪽에 있어야 하므로

$\alpha<x<\beta$ ······ ㉣

이때 ㉢, ㉣을 동시에 만족시키는 x의 값의 범위는
$a<x<1$이므로 정수 x는 -2, -1, 0으로 3개이다.
(i), (ii)에서 구하는 정수 x의 개수는 $6+3=9$이다.

608 답 ③

$$\begin{cases} |2x-1|\ge 3 & \cdots\cdots \text{㉠} \\ x^2-(a+1)x+a<0 & \cdots\cdots \text{㉡} \end{cases}$$

㉠에서 $x\ge\frac{1}{2}$일 때 $2x-1\ge3$, 즉 $x\ge2$이고

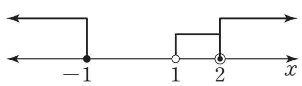
$x<\frac{1}{2}$일 때 $-(2x-1)\ge3$, $2x\le-2$, 즉 $x\le-1$이다.

따라서 ㉠의 해는 $x\le-1$ 또는 $x\ge2$

㉡에서 $x^2-(a+1)x+a=(x-1)(x-a)<0$이므로

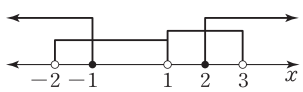
$a>1$일 때 $1<x<a$이고, $a<1$일 때 $a<x<1$이고, $a=1$일 때 해가 없다.

ㄱ. $a=2$일 때 ㉡의 해는 $1<x<2$이므로 연립부등식의 해를 수직선에 나타내면 다음 그림과 같다.



연립부등식의 해가 존재하지 않으므로 $f(2)=0$이다. (참)

ㄴ. $f(a)=1$이려면 다음과 같이 부등식 ㉡의 해가 -1을 포함하거나 2를 포함해야 한다.



$a>1$일 때, ㉡의 해가 2를 포함해야 하므로 $2<a\le3$이다.
$a<1$일 때, ㉡의 해가 -1을 포함해야 하므로 $-2\le a<-1$이다.
따라서 모든 정수 a의 값의 곱은 $3\times(-2)=-6$이다. (참)

ㄷ. $f(a)\ge3$이려면
$a>1$일 때 ㉡의 해가 4 이상의 정수를 포함해야 하므로 $a>4$이고,
$a<1$일 때 ㉡의 해가 -3 이하의 정수를 포함해야 하므로 $a<-3$이다.
따라서 양의 정수 a의 최솟값은 $\alpha=5$이고, 음의 정수 a의 최댓값은 $\beta=-4$이므로 $\alpha-\beta=5-(-4)=9$이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

609 답 ③

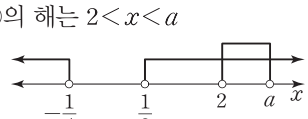
$8x^2>2x+1$에서 $(4x+1)(2x-1)>0$

$\therefore x<-\frac{1}{4}$ 또는 $x>\frac{1}{2}$

$x^2-(2+a)x+2a<0$에서 $(x-a)(x-2)<0$ $\cdots\cdots$ ㉠

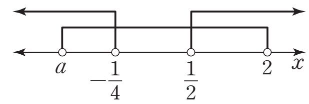
ㄱ. $a=2$일 때 ㉠에서 $(x-2)^2<0$이므로 ㉠을 만족시키는 x의 값이 존재하지 않는다. (참)

ㄴ. $4<a\le5$일 때 ㉠의 해는 $2<x<a$



위의 그림에서 연립부등식을 만족시키는 정수 x의 값은 3, 4이다. (참)

ㄷ. 주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x의 값이 -1, 1만 존재하도록 하려면 다음 그림과 같아야 한다.



즉, 실수 a의 값의 범위는 $-2\le a<-1$이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

610 답 ④

주어진 연립부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로 두 부등식 $ax^2+bx+c>0$, $px^2+qx+r<0$이 각각 모든 실수 x에 대하여 성립해야 한다.

$ax^2+bx+c>0$에서 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 아래로 볼록하고 x축과 만나지 않아야 하므로

$a>0$, $b^2-4ac<0$

$px^2+qx+r<0$에서 이차함수 $y=px^2+qx+r$의 그래프가 위로 볼록하고 x축과 만나지 않아야 하므로

$p<0$, $q^2-4pr<0$

ㄱ. $a>0$, $p<0$이므로 $a>p$에서 $a-p>0$이다. (참)

ㄴ. $b^2-q^2>4(ac-pr)$에서
$b^2-4ac>q^2-4pr$
이때 $b^2-4ac<0$이고 $q^2-4pr<0$이지만
$b^2-4ac>q^2-4pr$인지는 알 수 없다. (거짓) $\cdots\cdots$ TIP

ㄷ. $px^2+qx+r<0$이므로 양변에 각각 -1을 곱해주면
$-px^2-qx-r>0$이고, $ax^2+bx+c>0$이므로 모든 실수 x에 대하여
$(a-p)x^2+(b-q)x+(c-r)>0$이 성립한다.
방정식 $(a-p)x^2+(b-q)x+(c-r)=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(b-q)^2-4(a-p)(c-r)<0$
이므로 $(b-q)^2<4(a-p)(c-r)$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

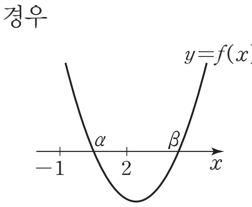
TIP

ㄴ. $a=2$, $b=1$, $c=2$이고, $p=-1$, $q=1$, $r=-1$인 경우
$b^2-4ac=1-16=-15$이고, $q^2-4pr=1-4=-3$이므로
$b^2-4ac<q^2-4pr$이다.

611 답 ④

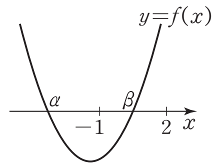
$\alpha<\beta$라 두고 $f(x)=x^2-(k+1)x+k-4$라 할 때, 경우를 나누어 보면 다음과 같다.

(i) $-1\le\alpha\le2<\beta$인 경우



$f(-1)\ge0$, $f(2)\le0$이 되어야 하므로
$f(-1)=1+k+1+k-4=2k-2\ge0$에서 $k\ge1$
$f(2)=4-2k-2+k-4=-k-2\le0$에서 $k\ge-2$
따라서 실수 k의 값의 범위는 $k\ge1$

(ii) $\alpha<-1\le\beta\le2$인 경우



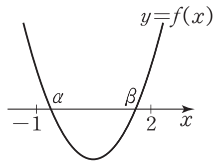
$f(-1)\le0$, $f(2)\ge0$이 되어야 하므로

$f(-1)=1+k+1+k-4=2k-2\le0$에서 $k\le1$

$f(2)=4-2k-2+k-4=-k-2\ge0$에서 $k\le-2$

따라서 실수 k의 값의 범위는 $k\le-2$

(iii) $-1\le\alpha<\beta\le2$인 경우



이차방정식 $x^2-(k+1)x+k-4=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(k+1)^2-4(k-4)=k^2-2k+17=(k-1)^2+16>0$

이므로 주어진 방정식은 k의 값에 관계없이 항상 서로 다른 두 실근을 갖는다.

또한 $f(-1)\ge0$, $f(2)\ge0$이고, 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축이 두 직선 $x=-1$, $x=2$ 사이에 존재해야 하므로

$f(-1)=1+k+1+k-4=2k-2\ge0$에서 $k\ge1$

$f(2)=4-2k-2+k-4=-k-2\ge0$에서 $k\le-2$

축이 $x=\dfrac{k+1}{2}$이므로 $-1<\dfrac{k+1}{2}<2$에서

$-3<k<3$

따라서 조건을 만족시키는 실수 k의 값이 존재하지 않는다.

(i)~(iii)에서 구하는 실수 k의 값의 범위는

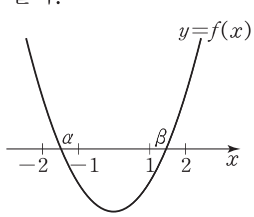
$k\le-2$ 또는 $k\ge1$

612

답 ③

이차방정식 $x^2+(2k-1)x+k-3=0$의 두 근 α, β가 각각 $[\alpha]=-2$, $[\beta]=1$을 만족시키므로 $-2\le\alpha<-1$, $1\le\beta<2$이다.

$f(x)=x^2+(2k-1)x+k-3$이라 하면 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 $f(-2)\ge0$, $f(-1)<0$, $f(1)\le0$, $f(2)>0$을 만족시켜야 한다.

(i) $f(-2)=4-4k+2+k-3=-3k+3\ge0$에서 $k\le1$

(ii) $f(-1)=1-2k+1+k-3=-k-1<0$에서 $k>-1$

(iii) $f(1)=1+2k-1+k-3=3k-3\le0$에서 $k\le1$

(iv) $f(2)=4+4k-2+k-3=5k-1>0$에서 $k>\dfrac{1}{5}$

(i)~(iv)에서 실수 k의 값의 범위는 $\dfrac{1}{5}<k\le1$이다.

$\therefore\ p+q=\dfrac{1}{5}+1=\dfrac{6}{5}$

613

답 -2

방정식 $(3x-k^2+3k)(3x-2k)=0$의 해가

$x=\dfrac{k^2-3k}{3}$ 또는 $x=\dfrac{2k}{3}$이므로

이차부등식 $(3x-k^2+3k)(3x-2k)\le0$의 해는

$\dfrac{2k}{3}\le\dfrac{k^2-3k}{3}$일 때 $\dfrac{2k}{3}\le x\le\dfrac{k^2-3k}{3}$이고,

$\dfrac{2k}{3}>\dfrac{k^2-3k}{3}$일 때 $\dfrac{k^2-3k}{3}\le x\le\dfrac{2k}{3}$이다.

조건 (가)에서 $\beta-\alpha$가 자연수이고, α, β가 정수가 아닌 실수이므로 조건 (나)에서 $\alpha\le x\le\beta$를 만족시키는 정수 x의 개수가 2이려면 $\beta-\alpha=2$이다.

(i) 이차부등식의 해가 $\dfrac{2k}{3}\le x\le\dfrac{k^2-3k}{3}$일 때

$\dfrac{k^2-3k}{3}-\dfrac{2k}{3}=2$에서 $k^2-5k-6=0$, $(k+1)(k-6)=0$

$\therefore\ k=-1$ 또는 $k=6$

$k=-1$일 때 $\dfrac{k^2-3k}{3}=\dfrac{4}{3}$, $\dfrac{2k}{3}=-\dfrac{2}{3}$이므로 두 근이 정수가 아니다.

$k=6$일 때 $\dfrac{k^2-3k}{3}=6$, $\dfrac{2k}{3}=4$이므로 두 근이 정수이다.

(ii) 이차부등식의 해가 $\dfrac{k^2-3k}{3}\le x\le\dfrac{2k}{3}$일 때

$\dfrac{2k}{3}-\dfrac{k^2-3k}{3}=2$에서 $k^2-5k+6=0$, $(k-2)(k-3)=0$

$\therefore\ k=2$ 또는 $k=3$

$k=2$일 때 $\dfrac{k^2-3k}{3}=-\dfrac{2}{3}$, $\dfrac{2k}{3}=\dfrac{4}{3}$이므로 두 근이 정수가 아니다.

$k=3$일 때 $\dfrac{k^2-3k}{3}=0$, $\dfrac{2k}{3}=2$이므로 두 근이 정수이다.

(i), (ii)에서 구하는 실수 k의 값은 $k=-1$ 또는 $k=2$이므로

모든 실수 k의 값의 곱은 $(-1)\times2=-2$

614

답 ②

부등식 $x^2-2x-8<0$에서 $(x+2)(x-4)<0$

$\therefore\ -2<x<4$ ······ ㉠

부등식 $x^2-(3k+2)x+2k^2+7k-15\ge0$에서

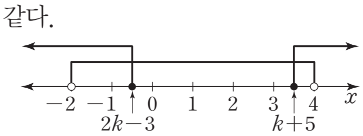
$x^2-(3k+2)x+(k+5)(2k-3)\ge0$

$\{x-(k+5)\}\{x-(2k-3)\}\ge0$ ······ ㉡

(i) $k+5\ge2k-3$, 즉 $k\le8$인 경우

㉡에서 $x\ge k+5$ 또는 $x\le2k-3$이다.

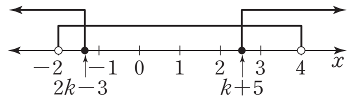
ⓐ 정수인 해가 $x=-1$만 존재하는 경우를 수직선에 나타내면 다음 그림과 같다.



$-1\le2k-3<0$에서 $1\le k<\dfrac{3}{2}$이고,

$k+5>3$에서 $k>-2$이므로 정수 k의 값은 $k=1$이다.

ⓑ 정수인 해가 $x=3$만 존재하는 경우를 수직선에 나타내면 다음 그림과 같다.



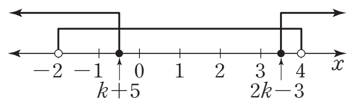
$2<k+5\le3$에서 $-3<k\le-2$이고,

$2k-3<-1$에서 $k<1$이므로 정수 k의 값은 $k=-2$이다.

(ii) $k+5<2k-3$, 즉 $k>8$인 경우

㉡에서 $x\ge2k-3$ 또는 $x\le k+5$이다.

ⓐ 정수인 해가 $x=-1$만 존재하는 경우를 수직선에 나타내면 다음 그림과 같다.

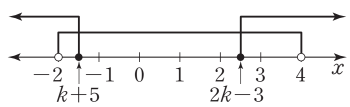


$-1\le k+5<0$에서 $-6\le k<-5$이고,

$2k-3>3$에서 $k>3$이므로

조건을 만족시키는 정수 k의 값이 존재하지 않는다.

ⓑ 정수인 해가 $x=3$만 존재하는 경우를 수직선에 나타내면 다음 그림과 같다.



$2<2k-3\le3$에서 $\frac{5}{2}<k\le3$이고

$k+5<-1$에서 $k<-6$이므로

조건을 만족시키는 정수 k의 값이 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 정수 k는 1, -2이므로 구하는 합은

$1+(-2)=-1$이다.

III 경우의 수

01 경우의 수

615 답 74

주어진 차림표에서 한 가지 음식을 택할 때

한식 5가지 메뉴 중 1가지를 고르는 방법의 수는 5이고,

한식을 제외한 중식 3가지, 일식 4가지 메뉴 중 1가지를 고르는 방법의 수는 7이므로 $a=5$, $b=7$

$\therefore a^2+b^2=25+49=74$

616 답 ④

나오는 두 눈의 수의 합의

최솟값은 $1+1=2$, 최댓값은 $6+6=12$이다.

2에서 12까지의 자연수 중 5의 배수는 5, 10이므로

두 주사위의 눈의 수를 각각 a, b라 하면

두 눈의 수의 합이 5 또는 10인 순서쌍 (a, b)는 다음과 같다.

(i) $a+b=5$인 경우

$(1, 4)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$, $(4, 1)$

(ii) $a+b=10$인 경우

$(4, 6)$, $(5, 5)$, $(6, 4)$

(i), (ii)의 경우는 동시에 일어날 수 없으므로

구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여

$4+3=7$이다.

617 답 ②

$2x+y<7$에서 x의 값에 따라 나누어 생각하면 다음과 같다.

(i) $x=1$인 경우

$2+y<7$, $y<5$이므로 순서쌍 (x, y)는

$(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$

(ii) $x=2$인 경우

$4+y<7$, $y<3$이므로 순서쌍 (x, y)는

$(2, 1)$, $(2, 2)$

(iii) $x\ge3$인 경우

$6+y<7$을 만족시키는 자연수 y는 존재하지 않는다.

(i)~(iii)의 경우는 동시에 일어날 수 없으므로

구하는 모든 순서쌍 (x, y)의 개수는

$4+2=6$이다.

618 답 ②

n번째 자리에는 숫자 n이 적힌 카드가 오지 않도록 나열하는 방법은 다음과 같다.

	1번째	2번째	3번째
수	2	3	1
	3	1	2

따라서 구하는 방법의 수는 2이다.

619 ………… 답 17

주머니에서 꺼낸 두 공에 적힌 숫자를 각각 a, b $(a>b)$라 하면
두 수의 차가 3 미만인 경우의 순서쌍 (a, b)는 다음과 같다.
(ⅰ) $a-b=1$인 경우
$(2, 1)$, $(3, 2)$, $(4, 3)$, $(5, 4)$, $(6, 5)$,
$(7, 6)$, $(8, 7)$, $(9, 8)$, $(10, 9)$
(ⅱ) $a-b=2$인 경우
$(3, 1)$, $(4, 2)$, $(5, 3)$, $(6, 4)$, $(7, 5)$, $(8, 6)$, $(9, 7)$, $(10, 8)$
(ⅰ), (ⅱ)의 경우는 동시에 일어날 수 없으므로
구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여
$9+8=17$이다.

620 ………… 답 (1) 15 (2) 13

나오는 두 눈의 수의 합의
최솟값은 $1+1=2$, 최댓값은 $6+6=12$이다.
(1) 2에서 12까지의 자연수 중 소수는 2, 3, 5, 7, 11이다.
두 주사위의 눈의 수를 각각 a, b라 하면 두 눈의 수의 합이 소수인 순서쌍 (a, b)는 다음과 같다.
(ⅰ) 합이 2인 경우
$(1, 1)$의 1개이다.
(ⅱ) 합이 3인 경우
$(1, 2)$, $(2, 1)$의 2개이다.
(ⅲ) 합이 5인 경우
$(1, 4)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$, $(4, 1)$의 4개이다.
(ⅳ) 합이 7인 경우
$(1, 6)$, $(2, 5)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$, $(5, 2)$, $(6, 1)$의 6개이다.
(ⅴ) 합이 11인 경우
$(5, 6)$, $(6, 5)$의 2개이다.
(ⅰ)~(ⅴ)의 경우는 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여
$1+2+4+6+2=15$이다.
(2) 2에서 12까지의 자연수 중 8 이상의 합성수는 8, 9, 10, 12이다.
두 주사위의 눈의 수를 각각 a, b라 하면 두 눈의 수의 합이 8 이상의 합성수인 순서쌍 (a, b)는 다음과 같다.
(ⅰ) 합이 8인 경우
$(2, 6)$, $(3, 5)$, $(4, 4)$, $(5, 3)$, $(6, 2)$의 5개이다.
(ⅱ) 합이 9인 경우
$(3, 6)$, $(4, 5)$, $(5, 4)$, $(6, 3)$의 4개이다.
(ⅲ) 합이 10인 경우
$(4, 6)$, $(5, 5)$, $(6, 4)$의 3개이다.
(ⅳ) 합이 12인 경우
$(6, 6)$의 1개이다.
(ⅰ)~(ⅳ)의 경우는 동시에 일어날 수 없으므로
구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여
$5+4+3+1=13$이다.

621 ………… 답 6

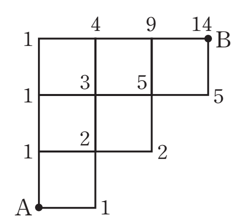
0부터 9까지의 정수 중 곱해서 9가 되는 세 수는 1, 1, 9 또는
1, 3, 3이다.
따라서 세 자리 자연수의 백의 자리의 수를 a, 십의 자리의 수를 b,
일의 자리의 수를 c라 하면 순서쌍 (a, b, c)는 다음과 같다.
(ⅰ) 세 수가 1, 1, 9인 경우
$(1, 1, 9)$, $(1, 9, 1)$, $(9, 1, 1)$
(ⅱ) 세 수가 1, 3, 3인 경우
$(1, 3, 3)$, $(3, 1, 3)$, $(3, 3, 1)$
(ⅰ), (ⅱ)의 경우는 동시에 일어날 수 없으므로
구하는 자연수의 개수는 합의 법칙에 의하여
$3+3=6$이다.

622 ………… 답 ②

$40=2^3\times5$이므로 40과 서로소인 수는
2의 배수가 아니면서 5의 배수가 아니어야 한다.
100 이하의 자연수 중 2의 배수의 개수는 50이고
5의 배수의 개수는 20이다.
이때 2와 5의 최소공배수인 10의 배수의 개수는 10이므로
구하는 40과 서로소인 100 이하의 자연수의 개수는
$100-(50+20-10)=40$이다.

623 ………… 답 ③

A 지점에서 B 지점까지 도로를 따라 최단 거리로 이동하는 방법의 수를 일일이 세면 다음과 같다.



따라서 구하는 방법의 수는 14이다.

624 ………… 답 36

치즈의 유무에 따라 2가지, 매운 정도에 따라 6가지,
양에 따라 3가지 종류가 있으므로 떡볶이를 주문하는 방법의 수는
곱의 법칙에 의하여
$2\times6\times3=36$이다.

625 ………… 답 ③

P 지점에서 출발해서 R 지점에 도착하는 경로를 나누어 생각하면
다음과 같다.
(ⅰ) 중간에 Q 지점을 지나는 경우
P → Q로 이동하는 방법의 수는 3

$Q \to R$로 이동하는 방법의 수는 2
이므로 $P \to Q \to R$의 순서로 이동하는 방법의 수는
$3 \times 2 = 6$이다.
(ii) 중간에 Q 지점을 지나지 않는 경우
$P \to R$로 바로 이동하는 방법의 수는 3이다.
(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는 $6+3=9$이다.

626 ······ 답 ②

백의 자리의 숫자는 1, 2, 3, 4 중 하나이므로 4가지
십의 자리의 숫자는 백의 자리의 숫자를 제외하고 4가지
일의 자리의 숫자는 백의 자리와 십의 자리의 숫자를 제외하고 3가지
따라서 구하는 세 자리 자연수의 개수는 $4 \times 4 \times 3 = 48$이다.

627 ······ 답 (1) 100 (2) 90

(1) 백의 자리의 숫자는 2, 4, 6, 8 중 하나이고, 십의 자리와 일의 자리의 숫자는 각각 1, 3, 5, 7, 9 중 하나이다.
따라서 구하는 자연수의 개수는 $4 \times 5 \times 5 = 100$이다.
(2) 짝수가 되려면 일의 자리의 숫자가 0, 2, 4 중 하나가 되어야 하고 백의 자리의 숫자는 0이 될 수 없다.
따라서 구하는 짝수의 개수는 $5 \times 6 \times 3 = 90$이다.

628 ······ 답 25

상자 A에서 뽑은 공에 적힌 숫자가 짝수인 경우는
2, 4, 6, 8, 10의 5가지이고,
상자 B에서 뽑은 공에 적힌 숫자가 16 이상인 경우는
16, 17, 18, 19, 20의 5가지이므로
구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여
$5 \times 5 = 25$이다.

629 ······ 답 27

서로 다른 두 주사위를 던져서 나오는 두 눈의 수를 각각 a, b라 하면 ab가 짝수인 경우의 수는 순서쌍 (a, b)의 개수에서 ab가 홀수인 경우의 수를 제외하면 된다.
순서쌍 (a, b)의 개수는 $6 \times 6 = 36$이고,
ab가 홀수인 경우의 수는 a와 b가 모두 홀수이어야 하므로
$3 \times 3 = 9$이다.
따라서 구하는 경우의 수는 $36-9=27$이다.

다른 풀이

나오는 눈의 수의 곱이 짝수인 경우는 다음과 같다.
(i) (홀수, 짝수)가 나오는 경우
$3 \times 3 = 9$(가지)
(ii) (짝수, 홀수)가 나오는 경우
$3 \times 3 = 9$(가지)
(iii) (짝수, 짝수)가 나오는 경우
$3 \times 3 = 9$(가지)
(i)~(iii)에서 구하는 경우의 수는 $9+9+9=27$이다.

630 ······ 답 (1) 24 (2) 15

(1) $(x+y+z)(a+b+c+d)(p+q)(r+s)$의 전개식에서
s를 포함하는 항은 $(r+s)$에서 s를 선택하여 곱하는 경우이다.
즉, $(x+y+z)(a+b+c+d)(p+q) \times s$이므로
구하는 항의 개수는
$3 \times 4 \times 2 \times 1 = 24$이다.
(2) $(x+y)(p+q+r)$을 전개할 때
$(x+y)$와 $(p+q+r)$에서 각각 하나씩 항을 선택하여 곱하므로
구하는 항의 개수는 $2 \times 3 = 6$이다.
마찬가지 방법으로
$(x+y+z)(a+b+c)$의 전개식에서 항의 개수는
$3 \times 3 = 9$이다.
이때 $(x+y)(p+q+r)$과 $(x+y+z)(a+b+c)$의 전개식에서 동류항이 없으므로 구하는 항의 개수는
$6+9=15$이다.

631 ······ 답 18

남학생과 여학생을 교대로 나열하려면
여학생, 남학생, 여학생의 순서로 나열하거나
남학생, 여학생, 남학생의 순서로 나열해야 한다.
(i) 여학생, 남학생, 여학생의 순서로 나열하는 경우
$2 \times 3 \times 1 = 6$(가지)
(ii) 남학생, 여학생, 남학생의 순서로 나열하는 경우
$3 \times 2 \times 2 = 12$(가지)
(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는
$6+12=18$이다.

632 ······ 답 ②

720을 소인수분해하면
$720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$
이므로 양의 약수의 개수는
$(4+1) \times (2+1) \times (1+1) = 30$

참고

약수와 배수는 일반적으로 자연수 범위에서 다루지만 그 의미가 좀 더 명확하도록 '양의 약수'라는 표현을 사용하였다.

633 ······ 답 ②

480과 864의 양의 공약수의 개수는 두 수의 최대공약수의 양의 약수의 개수와 같다.
$480 = 2^5 \times 3 \times 5$, $864 = 2^5 \times 3^3$이므로 480과 864의 최대공약수는
$2^5 \times 3$이다.
따라서 480과 864의 양의 공약수의 개수는
$(5+1) \times (1+1) = 12$

634 ······ 답 ③

사용할 수 있는 색은 4가지이므로

A에 칠할 수 있는 색은 4가지
B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지
C에 칠할 수 있는 색은 A, B에 칠한 색을 제외한 2가지
D에 칠할 수 있는 색은 A, C에 칠한 색을 제외한 2가지
따라서 구하는 방법의 수는
$4\times3\times2\times2=48$이다.

635 답 59

500원짜리 동전을 지불하는 방법은 0, 1, 2, 3개의 4가지
100원짜리 동전을 지불하는 방법은 0, 1, 2, 3, 4개의 5가지
50원짜리 동전을 지불하는 방법은 0, 1, 2개의 3가지
이때 0원을 지불하는 방법의 수는 1이므로
구하는 지불하는 방법의 수는
$4\times5\times3-1=59$이다.

636 답 ③

$x+3y\le10$에서 y의 값에 따라 나누어 생각하면 다음과 같다. …… TIP

(i) $y=1$인 경우
$x+3\le10$, $x\le7$이므로 순서쌍 (x, y)는
$(1, 1)$, $(2, 1)$, $(3, 1)$, $(4, 1)$, $(5, 1)$, $(6, 1)$의 6개이다.
(ii) $y=2$인 경우
$x+6\le10$, $x\le4$이므로 순서쌍 (x, y)는
$(1, 2)$, $(2, 2)$, $(3, 2)$, $(4, 2)$의 4개이다.
(iii) $y=3$인 경우
$x+9\le10$, $x\le1$이므로 순서쌍 (x, y)는
$(1, 3)$의 1개이다.
(iv) $y\ge4$인 경우
조건을 만족시키는 x의 값이 존재하지 않는다.
(i)~(iv)에서 구하는 순서쌍의 개수는
$6+4+1=11$이다.

TIP
경우를 나눌 때에는 계수가 가장 큰 항의 값을 기준으로 나누는 것이 계산에 편리하다.

637 답 ④

몇 자리 자연수를 만드는지에 따라 나누어 생각하면 다음과 같다.
(i) 두 자리 자연수인 경우
16, 25, 34, 43, 52, 61, 70의 7개
(ii) 세 자리 자연수인 경우
300 이하의 세 자리 자연수이므로 백의 자리의 숫자는 1 또는 2이다.
백의 자리의 숫자가 1인 경우 십의 자리의 숫자와 일의 자리의 숫자의 합이 6이므로
106, 115, 124, 133, 142, 151, 160의 7개
백의 자리의 숫자가 2인 경우 십의 자리의 숫자와 일의 자리의 숫자의 합이 5이므로
205, 214, 223, 232, 241, 250의 6개
따라서 세 자리 자연수의 개수는 $7+6=13$이다.
(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는
$7+13=20$이다.

638 답 ②

이차함수 $y=x^2+ax+2b$의 그래프가 x축과 적어도 한 점에서 만나려면 이차방정식 $x^2+ax+2b=0$이 실근을 가져야 하므로
판별식을 D라 하면
$D=a^2-8b\ge0$, $a^2\ge8b$ …… ㉠
a, b의 값 중 ㉠을 만족시키는 경우는 다음과 같다.

$8b$ \ a^2	1	4	9	16	25	36
8			○	○	○	○
16				○	○	○
24					○	○
32						○
40						
48						

따라서 순서쌍 (a, b)는 $(3, 1)$, $(4, 1)$, $(4, 2)$, $(5, 1)$, $(5, 2)$ $(5, 3)$, $(6, 1)$, $(6, 2)$, $(6, 3)$, $(6, 4)$의 10개이다.

639 답 ⑤

$x+3y+2z=18$에서 y의 값에 따라 나누어 생각하면 다음과 같다.
(i) $y=1$인 경우
$x+3+2z=18$, $x+2z=15$이므로 순서쌍 (x, z)는
$(13, 1)$, $(11, 2)$, $(9, 3)$, $(7, 4)$, $(5, 5)$, $(3, 6)$, $(1, 7)$의 7개이다.
(ii) $y=2$인 경우
$x+6+2z=18$, $x+2z=12$이므로 순서쌍 (x, z)는
$(10, 1)$, $(8, 2)$, $(6, 3)$, $(4, 4)$, $(2, 5)$의 5개이다.
(iii) $y=3$인 경우
$x+9+2z=18$, $x+2z=9$이므로 순서쌍 (x, z)는
$(7, 1)$, $(5, 2)$, $(3, 3)$, $(1, 4)$의 4개이다.
(iv) $y=4$인 경우
$x+12+2z=18$, $x+2z=6$이므로 순서쌍 (x, z)는
$(4, 1)$, $(2, 2)$의 2개이다.
(v) $y=5$인 경우
$x+15+2z=18$, $x+2z=3$이므로 순서쌍 (x, z)는
$(1, 1)$의 1개이다.
(i)~(v)에서 구하는 모든 순서쌍의 개수는
$7+5+4+2+1=19$이다.

640 답 ②

$48x^2-14nx+n^2=0$에서 $(6x-n)(8x-n)=0$이므로
$x=\frac{n}{6}$ 또는 $x=\frac{n}{8}$이다.
따라서 이차방정식이 정수해를 갖기 위해서는
n이 6의 배수이거나 8의 배수이어야 한다.

200 이하의 자연수 중 6의 배수의 개수는 33이고
8의 배수의 개수는 25이다.
이때 6과 8의 최소공배수인 24의 배수의 개수는 8이므로
구하는 자연수 n의 개수는
$33+25-8=50$이다.

641 ⋯⋯ 답 ⑤

100원짜리 동전 x개, 500원짜리 동전 y개, 1000원짜리 지폐 z장을 합하여 3500원이 되도록 하면
$100x+500y+1000z=3500$
$x+5y+10z=35$
이고, z의 값에 따라 나누어 생각하면 다음과 같다.
(i) $z=0$인 경우
$x+5y+0=35$, $x+5y=35$이므로 순서쌍 (x, y)는
$(35, 0)$, $(30, 1)$, $(25, 2)$, $(20, 3)$, $(15, 4)$, $(10, 5)$, $(5, 6)$, $(0, 7)$의 8개이다.
(ii) $z=1$인 경우
$x+5y+10=35$, $x+5y=25$이므로 순서쌍 (x, y)는
$(25, 0)$, $(20, 1)$, $(15, 2)$, $(10, 3)$, $(5, 4)$, $(0, 5)$의 6개이다.
(iii) $z=2$인 경우
$x+5y+20=35$, $x+5y=15$이므로 순서쌍 (x, y)는
$(15, 0)$, $(10, 1)$, $(5, 2)$, $(0, 3)$의 4개이다.
(iv) $z=3$인 경우
$x+5y+30=35$, $x+5y=5$이므로 순서쌍 (x, y)는
$(5, 0)$, $(0, 1)$의 2개이다.
(i)~(iv)에서 구하는 방법의 수는
$8+6+4+2=20$이다.

642 ⋯⋯ 답 9

5 g, 10 g, 20 g짜리의 세 종류의 저울추의 개수를 각각 x, y, z (x, y, z는 자연수)라 하면
$5x+10y+20z=80$
$x+2y+4z=16$
이고, z의 값에 따라 나누어 생각하면 다음과 같다.
(i) $z=1$인 경우
$x+2y+4=16$, $x+2y=12$이므로 순서쌍 (x, y)는
$(10, 1)$, $(8, 2)$, $(6, 3)$, $(4, 4)$, $(2, 5)$의 5개이다.
(ii) $z=2$인 경우
$x+2y+8=16$, $x+2y=8$이므로 순서쌍 (x, y)는
$(6, 1)$, $(4, 2)$, $(2, 3)$의 3개이다.
(iii) $z=3$인 경우
$x+2y+12=16$, $x+2y=4$이므로 순서쌍 (x, y)는
$(2, 1)$의 1개이다.
(i)~(iii)에서 구하는 경우의 수는
$5+3+1=9$이다.

643 ⋯⋯ 답 24

선분 AB의 길이가 5보다 작기 위해서는
$\sqrt{a^2+b^2+c^2}<5$, 즉 $a^2+b^2+c^2<25$이어야 한다.
$c\le4$인 자연수 c의 값에 따라 나누어 생각하면 다음과 같다.
(i) $c=1$인 경우
$a^2+b^2+1<25$, $a^2+b^2<24$이므로 순서쌍 (a, b)는
$(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$, $(2, 2)$, $(2, 3)$, $(2, 4)$, $(3, 3)$의 8개이다.
(ii) $c=2$인 경우
$a^2+b^2+4<25$, $a^2+b^2<21$이므로 순서쌍 (a, b)는
$(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$, $(2, 2)$, $(2, 3)$, $(2, 4)$, $(3, 3)$의 8개이다.
(iii) $c=3$인 경우
$a^2+b^2+9<25$, $a^2+b^2<16$이므로 순서쌍 (a, b)는
$(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 2)$, $(2, 3)$의 5개이다.
(iv) $c=4$인 경우
$a^2+b^2+16<25$, $a^2+b^2<9$이므로 순서쌍 (a, b)는
$(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 2)$의 3개이다.
(i)~(iv)에서 구하는 순서쌍의 개수는
$8+8+5+3=24$이다.

644 ⋯⋯ 답 ④

$a\ge-1$, $c\ge4$에서 $a+c\ge(-1)+4=3$이므로
$a+c-2b=8$에서 $-2b\le5$, $b\ge-\frac{5}{2}$
또한 $b\le3$이므로 $-\frac{5}{2}\le b\le3$이다.
정수 b의 값에 따라 나누어 생각하면 다음과 같다.
(i) $b=3$인 경우
$a+c-6=8$, $a+c=14$이므로 순서쌍 (a, c)는
$(-1, 15)$, $(0, 14)$, $(1, 13)$, $\cdots$, $(10, 4)$의 12개이다.
(ii) $b=2$인 경우
$a+c-4=8$, $a+c=12$이므로 순서쌍 (a, c)는
$(-1, 13)$, $(0, 12)$, $(1, 11)$, $\cdots$, $(8, 4)$의 10개이다.
(iii) $b=1$인 경우
$a+c-2=8$, $a+c=10$이므로 순서쌍 (a, c)는
$(-1, 11)$, $(0, 10)$, $(1, 9)$, $\cdots$, $(6, 4)$의 8개이다.
(iv) $b=0$인 경우
$a+c-0=8$, $a+c=8$이므로 순서쌍 (a, c)는
$(-1, 9)$, $(0, 8)$, $(1, 7)$, $(2, 6)$, $(3, 5)$, $(4, 4)$의 6개이다.
(v) $b=-1$인 경우
$a+c+2=8$, $a+c=6$이므로 순서쌍 (a, c)는
$(-1, 7)$, $(0, 6)$, $(1, 5)$, $(2, 4)$의 4개이다.
(vi) $b=-2$인 경우
$a+c+4=8$, $a+c=4$이므로 순서쌍 (a, c)는
$(-1, 5)$, $(0, 4)$의 2개이다.
(i)~(vi)에서 구하는 순서쌍의 개수는
$12+10+8+6+4+2=42$이다.

645 ⋯⋯ 답 11

밑면의 반지름의 길이가 4이고 높이가 5이므로 수조 전체의 부피는
$\pi\times4^2\times5=80\pi$

이 수조에 물이 $\frac{3}{4}$만큼 차 있으므로 $80\pi\times\frac{3}{4}=60\pi$에서
수조의 남은 부피는 20π이다.
수조에 넣는 부피가 각각 π, 3π, 4π인 돌의 개수를 각각 x, y, z (x, y, z는 자연수)라 하면
$x+3y+4z=20$
이고, z의 값에 따라 나누어 생각하면 다음과 같다.

(i) $z=1$인 경우
$x+3y+4=20$, $x+3y=16$
이므로 순서쌍 (x, y)는
$(13, 1)$, $(10, 2)$, $(7, 3)$, $(4, 4)$, $(1, 5)$의 5개이다.

(ii) $z=2$인 경우
$x+3y+8=20$, $x+3y=12$
이므로 순서쌍 (x, y)는
$(9, 1)$, $(6, 2)$, $(3, 3)$의 3개이다.

(iii) $z=3$인 경우
$x+3y+12=20$, $x+3y=8$
이므로 순서쌍 (x, y)는
$(5, 1)$, $(2, 2)$의 2개이다.

(iv) $z=4$인 경우
$x+3y+16=20$, $x+3y=4$
이므로 순서쌍 (x, y)는
$(1, 1)$의 1개이다.

(i)~(iv)에서 구하는 방법의 수는
$5+3+2+1=11$이다.

646 ⋯⋯ 답 11

카드 뒷면에 적을 수 있는 문자를 수형도로 나타내면 다음 그림과 같다.

A	B	C	D	E
b	c	a	e	d
	d	a	e	c
	e	a	c	d
c	d	a	e	b
	e	a	b	d
d	c	a	e	b
	e	a	b	c
			c	b
e	c	a	b	d
	d	a	b	c
			c	b

따라서 구하는 방법의 수는 11이다.

647 ⋯⋯ 답 14

첫 경기부터 A가 이긴 횟수가 B가 이긴 횟수보다 항상 많거나 같으므로 첫 경기는 무조건 A가 이긴다.
주어진 상황을 수형도로 나타내면 다음 그림과 같다.

A	A	A	A	B	B	B
			B	A	B	B
				B	A	B
					B	A
		B	A	A	B	B
				B	A	B
					B	A
			B	A	A	B
					B	A
	B	A	A	A	B	B
				B	A	B
					B	A
			B	A	A	B
					B	A

따라서 구하는 경우의 수는 14이다.

648 ⋯⋯ 답 24

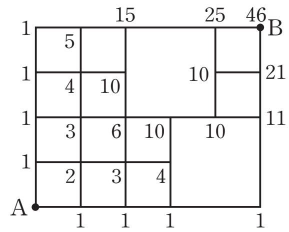
회장, 부회장, 회원 3명이 가져온 책을 각각 a, b, c, d, e라 하자.
각자가 가져오지 않은 책으로 나누어 가지려면 각자 스스로 가져온 책을 제외하고, 회장과 부회장은 서로의 책이 아니어야 하므로
조건을 만족시키는 경우를 수형도로 나타내면 다음 그림과 같다.

a	b	c	d	e
c	d	a	e	b
		b	e	a
		e	a	b
			b	a
	e	a	b	d
		b	a	d
		d	a	b
			b	a
d	c	a	e	b
		b	e	a
		e	a	b
			b	a
	e	a	b	c
			c	b
		b	a	c
			c	a
e	c	a	b	d
		b	a	d
		d	a	b
			b	a
	d	a	b	c
			c	b
		b	a	c
			c	a

따라서 구하는 방법의 수는 24이다.

649 ⋯⋯ 답 ⑤

공사로 인하여 진입이 제한된 길을 제외한 도로망에서 A 지점에서 출발하여 B 지점까지 도로를 따라 최단 거리로 이동하는 방법의 수를 일일이 세면 다음과 같다.



따라서 구하는 방법의 수는 46이다.

650 ······ 답 7

$a-1<b-3$을 정리하면 $b>a+2$이다.

(i) $a=2$인 경우

$b>2+2$, 즉 $b>4$이어야 하므로

조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b)는

$(2, 6)$, $(2, 7)$, $(2, 8)$의 3개이다.

(ii) $a=3$인 경우

$b>3+2$, 즉 $b>5$이어야 하므로

조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b)는

$(3, 6)$, $(3, 7)$, $(3, 8)$의 3개이다.

(iii) $a=5$인 경우

$b>5+2$, 즉 $b>7$이어야 하므로

조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b)는

$(5, 8)$의 1개이다.

(iv) $a=6$인 경우

$b>6+2$, 즉 $b>8$이어야 하므로

조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b)는 존재하지 않는다.

(i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는

$3+3+1=7$이다.

651 ······ 답 24

$(x-y)^3=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

이므로 $(x-y)^3(a+b+c)^2$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는

$4\times6=24$이다.

652 ······ 답 30

A 지점에서 출발해서 D 지점에 도착하는 경로를 나누어 생각하면 다음과 같다.

(i) 중간에 B 지점만 지나는 경우

A → B로 이동하는 방법의 수는 3

B → D로 이동하는 방법의 수는 2

이므로 A → B → D로 이동하는 방법의 수는 $3\times2=6$

(ii) 중간에 C 지점만 지나는 경우

A → C로 이동하는 방법의 수는 2

C → D로 이동하는 방법의 수는 4

이므로 A → C → D로 이동하는 방법의 수는 $2\times4=8$

(iii) 중간에 B, C 지점을 모두 지나는 경우

A → B → C → D의 순서로 이동하는 방법의 수는

$3\times1\times4=12$

A → C → B → D의 순서로 이동하는 방법의 수는

$2\times1\times2=4$

이므로 중간에 B, C지점을 모두 지나는 방법의 수는

$12+4=16$

(i)~(iii)에서 구하는 방법의 수는

$6+8+16=30$이다.

653 ······ 답 216

M은 54의 약수이고 $54=2\times3^3$이므로

M의 양의 약수의 개수가 6이 되기 위해서는

$M=2\times3^2$

즉, $n=2\times3^2\times k$ (k는 3의 배수가 아닌 자연수)이므로

가능한 n의 값은 18, 36, 72, 90의 4개이다. ······ 참고

따라서 구하는 모든 자연수 n의 값의 합은

$18+36+72+90=216$이다.

참고

$54=3M$이고,

$18=M$, $36=2M$, $72=4M$, $90=5M$이므로

18, 36, 72, 90은 모두 54와의 최대공약수가 18이다.

654 ······ 답 353

네 자리 자연수에서 각 자릿수가 모두 달라야 하므로

천의 자리의 숫자는 0을 제외하고 9가지

백의 자리의 숫자는 천의 자리의 숫자를 제외하고 9가지

십의 자리의 숫자는 천의 자리와 백의 자리의 숫자를 제외하고 8가지

일의 자리의 숫자는 천의 자리와 백의 자리와 십의 자리의 숫자를 제외하고 7가지이므로

만들 수 있는 각 자리의 숫자가 모두 다른 네 자리 자연수의 개수는

$9\times9\times8\times7$ ······ ㉠

이때 위에서 구한 네 자리 자연수 중 각 자리의 숫자에 6의 약수가 하나도 없는 자연수를 위와 같은 방법으로 구하면 그 개수는

$5\times5\times4\times3$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 구하는 자연수의 개수는

$k=9\times9\times8\times7-5\times5\times4\times3$

$$\therefore \frac{k}{12}=\frac{9\times9\times8\times7-5\times5\times4\times3}{12}$$

$$=\frac{4\times3\times(3\times9\times2\times7-5\times5)}{12}$$

$$=378-25=353$$

655 ······ 답 9

$0, 1, 2, \cdots, k$의 $(k+1)$개의 숫자를 이용하여

중복을 허락하지 않고 만들어지는 세 자리 자연수의 개수는

$a=k\times k\times(k-1)$ ······ ㉠

중복을 허락하여 만들어지는 세 자리 자연수의 개수는

$b=k\times(k+1)\times(k+1)$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서

$$\frac{b}{a}=\frac{k(k+1)^2}{k^2(k-1)}=\frac{(k+1)^2}{k(k-1)}=\frac{25}{18}$$

$25k(k-1)=18(k+1)^2$
$25k^2-25k=18k^2+36k+18$
$7k^2-61k-18=0$, $(7k+2)(k-9)=0$
$\therefore k=9$ ($\because k>0$)

656 ······ 답 ②

백의 자리 숫자에 따라 나누어 생각하면 다음과 같다.
(i) 백의 자리의 숫자가 1인 경우
일의 자리의 숫자는 3, 5, 7, 9의 4가지이고
십의 자리의 숫자는 0부터 9까지 10개의 정수 중 백의 자리의 숫자와 일의 자리의 숫자를 제외한 8가지이므로
$4\times8=32$
(ii) 백의 자리의 숫자가 2인 경우
일의 자리의 숫자는 1, 3, 5, 7, 9의 5가지이고
십의 자리의 숫자는 0부터 9까지 10개의 정수 중 백의 자리의 숫자와 일의 자리의 숫자를 제외한 8가지이므로
$5\times8=40$
(iii) 백의 자리의 숫자가 3인 경우
일의 자리의 숫자는 1, 5, 7, 9의 4가지이고
십의 자리의 숫자는 0부터 9까지 10개의 정수 중 백의 자리의 숫자와 일의 자리의 숫자를 제외한 8가지이므로
$4\times8=32$
(i)~(iii)에서 구하는 자연수의 개수는
$32+40+32=104$이다.

657 ······ 답 72

만들 수 있는 자연수는 1, 1, 2, 2, 3, 3, 5, 7, 7, 7 중 2개 이상의 숫자를 곱한 수이므로
구하는 자연수의 개수는 1, 1, 2, 2, 3, 3, 5, 7, 7, 7을 모두 곱한 수 $2^2\times3^2\times5\times7^3$의 양의 약수의 개수와 같다.
따라서 구하는 자연수의 개수는
$(2+1)\times(2+1)\times(1+1)\times(3+1)=72$이다.

658 ······ 답 72

주사위를 3번 던졌을 때 전체 경우의 수는
$6\times6\times6=216$
abc가 10의 배수가 되려면 주사위의 눈의 수는 5와 짝수가 꼭 포함되어야 한다.
이때 abc가 10의 배수가 되지 않는 경우를 나누어 생각하면 다음과 같다.
(i) 눈의 수에 5가 한 번도 포함되지 않을 때
5를 제외한 1, 2, 3, 4, 6 중에서만 나와야 하므로 경우의 수는
$5\times5\times5=125$
(ii) 눈의 수에 짝수가 한 번도 포함되지 않을 때
2, 4, 6을 제외한 1, 3, 5 중에서만 나와야 하므로 경우의 수는
$3\times3\times3=27$
(i), (ii)에서 눈의 수에 5와 짝수가 모두 포함되지 않을 때가 중복되고 1, 3 중에서만 나오는 경우의 수는 $2\times2\times2=8$
따라서 구하는 경우의 수는
$216-(125+27-8)=72$이다.

659 ······ 답 ④

540을 소인수분해하면 $540=2^2\times3^3\times5$
짝수인 양의 약수는 반드시 2를 인수로 가져야 한다.
따라서 구하는 약수의 개수는 전체 양의 약수의 개수에서 2를 인수로 갖지 않는, 홀수인 양의 약수의 개수를 빼면 된다.
$2^2\times3^3\times5$의 양의 약수 중 홀수의 개수는 $3^3\times5$의 양의 약수의 개수와 같으므로 구하는 약수의 개수는
$(2+1)\times(3+1)\times(1+1)-(3+1)\times(1+1)=16$이다.

다른 풀이
540을 소인수분해하면 $540=2^2\times3^3\times5$
짝수인 양의 약수는 반드시 2를 인수로 가져야 한다.
$2\times3^3\times5$의 양의 약수에 2를 곱한 수는 540의 약수인 동시에 짝수이므로 540의 양의 약수 중 짝수의 개수는 $2\times3^3\times5$의 양의 약수의 개수와 같다.
따라서 구하는 약수의 개수는
$(1+1)\times(3+1)\times(1+1)=16$이다.

660 ······ 답 ③

$a+b+c=X$, $abc=Y$라 하자.
$X+Y$의 값이 홀수이려면
X, Y 중 하나는 홀수이고 하나는 짝수이어야 한다.
(i) X는 짝수, Y는 홀수인 경우
a, b, c의 합은 짝수이고, 곱은 홀수이어야 한다.
이때 세 수의 곱이 홀수이면 세 수가 모두 홀수이어야 하고 세 홀수의 합은 반드시 홀수이므로 조건을 만족하는 경우는 없다.
(ii) X는 홀수, Y는 짝수인 경우
a, b, c의 합은 홀수이고, 곱은 짝수이어야 하므로 a, b, c 중 2개는 짝수이고 남은 1개는 홀수이어야 한다.
a, b, c 중 1개가 홀수인 경우의 수는 3
6 이하의 짝수와 홀수는 각각 모두 3개씩이므로 a, b, c의 수를 정하는 경우의 수는 $3\times3\times3=3^3$
따라서 a, b, c의 합은 홀수이고, 곱은 짝수인 경우의 수는
$3\times3^3=81$
(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 81이다.

661 ······ 답 풀이 참조

(i) 지불할 수 있는 방법의 수
10000원짜리 지폐 2장을 지불할 수 있는 방법은 3가지
5000원짜리 지폐 3장을 지불할 수 있는 방법은 4가지
1000원짜리 지폐 6장을 지불할 수 있는 방법은 7가지
이때 0원을 지불하는 경우를 제외해야 하므로
지불할 수 있는 방법의 수는
$a=3\times4\times7-1=84-1=83$이다.
(ii) 지불할 수 있는 금액의 수
10000원짜리 지폐 2장으로 지불할 수 있는 금액은
0원, 10000원, 20000원
5000원짜리 지폐 3장으로 지불할 수 있는 금액은
0원, 5000원, 10000원, 15000원
1000원짜리 지폐 6장으로 지불할 수 있는 금액은

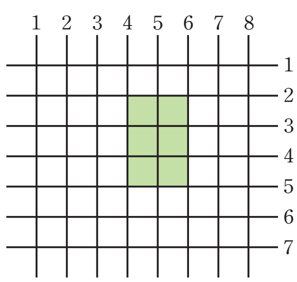
0원, 1000원, 2000원, 3000원, 4000원, 5000원, 6000원
이때 10000원짜리 지폐 1장으로 지불할 수 있는 금액과
5000원짜리 지폐 2장으로 지불할 수 있는 금액은 서로 같고,
5000원짜리 지폐 1장으로 지불할 수 있는 금액과
1000원짜리 지폐 5장으로 지불할 수 있는 금액이 서로 같으므로
10000원짜리 지폐 2장과 5000원짜리 지폐 3장을
모두 1000원짜리 지폐로 각각 20장, 15장으로 바꾸어 생각하면
구하는 지불할 수 있는 금액의 수는 1000원짜리 지폐
$20+15+6=41$(장)으로 지불할 수 있는 방법의 수와 같다.
따라서 1000원짜리 지폐 41장을 지불하는 방법의 수는
42가지이고 0원을 지불하는 경우를 제외해야 하므로
지불할 수 있는 금액의 수는
$b=42-1=41$이다.
(i), (ii)에서 $a+b=83+41=124$

채점 요소	배점
지불할 수 있는 방법의 수 구하기	40%
지불할 수 있는 금액의 수 구하기	50%
$a+b$의 값 구하기	10%

662

답 ④

다음과 같이 가로 방향으로 평행한 직선과 세로 방향으로 평행한 직선에 각각 번호를 붙이자.

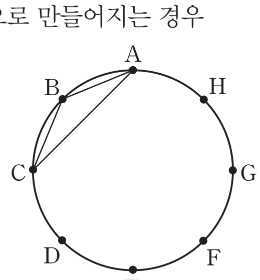


색칠된 부분을 모두 포함하도록 하려면
세로 방향으로 평행한 직선에서는 1, 2, 3, 4 중 한 개,
6, 7, 8 중 한 개를 선택하고
가로 방향으로 평행한 직선에서는 1, 2 중 한 개,
5, 6, 7 중 한 개를 선택해야 한다.
따라서 색칠된 사각형을 포함하는 사각형의 개수는
$4\times3\times2\times3=72$이다.

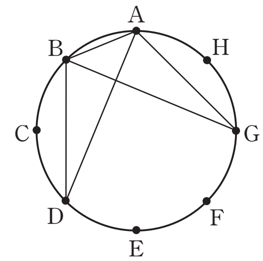
663

답 ③

외심이 삼각형의 외부에 존재하기 위해서는 만들어지는 삼각형이 둔각삼각형이어야 한다.
만들어질 수 있는 둔각삼각형은 다음과 같다.
(i) 이웃한 3개의 점으로 만들어지는 경우



이러한 둔각삼각형은 원의 둘레의 8개의 점에 대해서
각각 1개씩 만들어지므로 개수는 8이다.
(ii) 이웃한 2개의 점과 이웃하지 않은 한 점으로 만들어지는 경우



이러한 둔각삼각형은 원의 둘레의 이웃한 2개의 점에 대해서
각각 2개씩 만들어지므로 개수는
$2\times8=16$이다.
(i), (ii)에서 구하는 삼각형의 개수는
$8+16=24$이다.

664

답 380

조건을 만족시키는 세 자리 자연수를 작은 수부터 개수를 세어 보면 다음과 같다.
(i) 백의 자리의 숫자가 1인 경우
십의 자리의 숫자와 일의 자리의 숫자에 들어갈 수 있는 숫자는
1을 제외한 0부터 9까지의 음이 아닌 정수이므로 십의 자리와
일의 자리의 숫자를 결정하는 방법의 수는
$9\times8=72$
(ii) 백의 자리의 숫자가 2인 경우
(i)과 마찬가지이므로 이때의 방법의 수는
$9\times8=72$
(iii) 백의 자리의 숫자가 3인 경우
십의 자리의 숫자가 0, 1, 2, 4, 5, 6, 7인 수가 각각 8개씩
존재하므로 십의 자리의 숫자가 7이면서 가장 큰 수인 379가
200번째 수이다.
(i)~(iii)에서 각 자리의 숫자가 모두 다른 세 자리 자연수를 작은 수부터 크기 순서로 나열했을 때, 379가 200번째 수이므로 구하는 당첨번호는 380이다.

665

답 ③

숫자 1이 백의 자리 또는 십의 자리 또는 일의 자리에 있을 때
만들 수 있는 자연수의 개수는 다음과 같다.
(i) 숫자 1이 백의 자리의 숫자인 경우
십의 자리의 숫자와 일의 자리의 숫자는 각각 0, 1, 2, $\cdots$, 9 중
하나씩 선택하면 되므로 자연수의 개수는 $10\times10=100$
(ii) 숫자 1이 십의 자리의 숫자인 경우
백의 자리의 숫자는 0, 1, 2, 3, 4 중 하나이고
일의 자리의 숫자는 0, 1, 2, $\cdots$, 9 중 하나이므로 자연수의
개수는 $5\times10=50$
(iii) 숫자 1이 일의 자리의 숫자인 경우
백의 자리의 숫자는 0, 1, 2, 3, 4 중 하나이고
십의 자리의 숫자는 0, 1, 2, $\cdots$, 9 중 하나이므로 자연수의
개수는 $5\times10=50$

(ⅰ)~(ⅲ)에서 숫자 1을 쓰는 횟수는

$100+50+50=200$이다.

다른 풀이

자연수의 자릿수에 따라서 숫자 1을 쓰는 횟수를 세어주면 다음과 같다.

(ⅰ) 한 자리의 자연수인 경우

숫자 1이 포함된 수는 1뿐이므로

이 경우 숫자 1을 쓰는 횟수는 1

(ⅱ) 두 자리의 자연수인 경우

십의 자리의 숫자가 1인 수는 10, 11, 12, …, 19의

$1\times10=10$개

일의 자리의 숫자가 1인 수는 11, 21, 31, …, 91의

$9\times1=9$개

따라서 이 경우 숫자 1을 쓰는 횟수는

$10+9=19$

(ⅲ) 세 자리의 자연수인 경우

백의 자리의 숫자가 1인 수는 100, 101, 102, …, 199의

$1\times10\times10=100$개

십의 자리의 숫자가 1인 수는 110, 111, 112, …, 419의

$4\times1\times10=40$개

일의 자리의 숫자가 1인 수는 101, 111, 121, …, 491의

$4\times10\times1=40$개

따라서 이 경우 숫자 1을 쓰는 횟수는

$100+40+40=180$

(ⅰ)~(ⅲ)에서 숫자 1을 쓰는 횟수는

$1+19+180=200$이다.

TIP

본풀이의 (ⅱ)에서 백의 자리의 숫자가 0이면 두 자리의 자연수가 만들어지고 (ⅲ)에서 백의 자리의 숫자와 십의 자리의 숫자가 모두 0이면 한 자리의 자연수가 만들어진다.

예를 들어 (ⅱ)에서 백의 자리의 숫자가 0, 일의 자리의 숫자가 4인 경우 014이고 이를 14로 생각할 수 있다.

또한 (ⅲ)에서 백의 자리의 숫자와 십의 자리의 숫자가 모두 0이고 일의 자리의 숫자만 1이면 001이고 이는 1이다.

다른 풀이와 같이 자릿수에 따라서 경우를 나누어 세어줄 수도 있지만 0을 포함시켜서 세어주는 방법은 빠른 문제 해결로 이어지는 경우가 많으므로 두 방법을 서로 비교하여 익혀두도록 하자.

666

답 84

서로 인접하지 않은 두 영역 A, C를 칠하는 방법에 따라 나누어 생각하면 다음과 같다. …… 참고

(ⅰ) A, C에 같은 색을 칠하는 경우

A에 칠할 수 있는 색은 4가지

C에 칠할 수 있는 색은 1가지

B, D에 칠할 수 있는 색은 각각 A, C에 칠한 색을 제외한 3가지이므로 이때의 방법의 수는

$4\times3\times3=36$이다.

(ⅱ) A, C에 서로 다른 색을 칠하는 경우

A에 칠할 수 있는 색은 4가지

C에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지

B, D에 칠할 수 있는 색은 각각 A, C에 칠한 색을 제외한 2가지이므로 이때의 방법의 수는

$4\times3\times2\times2=48$이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 방법의 수는

$36+48=84$이다.

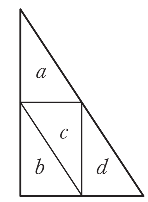
참고

이웃하지 않은 두 영역 B, D를 칠하는 방법에 따라 나누어 생각해도 결과는 동일하다.

667

답 72

다음과 같이 작은 직각삼각형을 각각 a, b, c, d라 하자.



이때 c는 a, b, d와 각각 한 변을 공유하므로

c에 적는 수에 따라 경우를 나누어 생각하면 다음과 같다.

(ⅰ) c에 1을 적는 경우

a, b, d에는 각각 2가 아닌 수를 적어야 한다.

a에 적을 숫자를 선택하는 방법의 수는 4

b에 적을 숫자를 선택하는 방법의 수는 3

d에 적을 숫자를 선택하는 방법의 수는 2

따라서 이 경우의 수는

$4\times3\times2=24$이다.

(ⅱ) c에 2 이상 5 이하의 수를 적는 경우

a, b, d에는 c에 적은 수와 연속하지 않는 수를 적어야 한다.

c에 적을 숫자를 선택하는 방법의 수는 4

a에 적을 숫자를 선택하는 방법의 수는 3

b에 적을 숫자를 선택하는 방법의 수는 2

d에 적을 숫자를 선택하는 방법의 수는 1

따라서 이 경우의 수는

$4\times3\times2\times1=24$이다.

(ⅲ) c에 6을 적는 경우

(ⅰ)과 마찬가지로 생각하면 이 경우의 수는

$4\times3\times2=24$이다.

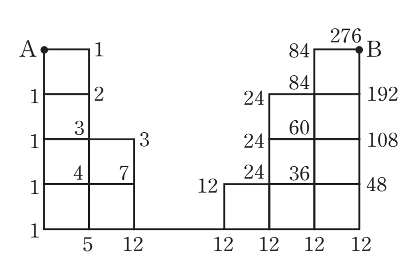
(ⅰ)~(ⅲ)에서 구하는 경우의 수는

$24+24+24=72$이다.

668

답 ⑤

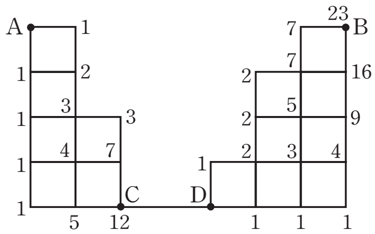
침수로 인해서 통행이 제한된 도로를 지우고 A 지점에서 B 지점까지 도로를 따라 최단 거리로 이동하는 방법의 수를 일일이 세면 다음과 같다.



따라서 구하는 방법의 수는 276이다.

다른 풀이

침수로 인해서 통행이 제한된 도로를 지우고 다음과 같이 C, D 지점을 정하자.



A 지점에서 C 지점까지 이동하는 방법의 수는 12
C 지점에서 D 지점까지 이동하는 방법의 수는 1
D 지점에서 B 지점까지 이동하는 방법의 수는 23
따라서 구하는 방법의 수는
$12\times1\times23=276$이다.

669 ······ 답 ②

주어진 직육면체의 꼭짓점 A를 출발하면 반드시 세 점 B, D, E 중 하나로 이동하게 된다.
꼭짓점 A에서 출발하여 모서리를 따라 꼭짓점 B를 지나 꼭짓점 G에 도착하는 경우를 수형도로 나타내면 다음 그림과 같다.

- A — B
  - C
    - G
    - D — H
      - G
      - E — F — G
  - F
    - G
    - E — H
      - G
      - D — C — G

마찬가지로 꼭짓점 A에서 출발하여 모서리를 따라 꼭짓점 D 또는 꼭짓점 E를 지났을 때도 같은 방법으로 이동할 수 있으므로 구하는 방법의 수는 $6\times3=18$이다.

670 ······ 답 ③

주어진 규칙에 따라 만들 수 있는 문자열을 3자리까지만 수형도로 나타내면 다음 그림과 같다.

- A
  - a: A, a
  - b: A, B, a
- a
  - A: a, b
  - a: A, a
- B
  - A: a, b
  - a: A, a
  - b: A, B, a
- b
  - A: a, b
  - B: A, a, b
  - a: A, a

이때 A, a 뒤에 올 수 있는 문자는 각각 2가지이고, B, b 뒤에 올 수 있는 문자는 각각 3가지이다.
문자열의 세 번째 자리에서 A 또는 a의 개수는 17이고, B 또는 b의 개수는 6이므로 구하는 경우의 수는
$17\times2+6\times3=52$이다.

참고

주어진 규칙에 따라서 4개의 문자열을 만드는 경우를 수형도로 나타내면 다음 그림과 같다.

- A
  - a
    - A: a, b
    - a: A, a
  - b
    - A: a, b
    - B: A, a, b
    - a: A, a
- a
  - A
    - a: A, a
    - b: A, B, a
  - a
    - A: a, b
    - a: A, a
- B
  - A
    - a: A, a
    - b: A, B, a
  - a
    - A: a, b
    - a: A, a
  - b
    - A: a, b
    - B: A, a, b
    - a: A, a
- b
  - A
    - a: A, a
    - b: A, B, a
  - B
    - A: a, b
    - a: A, a
    - b: A, B, a
  - a
    - A: a, b
    - a: A, a

671 ······ 답 200

1부터 49까지의 수를 6으로 나눈 나머지는
1, 2, 3, 4, 5, 0 중의 하나이다.
이 중 홀수는 6으로 나눈 나머지가 1, 3, 5이고,
두 수의 합이 6의 배수가 되는 경우는 선택한 두 수를 6으로 나눈 나머지가 1, 5인 경우와 모두 3인 경우이다.

(i) a, b를 6으로 나눈 나머지가 1, 5인 경우
6으로 나눈 나머지가 1인 수는
1, 7, 13, …, 49의 9개
6으로 나눈 나머지가 5인 수는
5, 11, 17, …, 47의 8개
이때 서로 다른 두 수 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수는
$9\times8\times2=144$

(ii) a, b를 6으로 나눈 나머지가 모두 3인 경우
6으로 나눈 나머지가 3인 수는
3, 9, 15, …, 45의 8개
서로 다른 두 수 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수는
$8\times7=56$

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 (a, b)의 개수는
$144+56=200$이다.

참고

홀수+홀수=짝수이므로 $a+b$가 3의 배수가 되도록 하는 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수를 세어주어도 그 결과는 같다.

672

답 19

조건 (가), (나)에 의하여
1교시부터 4교시에 국어, 영어를 연달아서 넣어야 하므로
경우를 나누어 생각하면 다음과 같다.

(i)

국어	영어				

조건 (다)에 의하여 과학은 3, 5교시 또는 3, 6교시 또는 4, 6교시에 넣어야 한다.
조건 (라)에 의하여 과학이 3, 6교시일 때,
나머지 교시에 수학, 체육 순서로 넣어야 하고
과학이 3, 5교시 또는 4, 6교시일 때,
나머지에 수학, 체육을 넣는 방법의 수는 2이다.
따라서 방법의 수는 $1+2\times2=5$

(ii)

	국어	영어			

조건 (다)에 의하여 과학은 1, 4교시 또는 1, 5교시 또는 1, 6교시 또는 4, 6교시에 넣어야 한다.
조건 (라)에 의하여 과학이 1, 4교시 또는 1, 6교시일 때,
나머지 교시에 수학, 체육 순서로 넣어야 하고
과학이 1, 5교시 또는 4, 6교시일 때,
나머지 교시에 수학, 체육을 넣는 방법의 수는 2이다.
따라서 방법의 수는 $2+2\times2=6$

(iii)

		국어	영어		

조건 (다)에 의하여 1, 2교시 중 하나에 과학을 넣고
5, 6교시 중 하나에 과학을 넣으면 된다.
과학을 넣는 방법의 수는 $2\times2=4$이고
조건 (라)에 의하여 나머지 교시에 수학, 체육을 넣는 방법의 수는 2이다.
따라서 방법의 수는 $4\times2=8$
(i)~(iii)에 의하여 구하는 방법의 수는
$5+6+8=19$이다.

673

답 16

하나의 가방에 축구공을 최대 4개 담을 수 있으므로 10개의 축구공을 모두 나누어 담으려면 적어도 3개 이상의 가방을 사용해야 한다.
사용하는 가방의 개수에 따라 나누어 생각하면 다음과 같다.

(i) 가방을 3개 사용하는 경우
$10=4+4+2$
$=4+3+3$
에서 2가지이다.

(ii) 가방을 4개 사용하는 경우
$10=4+4+1+1$
$=4+3+2+1$
$=4+2+2+2$
$=3+3+3+1$
$=3+3+2+2$
에서 5가지이다.

(iii) 가방을 5개 사용하는 경우
$10=4+3+1+1+1$
$=4+2+2+1+1$
$=3+3+2+1+1$
$=3+2+2+2+1$
$=2+2+2+2+2$
에서 5가지이다.

(iv) 가방을 6개 사용하는 경우
$10=4+2+1+1+1+1$
$=3+3+1+1+1+1$
$=3+2+2+1+1+1$
$=2+2+2+2+1+1$
에서 4가지이다.

(i)~(iv)에서 구하는 방법의 수는
$2+5+5+4=16$이다.

다른 풀이

10개의 축구공을 나누어 담을 때,
4개, 3개, 2개, 1개의 공을 담은 가방의 개수를 각각 x, y, z, w라 하면
$4x+3y+2z+w=10$이고 $x+y+z+w\le6$

(i) $x=2$일 때
$8+3y+2z+w=10$, $3y+2z+w=2$에서
가능한 y, z, w의 순서쌍 (y, z, w)는
$(0, 1, 0)$, $(0, 0, 2)$의 2개이다.

(ii) $x=1$일 때
$4+3y+2z+w=10$, $3y+2z+w=6$에서
가능한 y, z, w의 순서쌍 (y, z, w)는
$(2, 0, 0)$, $(1, 1, 1)$, $(1, 0, 3)$, $(0, 3, 0)$, $(0, 2, 2)$, $(0, 1, 4)$의 6개이다.

(iii) $x=0$일 때
$3y+2z+w=10$에서

ⓐ $y=3$일 때
$9+2z+w=10$, $2z+w=1$에서
가능한 z, w의 순서쌍 (z, w)는
$(0, 1)$의 1개이다.

ⓑ $y=2$일 때
$6+2z+w=10$, $2z+w=4$에서
가능한 z, w의 순서쌍 (z, w)는
$(2, 0)$, $(1, 2)$, $(0, 4)$의 3개이다.

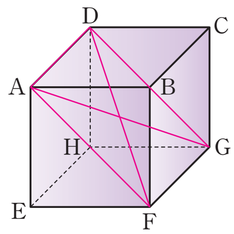
ⓒ $y=1$일 때
$3+2z+w=10$, $2z+w=7$에서
가능한 z, w의 순서쌍 (z, w)는
$(3, 1)$, $(2, 3)$의 2개이다.

ⓓ $y=0$일 때
$2z+w=10$에서
가능한 z, w의 순서쌍 (z, w)는
$(5, 0)$, $(4, 2)$의 2개이다.

(i)~(iii)에서 구하는 방법의 수는
$2+6+(1+3+2+2)=16$이다.

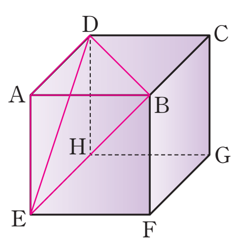
674 ······ 답 96

(i) 삼각형이 정육면체의 한 모서리만을 공유하는 경우
정육면체의 모서리 중 하나를 선택하는 경우의 수는 12
다음과 같이 모서리 AD가 선택될 때 이 모서리만을 공유하는
삼각형은 ADF, ADG로 2개가 만들어진다.



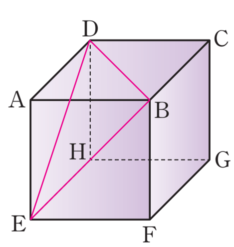
즉, 한 모서리를 선택할 때 이 모서리만을 공유하는 삼각형이
2개씩 만들어지므로 삼각형의 개수는
$a=12\times2=24$

(ii) 삼각형이 정육면체의 두 모서리를 공유하는 경우
정육면체의 꼭짓점 중 하나를 선택하는 경우의 수는 8
정육면체의 각 꼭짓점에서 3개의 모서리가 만나고
이 중 2개를 선택하여 삼각형의 두 변으로 고정하면
삼각형이 하나로 결정된다.
다음과 같이 꼭짓점 A를 공유하는 두 모서리만을 선택하는 경우는
두 모서리 AD, AE 또는 두 모서리 AD, AB 또는 두 모서리
AB, AE로 3가지이고 각각의 경우에 삼각형은 1개씩
만들어진다.



즉, 각 꼭짓점에 대하여 정육면체의 두 모서리를 공유하는
삼각형이 3개씩 만들어지므로 삼각형의 개수는
$b=8\times3=24$

(iii) 삼각형이 정육면체의 어느 모서리도 공유하지 않는 경우
정육면체의 꼭짓점 중 하나를 선택하는 경우의 수는 8
정육면체의 한 꼭짓점에서 3개의 면이 만나고, 이 세 면의
대각선을 삼각형의 세 변이 되도록 하면 그 삼각형은 정육면체와
어느 모서리도 공유하지 않는다.
다음과 같이 꼭짓점 A를 공유하는 세 면은 면 ABCD, 면 AEFB,
면 AEHD이고 이 3개의 면의 대각선으로 삼각형 DBE가
만들어진다.



즉, 각 꼭짓점에 대하여 정육면체의 어느 모서리도 공유하지 않는
삼각형이 1개씩 만들어지므로 삼각형의 개수는
$c=8\times1=8$

(i)~(iii)에서 $a+2b+3c=24+2\times24+3\times8=96$

675 ······ 답 ②

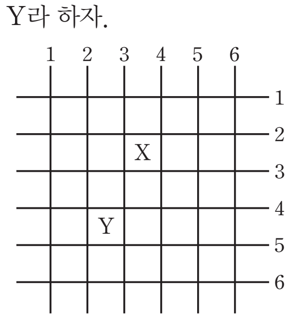
각 자리의 숫자는 3과 6을 제외한 0, 1, 2, 4, 5, 7, 8, 9의 8개의
숫자만 사용할 수 있고, 규칙대로 말했을 때 2000이 크기 순서대로
나열했을 때 몇 번째 자연수인지를 알아야 한다.
조건을 만족시키는 8개의 숫자로 만들 수 있는
0부터 999까지의 정수의 개수는 $8\times8\times8=512$
이때 모든 자리에 0이 오는 경우는 자연수가 아니므로 세 자리 이하의
자연수의 개수는 $512-1=511$이다.
천의 자리의 숫자가 1인 네 자리 자연수의 개수도 같은 방법으로
$8\times8\times8=512$ ······ TIP
따라서 2000보다 작은 자연수의 개수가 $511+512=1023$이므로
2000은 규칙대로 나열했을 때, 1024번째 자연수이다.
1번을 부여받은 학생부터 번호를 말하여 10명씩 돌아가면서 숫자를
말하게 되고, 1024는 10으로 나눈 나머지가 4이므로 2000을 말한 학
생의 번호는 4이다.

TIP

천의 자리의 숫자가 1인 경우는 나머지 세 자리의 숫자가 모두
0이어도 1000이 되므로 자연수이다.

676 ······ 답 88

다음과 같이 가로 방향으로 평행한 직선과 세로 방향으로 평행한
직선에 각각 번호를 붙이고 가로선 중 2, 3 사이에 있는 별을 X, 4,
5 사이에 있는 별을 Y라 하자.



(i) X를 포함하는 직사각형의 개수는
두 가로선 중 하나를 1, 2 중에서 뽑고,
다른 하나를 3, 4, 5, 6 중에서 뽑고,
두 세로선 중 하나를 1, 2, 3 중에서 뽑고,
다른 하나를 4, 5, 6 중에서 뽑으면 되므로
$2\times4\times3\times3=72$

(ii) Y를 포함하는 직사각형의 개수도 마찬가지로 구하면
$4\times2\times2\times4=64$

(iii) X와 Y를 모두 포함하는 직사각형의 개수도 마찬가지로 구하면
$2\times2\times2\times3=24$

(i), (ii)에 (iii)의 경우가 모두 포함되어 있으므로 각각의 경우에서
(iii)의 경우를 빼주면 된다.
따라서 구하는 직사각형의 개수는
$(72-24)+(64-24)=88$이다.

677 ········· 답 ③

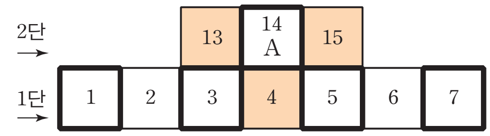
D에 칠할 수 있는 색은 5가지
A에 칠할 수 있는 색은 4가지
B에 칠할 수 있는 색은 3가지
(i) D와 E에 서로 같은 색을 칠하는 경우
C에 칠할 수 있는 색은 3가지
F에 칠할 수 있는 색은 3가지
(ii) A와 E에 서로 같은 색을 칠하는 경우
C에 칠할 수 있는 색은 3가지
F에 칠할 수 있는 색은 2가지
(iii) B와 E에 서로 같은 색을 칠하는 경우
C에 칠할 수 있는 색은 2가지
F에 칠할 수 있는 색은 3가지
(iv) A, B, D에 칠한 색과 E에 칠할 색이 모두 다른 경우
E에 칠할 수 있는 색은 2가지
C에 칠할 수 있는 색은 2가지
F에 칠할 수 있는 색은 2가지
(i)~(iv)에서 구하는 방법의 수는
$5\times4\times3\times(3\times3+3\times2+2\times3+2\times2\times2)=1740$

다른 풀이

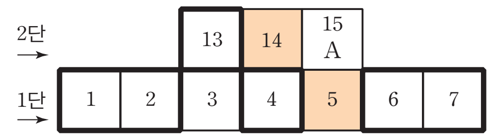
(i) C와 F에 같은 색을 칠하는 경우
C와 F에 칠할 수 있는 색은 5가지
D, E에 칠할 수 있는 색은 각각 C, F에 칠한 색을 제외한 4가지이므로
C, D, E, F에 색을 칠하는 경우의 수는 $5\times4\times4=80$
한편, A에 칠할 수 있는 색은 C, D에 칠한 색을 제외한 3가지
B에 칠할 수 있는 색은 A, D, F에 칠한 색을 제외한 2가지이므로
이 경우의 수는
$80\times3\times2=480$
(ii) C와 F에 다른 색을 칠하는 경우
C에 칠할 수 있는 색은 5가지
F에 칠할 수 있는 색은 4가지
D, E에 칠할 수 있는 색은 각각 C, F에 칠한 색을 제외한 3가지이므로
C, D, E, F에 색을 칠하는 경우의 수는 $5\times4\times3\times3=180$
한편, A, B에 칠할 수 있는 색은 다음과 같이 경우를 나누어 생각할 수 있다.
ⓐ A와 F에 같은 색을 칠하는 경우
B에 칠할 수 있는 색은 D, F에 칠한 색을 제외한 3가지
ⓑ A와 F에 다른 색을 칠하는 경우
A에 칠할 수 있는 색은 C, D, F에 칠한 색을 제외한 2가지
B에 칠할 수 있는 색은 A, D, F에 칠한 색을 제외한 2가지
ⓐ, ⓑ에 의하여 이 경우의 수는
$180\times(3+2\times2)=1260$
(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는
$480+1260=1740$이다.

678 ········· 답 60

조건 (가)에 의하여 A가 배정받는 사물함의 번호는 14 또는 15이고, B가 배정받는 사물함의 번호는 1 또는 2 또는 3 또는 4이다.
조건 (나)에 의하여 옆쪽 또는 위쪽으로 이웃한 사물함을 배정받는 학생은 없다.
(i) A가 번호가 14인 사물함을 배정받는 경우



A가 번호가 14인 사물함을 배정받으면 (나)에 의하여 나머지 4명은 번호가 1, 3, 5, 7인 사물함을 배정받아야 한다.
이때 B는 조건 (가)에 의하여 번호가 1 또는 3인 사물함을 배정받아야 하므로 B가 사물함을 배정받는 경우의 수는 2
나머지 3명이 남은 사물함을 배정받는 경우의 수는 $3\times2\times1=6$
따라서 5명의 학생이 사물함을 배정받는 경우의 수는 $2\times6=12$
(ii) A가 번호가 15인 사물함을 배정받는 경우



A가 번호가 15인 사물함을 배정받으면 조건 (나)에 의하여 나머지 4명은 번호가 1 또는 2인 사물함 중 하나, 번호가 6 또는 7인 사물함 중 하나, 번호가 4, 13인 사물함에 각각 하나씩 배정받아야 한다.
번호가 1 또는 2인 사물함 중에 1개를 배정받고 번호가 6 또는 7인 사물함 중 1개를 배정받는 경우의 수는 $2\times2=4$
이때 B는 조건 (나)에 의하여 번호가 1 또는 2인 사물함 중 선택된 사물함 또는 번호가 4인 사물함 중 하나를 배정받아야 하므로 B가 사물함을 배정받는 경우의 수는 2
나머지 3명의 학생이 사물함을 배정받는 경우의 수는
$3\times2\times1=6$
따라서 5명의 학생이 사물함을 배정받는 경우의 수는
$4\times2\times6=48$
(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $12+48=60$이다.

679 ········· 답 ③

a가 적힌 정사각형과 f가 적힌 정사각형에 같은 색을 칠해야 하고, 변을 공유하는 두 정사각형에는 서로 다른 색을 칠하므로
a, f, b, c, e, d가 적힌 정사각형의 순서로 색을 칠한다고 생각하자.
서로 다른 4가지 색의 일부 또는 전부를 사용하여 색을 칠하므로
a가 적힌 정사각형에 칠할 수 있는 색은 4가지
f가 적힌 정사각형에는 a가 적힌 정사각형에 칠한 색과 같은 색을 칠하므로 1가지
b가 적힌 정사각형에 칠할 수 있는 색은 a가 적힌 정사각형에 칠한 색을 제외한 3가지
c가 적힌 정사각형에 칠할 수 있는 색은 b, f가 적힌 정사각형에 칠한 색을 제외한 2가지
e가 적힌 정사각형에 칠할 수 있는 색은 b, f가 적힌 정사각형에 칠한 색을 제외한 2가지
d가 적힌 정사각형에 칠할 수 있는 색은 a, e가 적힌 정사각형에 칠한 색을 제외한 2가지
따라서 조건을 만족시키도록 색을 칠하는 경우의 수는
$4\times1\times3\times2\times2\times2=96$이다.

680 ······ 답 63

문자판에서 G는 오직 하나뿐이므로 반드시 칠해야 하고, G부터 거꾸로 N, I, R, P, S를 칠할 칸을 선택하면 된다.
이때 문자판이 좌우대칭의 모양으로 쓰여 있으므로 G부터 세로 방향의 칸을 몇 칸 선택해서 색칠할 지에 따라 나누어 생각하면 다음과 같다.

(i) 세로 방향으로 G만 칠하는 경우

S	P	R	I	N	**G**	N	I	R	P	S
	S	P	R	I	N	I	R	P	S	
		S	P	R	I	R	P	S		
			S	P	R	P	S			
				S	P	S				
					S					

N부터 순차적으로 색칠할 N, I, R, P, S가 적힌 칸을 결정하는 경우가 각각 2가지씩이므로
$2\times2\times2\times2\times2=32$(가지)

(ii) 세로 방향으로 G, N까지 칠하는 경우

S	P	R	I	N	**G**	N	I	R	P	S
	S	P	R	I	**N**	I	R	P	S	
		S	P	R	I	R	P	S		
			S	P	R	P	S			
				S	P	S				
					S					

I부터 순차적으로 색칠할 I, R, P, S가 적힌 칸을 결정하는 경우가 각각 2가지씩이므로
$2\times2\times2\times2=16$(가지)

(iii) 세로 방향으로 G, N, I까지 칠하는 경우

S	P	R	I	N	**G**	N	I	R	P	S
	S	P	R	I	**N**	I	R	P	S	
		S	P	R	**I**	R	P	S		
			S	P	R	P	S			
				S	P	S				
					S					

R부터 순차적으로 색칠할 R, P, S가 적힌 칸을 결정하는 경우가 각각 2가지씩이므로
$2\times2\times2=8$(가지)

(iv) 세로 방향으로 G, N, I, R까지 칠하는 경우

S	P	R	I	N	**G**	N	I	R	P	S
	S	P	R	I	**N**	I	R	P	S	
		S	P	R	**I**	R	P	S		
			S	P	**R**	P	S			
				S	P	S				
					S					

P부터 순차적으로 색칠할 P, S가 적힌 칸을 결정하는 경우가 각각 2가지씩이므로
$2\times2=4$(가지)

(v) 세로 방향으로 G, N, I, R, P까지 칠하는 경우

S	P	R	I	N	**G**	N	I	R	P	S
	S	P	R	I	**N**	I	R	P	S	
		S	P	R	**I**	R	P	S		
			S	P	**R**	P	S			
				S	**P**	S				
					S					

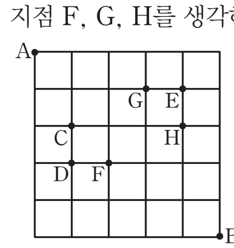
남은 S가 적힌 칸을 결정하는 경우의 수는 3이다.
(i)~(v)에서 구하는 방법의 수는
$32+16+8+4+3=63$이다.

681 ······ 답 108

1, 2, 3, 11, 12, 13, 21, 22, 23의 합은 108이고 $\frac{108}{3}=36$이므로 세 줄에 합이 서로 같도록 써 넣으려면 각 줄에 있는 세 수의 합은 36이어야 한다.
따라서 $k=36$
세 수의 합이 36이 되는 경우는
$1+12+23$, $1+13+22$, $2+11+23$, $2+13+21$, $3+11+22$, $3+12+21$, $2+12+22$
이때 1, 2, 3과 11, 12, 13과 21, 22, 23이 서로 다른 가로 줄에 각각 하나씩 나누어 들어가야 한다.
먼저 1, 2, 3이 들어갈 가로 줄을 하나씩 정하는 경우의 수는
$3\times2\times1=6$
1이 들어간 가로 줄에 12, 23 또는 13, 22 중 하나를 선택하여 써넣으면 주어진 규칙에 의하여 남은 칸들에 들어갈 수는 각각 유일하게 정해진다. 또한 1이 들어간 가로 줄의 세 칸에서 숫자들의 위치를 바꾸는 방법의 수는 $3\times2\times1=6$
따라서 숫자를 모두 써넣는 경우의 수는 $m=6\times2\times6=72$
$\therefore\ k+m=36+72=108$

682 ······ 답 70

(i) A → C → D → E → B의 순서로 이동하는 경우
A → C로 이동하는 방법의 수는 3
C → D로 이동하는 방법의 수는 1
다음 그림과 같이 세 지점 F, G, H를 생각하자.



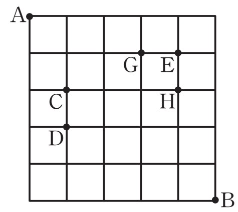
D → E로 이동할 때 지점 C는 지나지 않아야 하므로 반드시 D → F로 이동해야 한다. 이 방법의 수는 1
ⓐ F → G → E로 이동하는 방법의 수는 $3\times1=3$
E → B로 이동하는 방법의 수는 5
ⓑ F → H → E로 이동하는 방법의 수는 $3\times1=3$
E → B로 이동할 때 지점 H는 지나지 않아야 하므로 이 방법의 수는 1
따라서 이 경우의 최단 경로의 수는
$3\times1\times1\times(3\times5+3\times1)=54$

(ii) A → D → C → E → B의 순서로 이동하는 경우

A → D로 이동할 때 지점 C는 지나지 않아야 하므로 이 방법의 수는 1

D → C로 이동하는 방법의 수는 1

다음 그림과 같이 두 지점 G, H를 생각하자.



ⓐ C → G → E로 이동하는 방법의 수는 $3\times1=3$

E → B로 이동하는 방법의 수는 5

ⓑ C → H → E로 이동하는 방법의 수는 $1\times1=1$

E → B로 이동할 때 지점 H는 지나지 않아야 하므로 이 방법의 수는 1

따라서 이 경우의 최단 경로의 수는

$1\times1\times(3\times5+1\times1)=16$

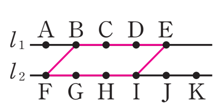
(i), (ii)에서 구하는 최단 경로의 수는

$54+16=70$이다.

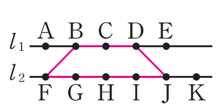
683 ······ 답 20

선택한 4개의 점을 꼭짓점으로 하는 사각형은 사다리꼴이고 두 직선 l_1, l_2 사이의 거리가 1이므로 높이가 1이다.

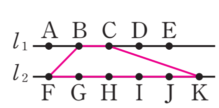
따라서 사다리꼴의 넓이가 3이 되려면 윗변의 길이와 아랫변의 길이의 합이 6이 되어야 하므로 두 직선 l_1, l_2에서 각각 선택한 두 점 사이의 거리가 3, 3 또는 2, 4 또는 1, 5이고 다음 그림과 같다.



[그림 1]



[그림 2]



[그림 3]

(i) 윗변과 아랫변의 길이가 모두 3인 경우

직선 l_1에서 거리가 3인 두 점을 선택하는 경우는

(A, D), (B, E)의 2가지

직선 l_2에서 거리가 3인 두 점을 선택하는 경우는

(F, I), (G, J), (H, K)의 3가지

따라서 사각형의 개수는 $2\times3=6$

(ii) 평행한 두 변의 길이가 2, 4인 경우

ⓐ 직선 l_1에서 거리가 2인 두 점을 선택하는 경우는

(A, C), (B, D), (C, E)의 3가지

직선 l_2에서 거리가 4인 두 점을 선택하는 경우는

(F, J), (G, K)의 2가지

이므로 $3\times2=6$(가지)

ⓑ 직선 l_1에서 거리가 4인 두 점을 선택하는 경우는

(A, E)의 1가지

직선 l_2에서 거리가 2인 두 점을 선택하는 경우는

(F, H), (G, I), (H, J), (I, K)의 4가지

이므로 $1\times4=4$(가지)

따라서 사각형의 개수는 $6+4=10$

(iii) 평행한 두 변의 길이가 1, 5인 경우

직선 l_1에서 거리가 1인 두 점을 선택하는 경우는

(A, B), (B, C), (C, D), (D, E)의 4가지

직선 l_2에서 거리가 5인 두 점을 선택하는 경우는

(F, K)의 1가지

따라서 사각형의 개수는 $4\times1=4$

(i)~(iii)에서 구하는 사각형의 개수는

$6+10+4=20$이다.

02 순열과 조합

684
답 (1) 3 (2) 6

(1) $60=5\times4\times3$이므로 ${}_{5}\mathrm{P}_{r}=60$을 만족시키는 r의 값은 $r=3$이다.

(2) ${}_{n}\mathrm{P}_{2}$, ${}_{n}\mathrm{P}_{4}$에서 $n\geq4$이고

$12\times{}_{n}\mathrm{P}_{2}={}_{n}\mathrm{P}_{4}$에서

$12\times n(n-1)=n(n-1)(n-2)(n-3)$

따라서 $12=(n-2)(n-3)$이고

$12=4\times3$이므로 $n-2=4$ ...... TIP

$\therefore n=6$

TIP

$12=(n-2)(n-3)$에서

$n^2-5n-6=(n-6)(n+1)=0$

으로 식을 정리해도 $n=6$을 구할 수 있다.

참고

${}_{n}\mathrm{P}_{r}$의 정의에 의하여 n은 자연수이고 $0\leq r\leq n$이다.

685
답 ③

① ${}_{4}\mathrm{P}_{0}=1$ (참)

② ${}_{n}\mathrm{P}_{r}=\dfrac{n!}{(n-r)!}$ (참)

③ ${}_{4}\mathrm{P}_{1}=4$, ${}_{4}\mathrm{P}_{3}=4\times3\times2=24$이므로 ${}_{4}\mathrm{P}_{1}\neq{}_{4}\mathrm{P}_{3}$ (거짓)

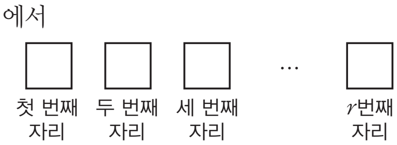
④ $0!=1$이므로 $3!\times0!=3!=3\times2\times1=6$ (참)

⑤ ${}_{n}\mathrm{P}_{r}=\dfrac{n!}{(n-r)!}=n(n-1)(n-2)\times\cdots\times(n-r+1)$ (참)

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

686
답 ⑤

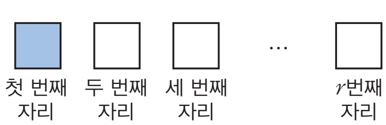
서로 다른 n개에서



[그림 1]

[그림 1]의 첫 번째 자리에 올 대상을 정하는 방법은

$\boxed{n}$가지이다.



[그림 2]

이때 [그림 2]의 나머지 자리에 남은 것을 일렬로 배열하는 경우의 수는 $\boxed{{}_{n-1}\mathrm{P}_{r-1}}$이다.

따라서 서로 다른 n개에서 r개를 택하여 일렬로 배열하는 순열의 수 ${}_{n}\mathrm{P}_{r}$은 곱의 법칙에 의하여

${}_{n}\mathrm{P}_{r}=\boxed{n}\times\boxed{{}_{n-1}\mathrm{P}_{r-1}}$이다.

$\therefore$ (가) n, (나) ${}_{n-1}\mathrm{P}_{r-1}$

참고

등식 ${}_{n}\mathrm{P}_{r}=n\times{}_{n-1}\mathrm{P}_{r-1}$의 증명은 다음과 같다.

$$n\times{}_{n-1}\mathrm{P}_{r-1}=n\times\frac{(n-1)!}{\{n-1-(r-1)\}!}$$
$$=\frac{n!}{(n-r)!}$$
$$={}_{n}\mathrm{P}_{r}$$

687
답 120

서로 다른 5개의 인형을 일렬로 나열하는 방법의 수는

$5!=5\times4\times3\times2\times1=120$

688
답 10

${}_{n}\mathrm{P}_{3}=n(n-1)(n-2)$이므로

$n(n-1)(n-2)=720$에서

$720=10\times9\times8$ ...... TIP

$\therefore n=10$

TIP

$n(n-1)(n-2)=720$에서

$n^3-3n^2+2n-720=0$, $(n-10)(n^2+7n+72)=0$

으로 식을 정리해도 $n=10$을 구할 수 있다.

689
답 ④

양 끝 적어도 한 자리에 남학생이 서는 경우의 수는 전체 6명이 일렬로 서는 경우의 수에서 양 끝에 모두 여학생이 서는 경우의 수를 뺀 것과 같다.

전체 6명의 학생이 일렬로 서는 경우의 수는 $6!$이다.

양 끝에 모두 여학생이 서는 경우의 수는

여학생 4명 중 2명을 뽑아 양 끝에 배열하는 경우의 수가 ${}_{4}\mathrm{P}_{2}$이고, 이를 제외한 나머지 4명을 가운데 배열하는 경우의 수가 $4!$이므로

${}_{4}\mathrm{P}_{2}\times4!$

따라서 구하는 경우의 수는

$6!-{}_{4}\mathrm{P}_{2}\times4!=4!\times(6\times5-4\times3)=432$

690
답 ④

1등, 2등, 3등 중 2개의 순위에 A, B가 포함되어야 하므로

두 사람의 순위를 정하는 방법의 수는 ${}_{3}\mathrm{P}_{2}=6$이고

나머지 4명을 나머지 등수로 정하면 되므로 구하는 경우의 수는

$6\times4!=144$

691
답 144

o와 a 사이에 나머지 4개의 문자 중 2개의 문자를 선택하여 나열하는 경우의 수는 ${}_{4}\mathrm{P}_{2}=12$

o□□a를 한 문자로 생각하여 3개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $3!=6$

o와 a의 자리를 서로 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$
따라서 구하는 경우의 수는
$12\times6\times2=144$이다.

692 ······ 답 72

노래 3팀과 춤 3팀이 각각 공연할 순서를 정하는 방법의 수는
$3!\times3!=6\times6=36$
가장 먼저 공연하는 팀이 노래 팀인지 춤 팀인지를 선택하는 방법의 수는 2이므로 구하는 방법의 수는
$36\times2=72$

693 ······ 답 ③

수학책은 5권이고 영어책은 4권, 즉 영어책이 수학책보다 1권 적으므로 수학책을 일렬로 나열한 후 영어책을 수학책 사이사이에 나열하면 된다.
수학책 5권을 일렬로 나열하는 경우의 수는 $5!=120$
5권의 수학책 사이사이에 영어책 4권을 나열하는 경우의 수는
$4!=24$
따라서 구하는 경우의 수는
$120\times24=2880$이다.

694 ······ 답 ③

힙합 4곡의 순서를 정하는 방법의 수는
$4!=24$

✓	힙합	✓	힙합	✓	힙합	✓	힙합	✓

이때 ✓의 5개의 자리 중 3개를 택하여 발라드 3곡의 순서를 정하는 방법의 수는
${}_5P_3=60$
따라서 구하는 경우의 수는
$24\times60=1440$이다.

695 ······ 답 96

$0+1+2+3+4+5=15$이므로 조건을 만족시키려면 양 끝의 두 수가 4, 5 또는 3, 5이어야 한다.
(i) 양 끝의 두 수가 4, 5인 경우
나머지 네 수 0, 1, 2, 3을 배열하는 방법의 수는 $4!=24$이고, 양 끝의 4, 5가 서로 자리를 바꿀 수 있으므로 숫자열의 개수는
$24\times2!=48$
(ii) 양 끝의 두 수가 3, 5인 경우
(i)과 마찬가지로 생각하면 숫자열의 개수는 48
(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는
$48+48=96$이다.

696 ······ 답 ⑤

부모가 같은 열에 앉는 경우를 나누어 생각하면 다음과 같다.
(i) 부모가 1열에 앉는 경우
부모가 1열에 앉는 경우의 수는 $2!=2$
자녀 3명이 2열에 앉는 경우의 수는 $3!=6$
따라서 경우의 수는 $2\times6=12$이다.
(ii) 부모가 2열에 앉는 경우
부모가 2열에 앉는 경우의 수는 ${}_3P_2=6$
자녀 3명이 나머지 자리에 앉는 경우의 수는 $3!=6$
따라서 경우의 수는 $6\times6=36$이다.
(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는
$12+36=48$이다.

697 ······ 답 ③

① ${}_nC_0=1$ (거짓)
② ${}_7C_4=\dfrac{{}_7P_4}{4!}$ (거짓)
③ ${}_6C_2={}_6C_4$ (참)
④ ${}_3P_2=6$, ${}_3C_2=3$이므로 ${}_3P_2={}_3C_2+3$ (거짓)
⑤ ${}_8P_7=8\times7\times6\times\cdots\times2=8!$ (거짓)
따라서 옳은 것은 ③이다.

698 ······ 답 11

${}_nP_2=n(n-1)$, ${}_nC_3=\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3\times2\times1}$이므로
$3\times{}_nP_2=2\times{}_nC_3$에서
$3\times n(n-1)=2\times\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3\times2\times1}$
$n-2=9$ ($\because n\geq3$)
$\therefore n=11$

참고
${}_nC_r$의 정의에 의하여 n은 자연수이고 $0\leq r\leq n$이다.

699 ······ 답 5

${}_{10}C_{r-2}$에서 $0\leq r-2\leq10$이므로 $2\leq r\leq12$
${}_{10}C_{2r-3}$에서 $0\leq2r-3\leq10$이므로 $\dfrac{3}{2}\leq r\leq\dfrac{13}{2}$
따라서 $2\leq r\leq\dfrac{13}{2}$이다. ······ ㉠
또한 등식 ${}_{10}C_{r-2}={}_{10}C_{2r-3}$을 만족시키려면
$r-2=2r-3$ 또는 $(r-2)+(2r-3)=10$이어야 한다.
(i) $r-2=2r-3$인 경우
$r=1$이므로
㉠을 만족시키지 않는다.
(ii) $(r-2)+(2r-3)=10$인 경우
$3r=15$, $r=5$
주어진 등식은 ${}_{10}C_3={}_{10}C_7$이므로 성립한다.
(i), (ii)에서 $r=5$이다.

700 ······ 답 360

8 이하의 자연수 중 9의 약수는 1, 3이므로
2, 4, 5, 6, 7, 8의 6개의 자연수 중 4개를 선택하는 방법의 수는

${}_6C_4={}_6C_2=15$
선택한 4개의 수를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $4!=24$
따라서 구하는 경우의 수는
$15\times24=360$이다.

701 ⋯⋯ 답 ③

7개의 문자 중 a, c를 반드시 포함해야 하므로
b, d, e, f, g 중 3개를 선택하는 방법의 수는 ${}_5C_3=10$이다.
선택한 5개의 문자를 일렬로 나열하는 전체 경우의 수는 $5!$이고,
이 중 a와 c가 서로 이웃한 경우의 수는 $2!\times4!$이므로
구하는 문자열의 개수는
$10\times(5!-2!\times4!)=10\times4!\times(5-2)=720$이다.

다른 풀이

7개의 문자 중 a, c를 반드시 포함해야 하므로
b, d, e, f, g 중 3개를 선택하여 나열하는 방법의 수는
${}_5P_3=60$
이때 이 세 문자 사이와 양 끝을 포함한 총 4자리 중
2자리를 선택하여 a, c를 배열하는 방법의 수는
${}_4P_2=12$이므로 구하는 문자열의 개수는
$60\times12=720$이다.

702 ⋯⋯ 답 ④

7개의 점 중 서로 다른 3개의 점을 선택하는 경우의 수는
${}_7C_3=35$
이때 지름 위의 3개의 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형은 존재하지 않는다.
지름 위의 4개의 점 중 3개의 점을 선택하는 경우의 수는
${}_4C_3={}_4C_1=4$
따라서 구하는 삼각형의 개수는
$35-4=31$이다.

703 ⋯⋯ 답 ④

가로 방향의 4개의 평행선 중 2개를 선택하고 세로 방향의 5개의 평행선 중 2개를 선택하면 선택한 4개의 평행선으로 둘러싸인 평행사변형이 만들어진다.
따라서 구하는 평행사변형의 개수는
${}_4C_2\times{}_5C_2=6\times10=60$이다.

704 ⋯⋯ 답 ④

9명 중 회장 1명을 뽑는 경우의 수는
${}_9C_1=9$
나머지 8명 중 부회장 2명을 뽑는 경우의 수는
${}_8C_2=28$
따라서 구하는 경우의 수는
$9\times28=252$이다.

705 ⋯⋯ 답 350

주재료의 5종류에서 2종류를 선택하는 경우의 수는
${}_5C_2=10$
계란은 반드시 선택하므로 나머지 부재료 7종류에서 3종류를 선택하는 경우의 수는
${}_7C_3=35$
따라서 구하는 방법의 수는
$10\times35=350$이다.

706 ⋯⋯ 답 21

선택한 4명의 학년에 따라 나누어 생각하면 다음과 같다.
(i) 모두 1학년인 경우
이 경우의 수는 ${}_4C_4=1$
(ii) 모두 2학년인 경우
이 경우의 수는 ${}_5C_4={}_5C_1=5$
(iii) 모두 3학년인 경우
이 경우의 수는 ${}_6C_4={}_6C_2=15$
(i)~(iii)에서 구하는 경우의 수는
$1+5+15=21$이다.

707 ⋯⋯ 답 231

구하는 경우의 수는 간식 상자에 들어 있는 간식 중 5개를 선택하는 경우의 수에서 사탕을 선택하지 않는 경우의 수를 뺀 것과 같다.
간식 상자에 들어 있는 10개의 간식 중 5개를 선택하는 경우의 수는
${}_{10}C_5=252$
간식 상자에서 사탕을 제외하고 초콜릿과 젤리 중 5개를 선택하는 경우의 수는 ${}_7C_5=21$
따라서 구하는 경우의 수는
$252-21=231$이다.

708 ⋯⋯ 답 44

1부터 9까지의 자연수 중에는 홀수가 5개, 짝수가 4개 포함되어 있다.
선택한 6장의 카드에 적힌 수의 합이 홀수가 되려면
6개의 숫자 중 홀수의 개수가 3 또는 5가 되어야 한다.
(i) 홀수의 개수가 3인 경우
홀수 3개, 짝수 3개를 선택하는 방법의 수는
${}_5C_3\times{}_4C_3=10\times4=40$
(ii) 홀수의 개수가 5인 경우
홀수 5개, 짝수 1개를 선택하는 방법의 수는
${}_5C_5\times{}_4C_1=1\times4=4$
(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는
$40+4=44$이다.

참고
$1+2+3+\cdots+9=45$, 즉 홀수이므로 선택하지 않은 3장의 카드에 적혀 있는 수의 합이 짝수인 경우의 수를 세어주어도 된다.

709 답 19

회원 n명이 서로 한 번씩 악수하는 방법의 수는 회원 n명 중 2명을 뽑는 방법의 수와 같으므로

$${}_{n}C_{2}=\frac{n(n-1)}{2!}=171$$

$n(n-1)=342=19\times18$

$\therefore n=19$ ($\because n\geq2$)

710 답 ②

10개의 팀 중 경기를 할 서로 다른 두 팀을 선택하는 방법의 수는

${}_{10}C_{2}=45$

각 팀이 6회씩 경기를 하므로 구하는 총 경기의 수는

$6\times45=270$이다.

711 답 ⑤

티셔츠 5벌 중 3벌을 선택하는 방법의 수는

${}_{5}C_{3}={}_{5}C_{2}=10$

원피스 4벌 중 2벌을 선택하는 방법의 수는

${}_{4}C_{2}=6$

선택된 티셔츠 3벌과 원피스 2벌을 합쳐 총 5벌을 일렬로 진열하는 방법의 수는 $5!$이므로 구하는 방법의 수는

$10\times6\times5!=7200$이다.

712 답 ②

구하는 경우의 수는 전체 사탕 중 2개를 뽑는 경우의 수에서 같은 맛 사탕으로 2개를 꺼내는 경우를 제외시키면 된다.

전체 사탕 15개 중 2개의 사탕을 꺼내는 방법의 수는

${}_{15}C_{2}=105$

같은 맛 사탕으로 2개를 뽑는 방법의 수는

${}_{4}C_{2}+{}_{5}C_{2}+{}_{3}C_{2}+{}_{3}C_{2}=6+10+3+3=22$

따라서 구하는 경우의 수는

$105-22=83$이다.

713 답 64

사용할 수 있는 쿠키는 7개이므로 세트 상품 안의 초콜릿의 개수는 3 이상 9 이하의 홀수이다.

세트 상품에 초콜릿을 각각 3개, 5개, 7개, 9개 넣을 때 쿠키를 각각 7개, 5개, 3개, 1개 넣어야 한다.

이때 초콜릿은 모두 서로 같은 제품이므로 쿠키를 먼저 고르고 나머지 개수를 초콜릿으로 채우면 된다.

따라서 만들 수 있는 세트 상품의 종류는

${}_{7}C_{7}+{}_{7}C_{5}+{}_{7}C_{3}+{}_{7}C_{1}=1+21+35+7=64$(가지)이다.

714 답 ④

볼펜 8개를 4개씩 두 묶음으로 나누는 방법의 수는

$${}_{8}C_{4}\times{}_{4}C_{4}\times\frac{1}{2!}=70\times1\times\frac{1}{2}=35$$

이때 두 묶음을 두 사람에게 나누어주는 방법의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 방법의 수는

$35\times2=70$이다.

715 답 630

7명을 2명, 2명, 3명의 조로 나누는 방법의 수는

$${}_{7}C_{2}\times{}_{5}C_{2}\times{}_{3}C_{3}\times\frac{1}{2!}=21\times10\times1\times\frac{1}{2}=105$$

이때 세 개의 조를 서로 다른 3개의 방에 배정하는 방법의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 방법의 수는

$105\times6=630$이다.

716 답 ③

4인실과 6인실에 배정하는 사람 수는 각각 4명, 4명 또는 3명, 5명 또는 2명, 6명이다.

(i) 4인실과 6인실에 각각 4명, 4명 배정하는 경우

$${}_{8}C_{4}\times{}_{4}C_{4}\times\frac{1}{2!}\times2!=70\times1\times\frac{1}{2}\times2=70$$

(ii) 4인실과 6인실에 각각 3명, 5명 배정하는 경우

${}_{8}C_{3}\times{}_{5}C_{5}=56\times1=56$

(iii) 4인실과 6인실에 각각 2명, 6명 배정하는 경우

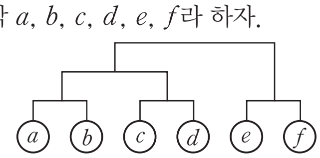
${}_{8}C_{2}\times{}_{6}C_{6}=28\times1=28$

(i)~(iii)에서 구하는 방법의 수는

$70+56+28=154$이다.

717 답 ②

다음 그림과 같이 주어진 대진표에서 배정받을 수 있는 6개의 자리를 왼쪽에서부터 각각 a, b, c, d, e, f라 하자.



이와 같은 대진표에서 a, b끼리, c, d끼리, e, f끼리는 서로 구분이 없고, a와 b, c와 d의 두 조도 서로 구분이 없다.

e, f에 들어갈 반을 정하는 경우의 수는

${}_{6}C_{2}=15$

나머지 4개의 반을 a와 b, c와 d의 구분이 없는 두 조로 나누는 경우의 수는

$${}_{4}C_{2}\times{}_{2}C_{2}\times\frac{1}{2!}=6\times1\times\frac{1}{2}=3$$

따라서 구하는 방법의 수는

$15\times3=45$이다.

718 ········ 답 풀이 참조

$$ {}_{n-1}\mathrm{P}_r + r \times {}_{n-1}\mathrm{P}_{r-1} = \frac{(n-1)!}{(n-1-r)!} + \frac{r(n-1)!}{\{(n-1)-(r-1)\}!} $$
$$ = \frac{(n-1)!}{(n-r)!}\{(n-r)+r\} $$
$$ = \frac{n!}{(n-r)!} $$
$$ = {}_n\mathrm{P}_r $$

따라서 등식 ${}_{n-1}\mathrm{P}_r + r \times {}_{n-1}\mathrm{P}_{r-1} = {}_n\mathrm{P}_r$이 성립한다.

채점 요소	배점
순열의 수를 계승을 이용하여 ${}_{n-1}\mathrm{P}_r = \frac{(n-1)!}{(n-1-r)!}$, $r \times {}_{n-1}\mathrm{P}_{r-1} = \frac{r(n-1)!}{\{(n-1)-(r-1)\}!}$ 로 나타내기	50%
좌변을 정리하여 등식이 성립함을 보이기	50%

719 ········ 답 ④

어른이 앉을 수 있는 자리는
A1, B1 또는 A1, B4 또는 A3, B1 또는 A3, B4의 4가지,
이 두 자리에 어른 2명이 앉는 방법의 수는 $2!=2$,
나머지 5개의 자리에 어린이가 앉는 방법의 수는 $5!=120$
따라서 구하는 방법의 수는
$4\times2\times120=960$이다.

720 ········ 답 ②

조건 (가)에서 3명은 5층부터 12층까지 8개의 층에서 내릴 수 있고,
조건 (나)에서 서로 연속하지 않는 3개의 층에서 한 명씩 내린다.
따라서 구하는 경우의 수는 8개의 의자에 3명이 서로 이웃하지 않게 자리를 정해 앉는 경우의 수와 같다.
즉, 다음과 같이 빈 의자 5개를 두고 빈 의자의 양 끝 또는 사이 6자리 중에서 3개의 자리를 정해서 앉는 경우의 수와 같다.

1	의자	2	의자	3	의자	4	의자	5	의자	6

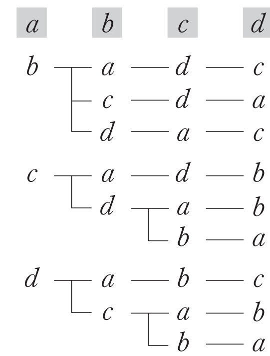
따라서 구하는 경우의 수는
${}_6\mathrm{P}_3=6\times5\times4=120$이다.

721 ········ 답 ④

여학생 2명을 한 묶음으로 보고 이 한 묶음과 빈 의자 2개를
[여|여], ○, ○과 같이 나타내면 이를 나열하는 방법은 다음과 같이 3가지이다.
[여|여]○○, ○[여|여]○, ○○[여|여]
이때 남학생은 이웃하지 않아야 하므로 위에서 두 여학생의 묶음과 빈 의자 사이 또는 양 끝 자리에 앉아야 한다.
따라서 남학생 2명이 앉을 자리를 정하는 방법의 수는 ${}_4\mathrm{P}_2=12$
두 여학생이 서로 자리를 바꾸는 방법의 수는 $2!=2$
따라서 구하는 방법의 수는
$3\times12\times2=72$이다.

722 ········ 답 15

구하는 경우의 수는 4명이 박스에서 쪽지를 뽑는 경우의 수에서
a, b, c, d의 4명이 각각 다른 사람의 이름이 적힌 쪽지를 뽑는 경우의 수를 뺀 것과 같다.
4명이 박스에서 쪽지를 뽑는 경우의 수는 $4!=24$이고,
a, b, c, d의 4명이 각각 다른 사람의 이름이 적힌 쪽지를 뽑는 경우를 수형도로 나타내면 다음 그림과 같다.



따라서 구하는 경우의 수는
$24-9=15$이다.

723 ········ 답 ④

300보다 크고 4000보다 작은 자연수 중 세 자리 자연수와 네 자리 자연수로 나누어 생각하면 다음과 같다.
(ⅰ) 세 자리 자연수
백의 자리의 숫자는 3 또는 4로 2가지,
십의 자리, 일의 자리의 숫자는 1, 2, 3, 4 중 백의 자리의 숫자를 제외한 3개 중 2개를 뽑아 나열하면 되므로 ${}_3\mathrm{P}_2=6$(가지)
따라서 자연수의 개수는 $2\times6=12$
(ⅱ) 네 자리 자연수
천의 자리의 숫자가 1 또는 2 또는 3으로 3가지,
백의 자리, 십의 자리, 일의 자리의 숫자는 1, 2, 3, 4 중 천의 자리의 숫자를 제외한 3개를 나열하면 되므로 ${}_3\mathrm{P}_3=6$(가지)
따라서 자연수의 개수는 $3\times6=18$
(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 자연수의 개수는
$12+18=30$이다.

724 ········ 답 ④

조건 (가)에 의하여 이웃한 자리에 홀수와 짝수가 교대로 나타나야 하고
조건 (나)에 의하여 각 자리의 수 중 홀수는 홀수 개 있어야 한다.
따라서 만의 자리의 수부터 일의 자리의 수까지 다음과 같은 순서로 나타내야 한다.

홀수	짝수	홀수	짝수	홀수

9 이하의 자연수 중 홀수, 짝수는 각각 5개, 4개이므로 홀수 중 3개, 짝수 중 2개를 선택하여 나열하면 된다.
따라서 구하는 방법의 수는
${}_5\mathrm{P}_3\times{}_4\mathrm{P}_2=60\times12=720$이다.

725 ············ 답 ④

조건 (가)에 의하여 2, 4, 6이 서로 이웃하지 않아야 하고,
조건 (나)에 의하여 3, 5가 서로 이웃하지 않아야 한다.
6개의 숫자를 나열할 칸에 짝수가 들어갈 칸을 ●로 표현하면 서로 이웃하지 않는 경우는 다음과 같다.

(ⅰ)

●		●		●	

또는

	●		●		●

●에 2, 4, 6을 배열하는 경우의 수는 $3!=6$
나머지 칸에 1, 3, 5를 배열할 때 3, 5는 항상 이웃하지 않게 되므로 나머지 수를 배열하는 경우의 수는 $3!=6$
즉, 이 경우의 수는 $2\times6\times6=72$

(ⅱ)

●		●	a	b	●

또는

●	a	b	●		●

●에 2, 4, 6을 배열하는 경우의 수는 $3!=6$
나머지 칸에 1, 3, 5를 배열하는 경우의 수는 $3!=6$이고,
이 중 a, b자리에 각각 3, 5 또는 5, 3이 오는 경우를 제외하는 경우의 수는 $6-2=4$
즉, 이 경우의 수는 $2\times6\times4=48$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 방법의 수는
$72+48=120$이다.

726 ············ 답 ④

3의 배수이려면 각 자리의 수의 합이 3의 배수이어야 한다.
1, 2, 3, 4, 5, 6의 6개의 수 중 네 수의 합이 3의 배수가 되는 경우는 1, 2, 3, 6 또는 1, 2, 4, 5 또는 1, 3, 5, 6 또는 2, 3, 4, 6 또는 3, 4, 5, 6의 5가지이고,
이때 각각 네 수가 나오는 순서를 정하는 방법의 수는 $4!=24$이므로
$a=5\times24=120$
4의 배수이려면 일의 자리와 십의 자리까지 보았을 때 4의 배수이어야 하므로 가능한 경우는 12, 16, 24, 32, 36, 52, 56, 64의 8가지이고,
이때 각각 천의 자리의 수와 백의 자리의 수를 정하는 방법의 수는 $_4P_2=12$이므로
$b=8\times12=96$
$\therefore\ a+b=120+96=216$

727 ············ 답 ④

숫자를 크기가 작은 수부터 차례대로 나열했을 때,
430번째에 가까워지도록 찾으면 다음과 같다.
1□□□□□인 자연수의 개수는 $5!=120$
2□□□□□인 자연수의 개수는 $5!=120$
3□□□□□인 자연수의 개수는 $5!=120$
41□□□□인 자연수의 개수는 $4!=24$
42□□□□인 자연수의 개수는 $4!=24$
431□□□인 자연수의 개수는 $3!=6$
432□□□인 자연수의 개수는 $3!=6$
435□□□인 자연수의 개수는 $3!=6$
4361□□인 자연수의 개수는 $2!=2$
4362□□인 자연수의 개수는 $2!=2$
이때 $120\times3+24\times2+6\times3+2\times2=430$이므로
430번째에 놓이는 자연수는 436251이다.

728 ············ 답 ③

조건 (나)에 의하여 파란 공 3개를 연속하지 않게 1개씩 뽑거나, 연속하게 2개, 연속하지 않게 1개로 나누어 뽑아야 한다.

(ⅰ) 파란 공을 연속하지 않게 1개씩 뽑는 경우
다음과 같이 파란 공부터 시작해서 파란 공과 빨간 공을 번갈아 5번 뽑아야 한다.

파란 공	빨간 공	파란 공	빨간 공	파란 공

이때 파란 공 3개와 빨간 공 2개를 나열해주면 되므로 방법의 수는
$3!\times2!=12$

(ⅱ) 파란 공을 연속하게 2개, 연속하지 않게 1개로 나누어 뽑는 경우
다음과 같이 파란 공 3개를 연속하게 2개, 연속하지 않게 1개로 나누어 뽑는 경우는 4가지이다.

파란 공	파란 공	빨간 공	파란 공	빨간 공
빨간 공	파란 공	파란 공	빨간 공	파란 공
파란 공	빨간 공	파란 공	파란 공	빨간 공
빨간 공	파란 공	빨간 공	파란 공	파란 공

이때 각각의 경우에 파란 공 3개와 빨간 공 2개를 나열해주면 되므로 방법의 수는 $4\times3!\times2!=48$

(ⅰ), (ⅱ)에서 주머니에서 5개의 공을 모두 꺼내는 방법의 수는
$12+48=60$이다.

729 ············ 답 ③

ㄱ. $_nP_n=n!$, $_nC_n=1$ $\quad\therefore\ {}_nP_n\neq{}_nC_n$ (거짓)
ㄴ. $(n+1)_nP_r=(n+1)\times\dfrac{n!}{(n-r)!}=\dfrac{(n+1)!}{(n-r)!}={}_{n+1}P_{r+1}$ (참)
ㄷ. $_nP_r={}_nC_r\times r!$ (거짓)
ㄹ. $_{n+1}C_{r+1}={}_{n+1}C_{(n+1)-(r+1)}={}_{n+1}C_{n-r}$ (참)
ㅁ. $_nP_0=1$, $_nC_0=1$, $0!=1$ $\quad\therefore\ {}_nP_0={}_nC_0=0!$ (참)
따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ, ㅁ의 3개이다.

730 ············ 답 풀이 참조

$$
\begin{aligned}
{}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r&=\frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}+\frac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!}\\
&=\frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r-1)!}\times\left(\frac{1}{n-r}+\frac{1}{r}\right)\\
&=\frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r-1)!}\times\frac{n}{r(n-r)}\\
&=\frac{n!}{r!(n-r)!}\\
&={}_nC_r
\end{aligned}
$$

따라서 등식 $_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r={}_nC_r$이 성립한다.

채점 요소	배점
조합의 수를 계승을 이용하여 ${}_{n-1}C_{r-1}=\frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}$, ${}_{n-1}C_r=\frac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!}$ 로 나타내기	50%
좌변을 정리하여 등식이 성립함을 보이기	50%

731
답 10

$f(n)={}_nC_2+{}_nC_3$

$=\frac{n(n-1)}{2!}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$

$=\frac{n(n-1)}{2!}\left(1+\frac{n-2}{3}\right)$

$=\frac{n(n-1)(n+1)}{6}$

$=165$

$n(n-1)(n+1)=6\times165$

$n(n-1)(n+1)=2\times3^2\times5\times11$

$n(n-1)(n+1)=9\times10\times11$

$\therefore n=10$

다른 풀이

${}_nC_2+{}_nC_3={}_{n+1}C_3$이므로

$f(n)=\frac{(n+1)\times n\times(n-1)}{3!}$

$=\frac{n(n-1)(n+1)}{6}$

$f(n)=165$에서

$\frac{n(n-1)(n+1)}{6}=165$

$n(n-1)(n+1)=6\times165$

$n(n-1)(n+1)=2\times3^2\times5\times11$

$n(n-1)(n+1)=9\times10\times11$

$\therefore n=10$

732
답 ③

x에 대한 삼차방정식

$12x^3-9\,{}_nC_r\,x^2-2\,{}_nP_r\,x+144=0$

이 2와 -2를 근으로 가지므로

$12x^3-9\,{}_nC_r\,x^2-2\,{}_nP_r\,x+144$는 $x-2$와 $x+2$를 인수로 갖는다.

따라서 두 상수 a, b에 대하여

$12x^3-9\,{}_nC_r\,x^2-2\,{}_nP_r\,x+144=(x-2)(x+2)(ax+b)$

라 하면

$(x-2)(x+2)(ax+b)$

$=(x^2-4)(ax+b)$

$=ax^3+bx^2-4ax-4b$

이므로 항등식의 성질에 의하여

$12=a$, $-9\,{}_nC_r=b$, $-2\,{}_nP_r=-4a$, $144=-4b$

따라서 $a=12$, $b=-36$이고

${}_nC_r=4$, ${}_nP_r=24$ ······ ㉠

이때 ${}_nP_r={}_nC_r\times r!$, 즉 $r!=\frac{{}_nP_r}{{}_nC_r}$이므로

㉠에 의하여 $r!=\frac{24}{4}=6=3\times2\times1$

$\therefore r=3$

또한 ${}_nP_3=n(n-1)(n-2)$이고 $24=4\times3\times2$이므로

㉠에서 $n(n-1)(n-2)=4\times3\times2$

$\therefore n=4$

$\therefore n+r=4+3=7$

733
답 ②

2310을 소인수분해하면 $2310=2\times3\times5\times7\times11$이다.

(i) 1보다 큰 세 자연수의 곱으로 나타내는 경우

2, 3, 5, 7, 11이 각각 모두 소수이므로
이 5개의 소수를 3개의 조로 나누어 각각의 조에 속한 수를 곱하여 세 자연수를 만들면 된다.

2, 3, 5, 7, 11을 3개/1개/1개로 나누는 경우

${}_5C_3\times{}_2C_1\times{}_1C_1\times\frac{1}{2!}=10\times2\times1\times\frac{1}{2}=10$

2, 3, 5, 7, 11을 2개/2개/1개로 나누는 경우

${}_5C_2\times{}_3C_2\times{}_1C_1\times\frac{1}{2!}=10\times3\times1\times\frac{1}{2}=15$

이므로 방법의 수는 $a=10+15=25$

(ii) 합성수만의 곱으로 나타내는 경우

합성수가 되려면 적어도 2개 이상의 소인수의 곱이어야 하므로
2, 3, 5, 7, 11을 3개/2개로 나누어서 각각을 곱하여 합성수를 만들면 된다.

따라서 방법의 수는 $b={}_5C_3\times{}_2C_2=10\times1=10$

(i), (ii)에서 $a+b=25+10=35$이다.

734
답 ③

각 자리의 수가 모두 다르면서 $a<b<c<d$를 만족시켜야 하므로 천의 자리의 수 a에 따라서 자연수의 개수를 차례로 세보면 다음과 같다.

(i) $a=1$인 경우

b, c, d는 1을 제외한 8개의 자연수 중에서 3개를 선택하면 작은 순서대로 b, c, d가 되어야 하므로 자연수의 개수는

${}_8C_3=56$

(ii) $a=2$인 경우

b, c, d는 1, 2를 제외한 7개의 자연수 중에서 3개를 선택하면 작은 순서대로 b, c, d가 되어야 하므로 자연수의 개수는

${}_7C_3=35$

(iii) $a=3$인 경우

b, c, d는 1, 2, 3을 제외한 6개의 자연수 중에서 3개를 선택하면 작은 순서대로 b, c, d가 되어야 하므로 자연수의 개수는

${}_6C_3=20$

(i)~(iii)에서 천의 자리의 수가 1 또는 2 또는 3인 자연수의 개수는 $56+35+20=111$이다.

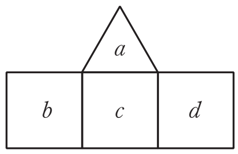
천의 자리의 수가 4인 수 중 작은 순서대로 나열했을 때, 4번째 수가 115번째 자연수이다.

천의 자리의 수가 4, 백의 자리의 수가 5인 자연수를 작은 순서대로 나열하면

4567, 4568, 4569, 4578, ⋯
이므로 115번째 자연수는 4578이다.

735 ······ 답 130

그림과 같이 정삼각형에 적힌 수를 a, 정사각형에 적힌 수를 왼쪽부터 차례로 각각 b, c, d라 하자.



조건 ㈎에 의하여 $a<b$, $a<c$, $a<d$이고,
조건 ㈏에 의하여 $b\neq c$, $c\neq d$이다.

(i) $b\neq d$인 경우
a, b, c, d가 모두 다른 수이므로 6 이하의 자연수 중 서로 다른 4개의 수를 택하는 경우의 수는 ${}_6C_4={}_6C_2=15$
이 중 가장 작은 수가 a가 되고 나머지 3개의 수를 b, c, d로 정하면 되므로 이 경우의 수는 $1\times3!=6$
따라서 $b\neq d$인 경우의 수는 $15\times6=90$

(ii) $b=d$인 경우
$a<b=d$, $a<c$이므로 a, b, c, d 중에서 서로 다른 수의 개수는 3이다.
6 이하의 자연수 중에서 서로 다른 3개의 수를 택하는 경우의 수는 ${}_6C_3=20$
이 각각에 대하여 택한 3개의 수 중에서 가장 작은 수가 a가 되고 나머지 2개의 수를 $b(=d)$, c로 정하면 되므로 이 경우의 수는 $1\times2!=2$
따라서 $b=d$인 경우의 수는 $20\times2=40$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $90+40=130$이다.

다른 풀이

조건 ㈎, ㈏에서 a보다 큰 수가 적어도 2개 존재해야 하므로 $a\leq4$

(i) $a=4$인 경우
c는 5, 6 중 하나이다.
이 각각에 대하여 b, d는 5, 6 중 c가 아닌 수이면 되므로 $1\times1=1$
따라서 $a=4$인 경우의 수는 $2\times1=2$

(ii) $a=3$인 경우
c는 4, 5, 6 중 하나이다.
이 각각에 대하여 b, d는 4, 5, 6 중 c가 아닌 수이면 되므로 $2\times2=4$
따라서 $a=3$인 경우의 수는 $3\times4=12$

(iii) $a=2$인 경우
c는 3, 4, 5, 6 중 하나이다.
이 각각에 대하여 b, d는 3, 4, 5, 6 중 c가 아닌 수이면 되므로 $3\times3=9$
따라서 $a=2$인 경우의 수는 $4\times9=36$

(iv) $a=1$인 경우
c는 2, 3, 4, 5, 6 중 하나이다.
이 각각에 대하여 b, d는 2, 3, 4, 5, 6 중 c가 아닌 수이면 되므로 $4\times4=16$
따라서 $a=1$인 경우의 수는 $5\times16=80$

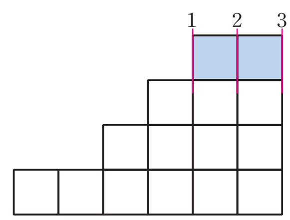
(i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는
$2+12+36+80=130$이다.

736 ······ 답 ②

이 도형의 선분으로 둘러싸인 직사각형의 개수는
가로 선 4개 중 2개, 세로 선 5개 중 2개를 선택하면 선택한 4개의 선분으로 둘러싸인 직사각형이 만들어지므로
${}_4C_2\times{}_5C_2=6\times10=60$
이 중 정사각형인 것의 개수를 구하면
한 변의 길이가 1인 정사각형은 12개,
한 변의 길이가 2인 정사각형은 6개,
한 변의 길이가 3인 정사각형은 2개이다.
따라서 구하는 정사각형이 아닌 직사각형의 개수는
$60-(12+6+2)=40$이다.

737 ······ 답 ④

주어진 15개의 정사각형의 한 변의 길이를 1로 두면, 가장 윗줄에서 세로의 길이가 1인 직사각형의 개수는 다음과 같이 3개의 세로 줄 중 2개를 선택하는 경우의 수와 같다.

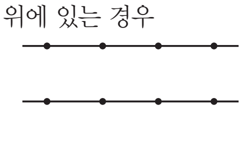


이와 같은 방법으로 세로의 길이가 1인 직사각형의 개수를 가장 윗줄에서부터 세면
${}_3C_2+{}_4C_2+{}_5C_2+{}_7C_2=3+6+10+21=40$
세로의 길이가 2인 직사각형의 개수를 가장 윗줄에서부터 세면
${}_3C_2+{}_4C_2+{}_5C_2=3+6+10=19$
세로의 길이가 3인 직사각형의 개수를 가장 윗줄에서부터 세면
${}_3C_2+{}_4C_2=3+6=9$
세로의 길이가 4인 직사각형의 개수를 가장 윗줄에서부터 세면
${}_3C_2=3$
따라서 구하는 직사각형의 개수는
$40+19+9+3=71$이다.

738 ······ 답 ①

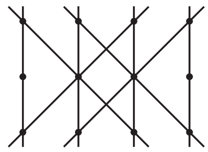
12개의 점 중 3개의 점을 선택하는 경우의 수는
${}_{12}C_3=220$
이때 한 직선 위에 3개 이상의 점이 존재할 때, 그 직선에서 3개의 점을 선택하는 경우에는 삼각형이 만들어지지 않으므로 다음과 같은 경우를 제외한다.

(i) 4개의 점이 한 직선 위에 있는 경우



4개의 점 중 3개를 선택하는 경우의 수는 ${}_4C_3=4$이고 이러한 경우가 3가지이므로 $4\times3=12$

(ii) 3개의 점이 한 직선 위에 있는 경우



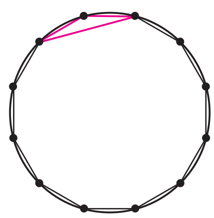
3개의 점만 한 직선 위에 있는 경우는 위의 그림과 같이 8가지이다.

(i), (ii)에 의하여 삼각형이 만들어지지 않는 경우의 수는 $12+8=20$이므로 구하는 삼각형의 개수는 $220-20=200$이다.

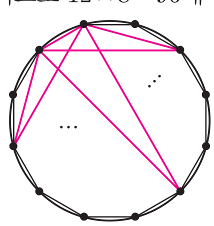
739 ······ 답 ⑤

12개의 꼭짓점 중 세 점을 연결하여 만들 수 있는 삼각형의 개수는
${}_{12}C_3=220$

(i) 십이각형과 두 변을 공유하는 경우
각 꼭짓점마다 한 개씩 생기므로 12개이다.



(ii) 십이각형과 한 변만 공유하는 경우
각 변마다 8개씩 생기므로 $12\times8=96$개이다.



(i), (ii)에서 구하는 삼각형의 개수는
$220-(12+96)=112$이다.

740 ······ 답 ①

$0\le k\le n$인 정수 k에 대하여

$$\begin{aligned}{}_nC_k&=\frac{n!}{(n-k)!k!}\\&=\frac{n!}{(n-k)!\{n-(n-k)\}!}\\&=\boxed{{}_nC_{n-k}}\end{aligned}$$

이고

$$\begin{aligned}k\times{}_nC_k&=k\times\frac{n!}{k!(n-k)!}\\&=\frac{n\times(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}\\&=\boxed{n}\times{}_{n-1}C_{k-1}\end{aligned}$$

이므로

$k\times{}_{2n}C_{2n-k}=k\times{}_{2n}C_k=2n\times{}_{2n-1}C_{k-1}$

이다. 따라서

$1\times{}_{2n}C_{2n-1}+2\times{}_{2n}C_{2n-2}+3\times{}_{2n}C_{2n-3}+\cdots+2n\times{}_{2n}C_0$
$=1\times{}_{2n}C_1+2\times{}_{2n}C_2+3\times{}_{2n}C_3+\cdots+2n\times{}_{2n}C_{2n}$
$=2n\times{}_{2n-1}C_0+2n\times{}_{2n-1}C_1+2n\times{}_{2n-1}C_2+\cdots+2n\times{}_{2n-1}C_{2n-1}$
$=2n\times({}_{2n-1}C_0+{}_{2n-1}C_1+{}_{2n-1}C_2+\cdots+{}_{2n-1}C_{2n-1})$
$=2n\times\{({}_{2n-1}C_0+{}_{2n-1}C_{2n-1})+({}_{2n-1}C_1+{}_{2n-1}C_{2n-2})$
$+\cdots+({}_{2n-1}C_{n-1}+{}_{2n-1}C_n)\}$
$=2n\times2\times({}_{2n-1}C_0+{}_{2n-1}C_1+{}_{2n-1}C_2+\cdots+{}_{2n-1}C_{n-1})$
$=2\alpha\times\boxed{2n}$

이다.

따라서 (가) ${}_nC_{n-k}$, (나) n, (다) $2n$이다.

741 ······ 답 ②

두 사람이 동시에 수강하는 수업의 개수에 따라서 경우를 나누면 다음과 같다.

(i) 동시에 수강하는 수업이 1개인 경우
두 사람이 동시에 수강하는 수업 1개를 고르는 경우의 수는
${}_5C_1=5$이고
나머지 4개의 수업 중에서 A, B가 들을 수업 1개씩 더 고르는 경우의 수는 ${}_4C_1\times{}_3C_1=4\times3=12$이므로
이 경우의 수는
$5\times12=60$

(ii) 동시에 수강하는 수업이 없는 경우
5개의 수업 중에서 A가 들을 수업 2개를 고르는 경우의 수는
${}_5C_2=10$이고
나머지 3개의 수업 중에서 B가 들을 수업 2개를 고르는 경우의 수는 ${}_3C_2=3$이므로
이 경우의 수는
$10\times3=30$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는
$60+30=90$이다.

742 ······ 답 ③

카메라를 진열할 6개의 자리 중 2개의 자리를 골라 왼쪽에 크기가 가장 큰 A사 카메라를, 오른쪽에 크기가 가장 작은 B사 카메라를 나열하면 되므로 경우의 수는
${}_6C_2=15$
나머지 4개의 자리에 나머지 4대의 카메라를 나열하는 방법의 수는
$4!=24$
따라서 구하는 방법의 수는
$15\times24=360$이다.

743 ······ 답 ⑤

7켤레 중 짝이 맞는 한 켤레를 선택하는 경우의 수는 ${}_7C_1=7$
나머지 6켤레 운동화 중 3종류를 선택하는 경우의 수는 ${}_6C_3=20$
이때 3종류의 운동화 중 종류별로 한 짝씩 선택하는 경우의 수는
$2\times2\times2=8$
따라서 구하는 경우의 수는
$7\times20\times8=1120$이다.

744 ······ 답 풀이 참조

남학생이 적어도 1명 포함되도록 선출하는 방법의 수는
전체 학생회 14명 중 3명을 뽑는 방법의 수에서 여학생만 3명을 뽑는 방법의 수를 빼주면 된다.
학생회 14명에서 3명의 대표를 선출하는 전체 방법의 수는
${}_{14}C_3=364$
학생회의 여학생 수를 n이라 할 때, 여학생 중 3명을 선출하는 방법의 수는 ${}_nC_3$이고, 문제의 조건에 의하여
$364-{}_nC_3=308$이므로 ${}_nC_3=56$이다.
${}_nC_3=\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3!}=56$
$n(n-1)(n-2)=8\times7\times6$이므로 $n=8$
여학생 수가 8이므로 구하는 남학생 수는 $14-8=6$이다.

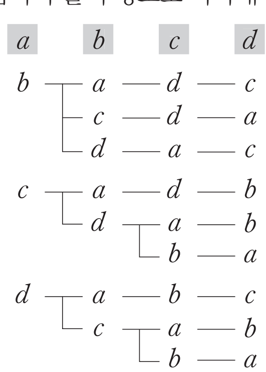
채점 요소	배점
여학생 수 또는 남학생 수를 미지수로 놓기	20%
남학생이 적어도 1명 포함되도록 선출하는 방법의 수에 대한 식 세우기	40%
남학생 수 구하기	40%

745 ······ 답 8

여자 선수를 n $(n>2)$명이라 하면 남자 선수는 $(n-2)$명이다.
이때 여자 복식팀을 만드는 방법의 수는
${}_nC_2=\dfrac{n(n-1)}{2!}$
혼성 복식팀을 만드는 방법의 수는
${}_nC_1\times{}_{n-2}C_1=n(n-2)$
여자 복식팀을 만드는 방법의 수가 혼성 복식팀을 만드는 방법의 수보다 20만큼 작으므로
$\dfrac{n(n-1)}{2!}=n(n-2)-20$
$n^2-3n-40=0,\ (n+5)(n-8)=0$
$\therefore\ n=8\ (\because\ n>2)$
따라서 구하는 여자 선수의 수는 8이다.

746 ······ 답 315

7명 중에서 자신이 제출한 과제를 다시 받을 학생 3명을 정하는 경우의 수는 ${}_7C_3=35$
나머지 4명의 학생은 모두 자신이 제출하지 않은 과제를 받아야 하므로 4명의 학생을 각각 a, b, c, d라 하면 자기 자신과 대응되지 않도록 배열하는 방법의 수를 수형도로 나타내면 다음 그림과 같다.



즉, $3\times3=9$
따라서 구하는 경우의 수는
$35\times9=315$이다.

747 ······ 답 ③

뽑은 카드에 적힌 수 중 가장 큰 수와 가장 작은 수의 합이 9 또는 10이므로 나누어 생각하면 다음과 같다.
(i) 가장 큰 수와 가장 작은 수의 합이 9인 경우
가장 큰 수와 가장 작은 수 사이에 적어도 2개의 자연수가 있어야 하므로 가장 큰 수와 가장 작은 수가 각각 6, 3 또는 7, 2 또는 8, 1이다.
가장 큰 수와 가장 작은 수가 각각 6, 3인 경우,
4, 5가 나머지 2개의 수가 되어야 하므로 1가지
가장 큰 수와 가장 작은 수가 각각 7, 2인 경우,
3, 4, 5, 6 중 2개의 수를 더 뽑으면 되므로 ${}_4C_2=6$
가장 큰 수와 가장 작은 수가 각각 8, 1인 경우,
2, 3, 4, 5, 6, 7 중 2개의 수를 더 뽑으면 되므로 ${}_6C_2=15$
따라서 이 경우의 수는 $1+6+15=22$
(ii) 가장 큰 수와 가장 작은 수의 합이 10인 경우
가장 큰 수와 가장 작은 수 사이에 적어도 2개의 자연수가 있어야 하므로 가장 큰 수와 가장 작은 수가 각각 7, 3 또는 8, 2이다.
가장 큰 수와 가장 작은 수가 각각 7, 3인 경우,
4, 5, 6 중 2개의 수를 더 뽑으면 되므로 ${}_3C_2=3$
가장 큰 수와 가장 작은 수가 각각 8, 2인 경우,
3, 4, 5, 6, 7 중 2개의 수를 더 뽑으면 되므로 ${}_5C_2=10$
따라서 이 경우의 수는 $3+10=13$
(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는
$22+13=35$이다.

748 ······ 답 ③

1에서 20까지의 자연수 중 3으로 나눈 나머지가 0, 1, 2인 수는 각각 6개, 7개, 7개이다. 이 중 세 수를 더해서 3의 배수가 되는 경우는 다음과 같다.
(i) 세 수가 모두 3으로 나눈 나머지가 0인 경우
이 경우의 수는 ${}_6C_3=20$
(ii) 세 수가 모두 3으로 나눈 나머지가 1인 경우
이 경우의 수는 ${}_7C_3=35$
(iii) 세 수가 모두 3으로 나눈 나머지가 2인 경우
이 경우의 수는 ${}_7C_3=35$
(iv) 세 수를 3으로 나눈 나머지가 각각 0, 1, 2인 경우
이 경우의 수는
${}_6C_1\times{}_7C_1\times{}_7C_1=6\times7\times7=294$
(i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는
$20+35+35+294=384$이다.

749 ······ 답 ①

처음 꺼내는 1개의 공의 색에 따라 나누어 생각하면 다음과 같다.
(i) 처음 꺼낸 공이 빨간색 공인 경우
빨간색 공 중 1개를 꺼내는 방법의 수는 ${}_3C_1=3$이고,
남은 공 중 파란색 공을 2개, 빨간색 공을 1개 꺼내거나

파란색 공 3개를 꺼내는 방법의 수는

${}_3C_2\times{}_2C_1+{}_3C_3=3\times2+1=7$

이므로 $3\times7=21$

(ii) 처음 꺼낸 공이 파란색 공인 경우

파란색 공 중 1개를 꺼내는 방법의 수는 ${}_3C_1=3$이고,

남은 공 중 파란색 공을 2개, 빨간색 공을 1개 꺼내는

방법의 수는

${}_2C_2\times{}_3C_1=1\times3=3$

이므로 $3\times3=9$

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는

$21+9=30$이다.

750

답 18

길이가 19인 나무토막을 만들 때 사용되는 길이가 5인 나무토막의 개수와 길이가 2인 나무토막의 개수를 각각 x, y라 하면

$5x+2y=19$

이 등식을 만족시키는 x, y의 값은

$x=1$, $y=7$ 또는 $x=3$, $y=2$이다.

(i) $x=1$, $y=7$인 경우

총 8개의 나무토막 중 길이가 5인 나무토막 1개를 놓을 순서를 정하면 된다.

따라서 이 경우의 수는 ${}_8C_1=8$

(ii) $x=3$, $y=2$인 경우

총 5개의 나무토막 중 길이가 5인 나무토막 3개를 놓을 순서를 정하면 된다.

따라서 이 경우의 수는 ${}_5C_3=10$

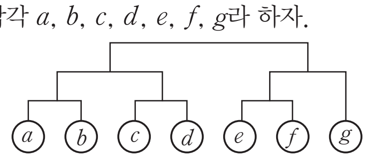
(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는

$8+10=18$이다.

751

답 ⑤

다음과 같이 주어진 대진표에서 배정받을 수 있는 7개의 자리를 왼쪽에서부터 각각 a, b, c, d, e, f, g라 하자.



1반과 2반이 결승전 이전에 서로 대결하지 않도록 하려면 a, b, c, d와 e, f, g에 각각 한 반씩 배정되어야 한다.

1반과 2반을 a, b, c, d와 e, f, g 중에 한 반씩 배정하는 방법의 수는 2

1, 2반을 제외하고 a, b, c, d에 배정될 3개의 반과 e, f, g에 배정될 2개의 반을 고르는 방법의 수는

${}_5C_3\times{}_2C_2=10\times1=10$

a, b, c, d에 속한 3개의 반 중 1반 또는 2반과 대결할 반을 고르는 방법의 수는

${}_3C_1=3$

e, f, g에 배정된 반 중 g에 들어갈 반을 고르는 방법의 수는

${}_3C_1=3$

따라서 구하는 방법의 수는

$2\times10\times3\times3=180$이다.

752

답 90

조건을 만족시키도록 구슬을 담으려면 각 상자에 2개/2개/2개, 3개/2개/1개, 4개/1개/1개씩 나누어 넣어야 한다.

(i) 2개/2개/2개로 나누어 넣는 경우

$${}_6C_2\times{}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{3!}=15\times6\times1\times\frac{1}{6}=15$$

(ii) 3개/2개/1개로 나누어 넣는 경우

${}_6C_3\times{}_3C_2\times{}_1C_1=20\times3\times1=60$

(iii) 4개/1개/1개로 나누어 넣는 경우

$${}_6C_4\times{}_2C_1\times{}_1C_1\times\frac{1}{2!}=15\times2\times1\times\frac{1}{2}=15$$

(i)~(iii)에서 구하는 방법의 수는

$15+60+15=90$이다.

753

답 ③

가위바위보 게임에서 비기려면 모두 같은 것을 내거나 가위, 바위, 보를 적어도 하나씩 내야 한다.

(i) 모두 같은 것을 낸 경우

가위, 바위, 보 3가지 중 하나를 똑같이 내야 하므로 3가지

(ii) 가위, 바위, 보를 적어도 하나씩 낸 경우

4명을 2명/1명/1명의 3개의 조로 나누는 경우의 수는

$${}_4C_2\times{}_2C_1\times{}_1C_1\times\frac{1}{2!}=6\times2\times1\times\frac{1}{2}=6$$

3개의 조에 가위, 바위, 보를 배분하는 방법의 수가 $3!=6$이므로

가위, 바위, 보를 적어도 하나씩 낸 경우의 수는

$6\times6=36$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$3+36=39$이다.

754

답 ④

4개의 수목원 A, B, C, D에 사전 답사를 갈 인원수에 따라 나누어 생각하면 다음과 같다.

(i) 3명/1명/1명/1명으로 나누어서 답사하는 경우

$${}_6C_3\times{}_3C_1\times{}_2C_1\times{}_1C_1\times\frac{1}{3!}=20\times3\times2\times1\times\frac{1}{6}=20$$

(ii) 2명/2명/1명/1명으로 나누어서 답사하는 경우

$${}_6C_2\times{}_4C_2\times{}_2C_1\times{}_1C_1\times\frac{1}{2!2!}=15\times6\times2\times1\times\frac{1}{4}=45$$

(i), (ii)에서 4개의 수목원에 배정하는 방법의 수는 $4!=24$이므로

구하는 방법의 수는

$(20+45)\times24=1560$이다.

755

답 132

운전면허를 가지고 있는 사람이 3명이므로 2대의 차에 운전자를 정하는 방법의 수는 ${}_3P_2=6$ …… ㉠

A, B가 탈 차를 정하는 방법의 수는 ${}_2P_2=2$ …… ㉡

운전자와 A, B를 제외한 나머지 4명이 차에 나누어 타는 방법을 나누어 생각하면 다음과 같다.

(i) 4인승, 7인승에 각각 2명/2명으로 나누어 타는 경우

$_4C_2 \times {_2C_2} \times \frac{1}{2!} \times 2! = 6 \times 1 \times \frac{1}{2} \times 2 = 6$

(ii) 4인승, 7인승에 각각 1명/3명으로 나누어 타는 경우

$_4C_1 \times {_3C_3} = 4 \times 1 = 4$

(iii) 7인승에 4명이 모두 타는 경우 1가지

㉠, ㉡과 (i)~(iii)에서 구하는 방법의 수는

$6 \times 2 \times (6+4+1) = 132$이다.

756

답 ③

7층에서 탔던 6명이 3번에 나누어서 내려야 하므로
6명을 3개의 조로 나누어야 한다.

(i) 4명/1명/1명으로 나누어 내리는 경우

$_6C_4 \times {_2C_1} \times {_1C_1} \times \frac{1}{2!} = 15 \times 2 \times 1 \times \frac{1}{2} = 15$

(ii) 3명/2명/1명으로 나누어 내리는 경우

$_6C_3 \times {_3C_2} \times {_1C_1} = 20 \times 3 \times 1 = 60$

(iii) 2명/2명/2명으로 나누어 내리는 경우

$_6C_2 \times {_4C_2} \times {_2C_2} \times \frac{1}{3!} = 15 \times 6 \times 1 \times \frac{1}{6} = 15$

(i)~(iii)에서 6층, 5층, 3층에 나누어 내리는 방법의 수는
$3! = 6$이므로 구하는 방법의 수는
$(15+60+15) \times 6 = 540$이다.

757

답 960

과자 4봉지와 사탕 2개를 조건을 만족시키도록 5명의 어린이에게
나누어 주는 경우는 다음과 같다.

(i) 1명의 어린이가 사탕 2개를 받는 경우

사탕 2개를 받는 어린이를 정하는 경우의 수는 5이고,
나머지 4명의 어린이에게 과자를 각각 한 봉지씩 나누어 주는
경우의 수는 $4! = 24$이므로

$5 \times 24 = 120$

(ii) 1명의 어린이가 과자 2봉지를 받는 경우

과자 4봉지 중 2봉지를 고르는 경우의 수는

$_4C_2 = 6$

과자 2봉지를 받는 어린이를 정하는 경우의 수는 5이고,
남은 과자 2봉지를 받을 어린이를 정하는 경우의 수는

$_4P_2 = 12$

과자를 받지 못한 2명의 어린이에게 사탕을 각각 1개씩 주는
경우의 수가 1이므로

$6 \times 5 \times 12 \times 1 = 360$

(iii) 1명의 어린이가 과자 1봉지와 사탕 1개를 받는 경우

과자 4봉지를 4명의 어린이에게 각각 1봉지씩 나누어 주는
경우의 수는

$_5P_4 = 120$

과자를 받지 못한 어린이에게 사탕 1개를 주고 과자를 받은
어린이 중 1명을 택해 남은 사탕 1개를 주는 경우의 수는

$_4C_1 = 4$이므로

$120 \times 4 = 480$

(i)~(iii)에서 구하는 경우의 수는
$120+360+480 = 960$이다.

758

답 119

선택한 3개의 사물함에 적혀 있는 수를 각각 a, b, c $(a<b<c)$라
하자. 선택한 사물함 사이에 각각 n개 이상의 사물함이 있으려면
$b-a>n$, $c-b>n$을 만족시켜야 한다. …… ㉠

이때 세 자연수 a', b', c' $(a'<b'<c')$이 $a=a'$, $b=b'+n$,
$c=c'+2n$을 만족시키면 a, b, c는 ㉠을 항상 만족시킨다.

$c'+2n$이 15 이하의 자연수가 되어야 하므로
$c'+2n \le 15$에서 $c' \le 15-2n$이다.

즉, 선택한 사물함 사이에 빈 사물함의 개수가 모두 n 이상이 되도록
하는 경우의 수는 1부터 $15-2n$까지의 자연수 중 서로 다른 3개의
수를 선택하는 경우의 수와 같으므로

$f(n) = {_{15-2n}C_3}$이다.

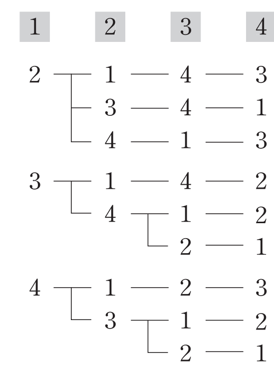
$\therefore f(3)+f(4) = {_9C_3} + {_7C_3}$

$= 84+35 = 119$

759

답 ②

먼저 1행에 1, 2, 3, 4가 적힌 4장의 카드를 배열하는 방법의 수는
$4! = 24$이고,
2행에 각 열마다 1행과 다른 숫자가 적힌 카드를 배열하는 방법의
수를 수형도로 나타내면 다음 그림과 같다.



즉, $3 \times 3 = 9$

이때 2행에 적은 숫자를 기준으로 3행에서 각 열마다 다른 숫자가
적힌 카드를 배열하는 방법의 수도 9이므로 구하는 방법의 수는
$24 \times 9 \times 9 = 1944$

760

답 ⑤

8 이하의 자연수 중 짝수의 개수는 4이므로
적어도 4장의 카드를 뽑아야 짝수가 적힌 카드를 모두 뽑을 수 있다.
따라서 $n \le 3$인 경우 $f(n)=0$이므로 $f(3)=0$

(i) $n=4$인 경우

4번째 뽑은 카드가 짝수가 적힌 마지막 카드이어야 하므로
짝수가 적힌 카드 4장이 연달아 뽑혀야 한다.

$f(4) = 4!$

(ii) $n=5$인 경우

5번째 뽑은 카드가 짝수가 적힌 마지막 카드이어야 하므로
4번째까지 짝수가 적힌 카드 3장과 홀수가 적힌 카드 1장이
뽑혀야 한다.

짝수 4개 중 3개를 선택하는 경우의 수는

$_4C_3 = 4$

홀수 4개 중 1개를 선택하는 경우의 수는

${}_{4}C_{1}=4$

남은 짝수가 적힌 카드를 마지막에 뽑으면 되므로

$f(5)=4\times4\times4!=16\times4!$

(iii) $n=6$인 경우

6번째 뽑은 카드가 짝수가 적힌 마지막 카드이어야 하므로 5번째까지 짝수가 적힌 카드 3장과 홀수가 적힌 카드 2장이 뽑혀야 한다.

짝수 4개 중 3개를 선택하는 경우의 수는

${}_{4}C_{3}=4$

홀수 4개 중 2개를 선택하는 경우의 수는

${}_{4}C_{2}=6$

남은 짝수가 적힌 카드를 마지막에 뽑으면 되므로

$f(6)=4\times6\times5!=24\times5!$

(i)~(iii)에서 구하는 값은

$$\frac{f(3)+f(4)+f(5)+f(6)}{4!}=\frac{0+4!+16\times4!+24\times5!}{4!}$$
$$=1+16+120=137$$

761 ········· 답 306

1, 2, …, 9 중 세 숫자로 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는

${}_{9}P_{3}=9\times8\times7=504$

9 이하의 자연수 중 2개의 수를 더해서 7의 배수가 되려면 7로 나눈 나머지가 각각 1, 6 또는 2, 5 또는 3, 4인 두 수를 더해야 한다.

(i) 7로 나눈 나머지가 1, 6인 두 수가 포함되는 경우

7로 나눈 나머지가 1, 6인 두 수는 1, 6 또는 6, 8이다.

1, 6이 들어 있는 세 자리 자연수의 개수는

1, 6을 제외한 7개의 수 중 1개를 선택해서 나열하면 되므로 방법의 수는

$7\times3!=42$

6, 8이 들어 있는 세 자리 자연수의 개수는

6, 8을 제외한 7개의 수 중 1개를 선택해서 나열하면 되므로 방법의 수는

$7\times3!=42$

이 중 1, 6, 8이 동시에 들어 있는 세 자리 자연수의 개수 $3!=6$만큼이 겹치므로

1, 6 또는 6, 8이 들어 있는 세 자리 자연수의 개수는

$42+42-6=78$

(ii) 7로 나눈 나머지가 2, 5인 두 수가 포함되는 경우

7로 나눈 나머지가 2, 5인 두 수는 2, 5 또는 5, 9이다.

(i)과 마찬가지로 구하면 자연수의 개수는 78

(iii) 3, 4가 들어 있는 세 자리 자연수의 개수는

$7\times3!=42$

(i)~(iii)에서 구하는 자연수의 개수는

$504-(78\times2+42)=504-198=306$이다.

762 ········· 답 ④

조건 (가), (나)에서 X를 첫 번째에 쓰고 Y는 1개 이상 4개 이하로 쓸 수 있다.

(i) Y를 1개 쓰는 경우

첫 번째엔 X가 오고 나머지 7자리 중 Y를 쓸 자리를 선택하는 방법의 수는 ${}_{7}C_{1}=7$이고

나머지 자리는 모두 X를 쓰면 되므로 문자열의 개수는 7이다.

(ii) Y를 2개 쓰는 경우

X, Y를 각각 6개, 2개 써야 하므로

먼저 X를 6개 나열하고 다음과 같이 ㉠~㉥ 중 2개를 골라 그 자리에 Y를 쓰면 된다.

X	㉠	X	㉡	X	㉢	X	㉣	X	㉤	X	㉥

따라서 문자열의 개수는 ${}_{6}C_{2}=15$이다.

(iii) Y를 3개 쓰는 경우

X, Y를 각각 5개, 3개 써야 하므로

먼저 X를 5개 나열하고 다음과 같이 ㉠~㉤ 중 3개를 골라 그 자리에 Y를 쓰면 된다.

X	㉠	X	㉡	X	㉢	X	㉣	X	㉤

따라서 문자열의 개수는 ${}_{5}C_{3}=10$이다.

(iv) Y를 4개 쓰는 경우

X, Y를 각각 4개, 4개 써야 하므로

Y가 서로 이웃하지 않게 쓰는 방법은 다음과 같이 1가지이다.

X	Y	X	Y	X	Y	X	Y

따라서 문자열의 개수는 1이다.

(i)~(iv)에서 구하는 문자열의 개수는

$7+15+10+1=33$이다.

763 ········· 답 ④

천의 자리, 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리에 대하여 각각 합을 구하면 다음과 같다.

(i) 천의 자리의 경우

천의 자리의 숫자가 1인 네 자리 자연수의 개수는 ${}_{4}P_{3}=24$이므로 1000은 24번 더해진다.

천의 자리의 숫자가 2, 3, 4일 때도 마찬가지이므로 2000, 3000, 4000도 각각 24번씩 더해진다.

$24\times(1000+2000+3000+4000)=240000$

(ii) 백의 자리의 경우

백의 자리의 숫자가 1인 네 자리 자연수의 개수는 $3\times3\times2=18$이므로 100은 18번 더해진다.

백의 자리의 숫자가 2, 3, 4일 때도 마찬가지이므로 200, 300, 400도 각각 18번씩 더해진다.

$18\times(100+200+300+400)=18000$

(iii) 십의 자리의 경우

십의 자리의 숫자가 1인 네 자리 자연수의 개수는 $3\times3\times2=18$이므로 10은 18번 더해진다.

십의 자리의 숫자가 2, 3, 4일 때도 마찬가지이므로 20, 30, 40도 각각 18번씩 더해진다.

$18\times(10+20+30+40)=1800$

(iv) 일의 자리의 경우

일의 자리의 숫자가 1인 네 자리 자연수의 개수는 $3\times3\times2=18$이므로 1은 18번 더해진다.

일의 자리의 숫자가 2, 3, 4일 때도 마찬가지이므로 2, 3, 4도 각각 18번씩 더해진다.

$18\times(1+2+3+4)=180$
(i)~(iv)에서 구하는 모든 네 자리 자연수의 합은
$240000+18000+1800+180=259980$이다.

764 ⓓ 624

두 조건 ㈎, ㈏를 모두 만족시키는 경우의 수는 조건 ㈏를 만족시키는 모든 경우의 수에서 조건 ㈏를 만족시키지만 조건 ㈎를 만족시키지 않는 경우의 수를 뺀 것과 같다.
(i) E와 F가 같은 행에 있지 않은 경우
E를 써넣을 칸을 택하는 경우의 수는 8
F를 써넣을 칸을 택하는 경우의 수는 4
남은 6개의 문자를 각각 써넣을 칸을 택하는 경우의 수는 $6!$
따라서 이 경우의 수는 $8\times4\times6!$이다.
(ii) E와 F가 같은 행에 있지 않고, A와 C가 서로 이웃하는 경우
ⓐ A와 C가 세로로 이웃하는 경우
A와 C를 써넣을 열을 택하는 경우의 수는 4
A와 C가 자리를 서로 바꾸는 경우의 수는 2
E를 써넣을 칸을 택하는 경우의 수는 6
F를 써넣을 칸을 택하는 경우의 수는 3
남은 4개의 문자를 각각 써넣을 칸을 택하는 경우의 수는 $4!$
따라서 이 경우의 수는 $4\times2\times6\times3\times4!$이다.
ⓑ A와 C가 가로로 이웃하는 경우
A와 C를 써넣을 이웃한 2개의 칸을 택하는 경우의 수는 6
A와 C가 자리를 서로 바꾸는 경우의 수는 2
E, F 중 A, C와 같은 행에 적을 문자를 택하는 경우의 수는 2
E, F 중 A, C와 같은 행에 적을 문자를 써넣을 칸을 택하는 경우의 수는 2
E, F 중 A, C와 다른 행에 적을 문자를 써넣을 칸을 택하는 경우의 수는 4
남은 4개의 문자를 각각 써넣을 칸을 택하는 경우의 수는 $4!$
따라서 이 경우의 수는 $6\times2\times2\times2\times4\times4!$이다.
(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는
$8\times4\times6!-4\times2\times6\times3\times4!-6\times2\times2\times2\times4\times4!$
$=4!\times(8\times4\times6\times5-4\times2\times6\times3-6\times2\times2\times2\times4)$
$=24\times624$
이므로 $24k=24\times624$에서 $k=624$이다.

765 ⓓ 16

시계 반대 방향으로 1만큼 이동하는 것은 시계 방향으로 3만큼 움직이는 것과 같다.
따라서 말은 한 번의 이동에서 정사각형의 변을 따라 시계 방향으로 1 또는 3만큼 움직이게 된다.
동전을 5번 던져서 말을 움직일 때, 말의 이동거리는 시계 방향을 기준으로 5 이상 15 이하이다.
이때 말이 점 A에서 출발하여 점 B에 도착하기 위해서는 시계 방향을 기준으로 이동거리가 7 또는 11 또는 15가 되어야 한다.
시계 방향으로 1만큼 움직인 횟수를 x, 3만큼 움직인 횟수를 y라 할 때, 이동거리가 7 또는 11 또는 15가 되는 경우로 나누어 생각하면 다음과 같다.
(i) 이동거리가 7인 경우
$x+y=5$, $x+3y=7$이므로 두 식을 연립하면 $x=4$, $y=1$
즉, 앞면이 4번 나오고 뒷면이 1번 나온 것이므로
5번 중 뒷면이 나오는 순서를 결정하는 방법의 수는 ${}_5C_1=5$이고 나머지 모두 앞면이 나오면 된다.
(ii) 이동거리가 11인 경우
$x+y=5$, $x+3y=11$이므로 두 식을 연립하면 $x=2$, $y=3$
즉, 앞면이 2번 나오고 뒷면이 3번 나온 것이므로
5번 중 뒷면이 나오는 순서를 결정하는 방법의 수는 ${}_5C_3=10$이고 나머지 모두 앞면이 나오면 된다.
(iii) 이동거리가 15인 경우
$x+y=5$, $x+3y=15$이므로 두 식을 연립하면 $x=0$, $y=5$
즉, 모두 뒷면이 나온 것이므로 방법의 수는 1이다.
(i)~(iii)에서 구하는 방법의 수는
$5+10+1=16$이다.

766 ⓓ 50

반지름의 길이가 가장 긴 원판을 A라 하면 A 위에 쌓는 원판 중 반지름의 길이가 가장 긴 원판을 가장 위에 쌓아야 한다.
(i) A를 가장 위에 쌓는 경우는 문제의 조건을 만족시키지 않는다.
(ii) A를 위에서 두 번째에 쌓는 경우
A 위에 쌓을 원판 1개를 선택하는 방법의 수는
${}_4C_1=4$
나머지 3개의 원판을 A의 아래에 쌓는 방법의 수는
$3!=6$
따라서 이 경우 원판 5개를 쌓는 방법의 수는
$4\times6=24$
(iii) A를 위에서 세 번째에 쌓는 경우
A 위에 쌓을 원판 2개를 선택하는 방법의 수는
${}_4C_2=6$
이때 선택한 2개의 원판을 쌓는 방법의 수는 1
한편, 나머지 2개의 원판을 A의 아래에 쌓는 방법의 수는
$2!=2$
따라서 이 경우 원판 5개를 쌓는 방법의 수는
$6\times1\times2=12$
(iv) A를 위에서 네 번째에 쌓는 경우
A 위에 쌓을 원판 3개를 선택하는 방법의 수는
${}_4C_3=4$
이때 선택한 3개의 원판을 쌓는 방법의 수는 $2!=2$
한편, 나머지 1개의 원판을 A의 아래에 쌓는 방법의 수는 1
따라서 이 경우 원판 5개를 쌓는 방법의 수는
$4\times2\times1=8$
(v) A를 위에서 다섯 번째에 쌓는 경우
4개의 원판 중 반지름의 길이가 긴 것을 가장 위로 쌓고 나머지 3개의 원판을 쌓는 방법의 수는
$3!=6$
(i)~(v)에서 구하는 방법의 수는
$24+12+8+6=50$이다.

IV 행렬

01 행렬의 뜻과 연산

767 ······ 답 -11

$a_{ij}=(-1)^i+3j-2ij$이므로
$a_{11}=(-1)+3\times1-2\times1\times1=0$
$a_{12}=(-1)+3\times2-2\times1\times2=1$
$a_{21}=(-1)^2+3\times1-2\times2\times1=0$
$a_{22}=(-1)^2+3\times2-2\times2\times2=-1$
$a_{31}=(-1)^3+3\times1-2\times3\times1=-4$
$a_{32}=(-1)^3+3\times2-2\times3\times2=-7$

$\therefore A=\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & -1\\-4 & -7\end{pmatrix}$

따라서 행렬 A의 모든 성분의 합은
$0+1+0+(-1)+(-4)+(-7)=-11$

768 ······ 답 $\begin{pmatrix}0 & 4 & 12\\4 & 0 & 3\\12 & 3 & 0\end{pmatrix}$

(i) $i=j$일 때, $a_{ij}=0$이므로 $a_{11}=a_{22}=a_{33}=0$
(ii) 구역 P_1과 구역 P_2 사이에 어도가 4개이므로 구역 P_1에서 구역 P_2로 가는 방법의 수와 구역 P_2에서 구역 P_1로 가는 방법의 수는 모두 4이다.
$\therefore a_{12}=a_{21}=4$
(iii) 구역 P_2와 구역 P_3 사이에 어도가 3개이므로 구역 P_2에서 구역 P_3으로 가는 방법의 수와 구역 P_3에서 구역 P_2로 가는 방법의 수는 모두 3이다.
$\therefore a_{23}=a_{32}=3$
(iv) 구역 P_1에서 구역 P_3으로 가려면 반드시 구역 P_2를 거쳐야 하므로 구역 P_1에서 구역 P_3으로 가는 방법의 수는 $4\times3=12$
$\therefore a_{13}=12$
마찬가지로 구역 P_3에서 구역 P_1로 가려면 반드시 구역 P_2를 거쳐야 하므로 구역 P_3에서 구역 P_1로 가는 방법의 수는
$3\times4=12$ $\quad\therefore a_{31}=12$

(i)~(iv)에서 $A=\begin{pmatrix}0 & 4 & 12\\4 & 0 & 3\\12 & 3 & 0\end{pmatrix}$

769 ······ 답 10

(i) $i>j$일 때, $a_{ij}=ij$이므로
$a_{21}=2\times1=2,\ a_{31}=3\times1=3,\ a_{32}=3\times2=6$
(ii) $i=j$일 때, $a_{ij}=2i^2-3j$이므로
$a_{11}=2\times1^2-3\times1=-1,\ a_{22}=2\times2^2-3\times2=2,$
$a_{33}=2\times3^2-3\times3=9$
(iii) $i<j$일 때, $a_{ij}=a_{ji}$이므로
$a_{12}=a_{21}=2,\ a_{13}=a_{31}=3,\ a_{23}=a_{32}=6$

(i)~(iii)에서 $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\2 & 2 & 6\\3 & 6 & 9\end{pmatrix}$

따라서 행렬 A의 제2열의 모든 성분의 합은 $2+2+6=10$

770 ······ 답 14

$A=B$이므로
$\begin{pmatrix}x & y+3z\\x+2y & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y+4 & 5\\1 & x-z\end{pmatrix}$
두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여
$x=y+4$에서 $x-y=4$ ······ ㉠
$y+3z=5$ ······ ㉡
$x+2y=1$ ······ ㉢
$1=x-z$ ······ ㉣
㉠, ㉢을 연립하여 풀면 $x=3,\ y=-1$
$x=3$을 ㉣에 대입하면 $1=3-z$
$\therefore z=2$
$y=-1,\ z=2$는 ㉡을 만족시킨다.
$\therefore x^2+y^2+z^2=3^2+(-1)^2+2^2=14$

771 ······ 답 28

$a_{12}=6$이므로 $a+2b+3=6$
$\therefore a+2b=3$ ······ ㉠
$a_{13}=8$이므로 $a+3b+3=8$
$\therefore a+3b=5$ ······ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1,\ b=2$
따라서 $i\neq j$일 때, $a_{ij}=-i+2j+3$이므로
$x=a_{23}=-2+2\times3+3=7$
$y=a_{32}=-3+2\times2+3=4$
$\therefore xy=7\times4=28$

772 ······ 답 4

$A=B$이므로
$\begin{pmatrix}x^2-x & -4\\3 & 3y-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & xy\\3 & y^2\end{pmatrix}$
두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여
$x^2-x=6$ ······ ㉠
$-4=xy$ ······ ㉡
$3y-2=y^2$ ······ ㉢
㉠에서 $x^2-x-6=0$
$(x+2)(x-3)=0$ $\quad\therefore x=-2$ 또는 $x=3$
㉢에서 $y^2-3y+2=0$
$(y-1)(y-2)=0$ $\quad\therefore y=1$ 또는 $y=2$
이때 ㉡에서 $xy=-4$이므로 $x=-2,\ y=2$
$\therefore y-x=2-(-2)=4$

773

답 ①

$$\begin{pmatrix} a^3 & a-b \\ ab & b^3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5\sqrt{2}+7 & 2 \\ k & 5\sqrt{2}-7 \end{pmatrix}$$

이므로 두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$a^3=5\sqrt{2}+7$ …… ㉠

$a-b=2$ …… ㉡

$ab=k$ …… ㉢

$b^3=5\sqrt{2}-7$ …… ㉣

$a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$이므로

이 식에 ㉠~㉣을 대입하면

$5\sqrt{2}+7-(5\sqrt{2}-7)=2^3+3\times k\times 2$

$14=8+6k,\ 6k=6$

$\therefore\ k=1$

774

답 ③

$$\begin{aligned}3(A-2B)-\frac{1}{2}(5A-8B)&=3A-6B-\frac{5}{2}A+4B\\&=\frac{1}{2}A-2B\\&=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix} -8 & 13 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

따라서 $3(A-2B)-\frac{1}{2}(5A-8B)$의 모든 성분의 합은

$(-8)+13+(-2)+6=9$

775

답 40

$2(A-2X)+8B=6(2B-X)$에서

$2A-4X+8B=12B-6X$

$2X=-2A+4B$

$$\begin{aligned}\therefore\ X&=-A+2B\\&=-\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -10 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

따라서 행렬 X의 모든 성분의 곱은

$1\times(-10)\times1\times(-4)=40$

776

답 2

$xA+yB=C$이므로

$$x\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} 0 & k \\ -4 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -7 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & x+ky \\ -3x-4y & 4x+y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -7 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$x+ky=-7$ …… ㉠

$-3x-4y=6$ …… ㉡

$4x+y=5$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $x=2,\ y=-3$

$x=2,\ y=-3$을 ㉠에 대입하면

$2-3k=-7$

$-3k=-9\quad \therefore\ k=3$

$\therefore\ k+x+y=3+2+(-3)=2$

777

답 풀이 참조

$2A-3B=\begin{pmatrix} -8 & 1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ …… ㉠

$3A+2B=\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -10 & 9 \end{pmatrix}$ …… ㉡

㉠$\times2+$㉡$\times3$을 하면

$$13A=2\begin{pmatrix} -8 & 1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -10 & 9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -13 & 26 \\ -26 & 39 \end{pmatrix}$$

$\therefore\ A=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ …… ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$$2\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}-3B=\begin{pmatrix} -8 & 1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$3B=2\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -8 & 1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ A+B=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

따라서 $a=1,\ b=3,\ c=-4,\ d=3$이므로

$ad-bc=1\times3-3\times(-4)=15$

채점 요소	배점
행렬 A 구하기	30 %
행렬 B 구하기	30 %
행렬 $A+B$ 구하기	30 %
$ad-bc$의 값 구하기	10 %

778

답 ③

$x^2-ax+b^2=0$에서

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 …… TIP

$\alpha+\beta=a,\ \alpha\beta=b^2$

$$\alpha\begin{pmatrix} \alpha & 2 \\ \beta & 0 \end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} \beta & 2 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 2\alpha\beta & 0 \end{pmatrix}$$이므로

$$\begin{pmatrix} \alpha^2+\beta^2 & 2(\alpha+\beta) \\ 2\alpha\beta & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 2\alpha\beta & 0 \end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$\alpha^2+\beta^2=7,\ 2(\alpha+\beta)=6$

$2(\alpha+\beta)=6$에서 $\alpha+\beta=3$이므로 $a=3$

$\alpha^2+\beta^2=7$이므로 $(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=7$

$3^2-2\alpha\beta=7\quad \therefore\ \alpha\beta=1$

즉, $b^2=1$이므로 $b=1\ (\because\ b>0)$

$\therefore\ a+b=3+1=4$

TIP

이차방정식의 근과 계수의 관계

x에 대한 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면

(1) $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ (2) $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

779

답 4

$a_{ij}=\begin{cases} i-3j & (i\neq j) \\ i+j & (i=j)\end{cases}$에서

$a_{11}=1+1=2$, $a_{12}=1-3\times2=-5$

$a_{21}=2-3\times1=-1$, $a_{22}=2+2=4$

이므로 $A=\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

$c_{ij}=i^2-j$에서

$c_{11}=1^2-1=0$, $c_{12}=1^2-2=-1$

$c_{21}=2^2-1=3$, $c_{22}=2^2-2=2$

이므로 $B-2A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

$\therefore B=2A+(B-2A)=2\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & -11 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 B의 모든 성분의 합은 $4+(-11)+1+10=4$

780

답 6

$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^2 \end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^3 \end{pmatrix}$

$A^4=A^3A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^4 \end{pmatrix}$

$\vdots$

$\therefore A^n=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$

이때 행렬 A^n의 모든 성분의 합이 65이므로

$1+0+0+2^n=65$

$2^n=64 \qquad \therefore n=6$

781

답 13

$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ a \end{pmatrix}$에서

$\begin{pmatrix} 5a-2b \\ 4a+ab \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2+3a \\ 6+4a \end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$5a-2b=-2+3a$이므로 $2a-2b=-2 \qquad \therefore a-b=-1$

$4a+ab=6+4a$이므로 $ab=6$

$\therefore a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$

$=(-1)^2+2\times6$

$=13$

782

답 13

$a_{ij}=i-j+1$에서

$a_{11}=1-1+1=1$, $a_{12}=1-2+1=0$,

$a_{21}=2-1+1=2$, $a_{22}=2-2+1=1$

이므로 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$b_{ij}=i+j+1$에서

$b_{11}=1+1+1=3$, $b_{12}=1+2+1=4$,

$b_{21}=2+1+1=4$, $b_{22}=2+2+1=5$

이므로 $B=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

$\therefore AB=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 10 & 13 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 AB의 $(2, 2)$ 성분은 13이다.

783

답 ③

$A^2=AA=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$

$A^4=A^3A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 12 & 1 \end{pmatrix}$

$\vdots$

$\therefore A^n=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3n & 1 \end{pmatrix}$

이때 $S_n=1+0+3n+1=3n+2$이므로 $S_n>150$에서

$3n+2>150$, $3n>148 \qquad \therefore n>\frac{148}{3}=49.333\cdots$

따라서 구하는 자연수 n의 최솟값은 50이다.

784

답 ②

$AB=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$

민지가 마트에서 빵과 우유를 사고 지불해야 하는 금액은

$af+bh$(원) …… ㉠

지수가 편의점에서 빵과 우유를 사고 지불해야 하는 금액은

$ce+dg$(원) …… ㉡

㉠은 행렬 AB의 $(1, 2)$ 성분이고,

㉡은 행렬 AB의 $(2, 1)$ 성분이다.

따라서 구하는 금액의 합은 행렬 AB의 $(1, 2)$ 성분과 $(2, 1)$ 성분의 합과 같다.

785

답 ⑤

$A+2B=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ …… ㉠

$A-2B=\begin{pmatrix} -5 & 7 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 양변을 더하면 $2A=\begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

$\therefore A=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ …… ㉢

㉢을 ㉠에 대입하여 정리하면

$2B=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

$\therefore A^2-4B^2=A^2-(2B)^2$

$=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 16 & -40 \\ 0 & 36 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -12 & 37 \\ -1 & -33 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 A^2-4B^2의 $(1, 2)$ 성분은 37이다.

786 ······ 답 -96

$A^2=AA=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$

$=-2\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}=-2A$

$A^3=A^2A=(-2A)A=-2A^2=-2(-2A)=4A$

$A^4=(A^2)^2=(-2A)^2=4A^2=4(-2A)=-8A$

⋮

$\therefore A^n=(-2)^{n-1}A$

$\therefore A^6+A^7+A^8=(-2)^5A+(-2)^6A+(-2)^7A$

$=-32A+64A-128A$

$=-96A$

$\therefore k=-96$

787 ······ 답 풀이 참조

$\begin{pmatrix} x & y \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & x \\ -1 & y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 40 \\ 4 & x \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & 10 \\ -3 & y \end{pmatrix}$에서

$\begin{pmatrix} 2x-y & x^2+y^2 \\ 1 & x+y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 50 \\ 1 & x+y \end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$2x-y=5$이므로 $y=2x-5$ …… ㉠

$x^2+y^2=50$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $x^2+(2x-5)^2=50$

$5x^2-20x-25=0$, $x^2-4x-5=0$

$(x+1)(x-5)=0$ $\quad\therefore x=-1$ 또는 $x=5$

이때 $y=2x-5$이므로

$x=-1$이면 $y=2x-5=2\times(-1)-5=-7$

$x=5$이면 $y=2x-5=2\times5-5=5$

따라서 xy의 값은 $(-1)\times(-7)=7$ 또는 $5\times5=25$이므로

구하는 xy의 최솟값은 7이다.

채점 요소	배점
두 행렬이 서로 같을 조건을 이용하여 x, y에 대한 식 세우기	25 %
x의 값 구하기	40 %
y의 값 구하기	20 %
xy의 최솟값 구하기	15 %

788 ······ 답 2

$(A-B)^2=A^2-AB-BA+B^2$이므로

$AB+BA=A^2+B^2-(A-B)^2$

$=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 $AB+BA$의 제2열의 모든 성분의 합은

$5+(-3)=2$

789 ······ 답 18

$A(2B+3C)-5AC=2AB+3AC-5AC$

$=2AB-2AC$

$=2A(B-C)$ …… ㉠

$\frac{1}{3}(B-C)=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$에서

$B-C=3\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

이므로 ㉠에서

$A(2B+3C)-5AC=2A(B-C)$

$=2\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

$=2\begin{pmatrix} -6 & -3 \\ 15 & 9 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -12 & -6 \\ 30 & 18 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 $A(2B+3C)-5AC$의 가장 큰 성분은 30, 가장 작은 성분은 -12이므로 그 합은 $30+(-12)=18$

790 ······ 답 4

$(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2$이므로

$AB+BA=(A+B)^2-(A^2+B^2)$

$=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

$(A-B)^2=A^2+B^2-(AB+BA)$

$=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 $(A-B)^2$의 가장 큰 성분은 4이다.

791 ······ 답 2

$(A-2B)^2=A^2-2AB-2BA+4B^2$이고

주어진 조건에서 $(A-2B)^2=A^2-4AB+4B^2$이므로

$-2AB-2BA=-4AB$

$2AB-2BA=0$ $\quad\therefore AB=BA$

IV 행렬

즉, $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ -3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x & y \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$이므로

$\begin{pmatrix} 2x+6 & 2y-8 \\ 3x+3 & 3y-4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x+3y & -2x-y \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$3x+3=6$에서 $3x=3$ $\quad \therefore x=1$

$3y-4=2$에서 $3y=6$ $\quad \therefore y=2$

$x=1$, $y=2$이면 $2x+6=2x+3y$, $2y-8=-2x-y$도 만족시킨다.

$\therefore xy=1\times2=2$

792 ······ 답 ④

$(A-B)(A+B)=A^2+AB-BA-B^2$이므로

$$AB-BA=(A-B)(A+B)-(A^2-B^2)$$
$$=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore (A+B)(A-B)=A^2-AB+BA-B^2$$
$$=(A^2-B^2)-(AB-BA)$$
$$=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

따라서 행렬 $(A+B)(A-B)$의 모든 성분의 합은

$2+5+2+2=11$

793 ······ 답 12

$(A+B)C+A(B-C)-(A-C)B$

$=AC+BC+AB-AC-AB+CB$

$=BC+CB$ ······ ㉠

이때

$BC=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$CB=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

이므로 ㉠에서

$(A+B)C+A(B-C)-(A-C)B$

$=BC+CB$

$=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

따라서 구하는 행렬의 모든 성분의 합은

$4+5+(-1)+4=12$

794 ······ 답 4

$$A^2+2AB-BA-2B^2=A(A+2B)-B(A+2B)$$
$$=(A-B)(A+2B) \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때

$A-B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$,

$A+2B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

이므로 ㉠에서

$$A^2+2AB-BA-2B^2=(A-B)(A+2B)$$
$$=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ -12 & -4 \end{pmatrix}$$

따라서 구하는 행렬의 $(1, 1)$ 성분은 8, $(2, 2)$ 성분은 -4이므로 그 합은 $8+(-4)=4$

795 ······ 답 ③

$$(A+B)^2=(A^2+B^2)+(AB+BA)$$
$$=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{5}{2} & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$

$\vdots$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2n & 1 \end{pmatrix}$

$\therefore (A+B)^{66}=\{(A+B)^2\}^{33}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{33}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 66 & 1 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 $(A+B)^{66}$의 모든 성분의 합은

$1+0+66+1=68$

796 ······ 답 12

$(A-3B)(A+3B)=A^2+3AB-3BA-9B^2$이고

주어진 조건에서 $(A-3B)(A+3B)=A^2-9B^2$이므로

$3AB-3BA=O$ $\quad \therefore AB=BA$

즉, $\begin{pmatrix} x & 5 \\ 2x & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -5 \\ y & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -5 \\ y & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 5 \\ 2x & -2 \end{pmatrix}$이므로

$\begin{pmatrix} -2x+5y & -5x+15 \\ -4x-2y & -10x-6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -12x & 0 \\ xy+6x & 5y-6 \end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$-2x+5y=-12x$ ······ ㉠

$-5x+15=0$이므로 $-5x=-15$

$\therefore x=3$ ······ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $-6+5y=-36$

$5y=-30$ $\quad \therefore y=-6$

$x=3$, $y=-6$이면 $-4x-2y=xy+6x$, $-10x-6=5y-6$도 만족시킨다.

따라서 행렬 $A-B$의 $(2, 1)$ 성분은

$2x-y=2\times3-(-6)=12$

797 ······ 답 ⑤

$(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2$
주어진 조건에서 $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$이므로
$AB+BA=2AB \quad \therefore AB=BA$
즉, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3x \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} y+6 & 11 \\ 2y-9x & 6-12x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y+6 & 2y-9x \\ 11 & 6-12x \end{pmatrix}$
두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여
$2y-9x=11$
따라서 점 (x, y)가 나타내는 그래프는 직선 $y=\frac{9}{2}x+\frac{11}{2}$이고,
이 식에 $x=3$을 대입하면 $y=\frac{9}{2}\times3+\frac{11}{2}=19$이므로 이 직선은
점 $(3, 19)$를 지난다.
$\therefore k=19$

798 ······ 답 풀이 참조

$(A+2B)(A-B)=A^2-AB+2BA-2B^2$이고
주어진 조건에서 $(A+2B)(A-B)=A^2+AB-2B^2$이므로
$-AB+2BA=AB,\ -2AB+2BA=O$
$\therefore AB=BA$
즉, $\begin{pmatrix} 6x & 1 \\ 1 & x^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y^2 & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y^2 & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6x & 1 \\ 1 & x^2 \end{pmatrix}$이므로
$\begin{pmatrix} 6xy^2+1 & 6x+7 \\ x^2+y^2 & 1+7x^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6xy^2+1 & x^2+y^2 \\ 6x+7 & 1+7x^2 \end{pmatrix}$
두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여
$x^2+y^2=6x+7,\ x^2-6x+y^2=7$
$\therefore (x-3)^2+y^2=16$
이때 x, y는 정수이므로
$(x-3)^2=16,\ y^2=0$ 또는 $(x-3)^2=0,\ y^2=16$
(i) $(x-3)^2=16,\ y^2=0$일 때, $x-3=\pm4,\ y=0$
(ii) $(x-3)^2=0,\ y^2=16$일 때, $x-3=0,\ y=\pm4$
따라서 구하는 순서쌍 (x, y)는 $(7, 0), (-1, 0), (3, 4), (3, -4)$의 4개이다.

채점 요소	배점
$AB=BA$임을 설명하기	20 %
두 행렬이 서로 같을 조건을 이용하여 x, y에 대한 식 구하기	40 %
순서쌍 (x, y)의 개수 구하기	40 %

799 ······ 답 ③

$A\begin{pmatrix} 3a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ ······ ㉠
$A\begin{pmatrix} 3a \\ 5b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ······ ㉡
㉠, ㉡의 양변을 더하면 $A\begin{pmatrix} 6a \\ 6b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix},\ 6A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\therefore A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

800 ······ 답 ②

$A\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$의 양변의 왼쪽에 행렬 A를 곱하면
$A^2\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$이므로
$A\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p \\ 3q \end{pmatrix}$
$\therefore A\begin{pmatrix} p-r \\ q-s \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}-A\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} p \\ 3q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -p+r \\ -3q+s \end{pmatrix}$

801 ······ 답 4

두 실수 a, b에 대하여 $a\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$로 놓으면
$a+2b=1,\ 2a-b=7$
위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=3,\ b=-1$
즉, $\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}=3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$이므로
이 식의 양변의 왼쪽에 행렬 A를 곱하면
$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}=A\left\{3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$$
$$=3A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}-A\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$=3\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}$$
따라서 $p=7,\ q=-3$이므로 $p+q=7+(-3)=4$

802 ······ 답 ③

$A^2=AA=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$
$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=E$
$\therefore A^{1021}=(A^3)^{340}A=EA=A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

803 ······ 답 ③

$A^2=AA=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=-E$
$A^4=(A^2)^2=(-E)^2=E$
$$\therefore A^{80}+A^{81}+A^{82}=(A^4)^{20}+(A^4)^{20}A+(A^4)^{20}A^2$$
$$=E+A+A^2$$
$$=E+A-E=A$$
따라서 주어진 행렬과 같은 행렬은 ③이다.

804 ······ 답 96

$A^2=AA=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=-E$
$\therefore A^4=(-E)^2=E$

이때 $A^n=E$가 되는 경우는 $n=4k$ (k는 자연수)일 때이다.
$4\times24=96$, $4\times25=100$이므로 구하는 두 자리 자연수 n의 최댓값은 96이다.

805 ··· 답 16

$(A+E)(A^2-A+E)=A^3+E^3$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\;=A^3+E$ ······ ㉠

이때

$$A^2=AA=\begin{pmatrix}1 & -4\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -4\\ 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7 & 0\\ 0 & -7\end{pmatrix}=-7E$$

$$A^3=A^2A=(-7E)A=-7A=-7\begin{pmatrix}1 & -4\\ 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7 & 28\\ -14 & 7\end{pmatrix}$$

이므로 ㉠에서

$$\begin{aligned}(A+E)(A^2-A+E)&=A^3+E\\&=\begin{pmatrix}-7 & 28\\ -14 & 7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}-6 & 28\\ -14 & 8\end{pmatrix}\end{aligned}$$

따라서 구하는 행렬의 모든 성분의 합은
$(-6)+28+(-14)+8=16$

806 ··· 답 128

$$A^2=AA=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 3\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -6\\ 2 & -2\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}-2 & -6\\ 2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 3\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 0\\ 0 & 8\end{pmatrix}=8E$$

$A^6=(A^3)^2=(8E)^2=64E$

$$\therefore\ A^6\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=64E\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=64\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}64\\ 64\end{pmatrix}$$

즉, $a=64$, $b=64$이므로
$a+b=64+64=128$

807 ··· 답 -12

$A^2B-AB^2=A(AB-B^2)$
$\qquad\qquad\quad\;=A(A-B)B$ ······ ㉠

이때

$$\begin{aligned}A-B&=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}=3E\end{aligned}$$

이므로 ㉠에서

$$\begin{aligned}A^2B-AB^2&=A(A-B)B\\&=A(3E)B=3AB\\&=3\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}\\&=3\begin{pmatrix}-4 & -1\\ 2 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-12 & -3\\ 6 & -6\end{pmatrix}\end{aligned}$$

따라서 행렬 A^2B-AB^2의 가장 작은 성분은 -12이다.

808 ··· 답 풀이 참조

$(A-2E)(A+2E)=E$이므로 $A^2-4E=E$
$\therefore\ A^2=5E$ ······ ㉠

이때

$$A^2=AA=\begin{pmatrix}x & -2\\ 2 & -y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & -2\\ 2 & -y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x^2-4 & -2x+2y\\ 2x-2y & -4+y^2\end{pmatrix}$$

이므로 ㉠에서

$$\begin{pmatrix}x^2-4 & -2x+2y\\ 2x-2y & -4+y^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여
$x^2-4=5$에서 $x^2=9$ $\quad\therefore\ x=\pm3$
$-2x+2y=0$, $2x-2y=0$이므로 $y=x$
$-4+y^2=5$에서 $y^2=9$ $\quad\therefore\ y=\pm3$
$y=x$이므로 x와 y의 부호는 서로 같고 $x+y$가 최소이려면 $x=-3$, $y=-3$이어야 한다.
따라서 구하는 $x+y$의 최솟값은 $(-3)+(-3)=-6$

채점 요소	배점
$(A-2E)(A+2E)=E$를 간단히 나타내기	20 %
A^2 구하기	20 %
x, y의 값 구하기	50 %
$x+y$의 최솟값 구하기	10 %

809 ··· 답 ⑤

$A+B=O$에서 $B=-A$
이를 $AB=2E$에 대입하면 $-A^2=2E$
$\therefore\ A^2=-2E$
또한 $A+B=O$에서 $A=-B$
이를 $AB=2E$에 대입하면 $-B^2=2E$
$\therefore\ B^2=-2E$

$$\begin{aligned}\therefore\ A^4+B^4&=(A^2)^2+(B^2)^2\\&=(-2E)^2+(-2E)^2\\&=4E+4E\\&=8E\\&=\begin{pmatrix}8 & 0\\ 0 & 8\end{pmatrix}\end{aligned}$$

따라서 $a=8$, $b=0$, $c=0$, $d=8$이므로
$a+b+c+d=8+0+0+8=16$

810 ··· 답 ④

$A-B=E$의 양변의 왼쪽에 행렬 A를 곱하면
$A^2-AB=A$
즉, $A^2=A$ ($\because$ $AB=O$)이므로
$A^8=(A^2)^4=A^4=(A^2)^2=A^2=A$
$A-B=E$의 양변의 오른쪽에 행렬 B를 곱하면
$AB-B^2=B$
즉, $B^2=-B$ ($\because$ $AB=O$)이므로
$B^8=(B^2)^4=(-B)^4=B^4=(B^2)^2=(-B)^2=B^2=-B$
$\therefore\ A^8-B^8=A-(-B)=A+B$

811 ⓓ 7

$A+B=3E$의 양변의 왼쪽에 행렬 A를 곱하면

$A^2+AB=3A$, $A^2+E=3A$

$\therefore A^2=3A-E$

$A+B=3E$의 양변의 오른쪽에 행렬 B를 곱하면

$AB+B^2=3B$, $E+B^2=3B$

$\therefore B^2=3B-E$

$$\begin{aligned}\therefore A^2+B^2&=(3A-E)+(3B-E)\\&=3(A+B)-2E\\&=3\times3E-2E\\&=7E\end{aligned}$$

$\therefore k=7$

다른 풀이

$A+B=3E$이므로 $B=3E-A$ …… ㉠

㉠을 $AB=E$에 대입하면

$A(3E-A)=E$, $3A-A^2=E$

$\therefore A^2=3A-E$

같은 방법으로 하면 $B^2=3B-E$

$$\begin{aligned}\therefore A^2+B^2&=(3A-E)+(3B-E)\\&=3(A+B)-2E\\&=3\times3E-2E=7E\end{aligned}$$

$\therefore k=7$

812 ⓓ 5

$(A^2+A+E)(A^2-A+E)=A^4+A^2+E$ …… ㉠

이때

$$A^4=A^2A^2=\begin{pmatrix}1&2\\-1&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\-1&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&2+2a\\-1-a&-2+a^2\end{pmatrix}$$

이므로 ㉠에서

$(A^2+A+E)(A^2-A+E)$

$=A^4+A^2+E$

$$=\begin{pmatrix}-1&2+2a\\-1-a&-2+a^2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&2\\-1&a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&2a+4\\-a-2&a^2+a-1\end{pmatrix}$$

따라서

$1+(2a+4)+(-a-2)+(a^2+a-1)=a^2+2a+2=37$

$a^2+2a-35=0$, $(a+7)(a-5)=0$

$\therefore a=5$ ($\because a>0$)

813 ⓓ ④

ㄱ. $a\triangle b=\begin{pmatrix}a&b\\b&a\end{pmatrix}$, $b\triangle a=\begin{pmatrix}b&a\\a&b\end{pmatrix}$이므로

$a\triangle b\neq b\triangle a$ (거짓)

ㄴ. $k(a\triangle b)=k\begin{pmatrix}a&b\\b&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ka&kb\\kb&ka\end{pmatrix}$, $ka\triangle kb=\begin{pmatrix}ka&kb\\kb&ka\end{pmatrix}$이므로

$k(a\triangle b)=ka\triangle kb$ (참)

ㄷ. $(a\triangle b)-(c\triangle d)=\begin{pmatrix}a&b\\b&a\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}c&d\\d&c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-c&b-d\\b-d&a-c\end{pmatrix}$,

$(a-c)\triangle(b-d)=\begin{pmatrix}a-c&b-d\\b-d&a-c\end{pmatrix}$이므로

$(a\triangle b)-(c\triangle d)=(a-c)\triangle(b-d)$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

814 ⓓ ④

ㄱ. $A^5=A^3A^2$이므로 $E=A^3E$

$\therefore A^3=E$

$A^3=A^2A$이므로 $E=EA$

$\therefore A=E$ (참)

ㄴ. $A=\begin{pmatrix}2&2\\1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}$이면

$A-B=\begin{pmatrix}2&2\\1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}$이므로

$(A-B)^2=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$이지만

$A\neq B$이다. (거짓)

ㄷ. $A=3B^2$이므로

$AB=(3B^2)B=3B^3$, $BA=B(3B^2)=3B^3$

$\therefore AB=BA$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

815 ⓓ ③

$AB+BA=O$에서 $BA=-AB$

ㄱ. $A^2B=A(AB)=A(-BA)=(-AB)A=BAA$

$=BA^2$ (참)

ㄴ. $(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2$

$=A^2+AB-AB+B^2$

$=A^2+B^2$ (참)

ㄷ. $(A+B)(A-B)=A^2-AB+BA-B^2$

$=A^2-AB-AB-B^2$

$=A^2-2AB-B^2$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

816 ⓓ ①

ㄱ. $A\circledcirc B=AB+BA$, $B\circledcirc A=BA+AB$

$\therefore A\circledcirc B=B\circledcirc A$ (참)

ㄴ. $kA\circledcirc kB=(kA)(kB)+(kB)(kA)$

$=k^2AB+k^2BA$

$=k^2(AB+BA)=k^2(A\circledcirc B)$

$\therefore kA\circledcirc kB\neq k(A\circledcirc B)$ (거짓)

ㄷ. $(A\circledcirc B)\circledcirc C=(AB+BA)\circledcirc C$

$=(AB+BA)C+C(AB+BA)$

$=ABC+BAC+CAB+CBA$

$A\circledcirc(B\circledcirc C)=A\circledcirc(BC+CB)$

$=A(BC+CB)+(BC+CB)A$

$=ABC+ACB+BCA+CBA$

$\therefore (A \bullet B) \bullet C \neq A \bullet (B \bullet C)$ (거짓)
따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

817

답 5

$B^2=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 & 9 \\ -6 & 10 \end{pmatrix}$이므로

$B^2-xE=\begin{pmatrix} -5 & 9 \\ -6 & 10 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5-x & 9 \\ -6 & 10-x \end{pmatrix}$

이때 $f(B^2-xE)=0$은
$(-5-x)(10-x)+54=0$이므로
$x^2-5x+4=0$, $(x-1)(x-4)=0$
$\therefore x=1$ 또는 $x=4$
따라서 구하는 두 근의 합은 $1+4=5$

818

답 ③

ㄱ. $A+B=O$이면 $B=-A$이므로
$AB=A(-A)=-A^2$, $BA=(-A)A=-A^2$
$\therefore AB=BA$ (참)
ㄴ. $AB=A$에서 양변의 오른쪽에 A를 곱하면 $ABA=A^2$
$AB=A^2$ ($\because BA=B$)
$\therefore A=A^2$ ($\because AB=A$)
마찬가지 방법으로 $B^2=B$
$\therefore A^2+B^2=A+B$ (참)
ㄷ. $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$이면

$A^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$B^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$이므로

$A^2-B^2=O$이지만 $A\neq B$, $A\neq -B$이다. (거짓)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

819

답 -3

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여
$a+5=4$이므로 $a=-1$
$3=3b$이므로 $b=1$
$2c^2=3b+5c$ …… ㉠
$c^2+ac=6$ …… ㉡
(i) $a=-1$을 ㉡에 대입하면
$c^2-c=6$, $c^2-c-6=0$
$(c-3)(c+2)=0$
$\therefore c=-2$ 또는 $c=3$
(ii) $b=1$을 ㉠에 대입하면
$2c^2=3+5c$, $2c^2-5c-3=0$
$(2c+1)(c-3)=0$
$\therefore c=-\frac{1}{2}$ 또는 $c=3$
(i), (ii)에서 $c=3$
$\therefore abc=(-1)\times1\times3=-3$

820

답 ③

$a_{ij}=(i^2+1)(j^2-k)$이므로
$a_{11}=(1^2+1)(1^2-k)=2(1-k)$
$a_{12}=(1^2+1)(2^2-k)=2(4-k)$
$a_{13}=(1^2+1)(3^2-k)=2(9-k)$
$a_{21}=(2^2+1)(1^2-k)=5(1-k)$
$a_{22}=(2^2+1)(2^2-k)=5(4-k)$
$a_{23}=(2^2+1)(3^2-k)=5(9-k)$
이때 행렬 A의 모든 성분의 합이 14이므로
$7(1-k)+7(4-k)+7(9-k)=14$
$7(14-3k)=14$, $14-3k=2$
$\therefore k=4$

821

답 ④

$a_{ij}=pi+qj$에서
$a_{11}=p+q$, $a_{12}=p+2q$, $a_{21}=2p+q$, $a_{22}=2p+2q$

$\therefore A=\begin{pmatrix} p+q & p+2q \\ 2p+q & 2p+2q \end{pmatrix}$

$b_{ij}=\begin{cases} 2^i & (i+j\text{가 짝수인 경우}) \\ 3i-j & (i+j\text{가 홀수인 경우}) \end{cases}$에서

$b_{11}=2$, $b_{12}=3\times1-2=1$, $b_{21}=3\times2-1=5$, $b_{22}=2^2=4$

$\therefore B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

$A=B$이므로 두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여
$p+q=2$, $p+2q=1$
두 식을 연립하여 풀면
$p=3$, $q=-1$이고 $2p+q=5$, $2p+2q=4$도 만족시킨다.
$\therefore p^2+q^2=3^2+(-1)^2=10$

822

답 52

행렬 $S(a, b)$의 (i, j) 성분을 s_{ij} $(i, j=1, 2)$라 하고
$s_{11}=k$라 하면
$s_{12}=k+1$, $s_{21}=k+10$, $s_{22}=k+11$
이므로 행렬 $S(a, b)$의 모든 성분의 합은
$k+(k+1)+(k+10)+(k+11)=4k+22$
이때 주어진 조건에 의하여 행렬 $S(a, b)$의 모든 성분의 합이 282이므로
$4k+22=282$, $4k=260$ $\therefore k=65$
따라서 $a=4$, $b=6$이므로
$a^2+b^2=4^2+6^2=52$이다.

823

답 6

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여
$x^2+y^2+z^2=xy+yz+zx$ …… ㉠
$xyz=-8$ …… ㉡
㉠에서 $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=0$

$\frac{1}{2}(2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx)=0$

$\frac{1}{2}\{(x^2-2xy+y^2)+(y^2-2yz+z^2)+(z^2-2zx+x^2)\}=0$

$\frac{1}{2}\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}=0$

이때 x, y, z는 실수이므로 $x-y=0$, $y-z=0$, $z-x=0$

$\therefore x=y=z$

ㄴ에서 $xyz=-8$이고, $x=y=z$이므로

$x^3=-8 \qquad \therefore x=-2$

따라서 $x=y=z=-2$이므로

$x-3y-z=(-2)-3\times(-2)-(-2)=6$

824

답 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

이차함수 $y=x^2-(2i+j)x+9$의 그래프와 직선 $y=jx$의 교점의 개수는 이차방정식 $x^2-(2i+j)x+9=jx$, 즉 $x^2-2(i+j)x+9=0$의 서로 다른 실근의 개수와 같다.

(i) $i=1$, $j=1$인 경우

이차방정식 $x^2-2\times(1+1)x+9=0$, 즉 $x^2-4x+9=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=(-2)^2-1\times9=-5<0$

즉, 주어진 이차함수의 그래프와 직선의 교점의 개수는 0이므로 행렬 A의 $(1, 1)$ 성분은 0이다.

(ii) $i=1$, $j=2$인 경우

이차방정식 $x^2-2\times(1+2)x+9=0$, 즉 $x^2-6x+9=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=(-3)^2-1\times9=0$

즉, 주어진 이차함수의 그래프와 직선의 교점의 개수는 1이므로 행렬 A의 $(1, 2)$ 성분은 1이다.

(iii) $i=2$, $j=1$인 경우

이차방정식 $x^2-2\times(2+1)x+9=0$, 즉 $x^2-6x+9=0$의 판별식을 D_3이라 하면

$\frac{D_3}{4}=(-3)^2-1\times9=0$

즉, 주어진 이차함수의 그래프와 직선의 교점의 개수는 1이므로 행렬 A의 $(2, 1)$ 성분은 1이다.

(iv) $i=2$, $j=2$인 경우

이차방정식 $x^2-2\times(2+2)x+9=0$, 즉 $x^2-8x+9=0$의 판별식을 D_4라 하면

$\frac{D_4}{4}=(-4)^2-1\times9=7>0$

즉, 주어진 이차함수의 그래프와 직선의 교점의 개수는 2이므로 행렬 A의 $(2, 2)$ 성분은 2이다.

(i)~(iv)에서 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

참고

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 교점의 x좌표는 이차방정식 $ax^2+(b-m)x+c-n=0$의 실근과 같다.

825

답 ③

$3(2A+B)-5(A-C+B)$

$=6A+3B-5A+5C-5B$

$=A-2B+5C$

$=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}+5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -11 & 8 \end{pmatrix}$

따라서 $3(2A+B)-5(A-C+B)$의 가장 큰 성분은 8이고, 가장 작은 성분은 -11이므로 구하는 차는 $8-(-11)=19$

826

답 풀이 참조

$xA+yB=C$에서

$x\begin{pmatrix} a & 3 \\ b & 4 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} b & 6 \\ a & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -7 & 18 \end{pmatrix}$이므로

$\begin{pmatrix} ax+by & 3x+6y \\ bx+ay & 4x-3y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -7 & 18 \end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$ax+by=8$ …… ㄱ

$3x+6y=-3$ …… ㄴ

$bx+ay=-7$ …… ㄷ

$4x-3y=18$ …… ㄹ

ㄴ, ㄹ을 연립하여 풀면 $x=3$, $y=-2$

$x=3$, $y=-2$를 ㄱ, ㄷ에 대입하면

$3a-2b=8$, $-2a+3b=-7$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-1$

$\therefore abxy=2\times(-1)\times3\times(-2)=12$

채점 요소	배점
$xA+yB=C$임을 이용하여 4개의 등식 나타내기	30 %
x, y의 값 구하기	30 %
a, b의 값 구하기	30 %
$abxy$의 값 구하기	10 %

827

답 ②

$\begin{pmatrix} a & b \\ 3 & c \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b & c \\ 1 & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ d & -5 \end{pmatrix}$이므로

$\begin{pmatrix} a+b & b+c \\ 4 & c+a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 2-d & 4 \end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$a+b=9$ …… ㄱ

$b+c=3$ …… ㄴ

$4=2-d$이므로 $\qquad \therefore d=-2$

$c+a=4$ …… ㄷ

ㄱ+ㄴ+ㄷ을 하면 $2(a+b+c)=16$

$\therefore a+b+c=8$ …… ㄹ

ㄹ−ㄱ을 하면 $c=-1$

ㄹ−ㄴ을 하면 $a=5$

ㄹ−ㄷ을 하면 $b=4$

$\therefore ab+cd=5\times4+(-1)\times(-2)=22$

828 ······ 답 21

$X-5A=2(B-2A)$이므로
$X-5A=2B-4A$
$\therefore X=A+2B$ ······ ㉠
$2A+B=\begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 21 & -11 \end{pmatrix}$ ······ ㉡
$A-3B=\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ ······ ㉢
㉡$-2\times$㉢을 하면 $7B=\begin{pmatrix} 7 & 14 \\ 21 & -7 \end{pmatrix}$
$\therefore B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ ······ ㉣
㉢에서 $A=3B+\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$이므로 ㉣을 대입하면
$A=3\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 9 & -5 \end{pmatrix}$
이때 ㉠에서 $X=A+2B=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 9 & -5 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 15 & -7 \end{pmatrix}$
따라서 행렬 X의 $(1, 2)$ 성분은 6이고 $(2, 1)$ 성분은 15이므로
그 합은 $6+15=21$

829 ······ 답 64

$\begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ x & x^3 \end{pmatrix}-3\begin{pmatrix} a & 1 \\ 2 & b \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} y^2 & xy \\ y & y^3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$에서
$\begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ x & x^3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} y^2 & xy \\ y & y^3 \end{pmatrix}=3\begin{pmatrix} a & 1 \\ 2 & b \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} x^2+y^2 & xy \\ x+y & x^3+y^3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3a & 3 \\ 6 & 3b \end{pmatrix}$
두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여
$x^2+y^2=3a,\ xy=3,\ x+y=6,\ x^3+y^3=3b$
$3a=x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=6^2-2\times3=30$
$\therefore a=10$
$3b=x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=6^3-3\times3\times6=162$
$\therefore b=54$
$\therefore a+b=10+54=64$

830 ······ 답 160

$x_{ij}=i+3j$이므로
$x_{11}=1+3\times1=4,\ x_{12}=1+3\times2=7$
$x_{21}=2+3\times1=5,\ x_{22}=2+3\times2=8$
$\therefore X=\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$
$y_{ij}=i^2+j^2$이므로
$y_{11}=1^2+1^2=2,\ y_{12}=1^2+2^2=5$
$y_{21}=2^2+1^2=5,\ y_{22}=2^2+2^2=8$
$\therefore Y=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$
이때 $-A+B=X,\ 3A-B=Y$이므로
$-A+B=\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$ ······ ㉠
$3A-B=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$ ······ ㉡
㉠, ㉡의 양변을 더하면 $2A=\begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 10 & 16 \end{pmatrix}$
$\therefore A=\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$ ······ ㉢
㉢을 ㉠에 대입하여 정리하면
$B=A+\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 13 \\ 10 & 16 \end{pmatrix}$
$\therefore 5A-2B=5\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 7 & 13 \\ 10 & 16 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$
따라서 행렬 $5A-2B$의 모든 성분의 곱은
$1\times4\times5\times8=160$

831 ······ 답 2

$a_{ij}-a_{ji}=0$에서 $a_{ij}=a_{ji}$이므로
$a_{12}=a_{21}$
즉, $a_{11}=a,\ a_{12}=a_{21}=b,\ a_{22}=c$라 하면
$A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$
$b_{ij}+b_{ji}=0$에서 $b_{ij}=-b_{ji}$이므로
$b_{11}=-b_{11},\ b_{22}=-b_{22}$
$\therefore b_{11}=0,\ b_{22}=0$
$b_{12}=-b_{21}$
즉, $b_{12}=x$라 하면 $B=\begin{pmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix}$
이때 $3A-2B=\begin{pmatrix} 6 & 19 \\ 11 & -3 \end{pmatrix}$이므로
$3\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 19 \\ 11 & -3 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 3a & 3b-2x \\ 3b+2x & 3c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 19 \\ 11 & -3 \end{pmatrix}$
두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여
$3a=6$이므로 $a=2$
$3b-2x=19$ ······ ㉠
$3b+2x=11$ ······ ㉡
$3c=-3$이므로 $c=-1$
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $b=5,\ x=-2$
$\therefore a_{21}+a_{22}+b_{12}=b+c+x$
$=5+(-1)+(-2)=2$

832 ······ 답 ⑤

$A^2=AA=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$
$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^4=A^3A=\begin{pmatrix}1&0\\-3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\-4&1\end{pmatrix}$$

$\vdots$

$$\therefore A^n=\begin{pmatrix}1&0\\-n&1\end{pmatrix}$$

$$\therefore A-A^2+A^3-A^4+\cdots+A^{999}-A^{1000}$$
$$=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\-2&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\-3&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\-4&1\end{pmatrix}+\cdots+\begin{pmatrix}1&0\\-999&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\-1000&1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0&0\\-1+2-3+4-\cdots-999+1000&0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0&0\\500&0\end{pmatrix}$$

따라서 구하는 행렬의 $(2,\ 1)$ 성분은 500이다.

833 ⓓ 20

$$A^2=AA=\begin{pmatrix}5&0\\1&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&0\\1&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5^2&0\\5+5&5^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5^2&0\\2\times5&5^2\end{pmatrix}$$
$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}5^2&0\\2\times5&5^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&0\\1&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5^3&0\\3\times5^2&5^3\end{pmatrix}$$
$$A^4=A^3A=\begin{pmatrix}5^3&0\\3\times5^2&5^3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&0\\1&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5^4&0\\4\times5^3&5^4\end{pmatrix}$$

$\vdots$

$$A^n=\begin{pmatrix}5^n&0\\n\times5^{n-1}&5^n\end{pmatrix}$$
$$\therefore A^{100}=\begin{pmatrix}5^{100}&0\\100\times5^{99}&5^{100}\end{pmatrix}$$

따라서 $c=100\times5^{99}$, $d=5^{100}$이므로 $\dfrac{c}{d}=\dfrac{100\times5^{99}}{5^{100}}=20$

834 ⓓ ④

$$YXZ=\frac{1}{2}(1\quad 1)\begin{pmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{2}(x_1+x_2\quad y_1+y_2)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$
$$=\frac{y_1+y_2}{2}$$

따라서 행렬 YXZ의 계산 결과로부터 얻을 수 있는 것은 두 과수원에서 9월에 수확한 사과의 개수의 평균이다.

835 ⓓ 풀이 참조

$$(x\quad y)\begin{pmatrix}2&3\\1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=(2x+y\quad 3x-2y)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$
$$=2x^2+xy+3xy-2y^2$$
$$=2x^2+4xy-2y^2$$

이때 $2x-y+3=0$이므로 $y=2x+3$ …… ㉠

$2x^2+4xy-2y^2$에 ㉠을 대입하면

$$2x^2+4xy-2y^2=2x^2+4x(2x+3)-2(2x+3)^2$$
$$=2x^2-12x-18$$
$$=2(x-3)^2-36$$

따라서 구하는 최솟값은 $x=3$일 때 -36이므로

$a=3$, $b=-36$

$\therefore a-b=3-(-36)=39$

채점 요소	배점
주어진 세 행렬의 곱을 계산하기	30 %
구하는 값을 x에 대한 식으로 정리하기	30 %
a, b의 값 구하기	30 %
$a-b$의 값 구하기	10 %

836 ⓓ 21

두 동호회 A, B의 2년 후의 회원 수를 각각 a''명, b''명이라 하면

$$\begin{pmatrix}a''\\b''\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.6&0.4\\0.9&0.2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.6&0.4\\0.9&0.2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0.72a+0.32b\\0.72a+0.4b\end{pmatrix}$$

이때 $a:b=2:3$이므로 $a=2k$, $b=3k$ (k는 상수)라 하면

$a''=0.72\times2k+0.32\times3k=2.4k$

$b''=0.72\times2k+0.4\times3k=2.64k$

따라서 $a'':b''=2.4k:2.64k=10:11$

$\therefore m+n=10+11=21$

837 ⓓ ②

$$A^2=\begin{pmatrix}3&-6\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-6\\-1&2\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}15&-30\\-5&10\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}3&-6\\-1&2\end{pmatrix}$$
$$=5A$$

이므로

$$A^3=A^2A=(5A)A=5A^2=5(5A)=5^2A$$
$$A^4=A^2A^2=(5A)(5A)=5^2A^2=5^2(5A)=5^3A$$

$\vdots$

$$\therefore A^n=5^{n-1}A$$
$$=5^{n-1}\begin{pmatrix}3&-6\\-1&2\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}3\times5^{n-1}&-6\times5^{n-1}\\-5^{n-1}&2\times5^{n-1}\end{pmatrix}$$

즉, $M(n)=3\times5^{n-1}$, $m(n)=-6\times5^{n-1}$이므로

$3\times5^{n-1}-(-6\times5^{n-1})>9000$

$9\times5^{n-1}>9000$ $\quad\therefore 5^{n-1}>1000$

이때 $5^4<1000$, $5^5>1000$이므로

구하는 자연수 n의 최솟값은 6이다.

838 ······ 답 -2

주어진 조건 (가), (나)를 이용하여 A_2, A_3, A_4, …를 차례대로 구하면

$A_2=A_1P=\begin{pmatrix}2&3\\4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2\\5&4\end{pmatrix}$

$A_3=-PA_2=-\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&2\\5&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&-4\\-3&-2\end{pmatrix}$

$A_4=A_3P=\begin{pmatrix}-5&-4\\-3&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&-5\\-2&-3\end{pmatrix}$

$A_5=-PA_4=-\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4&-5\\-2&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3\\4&5\end{pmatrix}=A_1$

$A_6=A_5P=A_1P=A_2$

⋮

모든 자연수 n에 대하여

$A_{4n-3}=A_1,\ A_{4n-2}=A_2,\ A_{4n-1}=A_3,\ A_{4n}=A_4$

$\therefore\ A_{111}=A_{28\times4-1}=A_3=\begin{pmatrix}-5&-4\\-3&-2\end{pmatrix}$

따라서 A_{111}의 $(2,\ 2)$ 성분은 -2이다.

839 ······ 답 ③

$B=\begin{pmatrix}p&q\\r&s\end{pmatrix}$라 하면

조건 (가)에서 $B\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$이므로

$\begin{pmatrix}p&q\\r&s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p-q\\r-s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$p-q=0,\ r-s=0 \qquad \therefore\ p=q,\ r=s$

$\therefore\ B=\begin{pmatrix}p&p\\r&r\end{pmatrix}$

이때 조건 (나)에서 $AB=2A$이므로

$AB=\begin{pmatrix}1&1\\a&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p&p\\r&r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p+r&p+r\\a(p+r)&a(p+r)\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1&1\\a&a\end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여 $p+r=2$ ······ ㉠

$BA=\begin{pmatrix}p&p\\r&r\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\a&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p(1+a)&p(1+a)\\r(1+a)&r(1+a)\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}p&p\\r&r\end{pmatrix}$

이므로 $1+a=4 \qquad \therefore\ a=3$

($\because$ $1+a\neq4$이면 $p=0,\ r=0$이므로 ㉠을 만족시키지 않는다.)

따라서 행렬 $A+B=\begin{pmatrix}1+p&1+p\\a+r&a+r\end{pmatrix}$의 $(1,\ 2)$ 성분과

$(2,\ 1)$ 성분의 합은

$1+p+a+r=1+a+(p+r)=1+3+2=6$

840 ······ 답 ④

$A^2-AB+BA-B^2=A(A-B)+B(A-B)$

$=(A+B)(A-B)$ ······ ㉠

이때

$A+B=\begin{pmatrix}2&0\\0&-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&x\\1&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&x\\1&-7\end{pmatrix}$

$A-B=\begin{pmatrix}2&0\\0&-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1&x\\1&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-x\\-1&1\end{pmatrix}$

이므로 ㉠에서

$A^2-AB+BA-B^2=(A+B)(A-B)$

$=\begin{pmatrix}1&x\\1&-7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-x\\-1&1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}3-x&0\\10&-x-7\end{pmatrix}$

따라서 $(3-x)+0+10+(-x-7)=2$이므로

$-2x+6=2 \qquad \therefore\ x=2$

841 ······ 답 2

$(A-B)(A-2B)=A^2-2AB-BA+2B^2$이고

주어진 조건에서 $(A-B)(A-2B)=A^2-3AB+2B^2$이므로

$-2AB-BA=-3AB,\ AB-BA=O$

$\therefore\ AB=BA$

즉, $\begin{pmatrix}x^2&-1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y&4\\4&-y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y&4\\4&-y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^2&-1\\-1&1\end{pmatrix}$이므로

$\begin{pmatrix}x^2y-4&4x^2+y\\-y+4&-4-y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x^2y-4&-y+4\\4x^2+y&-4-y\end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$4x^2+y=-y+4,\ 2y=-4x^2+4$

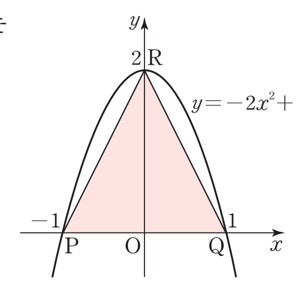
즉, $y=-2x^2+2$

따라서 점 $(x,\ y)$가 나타내는 그래프는

오른쪽 그림과 같으므로

삼각형 PQR의 넓이는

$\frac{1}{2}\times2\times2=2$



842 ······ 답 풀이 참조

$(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2$이므로

$\begin{pmatrix}1&-2\\3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2\\3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-a&4a\\-a&2a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3b&b\\b&-2b\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}-5&-2\\3&-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-a-3b&4a+b\\-a+b&2a-2b\end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$-a-3b=-5,\ -a+b=3$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=-1,\ b=2$이고

$4a+b=-2,\ 2a-2b=-6$도 만족시킨다.

즉, $A^2+B^2=\begin{pmatrix}1&-4\\1&-2\end{pmatrix}$, $AB+BA=\begin{pmatrix}-6&2\\2&-4\end{pmatrix}$이므로

$(A-B)^2=A^2-AB-BA+B^2$

$=A^2+B^2-(AB+BA)$

$=\begin{pmatrix}1&-4\\1&-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-6&2\\2&-4\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}7&-6\\-1&2\end{pmatrix}$

따라서 행렬 $(A-B)^2$의 $(1,\ 2)$ 성분은 -6,
$(2,\ 1)$ 성분은 -1이므로
그 곱은 $(-6)\times(-1)=6$

채점 요소	배점
$a,\ b$의 값 구하기	40 %
행렬 $(A-B)^2$ 구하기	40 %
행렬 $(A-B)^2$의 $(1,\ 2)$ 성분과 $(2,\ 1)$ 성분의 곱 구하기	20 %

843

답 -5

$(A-B)(A-2B)=A^2-2AB-BA+2B^2$이고
주어진 조건에서 $(A-B)(A-2B)=A^2-3AB+2B^2$이므로
$-2AB-BA=-3AB,\ AB-BA=O$
$\therefore\ AB=BA$
즉, $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$이므로
$\begin{pmatrix} \alpha^2+3\beta & \alpha\beta+4\beta \\ \alpha\beta+3\alpha & \beta^2+4\alpha \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha^2+\beta^2 & 2\alpha\beta \\ 3\alpha+4\beta & 4\alpha+3\beta \end{pmatrix}$
두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여
$\alpha^2+3\beta=\alpha^2+\beta^2$ ...... ㉠
$\alpha\beta+4\beta=2\alpha\beta$ ...... ㉡
㉠에서 $3\beta=\beta^2$이고 $\beta\neq0$이므로 $\beta=3$
㉡에서 $4\beta=\alpha\beta$이고 $\beta\neq0$이므로 $\alpha=4$
이때 $x^2-ax+b=0$의 두 실근이 $\alpha,\ \beta$이므로
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$a=\alpha+\beta=4+3=7$
$b=\alpha\beta=4\times3=12$
따라서 $a-b$의 값은 $7-12=-5$

844

답 ⑤

$A^2+2AB-3BA-6B^2=A(A+2B)-3B(A+2B)$
$=(A-3B)(A+2B)$ ...... ㉠
이때
$A+2B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}$ ...... ㉡
$A-2B=\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ ...... ㉢
㉡$-$㉢을 하면 $4B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$
$\therefore\ B=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$
즉, $A-3B=(A-2B)-B$
$=\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$
이므로 ㉠에서
$A^2+2AB-3BA-6B^2=(A-3B)(A+2B)$
$=\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix} -16 & 40 \\ -10 & 24 \end{pmatrix}$

따라서 구하는 행렬의 $(1,\ 1)$ 성분은 -16, $(2,\ 2)$ 성분은 24이므로
그 합은 $(-16)+24=8$

845

답 0

$x^2-4x-2=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=4,\ \alpha\beta=-2$
$(A+B)^2=\begin{pmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta \\ \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta} & \alpha^2+\beta^2 \end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta \\ \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} & (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta \end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 20 \end{pmatrix}$
$AB+BA=\begin{pmatrix} \alpha & 2 \\ 2 & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta & 2 \\ 2 & \beta \end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix} \alpha\beta+4 & 2\alpha+2\beta \\ 2\alpha+2\beta & 4+\alpha\beta \end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$
$A^2+B^2=(A+B)^2-(AB+BA)$
$=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 20 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix} 2 & -10 \\ -10 & 18 \end{pmatrix}$
따라서 행렬 A^2+B^2의 모든 성분의 합은
$2+(-10)+(-10)+18=0$

846

답 -2

조건 (가)에서 $(A+3B)(A-5B)=\begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 16 & 0 \end{pmatrix}$이므로
$A^2-5AB+3BA-15B^2=\begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 16 & 0 \end{pmatrix}$ ...... ㉠
이때 $A^2-15B^2=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$로 놓으면 ㉠에서
$5AB-3BA=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 16 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+8 & b \\ c-16 & d \end{pmatrix}$
또한 조건 (나)에서 A^2-15B^2의 모든 성분의 합은 3이므로
$a+b+c+d=3$
$\therefore\ (A-3B)(A+5B)=A^2+5AB-3BA-15B^2$
$=A^2-15B^2+(5AB-3BA)$
$=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a+8 & b \\ c-16 & d \end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix} 2a+8 & 2b \\ 2c-16 & 2d \end{pmatrix}$
따라서 행렬 $(A-3B)(A+5B)$의 모든 성분의 합은
$(2a+8)+2b+(2c-16)+2d$
$=2(a+b+c+d)-8$
$=2\times3-8=-2$

847 ······ 답 12

$xA^2+yB^2+yBA+xAB$
$=xA(A+B)+yB(B+A)$
$=(xA+yB)(A+B)$ ······ ㉠
이때
$xA+yB=x\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0&0\\-1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x&0\\x-y&x-2y\end{pmatrix}$
$A+B=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\-1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$
이므로 ㉠에서
$$xA^2+yB^2+yBA+xAB=(xA+yB)(A+B)=\begin{pmatrix}x&0\\x-y&x-2y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x&0\\x-y&-x+2y\end{pmatrix}$$
따라서 $\begin{pmatrix}x&0\\x-y&-x+2y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0\\-1&z\end{pmatrix}$이므로
두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여
$x=3$
$x-y=-1$이므로 $3-y=-1$ $\quad\therefore y=4$
$z=-x+2y=-3+2\times4=5$
$\therefore x+y+z=3+4+5=12$

848 ······ 답 ④

$A^2=5A$이므로
$\begin{pmatrix}2&-3\\a&b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-3\\a&b\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}2&-3\\a&b\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}4-3a&-6-3b\\2a+ab&-3a+b^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&-15\\5a&5b\end{pmatrix}$
두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여
$4-3a=10$이므로 $-3a=6$ $\quad\therefore a=-2$
$-6-3b=-15$이므로 $-3b=-9$ $\quad\therefore b=3$
$a=-2$, $b=3$이면 $2a+ab=5a$, $-3a+b^2=5b$도 만족시킨다.
또한, $(A+B)(A-B)=A^2-AB+BA-B^2$이고
주어진 조건에서 $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$이므로
$-AB+BA=O$ $\quad\therefore AB=BA$
즉, $\begin{pmatrix}2&-3\\-2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x&3\\y&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x&3\\y&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-3\\-2&3\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}2x-3y&-3\\-2x+3y&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x-6&-3x+9\\2y-6&-3y+9\end{pmatrix}$
두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여
$-3x+9=-3$이므로 $-3x=-12$ $\quad\therefore x=4$
$-3y+9=3$이므로 $-3y=-6$ $\quad\therefore y=2$
$x=4$, $y=2$이면 $2x-3y=2x-6$, $-2x+3y=2y-6$도 만족시킨다.
$\therefore a+b+x+y=(-2)+3+4+2=7$

849 ······ 답 ②

$(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2$이고
주어진 조건에서 $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$이므로
$AB+BA=2AB$, $-AB+BA=O$
$\therefore AB=BA$
$AB=BA$이므로 $A^2-B^2=(A+B)(A-B)$이 성립하므로
$(A+B)(A-B)=\begin{pmatrix}5&7\\7&12\end{pmatrix}$ ······ ㉠
이때
$A+B=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a&b-1\\c-1&d-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a&2b-1\\2c-1&2d-1\end{pmatrix}$,
$A-B=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a&b-1\\c-1&d-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$
이므로 ㉠에서
$\begin{pmatrix}2a&2b-1\\2c-1&2d-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&7\\7&12\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}2b-1&2a+2b-1\\2d-1&2c+2d-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&7\\7&12\end{pmatrix}$
두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여
$2b-1=5$이므로 $2b=6$ $\quad\therefore b=3$
$2d-1=7$이므로 $2d=8$ $\quad\therefore d=4$
$2a+2b-1=7$이므로 $2a+6-1=7$, $2a=2$ $\quad\therefore a=1$
$2c+2d-2=12$이므로 $2c+8-2=12$, $2c=6$ $\quad\therefore c=3$
따라서 행렬 A의 모든 성분의 합은
$a+b+c+d=1+3+3+4=11$

850 ······ 답 18

조건 (가)에서 $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$이므로
$AB=BA$
즉, $(A+B)^3=A^3+B^3+3AB(A+B)$이므로
$A^3+B^3=(A+B)^3-3AB(A+B)$
이때
$(A+B)^2=\begin{pmatrix}2&1\\-4&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\-4&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$에서
$(A+B)^3=(A+B)^2(A+B)=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$이므로
$$A^3+B^3=(A+B)^3-3AB(A+B)=O-3(2E)(A+B)=-6(A+B)=-6\begin{pmatrix}2&1\\-4&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-12&-6\\24&12\end{pmatrix}$$
따라서 행렬 A^3+B^3의 모든 성분의 합은
$(-12)+(-6)+24+12=18$

851 ······ 답 $\begin{pmatrix}0&3\\0&0\end{pmatrix}$

$AB-BA=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$의 양변의 왼쪽에 행렬 A를 곱하면
$A^2B-ABA=A\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ ······ ㉠
$AB-BA=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$의 양변의 오른쪽에 행렬 A를 곱하면
$ABA-BA^2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}A$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 양변을 더하면

$$A^2B-BA^2=A\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}A$$
$$=\begin{pmatrix}-5&3\\0&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5&3\\0&8\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0&-5\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&8\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&3\\0&0\end{pmatrix}$$

852

답 $\begin{pmatrix}6\\-9\end{pmatrix}$

$$A\begin{pmatrix}c\\-3d\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}2a+(-2a+c)\\-2b+(2b-3d)\end{pmatrix}$$
$$=2A\begin{pmatrix}a\\-b\end{pmatrix}+A\begin{pmatrix}-2a+c\\2b-3d\end{pmatrix}$$
$$=2\begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-9\end{pmatrix}$$

853

답 ③

$A^2\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$에서 $AA\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$ $\quad\therefore A\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$

두 실수 a, b에 대하여

$a\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-12\\5\end{pmatrix}$로 놓으면

$4b=-12$, $2a-b=5$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-3$

$\therefore \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-12\\5\end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}-3A\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-12\\5\end{pmatrix}$이므로 $A\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-12\\5\end{pmatrix}$

따라서 $x=2$, $y=-1$이므로 $x-y=2-(-1)=3$

854

답 45

조건 (가)에서 $A^2-2A+E=O$이므로

$A^2=2A-E$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

조건 (나)에서 $A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$이므로

양변의 왼쪽에 행렬 A를 곱하면 $A^2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$

이때 ㉠에서

$$A^2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=(2A-E)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$
$$=2A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}-E\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$
$$=2\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\9\end{pmatrix}$$

따라서 $A\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\9\end{pmatrix}$이므로 $A\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$의 모든 성분의 곱은

$5\times9=45$

855

답 30

$$A\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a+3b\\2c+3d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$2a+3b=3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$2c+3d=4$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

$$A^2\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=AA\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3a+4b\\3c+4d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$3a+4b=5$ $\quad\cdots\cdots$ ㉢

$3c+4d=7$ $\quad\cdots\cdots$ ㉣

㉠, ㉢을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-1$

㉡, ㉣을 연립하여 풀면 $c=5$, $d=-2$

$\therefore abcd=3\times(-1)\times5\times(-2)=30$

856

답 19

$A^2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$이므로 양변의 왼쪽에 행렬 A를 곱하면

$A^3\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

이때 $A^3\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$이므로 $A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$

이 식의 양변의 왼쪽에 행렬 A를 곱하면

$A^2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$

이때 $A^2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$이므로 $A\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

두 실수 a, b에 대하여 $a\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\6\end{pmatrix}$으로 놓으면

$a+3b=-1$, $2a+2b=6$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=5$, $b=-2$

$\therefore 5\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\6\end{pmatrix}$

위의 등식의 양변의 왼쪽에 행렬 A를 곱하면

$5A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}-2A\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}-1\\6\end{pmatrix}$이므로

$A\begin{pmatrix}-1\\6\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13\\6\end{pmatrix}$

따라서 $x=13$, $y=6$이므로 $x+y=13+6=19$

857

답 -2

$$A\begin{pmatrix}0\\8\end{pmatrix}=A\left\{\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\9\end{pmatrix}\right\}$$
$$=A\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}+A\begin{pmatrix}-2\\9\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$$

IV 행렬

$$A^2\begin{pmatrix}0\\8\end{pmatrix}=AA\begin{pmatrix}0\\8\end{pmatrix}$$
$$=A\left\{-2\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}\right\}$$
$$=-2A\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$$
$$=-2\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}=(-2)^2\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$$
$$\vdots$$
즉, $A^n\begin{pmatrix}0\\8\end{pmatrix}=(-2)^n\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$이므로

$A^{200}\begin{pmatrix}0\\8\end{pmatrix}=(-2)^{200}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=2^{200}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{201}\\-2^{200}\end{pmatrix}$

따라서 $x=2^{201}$, $y=-2^{200}$이므로

$\dfrac{x}{y}=\dfrac{2^{201}}{-2^{200}}=-2$

858 답 5

$A^2=AA=\begin{pmatrix}3&7\\-1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&7\\-1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&7\\-1&-3\end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}2&7\\-1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&7\\-1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}=-E$

이므로

$A^{100}=(A^3)^{33}A=(-E)^{33}A=-EA=-A$

$\therefore A^{100}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=-A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}-3&-7\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$이므로 $\begin{pmatrix}-3x-7y\\x+2y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$-3x-7y=5$, $x+2y=-1$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $x=3$, $y=-2$

$\therefore x-y=3-(-2)=5$

859 답 32

$A^6+A^7=-4A-4E$이므로

$A^{12}+A^{13}=A^6(A^6+A^7)$
$=A^6(-4A-4E)$
$=-4(A^6+A^7)$
$=-4(-4A-4E)$
$=16A+16E$

이때 행렬 A의 모든 성분의 합이 0이므로 행렬 $16A$의 모든 성분의 합도 0이 된다.

따라서 행렬 $A^{12}+A^{13}$의 모든 성분의 합은 행렬 $16A+16E$의 모든 성분의 합, 즉 행렬 $16E$의 모든 성분의 합과 같으므로

$16(1+0+0+1)=32$

860 답 2

$A^2=\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=E$

이므로 $A^{55}=(A^2)^{27}A=EA=A$

$B^2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=E$

이므로 $B^{55}=(B^2)^{27}B=EB=B$

$AB=\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\-1&0\end{pmatrix}$이므로

$(AB)^2=\begin{pmatrix}1&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&-1\end{pmatrix}$

$(AB)^3=\begin{pmatrix}0&1\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}=-E$

$(AB)^{55}=\{(AB)^3\}^{18}AB=(-E)^{18}AB=AB$

$(AB)^{55}+B^{55}A^{55}=AB+BA$
$=\begin{pmatrix}1&1\\-1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix}1&1\\-1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-1\\1&1\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

따라서 구하는 행렬의 모든 성분의 합은

$1+0+0+1=2$

861 답 ①

$(A-E)^2=2A-3E$이므로

$A^2-2A+E=2A-3E$

$\therefore A^2=4A-4E=4(A-E)$

$\therefore (A-E)^3=(A-E)^2(A-E)$
$=(2A-3E)(A-E)$
$=2A^2-5A+3E$
$=2\times4(A-E)-5A+3E$
$=8A-8E-5A+3E$
$=3A-5E$

따라서 $m=3$, $n=-5$이므로

$mn=3\times(-5)=-15$

862 답 2

조건 (가)에서 $A=\begin{pmatrix}a&1\\4&-1\end{pmatrix}$이므로

$A^2=AA=\begin{pmatrix}a&1\\4&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&1\\4&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2+4&a-1\\4a-4&5\end{pmatrix}$

$\therefore (A+3E)(A-2E)$
$=A^2+A-6E$
$=\begin{pmatrix}a^2+4&a-1\\4a-4&5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a&1\\4&-1\end{pmatrix}-6\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix}a^2+a-2&a\\4a&-2\end{pmatrix}$

이때 조건 (나)에서 행렬 $(A+3E)(A-2E)$의 모든 성분의 합이 12이므로

$(a^2+a-2)+a+4a+(-2)=12$

$a^2+6a-16=0$, $(a+8)(a-2)=0$

$\therefore a=2$ ($\because a>0$)

863 ⋯⋯ 답 ①

$A^2-2A+4E=O$의 양변에 행렬 $(A+2E)$를 곱하면

$(A+2E)(A^2-2A+4E)=O$

$A^3+(2E)^3=O$, $A^3+8E=O$

$\therefore A^3=-8E$

따라서 $A^{15}=(A^3)^5=(-8E)^5=-8^5E=\begin{pmatrix}-8^5 & 0\\ 0 & -8^5\end{pmatrix}$이므로

행렬 A^{15}의 모든 성분의 합은

$2\times(-8^5)=2\times(-2^{15})=-2^{16}$

864 ⋯⋯ 답 풀이 참조

$A^2=AA=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 1 & -2\end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=-E$

$A^4=A^3A=-EA=-A$

$A^5=A^3A^2=-EA^2=-A^2$

$A^6=(A^3)^2=(-E)^2=E$

$\therefore A+A^2+A^3+A^4+A^5+A^6=A+A^2-E-A-A^2+E=O$

이때 $1028=6\times171+2$이므로

$A+A^2+A^3+\cdots+A^{1028}$

$=(A+A^2+\cdots+A^6)+A^6(A+A^2+\cdots+A^6)$

$\qquad+\cdots+A^{1020}(A+A^2+\cdots+A^6)+A^{1027}+A^{1028}$

$=A^{1027}+A^{1028}=A+A^2$

$=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -3\\ 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -6\\ 2 & -3\end{pmatrix}$

따라서 구하는 행렬의 모든 성분의 합은

$3+(-6)+2+(-3)=-4$

채점 요소	배점
A^2 구하기	20 %
A^3, A^4, A^5, A^6을 간단히 나타내기	30 %
$A+A^2+A^3+\cdots+A^{1028}$ 구하기	40 %
$A+A^2+A^3+\cdots+A^{1028}$의 모든 성분의 합 구하기	10 %

865 ⋯⋯ 답 80

$3A+B=O$의 양변의 왼쪽에 행렬 A를 곱하면

$3A^2+AB=O$, $3A^2+3E=O$

$\therefore A^2=-E$

$3A+B=O$의 양변의 오른쪽에 행렬 B를 곱하면

$3AB+B^2=O$, $3(3E)+B^2=O$

$\therefore B^2=-9E$

따라서

$A^{10}+B^4=(A^2)^5+(B^2)^2$

$\qquad=(-E)^5+(-9E)^2$

$\qquad=-E+81E=80E$

$\therefore k=80$

866 ⋯⋯ 답 ③

$A+B=2E$이므로 $B=2E-A$ ⋯⋯ ㉠

$AB=A(2E-A)=2A-A^2$

$BA=(2E-A)A=2A-A^2$

이므로 $AB=BA$

㉠을 $BA=O$에 대입하면

$(2E-A)A=O$, $2A-A^2=O$ $\quad\therefore A^2=2A$

$A^3=A^2A=2AA=2A^2=2^2A$

$A^4=A^3A=2^2AA=2^2A^2=2^3A$

$\vdots$

$\therefore A^n=2^{n-1}A$ (단, n은 자연수)

또한 $A+B=2E$이므로 $A=2E-B$ ⋯⋯ ㉡

㉡을 $BA=O$에 대입하면

$B(2E-B)=O$, $2B-B^2=O$ $\quad\therefore B^2=2B$

$B^3=B^2B=2BB=2B^2=2^2B$

$B^4=B^3B=2^2BB=2^2B^2=2^3B$

$\vdots$

$\therefore B^n=2^{n-1}B$ (단, n은 자연수)

한편, $AB=BA=O$이므로

$A^{50}+A^{49}B+A^{48}B^2+\cdots+AB^{49}+B^{50}$

$=2^{49}A+A^{48}(AB)+A^{47}(AB)B+\cdots+(AB)B^{48}+2^{49}B$

$=2^{49}A+2^{49}B$

$=2^{49}(A+B)$

$=2^{49}(2E)$

$=2^{50}E=\begin{pmatrix}2^{50} & 0\\ 0 & 2^{50}\end{pmatrix}$

따라서 구하는 행렬의 모든 성분의 합은

$2^{50}+2^{50}=2\times2^{50}=2^{51}$

867 ⋯⋯ 답 6

$A+B=E$에서 $A=E-B$

$AB=(E-B)B=B-B^2$

$BA=B(E-B)=B-B^2$

즉, $AB=BA$이다.

$A^3+B^3=(A+B)^3-3AB(A+B)$

$\qquad=E-3AB$ ($\because A+B=E$)

이때 $A^3+B^3=\begin{pmatrix}-5 & 9\\ -3 & 4\end{pmatrix}$이므로

$3AB=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-5 & 9\\ -3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & -9\\ 3 & -3\end{pmatrix}$

$AB=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}6 & -9\\ 3 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

따라서 행렬 AB의 모든 성분의 곱은

$2\times(-3)\times1\times(-1)=6$

868 ⋯⋯ 답 15

$A^2-3A-5E=O$이므로 $A^2=3A+5E$

$B=\begin{pmatrix}2-a & -b\\ -c & 2-d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=2E-A$

$B^2=(2E-A)^2$
$=4E-4A+A^2$
$=4E-4A+(3A+5E)$
$=-A+9E$
$B^3=B^2B$
$=(-A+9E)(2E-A)$
$=A^2-11A+18E$
$=3A+5E-11A+18E$
$=-8A+23E$
따라서 $x=-8$, $y=23$이므로
$x+y=(-8)+23=15$

869 ······ 답 ⑤

$x^3=1$에서 $x^3-1=0$, 즉 $(x-1)(x^2+x+1)=0$이므로
ω는 $x^2+x+1=0$의 한 허근이다.
즉, $\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$

$$A^2=AA$$
$$=\begin{pmatrix}\omega^2 & \omega \\ 1 & \omega+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega^2 & \omega \\ 1 & \omega+1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\omega^4+\omega & \omega^3+\omega^2+\omega \\ \omega^2+\omega+1 & \omega^2+3\omega+1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\omega+\omega & \omega^2+\omega+1 \\ \omega^2+\omega+1 & (\omega^2+\omega+1)+2\omega\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}2\omega & 0 \\ 0 & 2\omega\end{pmatrix}=2\omega E$$
$$\therefore A^{18}=(A^2)^9=(2\omega E)^9=2^9\omega^9E=2^9E\ (\because \omega^3=1)$$
$$=\begin{pmatrix}2^9 & 0 \\ 0 & 2^9\end{pmatrix}$$
따라서 A^{18}의 모든 성분의 합은
$2^9+0+0+2^9=2\times2^9=2^{10}$

870 ······ 답 0

$AB=A$의 양변의 오른쪽에 행렬 A를 곱하면
$ABA=A^2$ ······ ㉠
$BA=B$의 양변의 왼쪽에 행렬 A를 곱하면
$ABA=AB$ ······ ㉡
㉠, ㉡에서 $A^2=AB$이고 주어진 조건에서 $AB=A$이므로
$A^2=A$
$A^3=A^2A=AA=A^2=A$
$A^4=A^3A=AA=A^2=A$
⋮
$\therefore A^n=A$ (단, n은 자연수)
같은 방법으로 하면 $B^n=B$ (단, n은 자연수)
$\therefore A^{100}+B^{100}=A+B$
$$=\begin{pmatrix}4 & x+13 \\ y-5 & 2-z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 2-x \\ 4-y & z-5\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}5 & 15 \\ -1 & -3\end{pmatrix}$$
따라서 $a=5$, $b=15$, $c=-1$, $d=-3$이므로
$ad-bc=5\times(-3)-15\times(-1)=0$

871 ······ 답 ⑤

ㄱ. $A=\begin{pmatrix}0 & 0 \\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 1 & 1\end{pmatrix}$이면
$AB=\begin{pmatrix}0 & 0 \\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 \\ 1 & 0\end{pmatrix}=A$이지만
$B\neq E$이다. (거짓)
ㄴ. $(ABA)^2=(ABA)(ABA)$
$=ABA^2BA$
$=ABEBA$
$=AB^2A$
$=AEA$
$=A^2=E$ (참)
ㄷ. $A+E=(B+E)^2$이므로
$A+E=B^2+2B+E$
$\therefore A=B^2+2B$
$AB=(B^2+2B)B=B^3+2B^2$
$BA=B(B^2+2B)=B^3+2B^2$이므로
$AB=BA$ (참)
따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

872 ······ 답 2

$f(A,\ B)=\begin{pmatrix}-1 & 2 \\ -3 & 1\end{pmatrix}$이므로 $AB-BA=\begin{pmatrix}-1 & 2 \\ -3 & 1\end{pmatrix}$
$\therefore f(A+B,\ A-B)$
$=(A+B)(A-B)-(A-B)(A+B)$
$=A^2-AB+BA-B^2-(A^2+AB-BA-B^2)$
$=-2AB+2BA=-2(AB-BA)$
$=-2\begin{pmatrix}-1 & 2 \\ -3 & 1\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix}2 & -4 \\ 6 & -2\end{pmatrix}$
따라서 행렬 $f(A+B,\ A-B)$의 모든 성분의 합은
$2+(-4)+6+(-2)=2$

873 ······ 답 ②

ㄱ. $A*O=(A-O)(A+O)=A^2$
이때 $A=\begin{pmatrix}0 & 0 \\ 1 & 0\end{pmatrix}$이면 $A^2=O$이지만 $A\neq O$이다. (거짓)
ㄴ. $A*B=A*(-B)$이면
$(A-B)(A+B)=(A+B)(A-B)$이므로
$A^2+AB-BA-B^2=A^2-AB+BA-B^2$
$2AB=2BA$ $\quad\therefore AB=BA$
$(AB)^2=A(BA)B=A(AB)B=A^2B^2$ (참)
ㄷ. $A*E=E$이므로 $(A-E)(A+E)=E$
$A^2-E=E$ $\quad\therefore A^2=2E$
$\therefore A^6=(A^2)^3=(2E)^3=2^3E=8E$ (거짓)
따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

874 ⋯⋯ 답 1

$A^2=AA=\begin{pmatrix} x & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x^2-4 & x+1 \\ -4x-4 & -3 \end{pmatrix}$이므로

$f(A^2)=(x^2-4)\times(-3)-(x+1)\times(-4x-4)$
$=-3x^2+12+4x^2+8x+4$
$=x^2+8x+16$

$3A=\begin{pmatrix} 3x & 3 \\ -12 & 3 \end{pmatrix}$이므로

$f(3A)=3x\times3-3\times(-12)=9x+36$

이때 $f(A^2)=f(3A)$이므로

$x^2+8x+16=9x+36$, $x^2-x-20=0$

$(x+4)(x-5)=0$ $\quad\therefore x=-4$ 또는 $x=5$

따라서 구하는 모든 실수 x의 값의 합은 $(-4)+5=1$

875 ⋯⋯ 답 ②

ㄱ. $A-B=5E$에서 $B=A-5E$
이를 $BA=4A$에 대입하면
$(A-5E)A=4A$, $A^2-5A=4A$
$\therefore A^2=9A$ (참)

ㄴ. $BA=4A$에 $A=B+5E$를 대입하면
$B(B+5E)=4(B+5E)$
$B^2+5B=4B+20E$
$\therefore B^2+B=20E$ (참)

ㄷ. $A=B+5E$, $BA=4A$이므로 $B\neq O$
$AB=(B+5E)B=B^2+5B$
$BA=B(B+5E)=B^2+5B$
즉, $AB=BA$
$A^2-B^2=(A+B)(A-B)$
$=(A+B)\times5E$
$=5(A+B)$
$\therefore A^2-B^2\neq5(A-B)$ ($\because B\neq O$) (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

876 ⋯⋯ 답 ③

ㄱ. $A^2-AB-BA+B^2=O$이면 $(A-B)^2=O$
$\therefore (A-B)^3=(A-B)^2(A-B)=O$ (참)

ㄴ. $A^2-A+E=O$의 양변에 $(A+E)$를 곱하면
$(A+E)(A^2-A+E)=O$, $A^3+E=O$
즉, $A^3=-E$
$\therefore A^6=(A^3)^2=(-E)^2=E$ (참)

ㄷ. $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=-E$이면 $k=2$, $m=4$, $n=8$일 때,
$A^2=A^4=A^8=E$이지만 $A\neq E$이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

877 ⋯⋯ 답 ④

ㄱ. $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$이면

$A^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$B^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$이지만

$AB=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\neq O$이다. (거짓)

ㄴ. $A-2B=E$에서 $A=2B+E$이므로
$AB=(2B+E)B=2B^2+B$
$BA=B(2B+E)=2B^2+B$
$\therefore AB=BA$ (참)

ㄷ. $A^2+A-E=O$이므로 양변의 오른쪽에 행렬 B를 곱하면
$A^2B+AB-B=O$, $A(AB)+AB-B=O$
이때 $AB=-E$이므로 $A(-E)-E-B=O$
$-A-E-B=O$ $\quad\therefore B=-A-E$
$B^2=(-A-E)^2$
$=A^2+2A+E$
$=A^2+A-E+(A+2E)$
$=O+(A+2E)$
$=A+2E$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

878 ⋯⋯ 답 ⑤

$(A+B)^2=(A-B)^2$이므로
$A^2+AB+BA+B^2=A^2-AB-BA+B^2$
$AB+BA=-AB-BA$
$AB+BA=O$ $\quad\therefore BA=-AB$

ㄱ. $(AB)^2=ABAB=A(-AB)B=-A^2B^2$ (거짓)⋯⋯ 참고

ㄴ. $(AB)^3=ABABAB$
$=A(-AB)BAB$
$=-AAB(-AB)B$
$=(-1)\times(-1)AABABB$
$=(-1)\times(-1)AA(-AB)BB$
$=(-1)\times(-1)^2A^3B^3$
$=(-1)^{1+2}A^3B^3$
$=-A^3B^3$ (참)

ㄷ. ㄱ, ㄴ에 의하여
$(AB)^7=(-1)^{1+2+3+\cdots+6}A^7B^7$
$=(-1)^{21}A^7B^7$
$=-A^7B^7$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

참고

$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$이면

$AB=\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$이므로

$BA=-AB$이지만

$(AB)^2=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $A^2B^2=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$이므로

$(AB)^2\neq A^2B^2$이다.

879 답 ③

$C=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$라 하면

$A=C+E$, $B=C-E$에서

$AB=C^2-E$, $BA=C^2-E$이므로

$AB=BA$

$A^2-B^2=\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$에서

$(A+B)(A-B)=\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$ ...... ㉠

이때 $A+B=2C$, $A-B=2E$이므로 ㉠에서

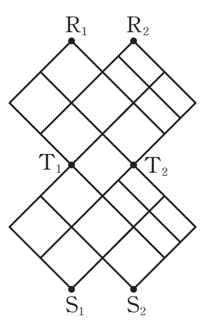
$4C=\begin{pmatrix} 4a & 4b \\ 4c & 4d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$

따라서 $4(a+b+c+d)=4+7+8+9=28$이므로

$a+b+c+d=7$

880 답 ②

주어진 왼쪽의 도로망을 위, 아래로 붙인 것이 오른쪽의 도로망이다. R_1 지점에서 도로망을 따라 S_2 지점까지 최단 거리로 가는 방법은 다음과 같이 두 가지 방법이 있다.



(i) $R_1 \to T_1 \to S_2$

T_1 지점을 거쳐 최단 거리로 가는 방법의 수는

$a_{11}\times a_{12}$

(ii) $R_1 \to T_2 \to S_2$

T_2 지점을 거쳐 최단 거리로 가는 방법의 수는

$a_{12}\times a_{22}$

(i), (ii)에 의하여 R_1 지점에서 도로망을 따라 S_2 지점까지 최단 거리로 가는 방법의 수는 $a_{11}\times a_{12}+a_{12}\times a_{22}$이므로 행렬 A^2의 $(1, 2)$ 성분과 같다.

881 답 6

$A+kB=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ ...... ㉠

$A+B=E$ ...... ㉡

㉠$-$㉡을 하면 $(k-1)B=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

따라서 $k-1\neq 0$, $B\neq O$이고

$(k-1)^2B^2=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 & 15 \\ 10 & 15 \end{pmatrix}=5\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

$=5(k-1)B$

이때 $B^2=B$이므로 $(k-1)^2B=5(k-1)B$

$(k-1)^2=5(k-1)$

$k-1=5$ ($\because k-1\neq 0$)

$\therefore k=6$

882 답 ④

$A-2C=X$, $3B-2C=Y$라 하면

$A+3B-4C=X+Y$

$\therefore (A-2C)^2+(3B-2C)^2-\frac{1}{2}(A+3B-4C)^2$

$=X^2+Y^2-\frac{1}{2}(X+Y)^2$

$=X^2+Y^2-\frac{1}{2}(X^2+XY+YX+Y^2)$

$=\frac{1}{2}(X^2-XY-YX+Y^2)$

$=\frac{1}{2}(X-Y)^2$ ...... ㉠

이때

$X-Y=A-2C-(3B-2C)=A-3B$

$=\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}-3\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

이므로 ㉠에서

$(A-2C)^2+(3B-2C)^2-\frac{1}{2}(A+3B-4C)^2$

$=\frac{1}{2}(X-Y)^2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

따라서 구하는 행렬의 모든 성분의 합은

$8+0+2+2=12$

883 답 풀이 참조

$A+B=4E$이므로

$B=4E-A=4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} x & 1 \\ y & z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4-x & -1 \\ -y & 4-z \end{pmatrix}$

이때 $AB=-E$이므로

$\begin{pmatrix} x & 1 \\ y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4-x & -1 \\ -y & 4-z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 4x-x^2-y & -x+4-z \\ 4y-xy-yz & -y+4z-z^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$4x-x^2-y=-1$이므로

$x^2-4x+y-1=0$ ...... ㉠

$-x+4-z=0$이므로

$x+z=4$ ...... ㉡

$-y+4z-z^2=-1$이므로

$z^2-4z+y-1=0$ ...... ㉢

㉠, ㉢의 양변을 더하면 $x^2-4x+z^2-4z+2y-2=0$

$x^2+z^2-4(x+z)+2y-2=0$

㉡을 이 식에 대입하면

$x^2+z^2-16+2y-2=0$ $\quad\therefore x^2+z^2=-2y+18$

$\therefore x^2+y^2+z^2=y^2-2y+18$

$=(y-1)^2+17$

따라서 $y=1$일 때, $x^2+y^2+z^2$의 최솟값은 17이다.

채점 요소	배점
두 행렬 A, B에 대한 조건을 이용하여 x, y, z에 대한 관계식 구하기	40 %
$x^2+y^2+z^2$을 y에 관한 식으로 나타내기	40 %
$x^2+y^2+z^2$의 최솟값 구하기	20 %

884

답 ⑤

ㄱ. $B=E-A$이므로

$AB=A(E-A)=A-A^2=-E$에서

$A^2=A+E$ ...... ㉠

마찬가지 방법으로 하면

$B^2=B+E$ ...... ㉡

$\therefore A^2+B^2=A+E+B+E$

$=(A+B)+2E$

$=3E$ (참)

ㄴ. ㉠의 양변에 A^n을 곱하면

$A^{n+2}=A^{n+1}+A^n$ ...... ㉢

㉡의 양변에 B^n을 곱하면

$B^{n+2}=B^{n+1}+B^n$ ...... ㉣

㉢, ㉣의 양변을 더하면

$A^{n+2}+B^{n+2}=A^{n+1}+B^{n+1}+A^n+B^n$ (참)

ㄷ. ㄴ에서

$A^3+B^3=A^2+B^2+A+B=3E+E=4E$

$A^4+B^4=A^3+B^3+A^2+B^2=4E+3E=7E$

$A^5+B^5=A^4+B^4+A^3+B^3=7E+4E=11E$

$\vdots$

$A^9+B^9=A^8+B^8+A^7+B^7=76E$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

885

답 ②

ㄱ. $A^2=\begin{pmatrix}-3 & -a \\ a & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & -a \\ a & 3\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}9-a^2 & 0 \\ 0 & 9-a^2\end{pmatrix}=(9-a^2)E$

이때 $A^2=O$이면 $9-a^2=0$이므로 $a^2=9$

$\therefore a=\pm3$ (거짓)

ㄴ. $A^4=(A^2)^2=(9-a^2)^2E=E$이려면

$(9-a^2)^2=1$이어야 하므로 $9-a^2=\pm1$

$a^2=8$ 또는 $a^2=10$

$\therefore a=-2\sqrt{2}$ 또는 $a=2\sqrt{2}$

또는 $a=-\sqrt{10}$ 또는 $a=\sqrt{10}$

즉, $A^4=E$을 만족시키는 서로 다른 실수 a의 개수는 4이다. (참)

ㄷ. $n=1$일 때, $A\neq E$

$n=2k+1$ (단, k는 자연수)라 하면

$A^{2k+1}=(A^2)^kA=\{(9-a^2)E\}^kA=(9-a^2)^kA$

$9-a^2=0$이면 $A^{2k+1}=O$이므로 $A^{2k+1}\neq E$

$9-a^2\neq0$이면 $A^{2k+1}=\begin{pmatrix}-3(9-a^2)^k & -a(9-a^2)^k \\ a(9-a^2)^k & 3(9-a^2)^k\end{pmatrix}$에서

(1, 1) 성분과 (2, 2)의 성분이 다르므로

$A^{2k+1}\neq E$

따라서 자연수 n이 홀수일 때, $A^n=E$를 만족시키는 실수 a가 존재하지 않는다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

886

답 30

조건 (가)에서 $i=j$일 때, $a_{ii}=-a_{ii}$이므로

$2a_{ii}=0 \qquad \therefore a_{ii}=0$

조건 (나)에서 행렬 A의 모든 성분은 정수이므로

$a_{12}=x$, $a_{13}=y$, $a_{23}=z$ (x, y, z는 정수)라 하면

$a_{21}=-a_{12}=-x$, $a_{31}=-a_{13}=-y$, $a_{32}=-a_{23}=-z$

$\therefore A=\begin{pmatrix}0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0\end{pmatrix}$

조건 (다)에서 행렬 A의 모든 성분의 제곱의 합은 18이므로

$x^2+y^2+(-x)^2+z^2+(-y)^2+(-z)^2=18$

$2(x^2+y^2+z^2)=18$

$\therefore x^2+y^2+z^2=9$ ...... ㉠

이때 ㉠을 만족시키는 세 정수 x^2, y^2, z^2을 순서쌍 (x^2, y^2, z^2)으로 나타내면 (1, 4, 4), (4, 1, 4), (4, 4, 1), (0, 0, 9), (0, 9, 0), (9, 0, 0)의 6가지이다.

(ⅰ) $x^2=1$, $y^2=4$, $z^2=4$인 경우

$x=\pm1$, $y=\pm2$, $z=\pm2$이므로

조건을 만족시키는 행렬 A의 개수는

$2\times2\times2=8$

(ⅱ) $x^2=4$, $y^2=1$, $z^2=4$인 경우

(ⅰ)과 마찬가지로 행렬 A의 개수는 8이다.

(ⅲ) $x^2=4$, $y^2=4$, $z^2=1$인 경우

(ⅰ)과 마찬가지로 행렬 A의 개수는 8이다.

(ⅳ) $x^2=0$, $y^2=0$, $z^2=9$인 경우

$x=0$, $y=0$, $z=\pm3$이므로

조건을 만족시키는 행렬 A의 개수는

$1\times1\times2=2$

(ⅴ) $x^2=0$, $y^2=9$, $z^2=0$인 경우

(ⅳ)와 마찬가지로 행렬 A의 개수는 2이다.

(ⅵ) $x^2=9$, $y^2=0$, $z^2=0$인 경우

(ⅳ)와 마찬가지로 행렬 A의 개수는 2이다.

(ⅰ)~(ⅵ)에서 구하는 행렬 A의 개수는 $8\times3+2\times3=30$

887

답 25

$A^2=AA=\begin{pmatrix}-1 & 2 \\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2 \\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}=-E$

$A^3=A^2A=-EA=-A$

$A^4=(A^2)^2=(-E)^2=E$

이므로 $A^{4n+k}=A^k$ (단, n, k는 자연수)이고

$A+A^2+A^3+A^4=A-E-A+E=O$이다.

따라서

$A+A^2+A^3+A^4+\cdots+A^{110}$

$=(A+A^2+A^3+A^4)+A^4(A+A^2+A^3+A^4)$

$+\cdots+A^{104}(A+A^2+A^3+A^4)+A^{109}+A^{110}$

이투스북

$=O+A^4\times O+\cdots+A^{104}\times O+(A^4)^{27}A+(A^4)^{27}A^2$
$=EA+EA^2=A+A^2=A-E$
$=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix}$
이므로
$A\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}+A^2\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}+A^3\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}+\cdots+A^{110}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}8\\ 11\end{pmatrix}$
$(A+A^2+A^3+\cdots+A^{110})\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8\\ 11\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}-2 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14\\ 3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-2a+2b\\ -a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14\\ 3\end{pmatrix}$
두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여
$-2a+2b=14$, $-a=3$
$\therefore a=-3, b=4$
$\therefore a^2+b^2=(-3)^2+4^2=25$

888 답 ③

ㄱ. $A^2=AA=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$
$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=E$
$\therefore d(A)=3$ (참)
ㄴ. $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$이면 자연수 n에 대하여 $A^n=\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}$이므로
$A^n=E$를 만족시키는 자연수 n이 존재하지 않는다.
이때 $d(A)=0$이지만 $A\neq O$이다. (거짓)
ㄷ. $d(A)=2$이므로 $A\neq E$, $A^2=E$
$d(B)=3$이므로 $B\neq E$, $B^2\neq E$, $B^3=E$
이때 $AB=BA$에서 $(AB)^n=A^nB^n$이므로
$(AB)^2=A^2B^2=EB^2=B^2\neq E$
$(AB)^3=A^3B^3=A^2AB^3=EAE=A\neq E$
$(AB)^4=A^4B^4=(A^2)^2B^3B=E^3B=B\neq E$
$(AB)^5=A^5B^5=(A^2)^2AB^3B^2=E^2AEB^2=AB^2$ ...... ㉠
이때 $AB^2=E$라 하고, 양변의 오른쪽에 행렬 B를 곱하면
$AB^3=B$, 즉 $A=B$이다.
그런데 $d(A)\neq d(B)$이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.
즉, $(AB)^5=AB^2\neq E$ ($\because$ ㉠)
$(AB)^6=A^6B^6=(A^2)^3(B^3)^2=E^3E^2=E$
$\therefore d(AB)=6$ (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

889 답 ④

$A^2=\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2-b^2 & 2ab\\ -2ab & a^2-b^2\end{pmatrix}$ ...... ㉠
ㄱ. $A^2=O$이므로 ㉠에서
$\begin{pmatrix}a^2-b^2 & 2ab\\ -2ab & a^2-b^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$
두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여
$a^2-b^2=0$, $2ab=0$ $\quad\therefore a=b=0$
$\therefore A=O$ (참)
ㄴ. $A^2+E=O$에서 $A^2=-E$이므로
㉠에서
$\begin{pmatrix}a^2-b^2 & 2ab\\ -2ab & a^2-b^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$
두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여
$a^2-b^2=-1$, $2ab=0$
$b=0$이면 $a^2=-1$이 되고 이를 만족시키는 실수 a는 존재하지 않는다.
따라서 $a=0$, $b=-1$ 또는 $a=0$, $b=1$이므로
조건을 만족시키는 행렬 A는
$A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ 또는 $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$으로 2개이다. (거짓)
ㄷ. $A^2-A=O$에서 $A^2=A$이므로
㉠에서 $\begin{pmatrix}a^2-b^2 & 2ab\\ -2ab & a^2-b^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}$
두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여
$a^2-b^2=a$, $2ab=b$
$b=0$이면 $a^2=a$에서 $a=0$ 또는 $a=1$
$b\neq0$이면 $a=\frac{1}{2}$이므로 $a^2-b^2=a$에서 $\frac{1}{4}-b^2=\frac{1}{2}$
즉, $b^2=-\frac{1}{4}$이 되고 이를 만족시키는 실수 b는 존재하지 않으므로 조건을 만족시키는 행렬 A는
$A=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ 또는 $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$로 2개이다. (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

890 답 ⑤

ㄱ. $A^2+B=3E$의 양변의 왼쪽과 오른쪽에 A를 곱하면
$A^3+AB=3A$ ...... ㉠
$A^3+BA=3A$ ...... ㉡
㉠−㉡을 하면 $AB-BA=O$
$\therefore AB=BA$ (참)
ㄴ. $A^2+B=3E$에서 $A^2=3E-B$
이것을 $A^4+B^2=7E$에 대입하면
$(3E-B)^2+B^2=7E$
$9E-6B+B^2+B^2=7E$
$2B^2-6B+2E=O$
$B^2-3B+E=O$
$\therefore B^2=3B-E$ (참)
ㄷ. $A^6+B^3=(3E-B)^3+B^3$
$=27E-27B+9B^2-B^3+B^3$
$=27E-27B+9(3B-E)$
$=27E-27B+27B-9E$
$=18E$ (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

891 답 −52

$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$에서

$A^2=AA=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=-E$

$A^4=(A^2)^2=(-E)^2=E$ ...... ㉠

$B=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$에서

$B^2=BB=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=-E$

$\therefore B^4=(B^2)^2=(-E)^2=E$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 자연수 n에 대하여 $A^{4n}=E$, $B^{4n}=E$

이때

$C_{4n-1}=B(A^{4n-1}+B^{4n-1})A^5$

$=(BA^{4n-1}+B^{4n})A^5$

$=BA^{4n+4}+B^{4n}A^5$

$=BE+EA^5=B+A$

$=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$

이므로

$C_3+C_7+C_{11}+\cdots+C_{51}=13\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -26 & 26 \\ -78 & 26 \end{pmatrix}$

따라서 구하는 행렬의 모든 성분의 합은

$(-26)+26+(-78)+26=-52$

892 답 ③

ㄱ. $ABA-A^2=E$에서

$(AB-A)A=E$, $A(BA-A)=E$

$(AB-A)A=E$의 양변의 오른쪽에 $BA-A$를 곱하면

$(AB-A)A(BA-A)=BA-A$

$AB-A=BA-A$ $\therefore AB=BA$

$\therefore (A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ (참)

ㄴ. $AB+B=A$의 양변의 오른쪽에 행렬 A를 곱하면

$ABA+BA=A^2$이므로 $ABA-A^2=-BA$

이때 $ABA-A^2=E$이므로

$-BA=E$, 즉 $BA=-E$

따라서 $AB=BA=-E$이므로

$A^5B^5=(AB)^5=(-E)^5=-E$ (거짓)

ㄷ. $BA=-E$이므로 $ABA-A^2=E$에서

$-A-A^2=E$ $\therefore A^2+A+E=O$ ...... ㉠

이 식의 양변에 $A-E$를 곱하면

$(A-E)(A^2+A+E)=A^3-E=O$

$\therefore A^3=E$

㉠에서 $A^2=-A-E$이므로

$(A-E)^2=A^2-2A+E$

$=-A-E-2A+E=-3A$

$\therefore (A-E)^{60}=\{(A-E)^2\}^{30}=(-3A)^{30}$

$=3^{30}A^{30}=3^{30}(A^3)^{10}=3^{30}E$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

893 답 ⑤

ㄱ. $(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2=O+E+O=E$

$\therefore (A+B)^3=(A+B)^2(A+B)=E(A+B)=A+B$ (참)

ㄴ. $AB+BA=E$에서 $BA=E-AB$이므로

$(AB)^2=ABAB$

$=A(E-AB)B$

$=(A-A^2B)B$

$=AB-A^2B^2$

$=AB-O=AB$

$(AB)^3=(AB)^2AB$

$=(AB)^2=AB$

$(AB)^4=(AB)^3AB$

$=(AB)^2=AB$

$\vdots$

$\therefore (AB)^{50}=AB$ (참)

ㄷ. $(A+B)C=ABC$에서

$AC+BC=ABC$

양변의 왼쪽에 행렬 A를 곱하면

$A^2C+ABC=A^2BC$

$\therefore ABC=O$ ($\because A^2=O$)

즉, $(A+B)C=O$이므로

양변의 왼쪽에 행렬 $A+B$를 곱하면

$(A+B)^2C=O$, $EC=O$

$\therefore C=O$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

894 답 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$A^2=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=-E$

$A^3=A^2A=-EA=-A$

$A^4=(A^2)^2=(-E)^2=E$

$\therefore A^{4n+k}=A^k$ (단, n, k는 자연수)

조건 (가)에서 $B_1=A$이므로 두 조건 (나), (다)에 의하여

$B_2=A^2B_1=A^3=-A$

$B_3=B_2A^3=(-A)A^3=-A^4=-E$

$B_4=A^4B_3=A^4(-E)=-A^4=-E$

$B_5=B_4A^5=(-E)A^5=-A^5=-A$

$B_6=A^6B_5=A^6(-A)=-A^7=A$

$B_7=B_6A^7=AA^7=A^8=E$

$B_8=A^8B_7=A^8E=A^8=E$

$B_9=B_8A^9=EA^9=A^9=A$

$B_{10}=A^{10}B_9=A^{11}=-A$

$B_{11}=B_{10}A^{11}=(-A)A^{11}=-A^{12}=-E$

$\vdots$

$\therefore B_{8n+k}=B_k$ (n, k는 자연수)

$\therefore B_{1970}=B_{246\times8+2}=B_2=-A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

895 답 2

$A=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$에서

$A^2=AA=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=-E$

$B=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$에서

$B^2=BB=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

$B^3=B^2B=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=E$

이때

$AB=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=-E$,

$BA=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=-E$

이므로 $AB=BA$

$A-B=E$이므로

$A^{100}+A^{99}B+A^{98}B^2+\cdots+AB^{99}+B^{100}$

$=(A-B)(A^{100}+A^{99}B+A^{98}B^2+\cdots+AB^{99}+B^{100})$

$=A^{101}-B^{101}$

$(A^3)^{33}A^2-(B^3)^{33}B^2$

$=(-E)^{33}A^2-E^{33}B^2$

$=-A^2-B^2$

$=-\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

따라서 구하는 행렬의 모든 성분의 합은 2이다.

MEMO

이투스북

MEMO

MEMO

이투스북

MEMO

이투스북

MEMO

MEMO