유형의 완성 RPM

공통수학 1

정답 및 풀이

01 다항식의 연산

교과서 문제 정복하기

본책 007쪽, 009쪽

0001 답 (1) $\mathbf{3x^3y^2+2x^2y-5xy^3+y-7}$
(2) $\mathbf{-7+(2x^2+1)y+3x^3y^2-5xy^3}$

0002 $(x^2+xy+3y^2)+(2x^2-2xy+y^2)$
$=x^2+xy+3y^2+2x^2-2xy+y^2$
$=3x^2-xy+4y^2$ 답 $\mathbf{3x^2-xy+4y^2}$

0003 $(3x^2+2xy-y^2)-(x^2-5xy-4y^2)$
$=3x^2+2xy-y^2-x^2+5xy+4y^2$
$=2x^2+7xy+3y^2$ 답 $\mathbf{2x^2+7xy+3y^2}$

0004 $(5x^2+2xy)-(xy-3y^2)+(y^2+4xy)$
$=5x^2+2xy-xy+3y^2+y^2+4xy$
$=5x^2+5xy+4y^2$ 답 $\mathbf{5x^2+5xy+4y^2}$

0005 (1) $A-2B=(3x^2-4xy+2y^2)-2(x^2-xy-3y^2)$
$=3x^2-4xy+2y^2-2x^2+2xy+6y^2$
$=x^2-2xy+8y^2$
(2) $3B-(4A+B)$
$=3B-4A-B=-4A+2B$
$=-4(3x^2-4xy+2y^2)+2(x^2-xy-3y^2)$
$=-12x^2+16xy-8y^2+2x^2-2xy-6y^2$
$=-10x^2+14xy-14y^2$
답 (1) $\mathbf{x^2-2xy+8y^2}$ (2) $\mathbf{-10x^2+14xy-14y^2}$

0006 (1) $A-B+C$
$=(x^3+2x^2+3)-(3x^3+x^2-x-4)+(-2x^2+x-1)$
$=x^3+2x^2+3-3x^3-x^2+x+4-2x^2+x-1$
$=-2x^3-x^2+2x+6$
(2) $2A-(B-3C)$
$=2A-B+3C$
$=2(x^3+2x^2+3)-(3x^3+x^2-x-4)+3(-2x^2+x-1)$
$=2x^3+4x^2+6-3x^3-x^2+x+4-6x^2+3x-3$
$=-x^3-3x^2+4x+7$
(3) $(A+2B)-(B-C)$
$=A+2B-B+C=A+B+C$
$=(x^3+2x^2+3)+(3x^3+x^2-x-4)+(-2x^2+x-1)$
$=x^3+2x^2+3+3x^3+x^2-x-4-2x^2+x-1$
$=4x^3+x^2-2$
답 (1) $\mathbf{-2x^3-x^2+2x+6}$ (2) $\mathbf{-x^3-3x^2+4x+7}$
(3) $\mathbf{4x^3+x^2-2}$

0007 답 $\mathbf{2a^3-6a^2+12a}$

0008 $(x+3)(x^2-x+1)=x^3-x^2+x+3x^2-3x+3$
$=x^3+2x^2-2x+3$
답 $\mathbf{x^3+2x^2-2x+3}$

0009 $(2a^2+3ab-5b^2)(a-4b)$
$=2a^3-8a^2b+3a^2b-12ab^2-5ab^2+20b^3$
$=2a^3-5a^2b-17ab^2+20b^3$
답 $\mathbf{2a^3-5a^2b-17ab^2+20b^3}$

0010 $(2x+5)^2=(2x)^2+2\times 2x\times 5+5^2$
$=4x^2+20x+25$ 답 $\mathbf{4x^2+20x+25}$

0011 $(3x-2)^2=(3x)^2-2\times 3x\times 2+2^2$
$=9x^2-12x+4$ 답 $\mathbf{9x^2-12x+4}$

0012 $(3x+y)(3x-y)=(3x)^2-y^2$
$=9x^2-y^2$ 답 $\mathbf{9x^2-y^2}$

0013 $(x+2)(x+3)=x^2+(2+3)x+2\times 3$
$=x^2+5x+6$ 답 $\mathbf{x^2+5x+6}$

0014 $(2x+5)(3x-4)$
$=(2\times 3)x^2+\{2\times(-4)+5\times 3\}x+5\times(-4)$
$=6x^2+7x-20$ 답 $\mathbf{6x^2+7x-20}$

0015 $(2x-y-3z)^2$
$=(2x)^2+(-y)^2+(-3z)^2+2\times 2x\times(-y)$
$+2\times(-y)\times(-3z)+2\times(-3z)\times 2x$
$=4x^2+y^2+9z^2-4xy+6yz-12zx$
답 $\mathbf{4x^2+y^2+9z^2-4xy+6yz-12zx}$

0016 $(x+1)^3=x^3+3\times x^2\times 1+3\times x\times 1^2+1^3$
$=x^3+3x^2+3x+1$
답 $\mathbf{x^3+3x^2+3x+1}$

0017 $(x-2y)^3=x^3-3\times x^2\times 2y+3\times x\times(2y)^2-(2y)^3$
$=x^3-6x^2y+12xy^2-8y^3$
답 $\mathbf{x^3-6x^2y+12xy^2-8y^3}$

0018 $(a+2)(a^2-2a+4)=a^3+2^3=a^3+8$ 답 $\mathbf{a^3+8}$

0019 $(3x-1)(9x^2+3x+1)=(3x)^3-1^3=27x^3-1$
답 $\mathbf{27x^3-1}$

0020 $(x+1)(x+2)(x+3)$
$=x^3+(1+2+3)x^2+(1\times 2+2\times 3+3\times 1)x+1\times 2\times 3$
$=x^3+6x^2+11x+6$
답 $\mathbf{x^3+6x^2+11x+6}$

0021 $(a-b+1)(a^2+b^2+ab-a+b+1)$

$=\{a+(-b)+1\}$

$\quad\times\{a^2+(-b)^2+1^2-a\times(-b)-(-b)\times1-1\times a\}$

$=a^3+(-b)^3+1^3-3\times a\times(-b)\times1$

$=a^3-b^3+3ab+1$ 답 $\boldsymbol{a^3-b^3+3ab+1}$

0022 $(4x^2+6xy+9y^2)(4x^2-6xy+9y^2)$

$=\{(2x)^2+2x\times3y+(3y)^2\}\{(2x)^2-2x\times3y+(3y)^2\}$

$=(2x)^4+(2x)^2(3y)^2+(3y)^4$

$=16x^4+36x^2y^2+81y^4$ 답 $\boldsymbol{16x^4+36x^2y^2+81y^4}$

0023 (1) $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=3^2-2\times(-2)=13$

(2) $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy$

$\quad=3^2-4\times(-2)=17$

(3) $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

$\quad=3^3-3\times(-2)\times3=45$

답 (1) **13** (2) **17** (3) **45**

0024 (1) $x^2+y^2=(x-y)^2+2xy=(-4)^2+2\times3=22$

(2) $(x+y)^2=(x-y)^2+4xy$

$\quad=(-4)^2+4\times3=28$

(3) $x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$

$\quad=(-4)^3+3\times3\times(-4)$

$\quad=-64-36=-100$

답 (1) **22** (2) **28** (3) **−100**

0025 (1) $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=4^2-2=14$

(2) $x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$

$\quad=4^3-3\times4=52$

답 (1) **14** (2) **52**

0026 (1) $x+y=(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})=2$,

$xy=(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=-1$이므로

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

$\quad=2^3-3\times(-1)\times2=14$

(2) $x-y=(1+\sqrt{2})-(1-\sqrt{2})=2\sqrt{2}$, $xy=-1$이므로

$x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$

$\quad=(2\sqrt{2})^3+3\times(-1)\times2\sqrt{2}=10\sqrt{2}$

답 (1) **14** (2) $\boldsymbol{10\sqrt{2}}$

0027 (1) $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

$\quad=4^2-2\times1=14$

(2) $a^3+b^3+c^3$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$

$=4\times(14-1)+3\times(-6)=34$

답 (1) **14** (2) **34**

0028

$$\begin{array}{r} x^2+\boxed{6}\,x \\ x-1\,\big)\,x^3+5x^2-6x+1 \\ \underline{x^3-x^2} \\ \boxed{6}\,x^2-6x \\ \underline{\boxed{6}\,x^2-\boxed{6}\,x} \\ \boxed{1} \end{array}$$

∴ (가) 6 (나) 6 (다) 6 (라) 6 (마) 1

답 (가) **6** (나) **6** (다) **6** (라) **6** (마) **1**

0029

$$\begin{array}{r} 2x^2-2x-2 \\ 2x+1\,\big)\,4x^3-2x^2-6x+1 \\ \underline{4x^3+2x^2} \\ -4x^2-6x \\ \underline{-4x^2-2x} \\ -4x+1 \\ \underline{-4x-2} \\ 3 \end{array}$$

∴ 몫: $2x^2-2x-2$, 나머지: 3

답 몫: $\boldsymbol{2x^2-2x-2}$, 나머지: **3**

0030

$$\begin{array}{r} 2x-1 \\ x^2+2x-1\,\big)\,2x^3+3x^2+5 \\ \underline{2x^3+4x^2-2x} \\ -x^2+2x+5 \\ \underline{-x^2-2x+1} \\ 4x+4 \end{array}$$

∴ 몫: $2x-1$, 나머지: $4x+4$

답 몫: $\boldsymbol{2x-1}$, 나머지: $\boldsymbol{4x+4}$

0031

$$\begin{array}{r} 3x^2+3x+1 \\ x^2-x-1\,\big)\,3x^4-5x^2-2x+1 \\ \underline{3x^4-3x^3-3x^2} \\ 3x^3-2x^2-2x \\ \underline{3x^3-3x^2-3x} \\ x^2+x+1 \\ \underline{x^2-x-1} \\ 2x+2 \end{array}$$

∴ 몫: $3x^2+3x+1$, 나머지: $2x+2$

답 몫: $\boldsymbol{3x^2+3x+1}$, 나머지: $\boldsymbol{2x+2}$

0032

$$\begin{array}{r} 3x-1 \\ x^2+1\,\big)\,3x^3-x^2+4x+3 \\ \underline{3x^3+3x} \\ -x^2+x+3 \\ \underline{-x^2-1} \\ x+4 \end{array}$$

∴ $3x^3-x^2+4x+3=(x^2+1)(3x-1)+x+4$

답 **풀이 참조**

0033
$$\begin{array}{r|l} & \quad 2x+2 \\ \hline x^2-x-1 & 2x^3 \qquad +x-3 \\ & 2x^3-2x^2-2x \\ \hline & \qquad 2x^2+3x-3 \\ & \qquad 2x^2-2x-2 \\ \hline & \qquad\qquad 5x-1 \end{array}$$
$\therefore\ 2x^3+x-3=(x^2-x-1)(2x+2)+5x-1$

답 풀이 참조

0034
$$\begin{array}{r|rrrr} \boxed{-1} & 1 & 4 & \boxed{0} & -5 \\ & & \boxed{-1} & -3 & 3 \\ \hline & 1 & 3 & \boxed{-3} & \boxed{-2} \end{array}$$
따라서 구하는 몫은 $\boxed{x^2+3x-3}$, 나머지는 $\boxed{-2}$이다.

답 (가) -1 (나) 0 (다) -1 (라) -3
(마) -2 (바) x^2+3x-3 (사) -2

0035
$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 3 & 3 & 2 \\ & & -2 & -2 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$
$\therefore$ 몫: x^2+x+1, 나머지: 0

답 몫: x^2+x+1, 나머지: 0

0036
$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 3 & -7 & 0 & -10 \\ & & 9 & 6 & 18 \\ \hline & 3 & 2 & 6 & 8 \end{array}$$
$\therefore$ 몫: $3x^2+2x+6$, 나머지: 8

답 몫: $3x^2+2x+6$, 나머지: 8

0037
$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{3}{2} & 2 & -1 & 1 & -9 \\ & & 3 & 3 & 6 \\ \hline & 2 & 2 & 4 & -3 \end{array}$$
$\therefore$ 몫: $2x^2+2x+4$, 나머지: -3

답 몫: $2x^2+2x+4$, 나머지: -3

유형 익히기

• 본책 010~016쪽

0038 $A-2(A-2B)+C$
$=A-2A+4B+C$
$=-A+4B+C$
$=-(x^2-2xy+y^2)+4(2x^2+xy-2y^2)+(-x^2+2xy-y^2)$
$=-x^2+2xy-y^2+8x^2+4xy-8y^2-x^2+2xy-y^2$
$=6x^2+8xy-10y^2$

답 $6x^2+8xy-10y^2$

0039 $A-2(X-B)=3A$에서
$A-2X+2B=3A,\qquad -2X=2A-2B$
$\therefore\ X=-A+B$
$=-(2x^2-xy+y^2)+(3x^2+3xy-y^2)$
$=-2x^2+xy-y^2+3x^2+3xy-y^2$
$=x^2+4xy-2y^2$

답 $x^2+4xy-2y^2$

0040 $(3x^3+x^2-x+1)\bigstar(-x^3-x^2+3x-5)$
$=(3x^3+x^2-x+1)-2(-x^3-x^2+3x-5)$
$=3x^3+x^2-x+1+2x^3+2x^2-6x+10$
$=5x^3+3x^2-7x+11$

답 ④

0041 $A+B=2x^2+3xy-5y^2$ …… ㉠
$A-2B=8x^2-6xy-2y^2$ …… ㉡
㉠−㉡을 하면
$3B=-6x^2+9xy-3y^2$
$\therefore\ B=-2x^2+3xy-y^2$ … 1단계
이것을 ㉠에 대입하면
$A+(-2x^2+3xy-y^2)=2x^2+3xy-5y^2$
$\therefore\ A=2x^2+3xy-5y^2-(-2x^2+3xy-y^2)$
$=2x^2+3xy-5y^2+2x^2-3xy+y^2$
$=4x^2-4y^2$ … 2단계
$\therefore\ 2A+B=2(4x^2-4y^2)+(-2x^2+3xy-y^2)$
$=8x^2-8y^2-2x^2+3xy-y^2$
$=6x^2+3xy-9y^2$ … 3단계
따라서 $a=6$, $b=3$, $c=-9$이므로
$a+b+c=6+3+(-9)=0$ … 4단계

답 0

채점 요소		비율
1단계	다항식 B 구하기	30 %
2단계	다항식 A 구하기	30 %
3단계	$2A+B$ 구하기	30 %
4단계	$a+b+c$의 값 구하기	10 %

0042 $(1+2x+3x^2+4x^3)(4+3x+2x^2+x^3)$의 전개식에서 x^4항은
$2x\times x^3+3x^2\times 2x^2+4x^3\times 3x=2x^4+6x^4+12x^4$
$=20x^4$
따라서 x^4의 계수는 20이다.

답 ④

0043 $(2x-y+1)(x+3y-2)$의 전개식에서 xy항은
$2x\times 3y+(-y)\times x=6xy-xy=5xy$
따라서 xy의 계수는 5이다.

답 5

0044 $(x^2-2x+1)(x^2+3x+k)$의 전개식에서 x^2항은
$x^2\times k+(-2x)\times 3x+1\times x^2=kx^2-6x^2+x^2$
$=(k-5)x^2$

이때 x^2의 계수가 5이므로

$$k-5=5 \qquad \therefore k=10$$

답 **10**

0045 $(x+2x^2+3x^3+\cdots+10x^{10})^2$

$=(x+2x^2+3x^3+\cdots+10x^{10})(x+2x^2+3x^3+\cdots+10x^{10})$

이 식의 전개식에서 x^5항은

$$x\times4x^4+2x^2\times3x^3+3x^3\times2x^2+4x^4\times x$$
$$=4x^5+6x^5+6x^5+4x^5=20x^5$$

따라서 x^5의 계수는 20이다.

답 **20**

RPM 비법 노트

주어진 다항식을 전개할 때, $5x^5$, $6x^6$, $\cdots$, $10x^{10}$항은 x^5의 계수에 영향을 주지 않는다.
따라서 주어진 식의 전개식에서 x^5의 계수와

$$(x+2x^2+3x^3+4x^4)^2$$

의 전개식에서 x^5의 계수는 서로 같다.

0046 ① $(2x-1)^2=(2x)^2-2\times2x\times1+1^2$
$=4x^2-4x+1$

② $(2x+3y)^3$
$=(2x)^3+3\times(2x)^2\times3y+3\times2x\times(3y)^2+(3y)^3$
$=8x^3+36x^2y+54xy^2+27y^3$

③ $(x-y+z)^2$
$=x^2+(-y)^2+z^2+2\times x\times(-y)+2\times(-y)\times z$
$+2\times z\times x$
$=x^2+y^2+z^2-2xy-2yz+2zx$

④ $(x+y+2z)(x^2+y^2+4z^2-xy-2yz-2zx)$
$=x^3+y^3+(2z)^3-3\times x\times y\times 2z$
$=x^3+y^3+8z^3-6xyz$

⑤ $(16x^2+4x+1)(16x^2-4x+1)$
$=\{(4x)^2+4x\times1+1^2\}\{(4x)^2-4x\times1+1^2\}$
$=(4x)^4+(4x)^2\times1^2+1^4$
$=256x^4+16x^2+1$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

답 ⑤

0047 $(x+y)^3(x-y)^3$

$=\{(x+y)(x-y)\}^3=(x^2-y^2)^3$

$=(x^2)^3-3\times(x^2)^2\times y^2+3\times x^2\times(y^2)^2-(y^2)^3$

$=x^6-3x^4y^2+3x^2y^4-y^6$

답 ④

0048 $(3x+y)(9x^2-3xy+y^2)-(x-3y)(x^2+3xy+9y^2)$

$=(3x+y)\{(3x)^2-3x\times y+y^2\}$

$-(x-3y)\{x^2+x\times3y+(3y)^2\}$

$=\{(3x)^3+y^3\}-\{x^3-(3y)^3\}$

$=27x^3+y^3-(x^3-27y^3)=27x^3+y^3-x^3+27y^3$

$=26x^3+28y^3$

따라서 $a=26$, $b=28$이므로

$$a-b=26-28=-2$$

답 **−2**

0049 $x+y+z=4$에서

$x+y=4-z$, $y+z=4-x$, $z+x=4-y$

$\therefore (x+y)(y+z)(z+x)$
$=(4-z)(4-x)(4-y)$
$=4^3-(x+y+z)\times4^2+(xy+yz+zx)\times4-xyz$
$=64-4\times16+5\times4-2$
$=18$

답 **18**

0050 $x^2+x=t$로 놓으면

$(x^2+x+1)(x^2+x-2)=(t+1)(t-2)=t^2-t-2$
$=(x^2+x)^2-(x^2+x)-2$
$=x^4+2x^3+x^2-x^2-x-2$
$=x^4+2x^3-x-2$

따라서 $a=1$, $b=0$, $c=-1$이므로

$$a-b+c=1-0+(-1)=0$$

답 ③

0051 $(a+b-c^2)(a-b+c^2)$

$=\{a+(b-c^2)\}\{a-(b-c^2)\}$

$b-c^2=t$로 놓으면

(주어진 식)$=(a+t)(a-t)=a^2-t^2$
$=a^2-(b-c^2)^2$
$=a^2-(b^2-2bc^2+c^4)$
$=a^2-b^2-c^4+2bc^2$

답 $\boldsymbol{a^2-b^2-c^4+2bc^2}$

0052 $(x-5)(x-3)(x-1)(x+1)$

$=\{(x-5)(x+1)\}\{(x-3)(x-1)\}$

$=(x^2-4x-5)(x^2-4x+3)$

$x^2-4x=t$로 놓으면

(주어진 식)$=(t-5)(t+3)$
$=t^2-2t-15$
$=(x^2-4x)^2-2(x^2-4x)-15$
$=x^4-8x^3+16x^2-2x^2+8x-15$
$=x^4-8x^3+14x^2+8x-15$

답 $\boldsymbol{x^4-8x^3+14x^2+8x-15}$

0053 $(5+2a)^3=A$, $(5-2a)^3=B$로 놓으면

(주어진 식)
$=(A-B)^2-(A+B)^2$
$=A^2-2AB+B^2-(A^2+2AB+B^2)$
$=-4AB$
$=-4\times(5+2a)^3(5-2a)^3$
$=-4\{(5+2a)(5-2a)\}^3$
$=-4(25-4a^2)^3$
$=-4\times(25-4\times7)^3$ ($\because a=\sqrt{7}$)
$=-4\times(-27)=108$

답 **108**

0054 $x^2+y^2=(x-y)^2+2xy$에서

$8=2^2+2xy \qquad \therefore xy=2$

$\therefore x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$

$=2^3+3\times2\times2=20$ 답 ④

0055 $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$에서

$36=3^3-3xy\times3 \qquad \therefore xy=-1$

$\therefore x^2+xy+y^2=(x+y)^2-xy$

$=3^2-(-1)=10$ 답 **10**

0056 $\dfrac{a^2}{b}-\dfrac{b^2}{a}=\dfrac{a^3-b^3}{ab}$

$=\dfrac{(a-b)^3+3ab(a-b)}{ab}$ ⋯ ㉠ ⋯ 1단계

이때 $a=2+\sqrt{3}$, $b=2-\sqrt{3}$에서

$a-b=(2+\sqrt{3})-(2-\sqrt{3})=2\sqrt{3}$

$ab=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=1$ ⋯ 2단계

따라서 ㉠에서

$\dfrac{a^2}{b}-\dfrac{b^2}{a}=\dfrac{(2\sqrt{3})^3+3\times1\times2\sqrt{3}}{1}=30\sqrt{3}$ ⋯ 3단계

답 $30\sqrt{3}$

	채점 요소	비율
1단계	$\dfrac{a^2}{b}-\dfrac{b^2}{a}$을 $a-b$, ab에 대한 식으로 변형하기	40 %
2단계	$a-b$, ab의 값 구하기	30 %
3단계	$\dfrac{a^2}{b}-\dfrac{b^2}{a}$의 값 구하기	30 %

0057 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$에서

$7=(\sqrt{5})^2-2xy \qquad \therefore xy=-1$

$\therefore x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2$

$=7^2-2\times(-1)^2=47$ 답 **47**

0058 $x\neq0$이므로 $x^2-3x-1=0$의 양변을 x로 나누면

$x-3-\dfrac{1}{x}=0 \qquad \therefore x-\dfrac{1}{x}=3$

$\therefore x^3-\dfrac{1}{x^3}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$

$=3^3+3\times3=36$

답 ⑤

참고 | $x=0$을 $x^2-3x-1=0$의 좌변에 대입하면 $-1\neq0$이므로 $x\neq0$이다.

0059 $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=x^2+\dfrac{1}{x^2}+2=3+2=5$

이때 $x>0$이므로 $\qquad x+\dfrac{1}{x}=\sqrt{5}$

$\therefore x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$

$=(\sqrt{5})^3-3\sqrt{5}$

$=2\sqrt{5}$ 답 ①

0060 $x\neq0$이므로 $x^2-2x-1=0$의 양변을 x로 나누면

$x-2-\dfrac{1}{x}=0 \qquad \therefore x-\dfrac{1}{x}=2$

$\therefore x^3+2x^2+3x-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}$

$=\left(x^3-\dfrac{1}{x^3}\right)+2\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)+3\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$

$=\left\{\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\right\}+2\left\{\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2\right\}$

$+3\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$

$=(2^3+3\times2)+2\times(2^2+2)+3\times2$

$=32$ 답 ②

0061 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$에서

$6=2^2-2(ab+bc+ca) \qquad \therefore ab+bc+ca=-1$

$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$

에서

$8=2\times\{6-(-1)\}+3abc, \qquad 3abc=-6$

$\therefore abc=-2$ 답 -2

0062 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$에서

$14=4^2-2(ab+bc+ca) \qquad \therefore ab+bc+ca=1$

$(ab+bc+ca)^2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2(ab^2c+abc^2+a^2bc)$

$=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)$

에서 $\quad 1^2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2\times(-6)\times4$

$\therefore a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=49$ 답 **49**

0063 $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$에서

$18=6^2-2(xy+yz+zx) \qquad \therefore xy+yz+zx=9$

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=3$에서 $\quad \dfrac{xy+yz+zx}{xyz}=3, \quad \dfrac{9}{xyz}=3$

$\therefore xyz=3$

$\therefore x^3+y^3+z^3$

$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz$

$=6\times(18-9)+3\times3=63$ 답 ③

0064 $(a^2+b^2+c^2)^2=a^4+b^4+c^4+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$

에서

$8^2=a^4+b^4+c^4+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$ ⋯⋯ ㉠

이때 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$에서

$8=0^2-2(ab+bc+ca) \qquad \therefore ab+bc+ca=-4$

$(ab+bc+ca)^2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2(ab^2c+abc^2+a^2bc)$

$=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)$

에서 $\quad (-4)^2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc\times0$

$\therefore a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=16$

따라서 ㉠에서

$64=a^4+b^4+c^4+2\times16$

$\therefore a^4+b^4+c^4=32$ 답 **32**

0065 $(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)$

$=(2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)$

$=(2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)$

$=(2^4-1)(2^4+1)(2^8+1)$

$=(2^8-1)(2^8+1)=2^{16}-1$

답 ①

0066 $9\times11\times101\times10001$

$=(10-1)(10+1)(10^2+1)(10^4+1)$

$=(10^2-1)(10^2+1)(10^4+1)$

$=(10^4-1)(10^4+1)=10^8-1$

답 ④

0067 $a=1015$라 하면

$$\frac{1014\times(1015^2+1016)+1}{1015^3}=\frac{(a-1)(a^2+a+1)+1}{a^3}$$

$$=\frac{a^3-1+1}{a^3}=\frac{a^3}{a^3}=1$$

답 ③

0068 $a=102$, $b=\sqrt{105}$라 하면

$$\frac{(102+\sqrt{105})^3+(102-\sqrt{105})^3}{102}$$

$$=\frac{(a+b)^3+(a-b)^3}{a}$$

$$=\frac{(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)+(a^3-3a^2b+3ab^2-b^3)}{a}$$

$$=\frac{2a^3+6ab^2}{a}=2a^2+6b^2$$

$$=2\times102^2+6\times105$$

2×102^2의 일의 자리의 숫자는 8, 6×105의 일의 자리의 숫자는 0이므로 구하는 일의 자리의 숫자는

$8+0=8$

답 8

0069

$$\begin{array}{r|l}
 & x-1 \\ \hline
x^2+x+1 & x^3 \qquad -2x+1 \\
 & x^3+x^2+x \\ \hline
 & -x^2-3x+1 \\
 & -x^2-x-1 \\ \hline
 & -2x+2
\end{array}$$

따라서 $Q(x)=x-1$, $R(x)=-2x+2$이므로

$Q(2)+R(-3)=1+8=9$

답 9

0070

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2+2x+1 \\ \hline
2x-1 & 2x^3+3x^2 \qquad +6 \\
 & 2x^3-x^2 \\ \hline
 & 4x^2 \\
 & 4x^2-2x \\ \hline
 & 2x+6 \\
 & 2x-1 \\ \hline
 & 7
\end{array}$$

따라서 $a=2$, $b=4$, $c=2$, $d=7$이므로

$a+b+c+d=2+4+2+7=15$

답 15

0071

$$\begin{array}{r|l}
 & 2x-3 \\ \hline
x^2-x-2 & 2x^3-5x^2+4x+1 \\
 & 2x^3-2x^2-4x \\ \hline
 & -3x^2+8x+1 \\
 & -3x^2+3x+6 \\ \hline
 & 5x-5
\end{array}$$

따라서 몫은 $2x-3$, 나머지는 $5x-5$이므로

$a=2$, $b=-3$, $c=5$, $d=-5$

$\therefore ab-cd=2\times(-3)-5\times(-5)=19$

답 ⑤

0072 $2x^4+5x^2+12x-10=A(2x^2+2x-3)-x+5$
이므로

$A(2x^2+2x-3)=2x^4+5x^2+13x-15$

$\therefore A=(2x^4+5x^2+13x-15)\div(2x^2+2x-3)$

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2-x+5 \\ \hline
2x^2+2x-3 & 2x^4 \qquad +5x^2+13x-15 \\
 & 2x^4+2x^3-3x^2 \\ \hline
 & -2x^3+8x^2+13x \\
 & -2x^3-2x^2+3x \\ \hline
 & 10x^2+10x-15 \\
 & 10x^2+10x-15 \\ \hline
 & 0
\end{array}$$

$\therefore A=x^2-x+5$

답 $\boldsymbol{x^2-x+5}$

0073 $f(x)=(x+1)(2x-5)+6=2x^2-3x+1$

$$\begin{array}{r|l}
 & 2x-1 \\ \hline
x-1 & 2x^2-3x+1 \\
 & 2x^2-2x \\ \hline
 & -x+1 \\
 & -x+1 \\ \hline
 & 0
\end{array}$$

따라서 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫은 $2x-1$, 나머지는 0이다.

답 **몫: $2x-1$, 나머지: 0**

0074 직사각형의 세로의 길이를 A라 하면

$(x+3)A=x^3-x^2-5x+21$

$\therefore A=(x^3-x^2-5x+21)\div(x+3)$

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2-4x+7 \\ \hline
x+3 & x^3-x^2-5x+21 \\
 & x^3+3x^2 \\ \hline
 & -4x^2-5x \\
 & -4x^2-12x \\ \hline
 & 7x+21 \\
 & 7x+21 \\ \hline
 & 0
\end{array}$$

$\therefore A=x^2-4x+7$

따라서 직사각형의 세로의 길이는 x^2-4x+7이다.

답 $\boldsymbol{x^2-4x+7}$

0075 $A=(x+1)(x+2)+2$

$\quad =x^2+3x+4$

$B=(x+1)(2x+1)+3$

$=2x^2+3x+4$ ··· 1단계

$\therefore xA+B=x(x^2+3x+4)+2x^2+3x+4$

$=x^3+3x^2+4x+2x^2+3x+4$

$=x^3+5x^2+7x+4$ ··· 2단계

$$\begin{array}{r|l} & x+4 \\ \hline x^2+x+1 & x^3+5x^2+7x+4 \\ & x^3+x^2+x \\ \hline & 4x^2+6x+4 \\ & 4x^2+4x+4 \\ \hline & 2x \end{array}$$

따라서 $xA+B$를 x^2+x+1로 나누었을 때의 몫은 $x+4$, 나머지는 $2x$이다. ··· 3단계

답 몫: $x+4$, 나머지: $2x$

채점 요소		비율
1단계	다항식 A, B 구하기	40 %
2단계	$xA+B$ 구하기	20 %
3단계	$xA+B$를 x^2+x+1로 나누었을 때의 몫과 나머지 구하기	40 %

0076 $f(x)$를 $x-\frac{2}{3}$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 R이므로

$$f(x)=\left(x-\frac{2}{3}\right)Q(x)+R$$
$$=\frac{1}{3}(3x-2)Q(x)+R$$
$$=(3x-2)\times\frac{1}{3}Q(x)+R$$

따라서 $f(x)$를 $3x-2$로 나누었을 때의 몫은 $\frac{1}{3}Q(x)$, 나머지는 R이다.

답 몫: $\frac{1}{3}Q(x)$, 나머지: R

0077 $f(x)$를 $ax+b$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 R이므로

$$f(x)=(ax+b)Q(x)+R$$
$$=a\left(x+\frac{b}{a}\right)Q(x)+R$$
$$=\left(x+\frac{b}{a}\right)\times aQ(x)+R$$

따라서 $f(x)$를 $x+\frac{b}{a}$로 나누었을 때의 몫은 $aQ(x)$, 나머지는 R이다.

답 ④

0078 $f(x)$를 $x-\frac{1}{2}$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 R이므로

$$f(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)Q(x)+R$$

이 식의 양변에 x를 곱하면

$$xf(x)=x\left(x-\frac{1}{2}\right)Q(x)+Rx$$
$$=\frac{x}{2}(2x-1)Q(x)+\frac{R}{2}(2x-1)+\frac{R}{2}$$
$$=(2x-1)\left\{\frac{x}{2}Q(x)+\frac{R}{2}\right\}+\frac{R}{2}$$

따라서 $xf(x)$를 $2x-1$로 나누었을 때의 몫은 $\frac{x}{2}Q(x)+\frac{R}{2}$, 나머지는 $\frac{R}{2}$이다.

답 ①

0079 다항식 $3x^3-2x^2-5x+1$을 $x-2$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 3 & -2 & -5 & 1 \\ & & 6 & 8 & 6 \\ \hline & 3 & 4 & 3 & \boxed{7} \end{array}$$

따라서 $a=8$, $b=4$, $R=7$이므로

$a+b+R=8+4+7=19$

답 19

0080 주어진 조립제법에서 □ 안에 알맞은 수를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & a & b & c & d \\ & & \boxed{3} & \boxed{3} & \boxed{-9} \\ \hline & 1 & 1 & -3 & -4 \end{array}$$

즉 $a=1$, $b+3=1$, $c+3=-3$, $d+(-9)=-4$이므로

$a=1$, $b=-2$, $c=-6$, $d=5$

따라서 $f(x)=x^3-2x^2-6x+5$이므로

$f(-1)=-1-2+6+5=8$

답 8

0081 주어진 조립제법에서 $2a=-3$이므로

$a=-\frac{3}{2}$

따라서 조립제법에서 □ 안에 알맞은 수를 구하면 오른쪽과 같으므로

$$\begin{array}{r|rrrr} -\frac{3}{2} & 2 & b & 1 & c \\ & & -3 & -3 & \boxed{3} \\ \hline & 2 & 2 & \boxed{-2} & 7 \end{array}$$

$b+(-3)=2$, $c+3=7$

$\therefore b=5$, $c=4$

$\therefore abc=-\frac{3}{2}\times5\times4=-30$

$2x^3+5x^2+x+4$를 $x+\frac{3}{2}$으로 나누었을 때의 몫은 $2x^2+2x-2$, 나머지는 7이므로

$$2x^3+5x^2+x+4=\left(x+\frac{3}{2}\right)(2x^2+2x-2)+7$$
$$=\left(x+\frac{3}{2}\right)\times2(x^2+x-1)+7$$
$$=(2x+3)(x^2+x-1)+7$$

따라서 주어진 다항식을 $2x+3$으로 나누었을 때의 몫은 x^2+x-1이다.

답 ②

0082 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$

$=\frac{1}{2}\{(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)\}$

$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$ …… ㉠

$a-b=1$, $a-c=3$을 변끼리 빼면

$-b+c=-2$ $\therefore b-c=2$

따라서 ㉠에서

(주어진 식)$=\frac{1}{2}\times\{1^2+2^2+(-3)^2\}=7$ 답 ①

0083 $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca$

$=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2+2ab+2bc+2ca)$

$=\frac{1}{2}\{(a^2+2ab+b^2)+(b^2+2bc+c^2)+(c^2+2ca+a^2)\}$

$=\frac{1}{2}\{(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2\}$

$=\frac{1}{2}\times\{(3+\sqrt{2})^2+(3-\sqrt{2})^2+4^2\}$

$=\frac{1}{2}\times 38=19$ 답 **19**

0084 $a^3+b^3+c^3=3abc$에서

$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc=3abc$

$\therefore (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=0$

이때 $a+b+c\neq0$이므로

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$

$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca=0$

$(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)=0$

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$

$\therefore a=b=c$

따라서 $a+b+c=15$에서 $a=b=c=5$

$\therefore abc=5\times5\times5=125$ 답 ④

참고 | a, b, c는 실수이므로

$(a-b)^2\geq0$, $(b-c)^2\geq0$, $(c-a)^2\geq0$

따라서 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$에서

$a-b=0$, $b-c=0$, $c-a=0$

$\therefore a=b=c$

0085 상자의 밑면의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이를 각각 a, b, c라 하면 이 상자의 대각선의 길이는 $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$이다.

이때 상자의 겉넓이가 24이므로

$2(ab+bc+ca)=24$

$\therefore ab+bc+ca=12$

상자의 모든 모서리의 길이의 합이 28이므로

$4(a+b+c)=28$ $\therefore a+b+c=7$

$\therefore a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

$=7^2-2\times12=25$

따라서 상자의 대각선의 길이는 $\sqrt{25}$, 즉 5이다. 답 **5**

0086 직사각형의 가로와 세로의 길이를 각각 x cm, y cm라 하면 직사각형의 넓이는 xy cm^2이다.

이때 직사각형의 대각선의 길이는 부채꼴의 반지름의 길이와 같으므로

$\sqrt{x^2+y^2}=11$ $\therefore x^2+y^2=121$

직사각형의 둘레의 길이가 30 cm이므로

$2(x+y)=30$ $\therefore x+y=15$

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$에서

$121=15^2-2xy$, $2xy=104$

$\therefore xy=52$

따라서 직사각형의 넓이는 52 cm^2이다. 답 **52 cm^2**

0087 세 정사각형의 넓이의 합이 75이므로

$a^2+b^2+c^2=75$

세 정사각형의 둘레의 길이의 합이 52이므로

$4a+4b+4c=52$

$\therefore a+b+c=13$

한편 $S_A=a^2$, $S_D=(a+b)(a+c)$이므로

$S_D-S_A=(a+b)(a+c)-a^2$

$=ab+bc+ca$

이때 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$에서

$75=13^2-2(ab+bc+ca)$

$\therefore ab+bc+ca=47$

$\therefore S_D-S_A=47$ 답 **47**

시험에 꼭 나오는 문제

• 본책 017~019쪽

0088 $A-2X=B$에서 $2X=A-B$

$\therefore X=\frac{1}{2}(A-B)$

$=\frac{1}{2}\{(4x^3+x^2-3x-2)-(x^2-3x+2)\}$

$=\frac{1}{2}(4x^3+x^2-3x-2-x^2+3x-2)$

$=\frac{1}{2}(4x^3-4)$

$=2x^3-2$ 답 ④

0089 $(2x-1)^3(x-3)^2$

$=(8x^3-12x^2+6x-1)(x^2-6x+9)$

이 식의 전개식에서 x^3항은

$8x^3\times9+(-12x^2)\times(-6x)+6x\times x^2$

$=72x^3+72x^3+6x^3$

$=150x^3$

따라서 x^3의 계수는 150이다. 답 **150**

0090 $(3x+ay)^3=27x^3+27ax^2y+9a^2xy^2+a^3y^3$
따라서 x^2y의 계수가 $27a$이므로
$27a=54 \qquad \therefore a=2$

답 **2**

다른 풀이 $(3x+ay)^3=(3x+ay)(3x+ay)(3x+ay)$
이 식의 전개식에서 x^2y항은
$3x\times3x\times ay+3x\times ay\times3x+ay\times3x\times3x$
$=9ax^2y+9ax^2y+9ax^2y=27ax^2y$
이때 x^2y의 계수가 54이므로
$27a=54 \qquad \therefore a=2$

0091 $(x^2-4)(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)$
$=(x+2)(x-2)(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)$
$=\{(x+2)(x^2-2x+4)\}\{(x-2)(x^2+2x+4)\}$
$=(x^3+8)(x^3-8)$
$=x^6-64=70-64\ (\because x^6=70)$
$=6$

답 ⑤

다른 풀이 $(x^2-4)(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)$
$=(x^2-4)(x^4+4x^2+16)$
$=x^6-64=70-64=6$

0092 $(a+1)(a+2)(a+3)(a+4)$
$=\{(a+1)(a+4)\}\{(a+2)(a+3)\}$
$=(a^2+5a+4)(a^2+5a+6)$
이때 $a^2+5a-1=0$에서 $\quad a^2+5a=1$
$\therefore$ (주어진 식)$=(1+4)\times(1+6)=35$

답 ⑤

0093 $\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}=\dfrac{x^2+y^2}{xy}=\dfrac{(x+y)^2-2xy}{xy}$ ⋯⋯ ㉠
이때 $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$에서
$4=1^3-3xy\times1 \qquad \therefore xy=-1$
따라서 ㉠에서
$\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}=\dfrac{1^2-2\times(-1)}{-1}=-3$

답 **−3**

0094 $\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{3+2\sqrt{2}}=\dfrac{3-2\sqrt{2}}{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}=3-2\sqrt{2}$
이므로 $\quad x+\dfrac{1}{x}=(3+2\sqrt{2})+(3-2\sqrt{2})=6$
$\therefore x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=6^3-3\times6=198$

답 ③

0095 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$에서
$27=3^2-2(ab+bc+ca)$
$\therefore ab+bc+ca=-9$
$a+b+c=3$에서
$a+b=3-c,\ b+c=3-a,\ c+a=3-b$
$\therefore (a+b)(b+c)(c+a)$
$=(3-c)(3-a)(3-b)$
$=3^3-(a+b+c)\times3^2+(ab+bc+ca)\times3-abc$
$=27-3\times9+(-9)\times3-5$
$=-32$

답 ④

0096 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$
$=(\sqrt{2})^2-2\times(-2)=6$
$\therefore a^3+b^3+c^3$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$
$=\sqrt{2}\times\{6-(-2)\}+3\times(-\sqrt{2})$
$=8\sqrt{2}-3\sqrt{2}$
$=5\sqrt{2}$

답 ⑤

0097 $x=1+\sqrt{2}-\sqrt{3},\ y=1-\sqrt{2}+\sqrt{3}$이라 하면
$(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})^3+(1-\sqrt{2}+\sqrt{3})^3$
$=x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$
이때 $x+y=(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})+(1-\sqrt{2}+\sqrt{3})=2$,
$xy=(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})(1-\sqrt{2}+\sqrt{3})$
$=\{1+(\sqrt{2}-\sqrt{3})\}\{1-(\sqrt{2}-\sqrt{3})\}$
$=1^2-(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2=1-(5-2\sqrt{6})$
$=-4+2\sqrt{6}$
이므로
(주어진 식)$=2^3-3\times(-4+2\sqrt{6})\times2=32-12\sqrt{6}$

답 $\mathbf{32-12\sqrt{6}}$

다른 풀이 $x=1,\ y=\sqrt{2}-\sqrt{3}$이라 하면
$(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})^3+(1-\sqrt{2}+\sqrt{3})^3$
$=\{1+(\sqrt{2}-\sqrt{3})\}^3+\{1-(\sqrt{2}-\sqrt{3})\}^3$
$=(x+y)^3+(x-y)^3$
$=(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3)+(x^3-3x^2y+3xy^2-y^3)$
$=2x^3+6xy^2$
$=2\times1^3+6\times1\times(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2=2+6(5-2\sqrt{6})$
$=32-12\sqrt{6}$

0098 $x^4+5x^3+3x^2-13x+9=A(x^2+2x-2)-5x+7$
이므로 $\quad A(x^2+2x-2)=x^4+5x^3+3x^2-8x+2$
$\therefore A=(x^4+5x^3+3x^2-8x+2)\div(x^2+2x-2)$

$$\begin{array}{r}
x^2+3x-1 \\
x^2+2x-2\,\overline{)\,x^4+5x^3+3x^2-8x+2} \\
\underline{x^4+2x^3-2x^2} \\
3x^3+5x^2-8x \\
\underline{3x^3+6x^2-6x} \\
-x^2-2x+2 \\
\underline{-x^2-2x+2} \\
0
\end{array}$$

$\therefore A=x^2+3x-1$

답 $\mathbf{x^2+3x-1}$

0099 직육면체의 높이를 A라 하면

$(x-1)(x+2)A=x^3+5x^2+2x-8$

$(x^2+x-2)A=x^3+5x^2+2x-8$

$\therefore A=(x^3+5x^2+2x-8)\div(x^2+x-2)$

$$\begin{array}{r|l} & x+4 \\ x^2+x-2 & x^3+5x^2+2x-8 \\ & x^3+x^2-2x \\ \hline & \quad 4x^2+4x-8 \\ & \quad 4x^2+4x-8 \\ \hline & \qquad\qquad 0 \end{array}$$

$\therefore A=x+4$

따라서 직육면체의 높이는 $x+4$이다. 답 $x+4$

다른 풀이 x^3+5x^2+2x-8에서 x^3의 계수가 1이므로 구하는 높이를 $x+k$ (k는 상수)라 하면

$(x-1)(x+2)(x+k)=x^3+5x^2+2x-8$

이때 좌변의 전개식의 상수항이 $-2k$이므로

$-2k=-8 \qquad \therefore k=4$

따라서 직육면체의 높이는 $x+4$이다.

0100 $f(x)$를 $2x+1$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 R이므로

$$\begin{aligned} f(x)&=(2x+1)Q(x)+R \\ &=2\left(x+\frac{1}{2}\right)Q(x)+R \\ &=\left(x+\frac{1}{2}\right)\times 2Q(x)+R \end{aligned}$$

따라서 $f(x)$를 $x+\frac{1}{2}$로 나누었을 때의 몫은 $2Q(x)$, 나머지는 R이다. 답 **몫: $2Q(x)$, 나머지: R**

0101 주어진 조립제법에서 □ 안에 알맞은 수를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{c|cccc} \boxed{\frac{1}{3}} & \boxed{9} & \boxed{0} & \boxed{-4} & -2 \\ & & 3 & \boxed{1} & \boxed{-1} \\ \hline & 9 & 3 & -3 & \boxed{-3} \end{array}$$

즉 $f(x)=9x^3-4x-2$이고 $f(x)$를 $x-\frac{1}{3}$로 나누었을 때의 몫은 $9x^2+3x-3$, 나머지는 -3이므로

$$\begin{aligned} f(x)&=\left(x-\frac{1}{3}\right)(9x^2+3x-3)-3 \\ &=\left(x-\frac{1}{3}\right)\times 3(3x^2+x-1)-3 \\ &=(3x-1)(3x^2+x-1)-3 \end{aligned}$$

따라서 $Q(x)=3x^2+x-1$, $R=-3$이므로

$f(-1)+Q(2)+R=-7+13+(-3)=3$ 답 **3**

0102 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{BF}$의 길이를 각각 x, y, z라 하면

$$\begin{aligned} \overline{BG}^2+\overline{GD}^2+\overline{DB}^2&=(y^2+z^2)+(x^2+z^2)+(x^2+y^2) \\ &=2(x^2+y^2+z^2) \quad \cdots\cdots ㉠ \end{aligned}$$

이때 직육면체의 겉넓이가 148이므로

$2(xy+yz+zx)=148 \qquad \therefore xy+yz+zx=74$

직육면체의 모든 모서리의 길이의 합이 60이므로

$4(x+y+z)=60 \qquad \therefore x+y+z=15$

$$\begin{aligned} \therefore x^2+y^2+z^2&=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx) \\ &=15^2-2\times 74=77 \end{aligned}$$

따라서 ㉠에서

$\overline{BG}^2+\overline{GD}^2+\overline{DB}^2=2\times 77=154$ 답 ④

0103 $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{-(x-y)}{xy}=\frac{-3}{xy}=9$에서

$xy=-\frac{1}{3}$ … 1단계

$$\begin{aligned} \therefore x^3-y^3&=(x-y)^3+3xy(x-y) \\ &=3^3+3\times\left(-\frac{1}{3}\right)\times 3=24 \end{aligned}$$ … 2단계

답 **24**

채점 요소	비율
1단계 xy의 값 구하기	40 %
2단계 x^3-y^3의 값 구하기	60 %

0104 $x\neq 0$이므로 $x^2-4x+1=0$의 양변을 x로 나누면

$x-4+\frac{1}{x}=0 \qquad \therefore x+\frac{1}{x}=4$ … 1단계

$$\begin{aligned} \therefore 2x^2-x-3-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2} &=2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)-3 \\ &=2\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\right\}-\left(x+\frac{1}{x}\right)-3 \\ &=2\times(4^2-2)-4-3=21 \end{aligned}$$ … 2단계

답 **21**

채점 요소	비율
1단계 $x+\frac{1}{x}$의 값 구하기	30 %
2단계 주어진 식의 값 구하기	70 %

0105

$$\begin{array}{r|l} & x+3 \\ x^2+x+2 & x^3+4x^2+5x+a \\ & x^3+x^2+2x \\ \hline & \quad 3x^2+3x+a \\ & \quad 3x^2+3x+6 \\ \hline & \qquad\qquad a-6 \end{array}$$ … 1단계

이때 나머지가 0이어야 하므로

$a-6=0 \qquad \therefore a=6$ … 2단계

답 **6**

채점 요소	비율
1단계 x^3+4x^2+5x+a를 x^2+x+2로 나누기	60 %
2단계 a의 값 구하기	40 %

0106 직사각형의 가로, 세로의 길이를 각각 x, y라 하면 직사각형의 넓이는 xy이다.

이때 직사각형의 둘레의 길이가 34이므로

$2(x+y)=34 \qquad \therefore x+y=17$ … 1단계

직사각형의 대각선의 길이는 원의 지름의 길이와 같으므로

$\sqrt{x^2+y^2}=13 \qquad \therefore x^2+y^2=169$ … 2단계

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$에서

$169=17^2-2xy, \qquad 2xy=120$

$\therefore xy=60$

따라서 직사각형의 넓이는 60이다. … 3단계

답 **60**

채점 요소	비율
1단계 $x+y$의 값 구하기	30 %
2단계 x^2+y^2의 값 구하기	30 %
3단계 직사각형의 넓이 구하기	40 %

0107 전략 x^9항이 나오도록 각 다항식에서 x 또는 상수항을 선택하여 곱한다.

$(x+1)(x+2)(x+3)\times \cdots \times(x+10)$의 전개식에서 x^9항은

$x^9\times10+x^8\times9\times x+x^7\times8\times x^2+\cdots$

$+x\times2\times x^8+1\times x^9$

$=(10+9+8+\cdots+2+1)x^9$

$=55x^9$

따라서 x^9의 계수는 55이다. 답 ②

0108 전략 x^7+y^7을 x^3+y^3, x^4+y^4에 대한 식으로 변형한다.

$x^7+y^7=(x^3+y^3)(x^4+y^4)-x^3y^4-x^4y^3$

$=(x^3+y^3)(x^4+y^4)-x^3y^3(x+y)$ …… ㉠

이때 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$에서

$2=1^2-2xy \qquad \therefore xy=-\frac{1}{2}$

$\therefore x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

$=1^3-3\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times1=\frac{5}{2}$

$x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2$

$=2^2-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{7}{2}$

따라서 ㉠에서

$x^7+y^7=\frac{5}{2}\times\frac{7}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)^3\times1=\frac{71}{8}$ 답 $\frac{71}{8}$

0109 전략 $x=\frac{1-\sqrt{2}}{2}$를 (x에 대한 이차식)$=0$의 꼴로 변형한다.

$x=\frac{1-\sqrt{2}}{2}$에서 $\qquad 2x-1=-\sqrt{2}$

양변을 제곱하면 $\qquad 4x^2-4x+1=2$

$\therefore 4x^2-4x-1=0$ …… ㉠

$8x^4-6x^2-6x+5$를 $4x^2-4x-1$로 나누면

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2+2x+1 \\
\hline
4x^2-4x-1 & 8x^4 \qquad -6x^2-6x+5 \\
 & 8x^4-8x^3-2x^2 \\
\hline
 & \qquad 8x^3-4x^2-6x \\
 & \qquad 8x^3-8x^2-2x \\
\hline
 & \qquad\qquad 4x^2-4x+5 \\
 & \qquad\qquad 4x^2-4x-1 \\
\hline
 & \qquad\qquad\qquad 6
\end{array}
$$

$\therefore 8x^4-6x^2-6x+5$

$=(4x^2-4x-1)(2x^2+2x+1)+6$

$=0\times(2x^2+2x+1)+6$ ($\because$ ㉠)

$=6$ 답 **6**

다른 풀이 $x=\frac{1-\sqrt{2}}{2}$에서 $\qquad 4x^2-4x=1$

$\therefore 8x^4-6x^2-6x+5$

$=2x^2(4x^2-4x)+8x^3-6x^2-6x+5$

$=8x^3-4x^2-6x+5$

$=2x(4x^2-4x)+4x^2-6x+5$

$=4x^2-4x+5$

$=1+5=6$

0110 전략 $(a+b+c)^2=2ab+2bc+2ca+3$에서 $a^2+b^2+c^2$, $ab+bc+ca$의 값을 구한다.

$(a+b+c)^2=2ab+2bc+2ca+3$ …… ㉠

에서

$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=2ab+2bc+2ca+3$

$\therefore a^2+b^2+c^2=3$ …… ㉡

$a+b+c=3$을 ㉠에 대입하면

$3^2=2ab+2bc+2ca+3$

$\therefore ab+bc+ca=3$ …… ㉢

㉡, ㉢에서 $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$이므로

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$

$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca=0$

$(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)=0$

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$

$\therefore a=b=c$

이때 $a+b+c=3$이므로 $\qquad a=b=c=1$

$\therefore (a^2+2ab-b^2)(b^2-bc+2c^2)$

$=(1^2+2\times1\times1-1^2)\times(1^2-1\times1+2\times1^2)$

$=2\times2=4$ 답 **4**

02 항등식과 나머지정리

교과서 문제 정복하기

본책 021쪽

0111 ㄱ. 주어진 등식은 $x=-4$일 때에만 성립하므로 항등식이 아니다.

ㄴ. 주어진 등식의 우변을 전개하여 정리하면

$$3x+2=3x+2$$

이 등식은 x에 어떤 값을 대입하여도 항상 성립하므로 항등식이다.

ㄷ. 주어진 등식의 우변을 전개하면

$$x^2-8x+9=x^2-8x+10$$

이 등식은 x에 어떤 값을 대입하여도 성립하지 않으므로 항등식이 아니다.

ㄹ. 주어진 등식의 좌변을 전개하여 정리하면

$$x^2-x=x^2-x$$

이 등식은 x에 어떤 값을 대입하여도 항상 성립하므로 항등식이다.

ㅁ. 주어진 등식의 좌변을 전개하여 정리하면

$$x^2-x-6=x^2-x-6$$

이 등식은 x에 어떤 값을 대입하여도 항상 성립하므로 항등식이다.

이상에서 x에 대한 항등식인 것은 ㄴ, ㄹ, ㅁ이다.

답 **ㄴ, ㄹ, ㅁ**

0112 답 $\boldsymbol{a=4,\ b=-1,\ c=2}$

0113 주어진 등식이 x에 대한 항등식이므로

$$a+c=0,\ -(b-3)=0,\ a-2b=0$$

$$\therefore a=6,\ b=3,\ c=-6$$

답 $\boldsymbol{a=6,\ b=3,\ c=-6}$

0114 주어진 등식의 양변에 $x=-1$, $x=2$, $x=3$을 각각 대입하면

$$12c=-6,\ -3b=6,\ 4a=6$$

$$\therefore a=\frac{3}{2},\ b=-2,\ c=-\frac{1}{2}$$

답 $\boldsymbol{a=\frac{3}{2},\ b=-2,\ c=-\frac{1}{2}}$

0115 주어진 등식의 양변에 $x=0$, $x=1$, $x=2$를 각각 대입하면

$$-c=1,\ b=3,\ 2a+2b+c=7$$

$$\therefore a=1,\ b=3,\ c=-1$$

답 $\boldsymbol{a=1,\ b=3,\ c=-1}$

다른 풀이 $ax(x-1)+bx+c(x-1)=ax^2+(-a+b+c)x-c$
이므로

$$ax^2+(-a+b+c)x-c=x^2+x+1$$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$$a=1,\ -a+b+c=1,\ -c=1$$

$$\therefore a=1,\ b=3,\ c=-1$$

0116 $a(x+1)^2+b(x+1)+c$
$=ax^2+(2a+b)x+a+b+c$
이므로

$$ax^2+(2a+b)x+a+b+c=2x^2+x+5$$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$$a=2,\ 2a+b=1,\ a+b+c=5$$

$$\therefore a=2,\ b=-3,\ c=6$$

답 $\boldsymbol{a=2,\ b=-3,\ c=6}$

다른 풀이 주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면 $c=6$
따라서 주어진 등식은

$$a(x+1)^2+b(x+1)+6=2x^2+x+5$$

이 등식의 양변에 $x=0$, $x=1$을 각각 대입하면

$$a+b+6=5,\ 4a+2b+6=8$$

$$\therefore a+b=-1,\ 2a+b=1$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2,\ b=-3$

0117 주어진 등식이 x, y에 대한 항등식이므로

$$a+b+2=0,\ 2a+3b+3=0$$

$$\therefore a+b=-2,\ 2a+3b=-3$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a=-3,\ b=1$$

답 $\boldsymbol{a=-3,\ b=1}$

0118 $a(x-y)-b(x+y)-1=(a-b)x-(a+b)y-1$
이므로

$$(a-b)x-(a+b)y-1=3x-9y+c$$

이 등식이 x, y에 대한 항등식이므로

$$a-b=3,\ -(a+b)=-9,\ -1=c$$

$$\therefore a=6,\ b=3,\ c=-1$$

답 $\boldsymbol{a=6,\ b=3,\ c=-1}$

0119 나머지정리에 의하여 구하는 나머지는 다음과 같다.

(1) $f(1)=1-2+5-6=-2$

(2) $f(-3)=-27-18-15-6=-66$

답 (1) $\boldsymbol{-2}$ (2) $\boldsymbol{-66}$

0120 나머지정리에 의하여 구하는 나머지는 다음과 같다.

(1) $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}-2+\frac{1}{4}=-1$

(2) $f\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3}+\frac{8}{3}+\frac{1}{4}=\frac{17}{4}$

답 (1) $\boldsymbol{-1}$ (2) $\boldsymbol{\frac{17}{4}}$

0121 $f(x)=x^3+ax^2+2x+4$라 하면 나머지정리에 의하여 $f(-2)=4$이므로

$-8+4a-4+4=4,\quad 4a=12$

$\therefore a=3$

답 **3**

0122 (1) 인수정리에 의하여 $f(2)=0$이므로

$16-20+2k-4=0,\quad 2k=8$

$\therefore k=4$

(2) 인수정리에 의하여 $f(-2)=0$이므로

$-16-20-2k-4=0,\quad -2k=40$

$\therefore k=-20$

답 (1) **4** (2) **-20**

0123 인수정리에 의하여 $f(1)=0$, $f(-2)=0$이므로

$1+a+b-6=0,\ -8+4a-2b-6=0$

$\therefore a+b=5,\ 2a-b=7$

두 식을 연립하여 풀면

$a=4,\ b=1$

답 **$a=4$, $b=1$**

유형 익히기

• 본책 022~028쪽

0124 $(x-1)(x^2+bx-c)$
$=x^3+(b-1)x^2+(-b-c)x+c$
이므로

$x^3-ax+3=x^3+(b-1)x^2+(-b-c)x+c$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$0=b-1,\ -a=-b-c,\ 3=c$

$\therefore a=4,\ b=1,\ c=3$

$\therefore a+b-c=4+1-3=2$

답 **2**

0125 $a(x+y)-b(2x-y)=(a-2b)x+(a+b)y$이므로

$(a-2b)x+(a+b)y=2x+5y$

이 등식이 x, y에 대한 항등식이므로

$a-2b=2,\ a+b=5$

두 식을 연립하여 풀면

$a=4,\ b=1$

$\therefore a-b=4-1=3$

답 **3**

RPM 비법 노트

주어진 등식이 모든 실수 x, y에 대하여 성립한다.
⇨ x, y에 대한 항등식
⇨ 양변을 ( )x+( )y의 꼴로 정리한다.

0126 주어진 등식을 k에 대하여 정리하면

$(x-y-2)k+xy-5=0$

이 등식이 k에 대한 항등식이므로

$x-y-2=0,\ xy-5=0$

$\therefore x-y=2,\ xy=5$

$\therefore x^2+y^2=(x-y)^2+2xy$
$=2^2+2\times5=14$

답 **14**

0127 $x^3+5x+a=(x^2+x-1)Q(x)+bx+3$이 x에 대한 항등식이므로 $Q(x)$는 최고차항의 계수가 1인 x에 대한 일차식이다.

$Q(x)=x+c$ (c는 상수)라 하면

$x^3+5x+a=(x^2+x-1)(x+c)+bx+3$
$=x^3+(c+1)x^2+(b+c-1)x-c+3$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$0=c+1,\ 5=b+c-1,\ a=-c+3$

$\therefore a=4,\ b=7,\ c=-1$

$\therefore ab=4\times7=28$

답 ③

0128 주어진 등식의 양변에 $x=-1$, $x=0$, $x=1$을 각각 대입하면

$8=2b,\ 3=-c,\ 2=2a$

$\therefore a=1,\ b=4,\ c=-3$

$\therefore abc=1\times4\times(-3)=-12$

답 ①

0129 주어진 등식의 양변에 $x=-2$를 대입하면

$0=-16-4c\quad \therefore c=-4$

따라서 주어진 등식은

$a(x+2)^2(x-2)+b(x+2)=2x^3+4x^2$

이 등식의 양변에 $x=0$, $x=2$를 각각 대입하면

$-8a+2b=0,\ 4b=32$

$\therefore a=2,\ b=8$

$\therefore a^2+b^2+c^2=2^2+8^2+(-4)^2=84$

답 **84**

0130 주어진 등식의 양변에 $x=0$, $x=1$, $x=2$를 각각 대입하면

$10=a-b+c,\ 19=c,\ 36=a+b+c$

$\therefore a=4,\ b=13,\ c=19$

$\therefore 2a+b-c=2\times4+13-19=2$

답 **2**

0131 주어진 등식의 양변에 $x=-1$, $x=2$를 각각 대입하면

$-1-a+b=0,\ 32-4a+b=0$

$\therefore a-b=-1,\ 4a-b=32$

두 식을 연립하여 풀면

$a=11,\ b=12$

따라서 주어진 등식은

$x^5-11x^2+12=(x+1)(x-2)f(x)$

이 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$2=-2f(1)$ $\therefore f(1)=-1$ 답 -1

참고 | $x^5-11x^2+12=(x+1)(x-2)f(x)$에서

$f(x)=(x^5-11x^2+12)\div(x^2-x-2)$
$=x^3+x^2+3x-6$

0132 $y-x=1$에서 $y=x+1$

이것을 주어진 등식에 대입하면

$ax^2+2ax+b(x+1)^2-cx-(x+1)-1=0$

$\therefore (a+b)x^2+(2a+2b-c-1)x+b-2=0$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a+b=0,\ 2a+2b-c-1=0,\ b-2=0$

$\therefore a=-2,\ b=2,\ c=-1$

$\therefore a-b-c=-2-2-(-1)=-3$ 답 ③

참고 | $x=y-1$을 대입해서 y에 대한 식으로 정리해도 결과는 같다.

0133 주어진 방정식이 1을 근으로 가지므로

$1+(k-2)+(k+2)p+q=0$

$\therefore (1+p)k+2p+q-1=0$

이 등식이 k에 대한 항등식이므로

$1+p=0,\ 2p+q-1=0$

$\therefore p=-1,\ q=3$

$\therefore p+q=-1+3=2$ 답 ④

0134 $x+2y=1$에서 $x=1-2y$

이것을 주어진 등식에 대입하면

$3a(1-2y)+by=15$

$\therefore (-6a+b)y+3a-15=0$

이 등식이 y에 대한 항등식이므로

$-6a+b=0,\ 3a-15=0$

$\therefore a=5,\ b=30$

$\therefore a+b=5+30=35$ 답 35

0135 주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$2^{15}=a_0+a_1+\cdots+a_{14}+a_{15}$ …… ㉠

주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$0=a_0-a_1+\cdots+a_{14}-a_{15}$ …… ㉡

㉠$-$㉡을 하면

$2^{15}=2(a_1+a_3+\cdots+a_{13}+a_{15})$

$\therefore a_1+a_3+\cdots+a_{13}+a_{15}=2^{14}$ 답 ②

0136 주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$a_0=16$

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$1=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_8$

$\therefore a_1+a_2+\cdots+a_8=(a_0+a_1+a_2+\cdots+a_8)-a_0$
$=1-16=-15$

답 -15

0137 주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_6$ …… ㉠ … 1단계

주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$4^3=a_0-a_1+a_2-\cdots+a_6$ …… ㉡ … 2단계

㉠+㉡을 하면

$64=2(a_0+a_2+a_4+a_6)$

$\therefore a_0+a_2+a_4+a_6=32$ … 3단계

답 32

채점 요소		비율
1단계	$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_6$의 값 구하기	40 %
2단계	$a_0-a_1+a_2-\cdots+a_6$의 값 구하기	40 %
3단계	$a_0+a_2+a_4+a_6$의 값 구하기	20 %

0138 주어진 등식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$2^{50}+1=a_{50}+a_{49}+\cdots+a_1+a_0$ …… ㉠

주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$1=a_{50}-a_{49}+\cdots-a_1+a_0$ …… ㉡

㉠$-$㉡을 하면

$2^{50}=2(a_{49}+a_{47}+\cdots+a_3+a_1)$

$\therefore a_{49}+a_{47}+\cdots+a_3+a_1=2^{49}$ 답 ⑤

0139 x^3+ax-8을 x^2+4x+b로 나누었을 때의 몫을 $x+c$ (c는 상수)라 하면

$x^3+ax-8=(x^2+4x+b)(x+c)+3x+4$
$=x^3+(c+4)x^2+(b+4c+3)x+bc+4$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$0=c+4,\ a=b+4c+3,\ -8=bc+4$

$\therefore a=-10,\ b=3,\ c=-4$

$\therefore a+b=-10+3=-7$ 답 ④

참고 | x^3+ax-8과 x^2+4x+b의 최고차항의 계수가 모두 1이므로 몫은 $x+c$ (c는 상수)의 꼴이다.

0140 x^3+8x^2+5x-a를 x^2+3x+b로 나누었을 때의 몫을 $x+c$ (c는 상수)라 하면

$x^3+8x^2+5x-a=(x^2+3x+b)(x+c)$
$=x^3+(c+3)x^2+(b+3c)x+bc$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$8=c+3,\ 5=b+3c,\ -a=bc$

$\therefore a=50,\ b=-10,\ c=5$

$\therefore a-b=50-(-10)=60$

답 60

다른 풀이

$$
\begin{array}{r|l}
 & x\ +5 \\
\hline
x^2+3x+b & x^3+8x^2+\quad 5x-\quad a \\
 & x^3+3x^2+\quad bx \\
\hline
 & 5x^2+(5-b)x-\quad a \\
 & 5x^2+\quad 15x+\quad 5b \\
\hline
 & (-b-10)x-a-5b
\end{array}
$$

이때 나머지가 0이어야 하므로

$(-b-10)x-a-5b=0$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$-b-10=0,\ -a-5b=0 \qquad \therefore a=50,\ b=-10$

0141 x^3+ax^2+b를 x^2+x-2로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$$x^3+ax^2+b=(x^2+x-2)Q(x)+2x+3$$
$$=(x+2)(x-1)Q(x)+2x+3$$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로 등식의 양변에 $x=-2,\ x=1$을 각각 대입하면

$-8+4a+b=-1,\ 1+a+b=5$

$\therefore 4a+b=7,\ a+b=4$

두 식을 연립하면 풀면 $\quad a=1,\ b=3$

$\therefore ab=1\times3=3$

답 ④

0142 x^4+ax^2+bx를 x^2-x+1로 나누었을 때의 몫을 x^2+cx+d ($c,\ d$는 상수)라 하면

$$x^4+ax^2+bx$$
$$=(x^2-x+1)(x^2+cx+d)+3x-3$$
$$=x^4+(c-1)x^3+(-c+d+1)x^2+(c-d+3)x+d-3$$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$0=c-1,\ a=-c+d+1,\ b=c-d+3,\ 0=d-3$

$\therefore a=3,\ b=1,\ c=1,\ d=3$

$\therefore b-a=1-3=-2$

답 **-2**

0143 나머지정리에 의하여

$f(3)=2,\ g(3)=-2$

따라서 $3f(x)+2g(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지는

$3f(3)+2g(3)=3\times2+2\times(-2)=2$

답 **2**

0144 나머지정리에 의하여 $f(1)=f(-2)$이므로

$1+2+a-7=-8+8-2a-7$

$3a=-3 \qquad \therefore a=-1$

답 **-1**

0145 나머지정리에 의하여

$f(2)+g(2)=-6,\ f(2)-g(2)=4$

두 식을 연립하여 풀면

$f(2)=-1,\ g(2)=-5$ ⋯ 1단계

따라서 $f(x)g(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는

$f(2)g(2)=-1\times(-5)=5$ ⋯ 2단계

답 **5**

채점 요소	비율
1단계 $f(2),\ g(2)$의 값 구하기	60 %
2단계 $f(x)g(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지 구하기	40 %

0146 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2-2$라 하면 나머지정리에 의하여

$f(1)=3,\ f(-1)=-3$

$1+a+b-2=3,\ 1-a+b-2=-3$

$\therefore a+b=4,\ a-b=2$

두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=3,\ b=1$

$\therefore ab=3\times1=3$

답 ⑤

0147 나머지정리에 의하여

$f(-1)=3,\ f(-2)=-1$

다항식 $f(x)$를 x^2+3x+2로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, $R(x)=ax+b$ ($a,\ b$는 상수)라 하면

$$f(x)=(x^2+3x+2)Q(x)+ax+b$$
$$=(x+1)(x+2)Q(x)+ax+b$$

양변에 $x=-1,\ x=-2$를 각각 대입하면

$f(-1)=-a+b,\ f(-2)=-2a+b$

$\therefore -a+b=3,\ -2a+b=-1$

두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=4,\ b=7$

따라서 $R(x)=4x+7$이므로

$R(1)=11$

답 ⑤

0148 나머지정리에 의하여

$f(-2)=6,\ f(2)=2$

다항식 $(x^2+x+1)f(x)$를 x^2-4로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ ($a,\ b$는 상수)라 하면

$$(x^2+x+1)f(x)=(x^2-4)Q(x)+ax+b$$
$$=(x+2)(x-2)Q(x)+ax+b$$

양변에 $x=-2,\ x=2$를 각각 대입하면

$3f(-2)=-2a+b,\ 7f(2)=2a+b$

$\therefore -2a+b=18,\ 2a+b=14$

두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=-1,\ b=16$

따라서 구하는 나머지는 $-x+16$이다.

답 **$-x+16$**

0149 $f(x)$를 x^2-3x+2로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라 하면

$$f(x)=(x^2-3x+2)Q_1(x)-1$$
$$=(x-1)(x-2)Q_1(x)-1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$f(x)$를 x^2-2x-3으로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$라 하면

$$f(x)=(x^2-2x-3)Q_2(x)+4x-3$$
$$=(x+1)(x-3)Q_2(x)+4x-3 \quad \cdots\cdots ㉡$$

$f(x)$를 x^2-4x+3으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ ($a,\ b$는 상수)라 하면

$$f(x)=(x^2-4x+3)Q(x)+ax+b$$
$$=(x-1)(x-3)Q(x)+ax+b \quad \cdots\cdots ㉢$$

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=-1$

㉡의 양변에 $x=3$을 대입하면

$f(3)=9$ ⋯ 1단계

㉢의 양변에 $x=1$, $x=3$을 각각 대입하면

$f(1)=a+b$, $f(3)=3a+b$

$\therefore a+b=-1$, $3a+b=9$

두 식을 연립하여 풀면

$a=5$, $b=-6$

따라서 구하는 나머지는 $5x-6$이다. … 2단계

답 $5x-6$

채점 요소	비율
1단계 $f(1)$, $f(3)$의 값 구하기	50 %
2단계 $f(x)$를 x^2-4x+3으로 나누었을 때의 나머지 구하기	50 %

0150 $f(x)$를 $(x^2+1)(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 ax^2+bx+c (a, b, c는 상수)라 하면

$f(x)=(x^2+1)(x-2)Q(x)+ax^2+bx+c$ … ㉠

$f(x)$를 x^2+1로 나누었을 때의 나머지가 $2x+3$이므로 ㉠에서 ax^2+bx+c를 x^2+1로 나누었을 때의 나머지가 $2x+3$이다.

즉 $ax^2+bx+c=a(x^2+1)+2x+3$이므로 이것을 ㉠에 대입하면

$f(x)=(x^2+1)(x-2)Q(x)+a(x^2+1)+2x+3$

한편 $f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 2이므로

$f(2)=5a+7=2$ $\therefore a=-1$

따라서 구하는 나머지는

$-(x^2+1)+2x+3=-x^2+2x+2$

답 $-x^2+2x+2$

RPM 비법 노트

다항식 $f(x)$를 $A(x)$로 나누었을 때의 나머지 $R(x)$는 $A(x)$가

① 일차식이면 $R(x)=a$

② 이차식이면 $R(x)=ax+b$

③ 삼차식이면 $R(x)=ax^2+bx+c$

로 놓을 수 있다. (단, a, b, c는 상수이다.)

0151 $x^{11}-x^9+x^7-1$을 x^3-x로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, $R(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$x^{11}-x^9+x^7-1$

$=(x^3-x)Q(x)+ax^2+bx+c$

$=x(x+1)(x-1)Q(x)+ax^2+bx+c$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$c=-1$

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면 $-2=a-b+c$

$\therefore a-b=-1$ …… ㉡

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면 $0=a+b+c$

$\therefore a+b=1$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=0$, $b=1$

따라서 $R(x)=x-1$이므로

$R(3)=2$

답 2

0152 $f(x)$를 $x(x+1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라 하면

$f(x)=x(x+1)Q_1(x)$ … ㉠

$f(x)$를 $(x+1)(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$라 하면

$f(x)=(x+1)(x-2)Q_2(x)+2x+2$ … ㉡

$f(x)$를 $x(x+1)(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, $R(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$f(x)=x(x+1)(x-2)Q(x)+ax^2+bx+c$ … ㉢

㉠의 양변에 $x=0$, $x=-1$을 각각 대입하면

$f(0)=0$, $f(-1)=0$

㉡의 양변에 $x=2$를 대입하면

$f(2)=6$

㉢의 양변에 $x=0$, $x=-1$, $x=2$를 각각 대입하면

$f(0)=c$, $f(-1)=a-b+c$, $f(2)=4a+2b+c$

$0=c$, $0=a-b+c$, $6=4a+2b+c$

$\therefore a=1$, $b=1$, $c=0$

따라서 $R(x)=x^2+x$이므로

$R(1)=2$

답 ②

다른 풀이 $f(x)$를 $x(x+1)(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, $R(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$f(x)=x(x+1)(x-2)Q(x)+ax^2+bx+c$ … ㉣

$f(x)$가 $x(x+1)$로 나누어떨어지므로 ㉣에서 ax^2+bx+c는 $x(x+1)$로 나누어떨어진다.

즉 $ax^2+bx+c=ax(x+1)$이므로 이것을 ㉣에 대입하면

$f(x)=x(x+1)(x-2)Q(x)+ax(x+1)$ … ㉤

한편 $f(x)$를 $(x+1)(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q'(x)$라 하면

$f(x)=(x+1)(x-2)Q'(x)+2x+2$

양변에 $x=2$를 대입하면

$f(2)=6$

따라서 ㉤의 양변에 $x=2$를 대입하면

$f(2)=6a=6$ $\therefore a=1$

즉 $R(x)=x(x+1)$이므로

$R(1)=2$

0153 $f(x)$를 x^2-x-2로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$f(x)=(x^2-x-2)Q(x)+2x-4$

$=(x+1)(x-2)Q(x)+2x-4$ …… ㉠

$f(2x-3)$을 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는

$f(2\times1-3)=f(-1)$

이므로 ㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$f(-1)=-6$

답 -6

다른 풀이 $f(x)$를 x^2-x-2로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$f(x)=(x^2-x-2)Q(x)+2x-4$

$=(x+1)(x-2)Q(x)+2x-4$

양변에 x 대신 $2x-3$을 대입하면

$$f(2x-3)=(2x-2)(2x-5)Q(2x-3)+4x-10$$
$$=2(x-1)(2x-5)Q(2x-3)+4(x-1)-6$$
$$=(x-1)\{2(2x-5)Q(2x-3)+4\}-6$$

따라서 $f(2x-3)$을 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는 -6이다.

0154 $f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$$f(x)=(x-2)Q(x)+R \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$f(2x-2)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는

$$f(2\times2-2)=f(2)$$

이므로 ㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$$f(2)=R$$

답 ②

0155 $f(x)$를 $(3x-2)(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$$f(x)=(3x-2)(x-2)Q(x)+2x-5 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$(x-1)f(3x-7)$을 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지는

$$(3-1)\times f(3\times3-7)=2f(2)$$

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면 $\quad f(2)=-1$

따라서 구하는 나머지는

$$2f(2)=2\times(-1)=-2$$

답 -2

0156 나머지정리에 의하여

$$f(1)+g(1)=6 \qquad \cdots\cdots ㉠$$
$$2f(1)+g(1)=8 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

$f(3x-5)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는

$$f(3\times2-5)=f(1)$$

이므로 ㉡$-$㉠을 하면

$$f(1)=2$$

답 ①

0157 $f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 3이므로

$$f(x)=(x-2)Q(x)+3 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$Q(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지가 -1이므로

$$Q(-2)=-1$$

$xf(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지는

$$-2f(-2)$$

㉠의 양변에 $x=-2$를 대입하면

$$f(-2)=-4Q(-2)+3$$
$$=-4\times(-1)+3=7$$

따라서 구하는 나머지는

$$-2f(-2)=-2\times7=-14$$

답 ②

0158 $f(x)$를 x^2+x+1로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 $x+7$이므로

$$f(x)=(x^2+x+1)Q(x)+x+7 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$Q(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫을 $Q'(x)$라 하면

$$Q(x)=(x-1)Q'(x)+2 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$f(x)=(x^2+x+1)\{(x-1)Q'(x)+2\}+x+7$$
$$=(x^3-1)Q'(x)+2x^2+3x+9$$

따라서 $R(x)=2x^2+3x+9$이므로

$$R(-3)=18$$

답 18

0159 $x^{2026}+x^{2025}+x$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는

$$1^{2026}+1^{2025}+1=3$$

이므로

$$x^{2026}+x^{2025}+x=(x-1)Q(x)+3 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$Q(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는 $Q(-1)$이므로 ㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$$(-1)^{2026}+(-1)^{2025}-1=-2Q(-1)+3$$
$$2Q(-1)=4 \qquad \therefore Q(-1)=2$$

답 2

0160 $f(x)=x^3+ax^2+bx-2$라 하면 $f(x)$가 $x-1$, $x-2$로 각각 나누어떨어지므로

$$f(1)=0,\ f(2)=0$$
$$1+a+b-2=0,\ 8+4a+2b-2=0$$
$$\therefore a+b=1,\ 2a+b=-3$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a=-4,\ b=5$$
$$\therefore ab=-4\times5=-20$$

답 -20

0161 $f(x)$가 $x+1$로 나누어떨어지므로

$$f(-1)=0, \qquad 1+k-3+7=0$$
$$\therefore k=-5$$

답 ⑤

0162 $f(x-2)f(x+1)$이 $x-2$로 나누어떨어지므로

$$f(2-2)f(2+1)=0,\ 즉\ f(0)f(3)=0$$
$$\therefore f(0)=0\ 또는\ f(3)=0$$

이때 $f(0)=-3$이므로

$$f(3)=0, \qquad 27-9a+3-3=0$$
$$\therefore a=3$$

답 3

0163 $f(-2)=f(-1)=f(1)=2$에서

$$f(-2)-2=0,\ f(-1)-2=0,\ f(1)-2=0$$

이므로 $f(x)-2$는 $x+2$, $x+1$, $x-1$로 각각 나누어떨어진다. … 1단계

이때 $f(x)$는 x^3의 계수가 1인 삼차식이므로

$$f(x)-2=(x+2)(x+1)(x-1)$$
$$\therefore f(x)=(x+2)(x+1)(x-1)+2 \qquad \cdots\ 2단계$$

따라서 $f(x)$를 $x+3$으로 나누었을 때의 나머지는

$$f(-3)=-1\times(-2)\times(-4)+2=-6 \qquad \cdots\ 3단계$$

답 -6

채점 요소		비율
1단계	$f(x)-2$가 $x+2$, $x+1$, $x-1$로 각각 나누어떨어짐을 알기	30 %
2단계	$f(x)$ 구하기	40 %
3단계	$f(x)$를 $x+3$으로 나누었을 때의 나머지 구하기	30 %

0164 $f(x)$가 x^2+x-2, 즉 $(x-1)(x+2)$로 나누어떨어지므로

$f(1)=0,\ f(-2)=0$

$1+a+b+2=0,\ -8+4a-2b+2=0$

$\therefore\ a+b=-3,\ 2a-b=3$

두 식을 연립하여 풀면

$a=0,\ b=-3$

$\therefore\ a-b=0-(-3)=3$ 답 ⑤

0165 $f(x)=x^3-5x^2+ax+b$라 하면 $f(x)$가 $(x+1)(x-4)$로 나누어떨어지므로

$f(-1)=0,\ f(4)=0$

$-1-5-a+b=0,\ 64-80+4a+b=0$

$\therefore\ a-b=-6,\ 4a+b=16$

두 식을 연립하여 풀면

$a=2,\ b=8$

$\therefore\ f(x)=x^3-5x^2+2x+8$

따라서 $f(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지는

$f(3)=-4$ 답 -4

0166 $f(x)-3$이 x^2-x-6, 즉 $(x+2)(x-3)$으로 나누어떨어지므로

$f(-2)-3=0,\ f(3)-3=0$

$\therefore\ f(-2)=3,\ f(3)=3$

$f(x-2)$를 x^2-5x로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$$\begin{aligned}f(x-2)&=(x^2-5x)Q(x)+ax+b\\&=x(x-5)Q(x)+ax+b\end{aligned}$$

이 등식의 양변에 $x=0$, $x=5$를 각각 대입하면

$f(-2)=b,\ f(3)=5a+b$

$b=3,\ 5a+b=3\qquad \therefore\ a=0,\ b=3$

따라서 구하는 나머지는 3이다. 답 ②

0167

$$\begin{array}{r|rrrr}
2 & 1 & -1 & -3 & 6\\
 & & 2 & 2 & -2\\ \hline
2 & 1 & 1 & -1 & \boxed{4}\\
 & & 2 & 6 & \\ \hline
2 & 1 & 3 & \boxed{5} & \\
 & & 2 & & \\ \hline
 & 1 & \boxed{5} & &
\end{array}$$

앞의 조립제법에서

$$\begin{aligned}x^3-x^2-3x+6&=(x-2)(x^2+x-1)+4\\&=(x-2)\{(x-2)(x+3)+5\}+4\\&=(x-2)[(x-2)\{(x-2)+5\}+5]+4\\&=(x-2)\{(x-2)^2+5(x-2)+5\}+4\\&=(x-2)^3+5(x-2)^2+5(x-2)+4\end{aligned}$$

$\therefore\ a=1,\ b=5,\ c=5,\ d=4$

$\therefore\ abcd=1\times5\times5\times4=100$ 답 100

RPM 비법 노트

x^3-x^2-3x+6

$=a(x-2)^3+b(x-2)^2+c(x-2)+d$

$=(x-2)\{a(x-2)^2+b(x-2)+c\}+d$ ······ ㉠

$=(x-2)[(x-2)\{a(x-2)+b\}+c]+d$ ······ ㉡

㉠에서 x^3-x^2-3x+6을 $x-2$로 나누었을 때의 몫은 $a(x-2)^2+b(x-2)+c$이고 나머지는 d이다.

㉡에서 $a(x-2)^2+b(x-2)+c$를 $x-2$로 나누었을 때의 몫은 $a(x-2)+b$이고 나머지는 c이다.

또 $a(x-2)+b$를 $x-2$로 나누었을 때의 몫은 a이고 나머지는 b이다.

따라서 오른쪽과 같이 조립제법에서 a, b, c, d의 값을 바로 구할 수도 있다.

$$\begin{array}{r|rrrl}
2 & 1 & -1 & -3 & 6\\
 & & 2 & 2 & -2\\ \hline
2 & 1 & 1 & -1 & \boxed{4}\leftarrow d\\
 & & 2 & 6 & \\ \hline
2 & 1 & 3 & \boxed{5}\leftarrow c & \\
 & & 2 & & \\ \hline
 & a\rightarrow 1 & \boxed{5}\leftarrow b & &
\end{array}$$

다른 풀이 $x-2=y$라 하면 $x=y+2$이므로 주어진 등식에서

$(y+2)^3-(y+2)^2-3(y+2)+6=ay^3+by^2+cy+d$

$y^3+5y^2+5y+4=ay^3+by^2+cy+d$

$\therefore\ a=1,\ b=5,\ c=5,\ d=4$

0168

$$\begin{array}{r|rrrr}
-1 & -1 & 1 & 2 & -1\\
 & & 1 & -2 & 0\\ \hline
-1 & -1 & 2 & 0 & \boxed{-1}\\
 & & 1 & -3 & \\ \hline
-1 & -1 & 3 & \boxed{-3} & \\
 & & 1 & & \\ \hline
 & -1 & \boxed{4} & &
\end{array}$$

위의 조립제법에서

$-x^3+x^2+2x-1$

$=(x+1)(-x^2+2x)-1$

$=(x+1)\{(x+1)(-x+3)-3\}-1$

$=(x+1)[(x+1)\{-(x+1)+4\}-3]-1$

$=(x+1)\{-(x+1)^2+4(x+1)-3\}-1$

$=-(x+1)^3+4(x+1)^2-3(x+1)-1$

$\therefore\ a=-1,\ b=4,\ c=-3,\ d=-1$

$\therefore\ ab+cd=-1\times4+(-3)\times(-1)=-1$ 답 -1

0169
$$\begin{array}{r|rrrr}
-\frac{1}{2} & 2 & -3 & -4 & 2 \\
 & & -1 & 2 & 1 \\ \hline
-\frac{1}{2} & 2 & -4 & -2 & \boxed{3} \\
 & & -1 & \frac{5}{2} & \\ \hline
-\frac{1}{2} & 2 & -5 & \boxed{\frac{1}{2}} & \\
 & & -1 & & \\ \hline
 & 2 & \boxed{-6} & &
\end{array}$$

위의 조립제법에서

$2x^3-3x^2-4x+2$

$=\left(x+\frac{1}{2}\right)(2x^2-4x-2)+3$

$=\left(x+\frac{1}{2}\right)\left\{\left(x+\frac{1}{2}\right)(2x-5)+\frac{1}{2}\right\}+3$

$=\left(x+\frac{1}{2}\right)\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)\left\{2\left(x+\frac{1}{2}\right)-6\right\}+\frac{1}{2}\right]+3$

$=\left(x+\frac{1}{2}\right)\left\{2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-6\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\right\}+3$

$=2\left(x+\frac{1}{2}\right)^3-6\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)+3$

$=\frac{1}{4}(2x+1)^3-\frac{3}{2}(2x+1)^2+\frac{1}{4}(2x+1)+3$

$\therefore\ a=\frac{1}{4},\ b=-\frac{3}{2},\ c=\frac{1}{4},\ d=3$

$\therefore\ a+b+c-d=\frac{1}{4}+\left(-\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{4}-3=-4$

답 ②

0170 $x=1000$이라 하면 $998=x-2$

x^{11}을 $x-2$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면

$x^{11}=(x-2)Q(x)+R$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$R=2^{11}=2048$

㉠의 양변에 $x=1000$을 대입하면

$1000^{11}=998Q(1000)+2048$

$=998\{Q(1000)+2\}+52$

따라서 1000^{11}을 998로 나누었을 때의 나머지는 52이다. 답 ③

참고 | 자연수의 나눗셈에서 나머지는 0 또는 나누는 수보다 작은 자연수이어야 한다.

0171 $x=97$이라 하면 $98=x+1$

x^7을 $x+1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면

$x^7=(x+1)Q(x)+R$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$R=-1$

㉠의 양변에 $x=97$을 대입하면

$97^7=98Q(97)-1$

$=98\{Q(97)-1\}+97$

따라서 97^7을 98로 나누었을 때의 나머지는 97이다. 답 **97**

0172 $x=3$이라 하면 $4=x+1$

$x^{99}+x^{100}+x^{101}$을 $x+1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면

$x^{99}+x^{100}+x^{101}=(x+1)Q(x)+R$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$R=-1$

㉠의 양변에 $x=3$을 대입하면

$3^{99}+3^{100}+3^{101}=4Q(3)-1$

$=4\{Q(3)-1\}+3$

따라서 $3^{99}+3^{100}+3^{101}$을 4로 나누었을 때의 나머지는 3이다.

답 **3**

시험에 꼭 나오는 문제

• 본책 029~031쪽

0173 $(x-1)(x+a)=x^2+(a-1)x-a$이므로

$x^2+(a-1)x-a=bx^2-3x+2$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$1=b,\ a-1=-3,\ -a=2$

$\therefore\ a=-2,\ b=1$

$\therefore\ a+b=-2+1=-1$ 답 **−1**

0174 $\frac{ax+by+6}{x+2y+2}=k$ (k는 상수)라 하면

$ax+by+6=k(x+2y+2)$

$\therefore\ (a-k)x+(b-2k)y+6-2k=0$

이 등식이 x, y에 대한 항등식이므로

$a-k=0,\ b-2k=0,\ 6-2k=0$

$\therefore\ k=3,\ a=3,\ b=6$

$\therefore\ b-a=6-3=3$ 답 **3**

0175 주어진 등식의 양변에 $x=-2$, $x=0$, $x=1$을 각각 대입하면

$-18=9c,\ 0=-2a+2b+c,\ 15=3b$

$\therefore\ a=4,\ b=5,\ c=-2$

$\therefore\ a-b-3c=4-5-3\times(-2)=5$ 답 **5**

0176 주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$a-3=-1$ $\quad\therefore\ a=2$

따라서 주어진 등식은

$x^3-5x^2+2x+1=(x-1)Q(x)-1$

이 등식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$-7=Q(2)-1$ $\quad\therefore\ Q(2)=-6$

$\therefore\ Q(a)=Q(2)=-6$ 답 ①

0177 주어진 방정식이 -2를 근으로 가지므로

$4-2k(p-1)-(p^2+3)k+1-q=0$

$\therefore k(-p^2-2p-1)-q+5=0$

이 등식이 k에 대한 항등식이므로

$-p^2-2p-1=0, \ -q+5=0$

$-p^2-2p-1=0$에서 $\quad (p+1)^2=0$

$\therefore p=-1$

$-q+5=0$에서 $\quad q=5$

$\therefore pq=-1\times5=-5$

답 -5

0178 주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$2^{10}=a_{20}+a_{19}+a_{18}+\cdots+a_1+a_0 \quad \cdots\cdots ㉠$

주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$2^{10}=a_{20}-a_{19}+a_{18}-\cdots-a_1+a_0 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠+㉡을 하면

$2\times2^{10}=2(a_{20}+a_{18}+a_{16}+\cdots+a_2+a_0)$

$\therefore a_{20}+a_{18}+a_{16}+\cdots+a_2+a_0=2^{10}$

한편 주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$a_0=1$

$\therefore a_{20}+a_{18}+a_{16}+\cdots+a_2$
$=(a_{20}+a_{18}+a_{16}+\cdots+a_2+a_0)-a_0$
$=2^{10}-1=1023$

답 ①

0179 $3x^3+ax^2+x+1$을 x^2+2x-1로 나누었을 때의 몫을 $3x+c$ (c는 상수)라 하면

$3x^3+ax^2+x+1=(x^2+2x-1)(3x+c)+10x+b$
$=3x^3+(6+c)x^2+(2c+7)x+b-c$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a=6+c, \ 1=2c+7, \ 1=b-c$

$\therefore a=3, \ b=-2, \ c=-3$

$\therefore ab=3\times(-2)=-6$

답 -6

0180 나머지정리에 의하여

$-8\{f(-3)-1\}=24, \quad f(-3)-1=-3$

$\therefore f(-3)=-2$

따라서 $f(x)$를 $x+3$으로 나누었을 때의 나머지는

$f(-3)=-2$

답 -2

0181 $f(x)=ax^5+bx^3+cx-4$라 하면 나머지정리에 의하여

$f(1)=3, \quad a+b+c-4=3$

$\therefore a+b+c=7$

따라서 $f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는

$f(-1)=-a-b-c-4$
$=-(a+b+c)-4$
$=-7-4=-11$

답 -11

0182 나머지정리에 의하여

$f(5)=1, \ f(-5)=-9$

$f(x)$를 x^2-25로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)=(x^2-25)Q(x)+ax+b$
$=(x-5)(x+5)Q(x)+ax+b$

양변에 $x=5$, $x=-5$를 각각 대입하면

$f(5)=5a+b, \ f(-5)=-5a+b$

$\therefore 5a+b=1, \ -5a+b=-9$

두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=1, \ b=-4$

따라서 $R(x)=x-4$이므로

$R(7)=3$

답 3

0183 $f(x)$를 x^2-5x+6으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)=(x^2-5x+6)Q(x)+ax+b$
$=(x-2)(x-3)Q(x)+ax+b \quad \cdots\cdots ㉠$

이때 조건 ㈏의 양변에 $x=0$을 대입하면

$8f(2)=f(0)+0, \quad 8f(2)=8$ ($\because$ 조건 ㈎)

$\therefore f(2)=1$

조건 ㈏의 양변에 $x=1$을 대입하면

$8f(3)=f(2)+7, \quad 8f(3)=8$

$\therefore f(3)=1$

㉠의 양변에 $x=2$, $x=3$을 각각 대입하면

$f(2)=2a+b, \ f(3)=3a+b$

$2a+b=1, \ 3a+b=1$

두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=0, \ b=1$

따라서 $f(x)$를 x^2-5x+6으로 나누었을 때의 나머지는 1이다.

답 1

0184 $f(x+3)$을 $(x+2)(x-1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$f(x+3)=(x+2)(x-1)Q(x)+3x+8 \quad \cdots\cdots ㉠$

$f(x^2)$을 $x+2$로 나눈 나머지는

$f((-2)^2)=f(4)$

이므로 ㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(4)=11$

답 ①

0185 $f(x)=x^3-ax^2+2x+7$이라 하면 나머지정리에 의하여

$f(-1)=6, \quad -1-a-2+7=6$

$\therefore a=-2$

따라서 x^3+2x^2+2x+7을 $x+1$로 나누었을 때의 몫은 $Q(x)$, 나머지는 6이므로

$x^3+2x^2+2x+7=(x+1)Q(x)+6 \quad \cdots\cdots ㉠$

$Q(x)$를 $x-a$, 즉 $x+2$로 나누었을 때의 나머지는 $Q(-2)$이므로 ㉠의 양변에 $x=-2$를 대입하면

$3=-Q(-2)+6 \quad \therefore Q(-2)=3$

답 3

0186 $f(x)+1$이 $x+3$으로 나누어떨어지므로

$f(-3)+1=0 \qquad \therefore f(-3)=-1$

$f(x)-1$이 $x-1$로 나누어떨어지므로

$f(1)-1=0 \qquad \therefore f(1)=1$

이때 $f(x)$가 x^2의 계수가 1인 이차식이므로

$f(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)

라 하면 $f(-3)=-1$, $f(1)=1$에서

$9-3a+b=-1$, $1+a+b=1$

$\therefore 3a-b=10$, $a+b=0$

두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=\frac{5}{2}$, $b=-\frac{5}{2}$

따라서 $f(x)=x^2+\frac{5}{2}x-\frac{5}{2}$이므로

$f(3)=14$ 답 ⑤

0187 $f(x)-x$가 x^2-3x+2, 즉 $(x-1)(x-2)$로 나누어떨어지므로

$f(1)-1=0$, $f(2)-2=0$

$\therefore f(1)=1$, $f(2)=2$

$f(x+1)$을 x^2-x로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$$f(x+1)=(x^2-x)Q(x)+ax+b$$
$$=x(x-1)Q(x)+ax+b$$

이 등식의 양변에 $x=0$, $x=1$을 각각 대입하면

$f(1)=b$, $f(2)=a+b$

$b=1$, $a+b=2 \qquad \therefore a=1$, $b=1$

따라서 구하는 나머지는 $x+1$이다. 답 $x+1$

0188 $2^{751}=(2^3)^{250}\times 2=2\times 8^{250}$

$x=8$이라 하면 $\quad 9=x+1$

$2x^{250}$을 $x+1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면

$2x^{250}=(x+1)Q(x)+R$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$R=2$

㉠의 양변에 $x=8$을 대입하면

$2\times 8^{250}=9Q(8)+2$

따라서 2^{751}을 9로 나누었을 때의 나머지는 2이다. 답 2

0189 $a+b=1$에서 $\quad b=1-a$

이것을 $a^2x+by+z=a$에 대입하면

$a^2x+(1-a)y+z=a$

$\therefore xa^2-(y+1)a+y+z=0$ … 1단계

이 등식이 a에 대한 항등식이므로

$x=0$, $y+1=0$, $y+z=0$

$\therefore x=0$, $y=-1$, $z=1$ … 2단계

$\therefore x^2+y^2+z^2=0^2+(-1)^2+1^2=2$ … 3단계

답 2

채점 요소		비율
1단계	주어진 등식을 a에 대하여 정리하기	40 %
2단계	x, y, z의 값 구하기	40 %
3단계	$x^2+y^2+z^2$의 값 구하기	20 %

0190 $(x+1)f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 3이고, $(x-2)f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지가 6이므로

$3f(2)=3$, $-3f(-1)=6$

$\therefore f(2)=1$, $f(-1)=-2$ … 1단계

$f(2)=1$에서 $\quad 4+2a+b=1$

$\therefore 2a+b=-3$ …… ㉠

$f(-1)=-2$에서 $\quad 1-a+b=-2$

$\therefore a-b=3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=0$, $b=-3$ … 2단계

따라서 $f(x)=x^2-3$이므로 $\quad f(3)=6$ … 3단계

답 6

채점 요소		비율
1단계	$f(2)$, $f(-1)$의 값 구하기	50 %
2단계	a, b의 값 구하기	30 %
3단계	$f(3)$의 값 구하기	20 %

0191 $f(x)$를 $(x-1)(x-2)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, $R(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$f(x)=(x-1)(x-2)^2Q(x)+ax^2+bx+c$ … ㉠

… 1단계

$f(x)$를 $(x-2)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $6x+1$이므로 ㉠에서 $R(x)$를 $(x-2)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $6x+1$이다.

즉 $R(x)=a(x-2)^2+6x+1$이므로 이것을 ㉠에 대입하면

$f(x)=(x-1)(x-2)^2Q(x)+a(x-2)^2+6x+1$

한편 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 6이므로

$f(1)=a+7=6 \qquad \therefore a=-1$

$\therefore R(x)=-(x-2)^2+6x+1$ … 2단계

$\therefore R(-2)=-27$ … 3단계

답 -27

채점 요소		비율
1단계	다항식의 나눗셈에 대한 항등식 세우기	30 %
2단계	$R(x)$ 구하기	50 %
3단계	$R(-2)$의 값 구하기	20 %

0192 $f(x)$가 $(x+1)(x+2)$로 나누어떨어지므로

$f(-1)=0$, $f(-2)=0$

$-1+a-b+2=0$, $-8+4a-2b+2=0$

$\therefore a-b=-1$, $2a-b=3$

두 식을 연립하여 풀면

$a=4$, $b=5$ … 1단계

$\therefore f(x)=x^3+4x^2+5x+2$

따라서 $f(1-x)$를 $x-5$로 나누었을 때의 나머지는

$f(1-5)=f(-4)=-18$ … 2단계

답 -18

채점 요소	비율
1단계 a, b의 값 구하기	70 %
2단계 $f(1-x)$를 $x-5$로 나누었을 때의 나머지 구하기	30 %

0193 전략 다항식의 나눗셈에 대한 항등식을 세우고 양변에 적당한 값을 대입한다.

$x^n(x^2+ax+b)$를 $(x-2)^n$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$x^n(x^2+ax+b)$
$=(x-2)^nQ(x)+2^n(x-2)$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$2^n(4+2a+b)=0$

이때 $2^n\neq0$이므로 $4+2a+b=0$

$\therefore b=-2a-4$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$x^n(x^2+ax-2a-4)=(x-2)^nQ(x)+2^n(x-2)$

$\therefore x^n(x-2)(x+a+2)=(x-2)^nQ(x)+2^n(x-2)$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$x^n(x+a+2)=(x-2)^{n-1}Q(x)+2^n$ …… ㉢

㉢의 양변에 $x=2$를 대입하면

$2^n(a+4)=2^n$, $a+4=1$

$\therefore a=-3$

이것을 ㉡에 대입하면 $b=2$

$\therefore ab=-3\times2=-6$

답 -6

0194 전략 다항식의 나눗셈에 대한 항등식을 세우고 양변에 적당한 값을 대입하여 참, 거짓을 판별한다.

$f(x)$를 $(x-a)(x-b)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$f(x)=(x-a)(x-b)Q(x)+R(x)$ …… ㉠

ㄱ. ㉠의 양변에 $x=a$를 대입하면 $f(a)=R(a)$

$\therefore f(a)-R(a)=0$ (참)

ㄴ. $R(x)=px+q$ (p, q는 상수)라 하면 ㉠에서

$f(x)=(x-a)(x-b)Q(x)+px+q$ …… ㉡

$\therefore f(a)-R(b)=(pa+q)-(pb+q)=p(a-b)$

$f(b)-R(a)=(pb+q)-(pa+q)=p(b-a)$

이때 $a\neq b$이므로 $p\neq0$이면

$f(a)-R(b)\neq f(b)-R(a)$ (거짓)

ㄷ. ㉡에서

$af(b)-bf(a)=a(pb+q)-b(pa+q)$
$=(a-b)q$

이때 $R(0)=q$이므로

$af(b)-bf(a)=(a-b)R(0)$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

0195 전략 다항식을 일차식으로 나누었을 때의 나머지가 상수임과 인수정리를 이용하여 $f(x)$, $g(x)$를 구한다.

조건 ㈎에서 $f(x)-g(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 k(k는 상수)라 하면

$f(x)-g(x)=k(x+2)+k=k(x+3)$ …… ㉠

조건 ㈏에서 $f(x)g(x)$가 x^2-9, 즉 $(x+3)(x-3)$으로 나누어떨어지므로

$f(-3)g(-3)=0$ …… ㉡

$f(3)g(3)=0$ …… ㉢

이때 ㉠에 $x=-3$을 대입하면 $f(-3)-g(-3)=0$

$\therefore f(-3)=g(-3)$

따라서 ㉡에서 $f(-3)=0$, $g(-3)=0$

$f(x)=(x+3)(x+p)$, $g(x)=(x+3)(x+q)$ (p, q는 상수)라 하면 $g(1)=8$이므로

$4(1+q)=8$, $1+q=2$

$\therefore q=1$

$\therefore g(x)=(x+3)(x+1)$

즉 $g(3)=24$이므로 ㉢에서

$f(3)=0$, $6(3+p)=0$

$\therefore p=-3$

따라서 $f(x)=(x+3)(x-3)$이므로

$f(-2)-g(-2)=-5-(-1)=-4$

답 -4

03 인수분해

교과서 문제 정복하기

본책 033쪽

0196 답 $2a(a+2b^2)$

0197 $xy-x-y+1=x(y-1)-(y-1)=(x-1)(y-1)$

답 $(x-1)(y-1)$

0198 $ac-bd-ad+bc=ac-ad+bc-bd$
$=a(c-d)+b(c-d)$
$=(a+b)(c-d)$

답 $(a+b)(c-d)$

0199 $4x^2+20xy+25y^2=(2x)^2+2\times2x\times5y+(5y)^2$
$=(2x+5y)^2$

답 $(2x+5y)^2$

0200 $64x^2-9y^2=(8x)^2-(3y)^2=(8x+3y)(8x-3y)$

답 $(8x+3y)(8x-3y)$

0201 $27a^2-48b^2=3(9a^2-16b^2)=3\{(3a)^2-(4b)^2\}$
$=3(3a+4b)(3a-4b)$

답 $3(3a+4b)(3a-4b)$

0202 답 $(x+2)(x+6)$

0203 답 $(x+2)(3x-4)$

0204 답 $(2x+3y)(3x-2y)$

0205 $a^2+b^2+c^2-2ab-2bc+2ca$
$=a^2+(-b)^2+c^2+2\times a\times(-b)+2\times(-b)\times c+2\times c\times a$
$=(a-b+c)^2$

답 $(a-b+c)^2$

0206 $x^2+y^2+2xy+2x+2y+1$
$=x^2+y^2+1^2+2\times x\times y+2\times y\times1+2\times1\times x$
$=(x+y+1)^2$ 답 $(x+y+1)^2$

0207 $x^3-6x^2+12x-8=x^3-3\times x^2\times2+3\times x\times2^2-2^3$
$=(x-2)^3$

답 $(x-2)^3$

0208 $x^3+9x^2y+27xy^2+27y^3$
$=x^3+3\times x^2\times3y+3\times x\times(3y)^2+(3y)^3$
$=(x+3y)^3$ 답 $(x+3y)^3$

0209 $x^3-8=x^3-2^3=(x-2)(x^2+2x+4)$

답 $(x-2)(x^2+2x+4)$

0210 $8a^3+27b^3=(2a)^3+(3b)^3$
$=(2a+3b)(4a^2-6ab+9b^2)$

답 $(2a+3b)(4a^2-6ab+9b^2)$

0211 $a^4+a^2+1=a^4+a^2\times1^2+1^4$
$=(a^2+a+1)(a^2-a+1)$

답 $(a^2+a+1)(a^2-a+1)$

0212 $x^4+4x^2y^2+16y^4=x^4+x^2\times(2y)^2+(2y)^4$
$=(x^2+2xy+4y^2)(x^2-2xy+4y^2)$

답 $(x^2+2xy+4y^2)(x^2-2xy+4y^2)$

0213 $a^3-b^3+c^3+3abc$
$=a^3+(-b)^3+c^3-3\times a\times(-b)\times c$
$=(a-b+c)(a^2+b^2+c^2+ab+bc-ca)$

답 $(a-b+c)(a^2+b^2+c^2+ab+bc-ca)$

0214 $x^3+y^3-3xy+1$
$=x^3+y^3+1^3-3\times x\times y\times1$
$=(x+y+1)(x^2+y^2+1-xy-x-y)$

답 $(x+y+1)(x^2+y^2+1-xy-x-y)$

0215 $x+1=t$로 놓으면
$(x+1)^2-3(x+1)+2=t^2-3t+2=(t-1)(t-2)$
$=(x+1-1)(x+1-2)$
$=x(x-1)$

답 $x(x-1)$

0216 $x^2+5x=t$로 놓으면
$(x^2+5x+4)(x^2+5x+2)-24$
$=(t+4)(t+2)-24=t^2+6t-16$
$=(t+8)(t-2)$
$=(x^2+5x+8)(x^2+5x-2)$

답 $(x^2+5x+8)(x^2+5x-2)$

0217 $x^2=t$로 놓으면
$x^4+5x^2-6=t^2+5t-6=(t-1)(t+6)$
$=(x^2-1)(x^2+6)$
$=(x+1)(x-1)(x^2+6)$

답 $(x+1)(x-1)(x^2+6)$

0218 $x^4+9x^2+25=(x^4+10x^2+25)-x^2$
$=(x^2+5)^2-x^2$
$=(x^2+x+5)(x^2-x+5)$

답 $(x^2+x+5)(x^2-x+5)$

0219 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned}&x^2+y^2-2xy-3x+3y+2\\&=x^2-(2y+3)x+y^2+3y+2\\&=x^2-(2y+3)x+(y+1)(y+2)\\&=\{x-(y+1)\}\{x-(y+2)\}\\&=(x-y-1)(x-y-2)\end{aligned}$$

답 $(x-y-1)(x-y-2)$

다른 풀이 주어진 식을 y에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned}&x^2+y^2-2xy-3x+3y+2\\&=y^2-(2x-3)y+x^2-3x+2\\&=y^2-(2x-3)y+(x-1)(x-2)\\&=\{y-(x-1)\}\{y-(x-2)\}\\&=(y-x+1)(y-x+2)=(x-y-1)(x-y-2)\end{aligned}$$

0220 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned}y^2+xy-a^2-ax&=(y-a)x+y^2-a^2\\&=(y-a)x+(y+a)(y-a)\\&=(y-a)(x+y+a)\end{aligned}$$

답 $(y-a)(x+y+a)$

0221 $f(x)=x^3-2x^2-5x+6$이라 하면

$f(1)=1-2-5+6=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr}1 & 1 & -2 & -5 & 6\\ & & 1 & -1 & -6\\\hline & 1 & -1 & -6 & \boxed{0}\end{array}$$

$f(x)=(x-1)(x^2-x-6)=(x-1)(x+2)(x-3)$

답 $(x-1)(x+2)(x-3)$

0222 $f(x)=x^4-3x^3+3x^2+x-6$이라 하면

$f(-1)=1+3+3-1-6=0$,

$f(2)=16-24+12+2-6=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr}-1 & 1 & -3 & 3 & 1 & -6\\ & & -1 & 4 & -7 & 6\\\hline 2 & 1 & -4 & 7 & -6 & \boxed{0}\\ & & 2 & -4 & 6 & \\\hline & 1 & -2 & 3 & \boxed{0} & \end{array}$$

$f(x)=(x+1)(x-2)(x^2-2x+3)$

답 $(x+1)(x-2)(x^2-2x+3)$

유형 익히기

• 본책 034~039쪽

0223 ① $2x^3-5x^2+3x=x(2x^2-5x+3)$

$\qquad=x(x-1)(2x-3)$

② $a^3+6a^2+12a+8=a^3+3\times a^2\times 2+3\times a\times 2^2+2^3$

$\qquad=(a+2)^3$

③ $64x^3-1=(4x)^3-1^3$

$\qquad=(4x-1)(16x^2+4x+1)$

④ $x^2-(y-z)^2=\{x+(y-z)\}\{x-(y-z)\}$

$\qquad=(x+y-z)(x-y+z)$

⑤ $a^2+b^2+2ab-4a-4b+4$

$=a^2+b^2+(-2)^2+2\times a\times b+2\times b\times(-2)+2\times(-2)\times a$

$=(a+b-2)^2$

답 ③

0224 $16x^4+36x^2y^2+81y^4$

$=(2x)^4+(2x)^2\times(3y)^2+(3y)^4$

$=(4x^2+6xy+9y^2)(4x^2-6xy+9y^2)$

$\therefore ab=6\times(-6)=-36$

답 -36

0225 $x^2-y^2-x+y=x^2-y^2-(x-y)$

$\qquad=(x+y)(x-y)-(x-y)$

$\qquad=(x-y)(x+y-1)$

따라서 인수인 것은 ③이다. 답 ③

0226 $x^6-y^6=(x^3)^2-(y^3)^2$

$\qquad=(x^3+y^3)(x^3-y^3)$

$\qquad=(x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2)$

따라서 인수가 아닌 것은 ③이다. 답 ③

다른 풀이 $x^6-y^6=(x^2)^3-(y^2)^3=(x^2-y^2)(x^4+x^2y^2+y^4)$

$\qquad=(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$

0227 $(a-2b)^3-125b^3$

$=(a-2b)^3-(5b)^3$

$=(a-2b-5b)\{(a-2b)^2+(a-2b)\times 5b+(5b)^2\}$

$=(a-7b)(a^2-4ab+4b^2+5ab-10b^2+25b^2)$

$=(a-7b)(a^2+ab+19b^2)$

답 ②

0228 ㄱ. $x^4-64=(x^2)^2-8^2$

$\qquad=(x^2+8)(x^2-8)$

ㄴ. $a^2-b^2-2bc-c^2=a^2-(b^2+2bc+c^2)=a^2-(b+c)^2$

$\qquad=\{a+(b+c)\}\{a-(b+c)\}$

$\qquad=(a+b+c)(a-b-c)$

ㄷ. $x^3-x^2z-xy^2+y^2z=x^2(x-z)-y^2(x-z)$

$\qquad=(x^2-y^2)(x-z)$

$\qquad=(x+y)(x-y)(x-z)$

ㄹ. $a^3-b^3+8c^3+6abc$

$=a^3+(-b)^3+(2c)^3-3\times a\times(-b)\times 2c$

$=(a-b+2c)(a^2+b^2+4c^2+ab+2bc-2ca)$

이상에서 옳은 것은 ㄷ뿐이다. 답 ①

0229 $(x-1)(x-3)(x+2)(x+4)+24$

$=\{(x-1)(x+2)\}\{(x-3)(x+4)\}+24$

$=(x^2+x-2)(x^2+x-12)+24$

$x^2+x=t$로 놓으면

(주어진 식)$=(t-2)(t-12)+24$

$=t^2-14t+48$

$=(t-6)(t-8)$

$=(x^2+x-6)(x^2+x-8)$

$=(x+3)(x-2)(x^2+x-8)$

$\therefore a+b+c=3+(-2)+(-8)=-7$ 답 ③

0230 $x^2-x=t$로 놓으면

$(x^2-x+2)(x^2-x-5)+6=(t+2)(t-5)+6$

$=t^2-3t-4$

$=(t+1)(t-4)$

$=(x^2-x+1)(x^2-x-4)$

따라서 $a=-1$, $b=-4$이므로

$ab=-1\times(-4)=4$ 답 4

0231 $(x^2-2x)^2+2x^2-4x-15$

$=(x^2-2x)^2+2(x^2-2x)-15$

$x^2-2x=t$로 놓으면

(주어진 식)$=t^2+2t-15$

$=(t+5)(t-3)$

$=(x^2-2x+5)(x^2-2x-3)$

$=(x^2-2x+5)(x+1)(x-3)$

따라서 인수가 아닌 것은 ④이다. 답 ④

0232 $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+k$

$=\{(x-1)(x-4)\}\{(x-2)(x-3)\}+k$

$=(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)+k$ … 1단계

$x^2-5x=t$로 놓으면

(주어진 식)$=(t+4)(t+6)+k$

$=t^2+10t+24+k$ …… ㉠ … 2단계

주어진 식이 x에 대한 이차식의 완전제곱식으로 인수분해되려면 ㉠이 t에 대한 완전제곱식이 되어야 한다.

즉 $t^2+10t+24+k=(t+5)^2$이어야 하므로

$24+k=5^2$

$\therefore k=1$ … 3단계

답 1

채점 요소	비율
1단계 주어진 식을 공통부분이 생기도록 짝을 지어 전개하기	30 %
2단계 공통부분을 한 문자로 치환하여 전개하기	30 %
3단계 k의 값 구하기	40 %

참고 | $k=1$일 때,
(주어진 식)$=(t+5)^2=(x^2-5x+5)^2$

0233 $x^2=X$로 놓으면

$x^4-5x^2+4=X^2-5X+4=(X-1)(X-4)$

$=(x^2-1)(x^2-4)$

$=(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$

이때 $a<b<c<d$이므로

$a=-2$, $b=-1$, $c=1$, $d=2$

$\therefore ad-bc=-2\times2-(-1)\times1=-3$

답 -3

다른 풀이 $x^4-5x^2+4=(x^4-4x^2+4)-x^2$

$=(x^2-2)^2-x^2$

$=(x^2+x-2)(x^2-x-2)$

$=(x+2)(x-1)(x+1)(x-2)$

0234 $x^2=X$로 놓으면

$x^4-50x^2+625=X^2-50X+625=(X-25)^2$

$=(x^2-25)^2=\{(x+5)(x-5)\}^2$

$=(x+5)^2(x-5)^2$

이때 $a>b$이므로 $a=5$, $b=-5$

$\therefore a-b=5-(-5)=10$ 답 10

0235 $a^4+4=(a^4+4a^2+4)-4a^2$

$=(a^2+2)^2-(2a)^2$

$=(a^2+2a+2)(a^2-2a+2)$

따라서 인수인 것은 ⑤이다. 답 ⑤

0236 $x^4-6x^2y^2+y^4=(x^4-2x^2y^2+y^4)-4x^2y^2$

$=(x^2-y^2)^2-(2xy)^2$

$=(x^2+2xy-y^2)(x^2-2xy-y^2)$

따라서 $a=-2$, $b=1$ 또는 $a=2$, $b=1$이므로

$a^2+b^2=5$ 답 5

0237 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^2+xy-2y^2+x+5y-2$

$=x^2+(y+1)x-(2y^2-5y+2)$

$=x^2+(y+1)x-(2y-1)(y-2)$

$=\{x+(2y-1)\}\{x-(y-2)\}$

$=(x+2y-1)(x-y+2)$

따라서 인수인 것은 ④이다. 답 ④

참고 | y에 대하여 내림차순으로 정리한 후 인수분해해도 그 결과는 같다.

0238 주어진 식을 y에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^3-(2+y)x^2+(2y-3)x+3y$

$=(-x^2+2x+3)y+x^3-2x^2-3x$

$=-(x^2-2x-3)y+x(x^2-2x-3)$

$=(x^2-2x-3)(x-y)$

$=(x+1)(x-3)(x-y)$

답 $(x+1)(x-3)(x-y)$

0239 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$2x^2+2y^2+5xy+3x+3y+1$

$=2x^2+(5y+3)x+(2y^2+3y+1)$

$=2x^2+(5y+3)x+(2y+1)(y+1)$

$=(2x+y+1)(x+2y+1)$

따라서 $a=2,\ b=1,\ c=2$이므로

$a+b-c=2+1-2=1$ 답 ①

0240 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^2-xy-6y^2+ax+8y-2$

$=x^2-(y-a)x-(6y^2-8y+2)$

$=x^2-(y-a)x-2(3y-1)(y-1)$

주어진 식이 $x,\ y$에 대한 두 일차식의 곱으로 인수분해되려면

$2(y-1)-(3y-1)=-(y-a)$

$-y-1=-y+a \qquad \therefore a=-1$ 답 **−1**

0241 주어진 식을 a에 대하여 내림차순으로 정리하면

$a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2-4abc$

$=a(b^2+2bc+c^2)+b(c^2+2ca+a^2)+c(a^2+2ab+b^2)$
$\quad -4abc$

$=ab^2+2abc+ac^2+bc^2+2abc+a^2b+a^2c+2abc+b^2c$
$\quad -4abc$

$=(b+c)a^2+(b^2+2bc+c^2)a+b^2c+bc^2$

$=(b+c)a^2+(b+c)^2a+bc(b+c)$

$=(b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\}$

$=(b+c)(a+b)(a+c)$

$=(a+b)(b+c)(c+a)$ 답 $\boldsymbol{(a+b)(b+c)(c+a)}$

0242 $[a,\ b,\ c]+[b,\ c,\ a]+[c,\ a,\ b]$

$=a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

$=(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+b^2c-bc^2$

$=(b-c)a^2-(b+c)(b-c)a+bc(b-c)$

$=(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}$

$=(b-c)(a-b)(a-c)$

$=-(a-b)(b-c)(c-a)$

따라서 인수인 것은 ①이다. 답 ①

0243 주어진 식의 분자를 a에 대하여 내림차순으로 정리하면

$ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$

$=a^2b-ab^2+b^2c-bc^2+c^2a-ca^2$

$=(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+b^2c-bc^2$

$=(b-c)a^2-(b+c)(b-c)a+bc(b-c)$

$=(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}$

$=(b-c)(a-b)(a-c)=-(a-b)(b-c)(c-a)$

$\therefore$ (주어진 식) $=\dfrac{-(a-b)(b-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=-1$

답 ②

0244 $f(x)=2x^3-x^2-5x-2$라 하면

$f(-1)=-2-1+5-2=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 2 & -1 & -5 & -2 \\ & & -2 & 3 & 2 \\ \hline & 2 & -3 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x+1)(2x^2-3x-2)$

$\quad=(x+1)(2x+1)(x-2)$

따라서 $a=1,\ b=1,\ c=-2$ 또는 $a=-2,\ b=1,\ c=1$이므로

$a^2+b^2+c^2=1^2+1^2+(-2)^2=6$ 답 **6**

0245 $f(x)=x^4-3x^3-3x^2+11x-6$이라 하면

$f(1)=1-3-3+11-6=0,$

$f(3)=81-81-27+33-6=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & -3 & -3 & 11 & -6 \\ & & 1 & -2 & -5 & 6 \\ \hline 3 & 1 & -2 & -5 & 6 & \boxed{0} \\ & & 3 & 3 & -6 & \\ \hline & 1 & 1 & -2 & \boxed{0} & \end{array}$$

$f(x)=(x-1)(x-3)(x^2+x-2)$

$\quad=(x-1)^2(x-3)(x+2)$

따라서 인수가 아닌 것은 ⑤이다. 답 ⑤

0246 $f(x)=x^3+10x^2+33x+36$이라 하면

$f(-3)=-27+90-99+36=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -3 & 1 & 10 & 33 & 36 \\ & & -3 & -21 & -36 \\ \hline & 1 & 7 & 12 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x+3)(x^2+7x+12)$

$\quad=(x+3)^2(x+4)$

이때 원기둥의 부피가 $(x+a)^2(x+b)\pi$이므로

$a=3,\ b=4$

$\therefore a+b=3+4=7$ 답 ⑤

0247 $f(x)$가 $x+1$로 나누어떨어지므로

$f(-1)=0, \qquad -1+2+4+a=0$

$\therefore a=-5$

따라서 $f(x)=x^3+2x^2-4x-5$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 2 & -4 & -5 \\ & & -1 & -1 & 5 \\ \hline & 1 & 1 & -5 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x+1)(x^2+x-5)$

따라서 인수인 것은 ③이다. 답 ③

0248 $x^4+3x^3-4x=x(x^3+3x^2-4)$
$h(x)=x^3+3x^2-4$라 하면

$h(1)=1+3-4=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $h(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 3 & 0 & -4 \\ & & 1 & 4 & 4 \\ \hline & 1 & 4 & 4 & \boxed{0} \end{array}$$

$h(x)=(x-1)(x^2+4x+4)$
$\quad=(x-1)(x+2)^2$

$\therefore\ x^4+3x^3-4x=x(x-1)(x+2)^2$ … 1단계

이때 $f(x)$, $g(x)$는 각각 x^2의 계수가 1인 이차식이고, $f(-2)>0$에서 $f(x)$는 $x+2$를 인수로 갖지 않으므로

$f(x)=x(x-1)$, $g(x)=(x+2)^2$ … 2단계

$\therefore\ f(3)+g(2)=6+16=22$ … 3단계

답 22

채점 요소		비율
1단계	주어진 식을 인수분해하기	40 %
2단계	$f(x)$, $g(x)$ 구하기	40 %
3단계	$f(3)+g(2)$의 값 구하기	20 %

0249
$$\begin{array}{c|cccc} -1 & 1 & a & b & 2 \\ & & -1 & -a+1 & a-b-1 \\ \hline -1 & 1 & a-1 & -a+b+1 & \boxed{a-b+1} \\ & & -1 & -a+2 & \\ \hline & 1 & a-2 & \boxed{-2a+b+3} & \end{array}$$

이때 x^3+ax^2+bx+2가 $(x+1)^2$을 인수로 가지므로

$a-b+1=0$, $-2a+b+3=0$

$\therefore\ a-b=-1$, $2a-b=3$

두 식을 연립하여 풀면

$a=4$, $b=5$

$\therefore\ ab=4\times5=20$

답 ⑤

0250 $x^{20}-1$을 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$x^{20}-1=(x-1)^2Q(x)+ax+b$

이 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=a+b \qquad \therefore\ b=-a$

$\therefore\ x^{20}-1=(x-1)^2Q(x)+ax-a$
$\qquad=(x-1)^2Q(x)+a(x-1)$
$\qquad=(x-1)\{(x-1)Q(x)+a\}$ …… ㉠

한편 $f(x)=x^{20}-1$이라 하면

$f(1)=1-1=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ & & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-1)(x^{19}+x^{18}+\cdots+x+1)$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$x^{19}+x^{18}+\cdots+x+1=(x-1)Q(x)+a$

이 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$a=20$

따라서 $b=-20$이므로 구하는 나머지는

$20x-20$

답 ③

0251 $16-9x^2+6xy-y^2=16-(9x^2-6xy+y^2)$
$\qquad=4^2-(3x-y)^2$
$\qquad=\{4+(3x-y)\}\{4-(3x-y)\}$
$\qquad=(4+3x-y)(4-3x+y)$

이때 $3x+y+4=0$에서

$4+3x=-y$, $y+4=-3x$

$\therefore$ (주어진 식)$=(-y-y)(-3x-3x)$
$\qquad=(-2y)(-6x)=12xy$

답 ④

다른 풀이 $3x+y+4=0$에서 $\quad y=-3x-4$

$\therefore\ 16-9x^2+6xy-y^2$
$\quad=16-9x^2+6x(-3x-4)-(-3x-4)^2$
$\quad=-36x^2-48x=12x(-3x-4)$
$\quad=12xy$

0252 $xy+z=1$에서 $\quad z=1-xy$

$\therefore\ 2xy-x^2y-xy^2-xyz$
$\quad=2xy-x^2y-xy^2-xy(1-xy)$
$\quad=x^2y^2-x^2y-xy^2+xy$
$\quad=xy(xy-x-y+1)$
$\quad=xy\{x(y-1)-(y-1)\}$
$\quad=xy(x-1)(y-1)$

이때 $xy+z=1$에서 $xy=1-z$이므로

(주어진 식)$=(1-z)(x-1)(y-1)$
$\qquad=(1-x)(1-y)(1-z)$

답 ③

다른 풀이 $xy+z=1$에서 $\quad xy=1-z$

$\therefore\ 2xy-x^2y-xy^2-xyz=xy(2-x-y-z)$
$\qquad=(1-z)(2-x-y-z)$

이때 $xy+z=1$에서 $z=1-xy$이므로

(주어진 식)$=(1-z)\{2-x-y-(1-xy)\}$
$\qquad=(1-z)(xy-x-y+1)$
$\qquad=(1-z)\{x(y-1)-(y-1)\}$
$\qquad=(1-z)(x-1)(y-1)$
$\qquad=(1-x)(1-y)(1-z)$

0253 $xyz+x^2y+xy-x-z-1$
$=(x+z+1)xy-(x+z+1)$
$=(x+z+1)(xy-1)$

이때 $x+y+z=-1$에서

$x+z+1=-y$

$\therefore$ (주어진 식)$=-y(xy-1)$

답 ④

0254 $a^3-b^3+a^2b-ab^2=a^3+a^2b-ab^2-b^3$

$$=a^2(a+b)-b^2(a+b)$$
$$=(a+b)(a^2-b^2)$$
$$=(a+b)^2(a-b)$$
$$=\{(a-b)^2+4ab\}(a-b)$$
$$=(3^2+4\times2)\times3$$
$$=51$$

답 **51**

다른 풀이 $a^3-b^3+a^2b-ab^2$

$=(a-b)(a^2+ab+b^2)+ab(a-b)$

$=(a^2+2ab+b^2)(a-b)=(a+b)^2(a-b)$

0255 $x^4-x^3y-xy^3+y^4=x^3(x-y)-y^3(x-y)$

$$=(x-y)(x^3-y^3)$$
$$=(x-y)^2(x^2+xy+y^2)$$
$$=(x-y)^2\{(x-y)^2+3xy\}$$

이때 $x=2+\sqrt{3}$, $y=2-\sqrt{3}$에서

$x-y=(2+\sqrt{3})-(2-\sqrt{3})=2\sqrt{3}$,

$xy=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=1$

이므로 구하는 식의 값은

$(2\sqrt{3})^2\times\{(2\sqrt{3})^2+3\times1\}=180$

답 **180**

0256 $(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$

$=a^2b+abc+ca^2+ab^2+b^2c+abc+abc+bc^2+c^2a-abc$

$=(b+c)a^2+(b^2+2bc+c^2)a+b^2c+bc^2$ … 1단계

$=(b+c)a^2+(b+c)^2a+bc(b+c)$

$=(b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\}$

$=(b+c)(a+b)(a+c)$ … 2단계

$=2\times3\times4=24$ … 3단계

답 **24**

채점 요소	비율
1단계 주어진 식을 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리하기	30 %
2단계 주어진 식을 인수분해하기	50 %
3단계 식의 값 구하기	20 %

0257 $x^3+y^3+z^3-3xyz$

$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

에서 $x+y+z=0$이므로

$x^3+y^3+z^3-3xyz=0$

$\therefore x^3+y^3+z^3=3xyz$

$\therefore \dfrac{5xyz}{x^3+y^3+z^3}=\dfrac{5xyz}{3xyz}=\dfrac{5}{3}$

답 $\mathbf{\frac{5}{3}}$

0258 $x=100$으로 놓으면

$$\frac{99^3\times101^3}{9998\times10000+1}=\frac{(x-1)^3(x+1)^3}{(x^2-2)x^2+1}$$
$$=\frac{(x^2-1)^3}{x^4-2x^2+1}=\frac{(x^2-1)^3}{(x^2-1)^2}$$
$$=x^2-1=100^2-1$$
$$=9999$$

답 **9999**

0259 $15^2-13^2+11^2-9^2+7^2-5^2+3^2-1^2$

$=(15+13)\times(15-13)+(11+9)\times(11-9)$

$\quad+(7+5)\times(7-5)+(3+1)\times(3-1)$

$=28\times2+20\times2+12\times2+4\times2$

$=2\times(28+20+12+4)$

$=2\times64=128$

답 ③

0260 $f(1)=1-1-3+5-2=0$,

$f(-2)=16+8-12-10-2=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr}
1 & 1 & -1 & -3 & 5 & -2 \\
 & & 1 & 0 & -3 & 2 \\
\hline
-2 & 1 & 0 & -3 & 2 & \boxed{0} \\
 & & -2 & 4 & -2 & \\
\hline
 & 1 & -2 & 1 & \boxed{0} &
\end{array}$$

$f(x)=(x-1)(x+2)(x^2-2x+1)$

$\quad=(x-1)^3(x+2)$

$\therefore f(11)=(11-1)^3\times(11+2)$

$\quad=1000\times13=13000$

답 ③

0261 $x=20$으로 놓으면

$20\times22\times24\times26+16$

$=x(x+2)(x+4)(x+6)+16$

$=\{x(x+6)\}\{(x+2)(x+4)\}+16$

$=(x^2+6x)(x^2+6x+8)+16$

$x^2+6x=t$로 놓으면

$$(x^2+6x)(x^2+6x+8)+16=t(t+8)+16$$
$$=t^2+8t+16=(t+4)^2$$
$$=(x^2+6x+4)^2$$
$$=(20^2+6\times20+4)^2$$
$$=524^2$$

따라서 구하는 식의 값은

$\sqrt{524^2}=524$

답 **524**

0262 주어진 식의 좌변을 c에 대한 내림차순으로 정리하면

$a^3+a^2b-ac^2+ab^2+b^3-bc^2$

$=-(a+b)c^2+a^3+a^2b+ab^2+b^3$

$=-(a+b)c^2+a^2(a+b)+b^2(a+b)$

$=(a+b)(-c^2+a^2+b^2)$

$\therefore (a+b)(-c^2+a^2+b^2)=0$

이때 a, b, c는 삼각형의 세 변의 길이이므로

$a+b>0$

즉 $-c^2+a^2+b^2=0$이므로

$a^2+b^2=c^2$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 삼각형은 빗변의 길이가 c인 직각삼각형이다.

답 ⑤

0263 주어진 식의 좌변을 a에 대한 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned} b^2-ba-c^2+ca &= (c-b)a+b^2-c^2 \\ &= (c-b)a+(b+c)(b-c) \\ &= (c-b)a-(b+c)(c-b) \\ &= (c-b)(a-b-c) \end{aligned}$$

$\therefore (c-b)(a-b-c)=0$ … 1단계

이때 a, b, c는 삼각형의 세 변의 길이이므로

$a<b+c$

즉 $a-b-c\neq 0$이므로

$c-b=0 \quad \therefore b=c$ … 2단계

따라서 주어진 조건을 만족시키는 삼각형은 $b=c$인 이등변삼각형이다. … 3단계

답 **$b=c$인 이등변삼각형**

채점 요소		비율
1단계	주어진 식의 좌변을 인수분해하기	50 %
2단계	b, c 사이의 관계식 구하기	30 %
3단계	주어진 조건을 만족시키는 삼각형의 모양 판단하기	20 %

참고 | 삼각형의 두 변의 길이의 합은 나머지 한 변의 길이보다 항상 크므로 $a<b+c$, $b<a+c$, $c<a+b$

시험에 꼭 나오는 문제

• 본책 040~041쪽

0264 $4x^2z^2-(x^2-y^2+z^2)^2$

$=(2xz)^2-(x^2-y^2+z^2)^2$

$=\{2xz+(x^2-y^2+z^2)\}\{2xz-(x^2-y^2+z^2)\}$

$=\{(x^2+2xz+z^2)-y^2\}\{y^2-(x^2-2xz+z^2)\}$

$=\{(x+z)^2-y^2\}\{y^2-(x-z)^2\}$

$=\{(x+z)+y\}\{(x+z)-y\}\{y+(x-z)\}\{y-(x-z)\}$

$=(x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)(-x+y+z)$

답 ⑤

0265 $x(x+1)(x+2)(x+3)-24$

$=\{x(x+3)\}\{(x+1)(x+2)\}-24$

$=(x^2+3x)(x^2+3x+2)-24$

$x^2+3x=t$로 놓으면

$$\begin{aligned} (\text{주어진 식}) &= t(t+2)-24 \\ &= t^2+2t-24 \\ &= (t+6)(t-4) \\ &= (x^2+3x+6)(x^2+3x-4) \\ &= (x^2+3x+6)(x+4)(x-1) \end{aligned}$$

따라서 인수인 것은 ②이다. 답 ②

0266 $x^2=X$로 놓으면

$$\begin{aligned} x^4-x^2-12 &= X^2-X-12=(X-4)(X+3) \\ &= (x^2-4)(x^2+3) \\ &= (x-2)(x+2)(x^2+3) \end{aligned}$$

따라서 $a=2$, $b=3$이므로

$a+b=2+3=5$ 답 ②

0267 $$\begin{aligned} x^4+5x^2+9 &= (x^4+6x^2+9)-x^2 \\ &= (x^2+3)^2-x^2 \\ &= (x^2+x+3)(x^2-x+3) \end{aligned}$$

따라서 $a=1$, $b=3$, $c=1$, $d=3$이므로

$a+b+c+d=1+3+1+3=8$ 답 8

0268 주어진 식을 c에 대하여 내림차순으로 정리하면

$a^4+2a^2c^2-2b^2c^2-b^4$

$=2(a^2-b^2)c^2+a^4-b^4$

$=2(a^2-b^2)c^2+(a^2+b^2)(a^2-b^2)$

$=(a^2-b^2)(2c^2+a^2+b^2)$

$=(a+b)(a-b)(a^2+b^2+2c^2)$

따라서 인수가 아닌 것은 ④이다. 답 ④

0269 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^2+3xy+2y^2-x-3y-2$

$=x^2+(3y-1)x+2y^2-3y-2$

$=x^2+(3y-1)x+(2y+1)(y-2)$

$=(x+2y+1)(x+y-2)$

따라서 구하는 두 일차식의 합은

$(x+2y+1)+(x+y-2)=2x+3y-1$ 답 ④

0270 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$

$=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3+y^3-3y^2z+3yz^2-z^3$
$\quad +z^3-3z^2x+3zx^2-x^3$

$=-3x^2y+3xy^2-3y^2z+3yz^2-3z^2x+3zx^2$

$=-3\{(y-z)x^2-(y^2-z^2)x+y^2z-yz^2\}$

$=-3\{(y-z)x^2-(y+z)(y-z)x+yz(y-z)\}$

$=-3(y-z)\{x^2-(y+z)x+yz\}$

$=-3(y-z)(x-y)(x-z)$

$=3(x-y)(y-z)(z-x)$

답 **$3(x-y)(y-z)(z-x)$**

다른 풀이 $x-y=A$, $y-z=B$, $z-x=C$로 놓으면

$(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$

$=A^3+B^3+C^3$

$=(A+B+C)(A^2+B^2+C^2-AB-BC-CA)$
$\quad +3ABC$

이때 $A+B+C=(x-y)+(y-z)+(z-x)=0$이므로

$(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$

$=3ABC=3(x-y)(y-z)(z-x)$

0271 주어진 등식의 양변에 $x=-2$를 대입하면

$-8-4-6-2=-2a \qquad \therefore a=10$

따라서 주어진 등식은

$x^3-x^2+3x-2=(x+2)P(x)+10x$

$\therefore (x+2)P(x)=x^3-x^2-7x-2 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$f(x)=x^3-x^2-7x-2$라 하면

$f(-2)=-8-4+14-2=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & -1 & -7 & -2 \\ & & -2 & 6 & 2 \\ \hline & 1 & -3 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x+2)(x^2-3x-1)$

따라서 ㉠에서 $\quad P(x)=x^2-3x-1$

$\therefore P(-2)=9$

답 ①

0272 $1-a^2-4b^2+4ab=1-(a^2+4b^2-4ab)$

$=1^2-(a-2b)^2$

$=\{1+(a-2b)\}\{1-(a-2b)\}$

$=(1+a-2b)(1-a+2b)$

이때 $a+2b+1=0$에서

$1+a=-2b,\ 1+2b=-a$

$\therefore$ (주어진 식)$=(-2b-2b)(-a-a)$

$=(-4b)(-2a)$

$=8ab$

답 ⑤

다른 풀이 $a+2b+1=0$에서 $\qquad a=-2b-1$

$\therefore 1-a^2-4b^2+4ab$

$=1-(-2b-1)^2-4b^2+4(-2b-1)b$

$=1-4b^2-4b-1-4b^2-8b^2-4b=-16b^2-8b$

$=8b(-2b-1)=8ab$

0273 주어진 식을 a에 대하여 내림차순으로 정리하면

$ab^2+2ab+b^2+a+2b+1=(b^2+2b+1)a+b^2+2b+1$

$=(a+1)(b^2+2b+1)$

$=(a+1)(b+1)^2$

이때 a, b는 자연수이고 $275=5^2\times11$이므로

$a+1=11,\ b+1=5$

$\therefore a=10,\ b=4$

$\therefore a-b=10-4=6$

답 **6**

0274 주어진 식을 a에 대하여 내림차순으로 정리하면

$-a^2b+a^2c+ab^2-ac^2-b^2c+bc^2$

$=-(b-c)a^2+(b^2-c^2)a-b^2c+bc^2$

$=-(b-c)a^2+(b+c)(b-c)a-bc(b-c)$

$=-(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}$

$=-(b-c)(a-b)(a-c) \qquad \cdots\cdots$ ㉠

이때 $a-b=5-\sqrt{3}$, $b-c=5+\sqrt{3}$을 변끼리 더하면

$a-c=10$

따라서 ㉠에서 구하는 식의 값은

$-(5+\sqrt{3})\times(5-\sqrt{3})\times10=-220$

답 **−220**

0275 $x=2027$로 놓으면

$\dfrac{2027^3+2027^2-3\times2027-6}{2025}$

$=\dfrac{x^3+x^2-3x-6}{x-2} \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$f(x)=x^3+x^2-3x-6$이라 하면

$f(2)=8+4-6-6=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 1 & -3 & -6 \\ & & 2 & 6 & 6 \\ \hline & 1 & 3 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-2)(x^2+3x+3)$

따라서 ㉠에서

(주어진 식)$=\dfrac{(x-2)(x^2+3x+3)}{x-2}$

$=x^2+3x+3$

$=x(x+3)+3$

$=2027\times(2027+3)+3$

$=2027\times2030+3$

2027×2030의 일의 자리의 숫자는 0이므로 구하는 일의 자리의 숫자는

$0+3=3$

답 ②

0276 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2-4x-4$라 하면 $f(x)$가 $x-1$, $x-2$를 인수로 가지므로

$f(1)=0,\ f(2)=0$

$1+a+b-4-4=0,\ 16+8a+4b-8-4=0$

$\therefore a+b=7,\ 2a+b=-1$

두 식을 연립하여 풀면

$a=-8,\ b=15$ ··· 1단계

즉 $f(x)=x^4-8x^3+15x^2-4x-4$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & -8 & 15 & -4 & -4 \\ & & 1 & -7 & 8 & 4 \\ \hline 2 & 1 & -7 & 8 & 4 & \boxed{0} \\ & & 2 & -10 & -4 & \\ \hline & 1 & -5 & -2 & \boxed{0} & \end{array}$$

$f(x)=(x-1)(x-2)(x^2-5x-2)$

따라서 $Q(x)=x^2-5x-2$이므로 ··· 2단계

$Q(-3)=22$ ··· 3단계

답 **22**

채점 요소		비율
1단계	a, b의 값 구하기	50 %
2단계	$Q(x)$ 구하기	40 %
3단계	$Q(-3)$의 값 구하기	10 %

0277 $ab(a+b)-bc(b+c)+ca(a-c)=0$에서 좌변을 a에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$ab(a+b)-bc(b+c)+ca(a-c)$$
$$=a^2b+ab^2-b^2c-bc^2+ca^2-c^2a$$
$$=(b+c)a^2+(b^2-c^2)a-b^2c-bc^2$$
$$=(b+c)a^2+(b+c)(b-c)a-bc(b+c)$$
$$=(b+c)\{a^2+(b-c)a-bc\}$$
$$=(b+c)(a+b)(a-c)$$
$$\therefore (b+c)(a+b)(a-c)=0$$ … 1단계

이때 $b+c>0$, $a+b>0$이므로

$a-c=0$ $\quad\therefore a=c$ … 2단계

$a=c$를 $a^2-ac+c^2=4$에 대입하면

$a^2-a^2+a^2=4$, $\quad a^2=4$

$\therefore a=2\ (\because a>0)$

따라서 $c=a=2$이므로

$a^3+c^3=2^3+2^3=16$ … 3단계

답 **16**

채점 요소		비율
1단계	$ab(a+b)-bc(b+c)+ca(a-c)=0$의 좌변을 인수분해하기	50 %
2단계	$a=c$임을 알기	20 %
3단계	a^3+c^3의 값 구하기	30 %

0278 전략 $x=\sqrt{5}$, $y=\sqrt{2}$로 놓고 정육면체의 부피를 x, y에 대한 식으로 나타낸 후 인수분해한다.

$x=\sqrt{5}$, $y=\sqrt{2}$라 하면 A 상자의 부피는 x^3, B 상자의 부피는 x^2y, C 상자의 부피는 xy^2, D 상자의 부피는 y^3이다.

따라서 A 상자 1개, B 상자 6개, C 상자 12개, D 상자 8개를 빈틈없이 쌓아서 만든 정육면체의 부피는

$$x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3=(x+2y)^3$$

즉 정육면체의 한 모서리의 길이는

$$x+2y=\sqrt{5}+2\sqrt{2}$$

이므로 $\quad a=2$, $b=1$

$\therefore a+b=2+1=3$

답 **3**

0279 전략 인수분해를 이용하여 주어진 등식에서 a, b, c 사이의 관계식을 구한다.

$a^3+b^3+c^3=3abc$에서

$$a^3+b^3+c^3-3abc=0$$
$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=0$$
$$\therefore \frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$$

이때 a, b, c는 삼각형의 세 변의 길이이므로

$$a+b+c>0$$

즉 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$이므로

$$a=b=c$$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 삼각형은 정삼각형이고, 정삼각형의 둘레의 길이가 6이므로 한 변의 길이는 2이다.

즉 구하는 넓이는

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2=\sqrt{3}$$

답 $\sqrt{3}$

RPM 비법 노트

한 변의 길이가 x인 정삼각형의 높이를 h, 넓이를 S라 하면

(1) $h=\frac{\sqrt{3}}{2}x$ $\qquad$ (2) $S=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$

04 복소수

교과서 문제 정복하기

본책 045쪽

0280 답 **실수부분: 0, 허수부분: 4**

0281 답 **실수부분: $1+\sqrt{2}$, 허수부분: 0**

0282 답 **실수부분: -5, 허수부분: $\sqrt{3}$**

0283 답 **실수부분: $\frac{3}{2}$, 허수부분: $-\frac{1}{2}$**

0284 복소수 $a+bi$ (a, b는 실수)에서
(1) $b=0$이면 실수이다.
ㄷ. $4i^2=-4$
따라서 실수는 ㄷ, ㅁ, ㅂ이다.
(2) $b\neq0$이면 허수이므로 허수는 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.
(3) $a=0$, $b\neq0$이면 순허수이므로 순허수는 ㄱ, ㄴ이다.
답 (1) ㄷ, ㅁ, ㅂ (2) ㄱ, ㄴ, ㄹ (3) ㄱ, ㄴ

0285 $3x+(y-1)i=6-i$에서
$3x=6$, $y-1=-1$
$\therefore x=2$, $y=0$ 답 $x=2$, $y=0$

0286 $(x+1)+(y-1)i=2+4i$에서
$x+1=2$, $y-1=4$
$\therefore x=1$, $y=5$ 답 $x=1$, $y=5$

0287 $(x-y)+(3x-2y)i=2i$에서
$x-y=0$, $3x-2y=2$
두 식을 연립하여 풀면
$x=2$, $y=2$ 답 $x=2$, $y=2$

0288 답 $-5-7i$

0289 답 $-3i-1$

0290 답 $-i$
참고 | 순허수 bi의 켤레복소수는 $-bi$이다.

0291 답 7
참고 | 실수 a의 켤레복소수는 a이다.

0292 $(5+i)+(-2+6i)=(5-2)+(1+6)i$
$=3+7i$ 답 $3+7i$

0293 $(7+2i)-(4-3i)=(7-4)+(2+3)i$
$=3+5i$ 답 $3+5i$

0294 $(3+4i)(1-2i)=3-6i+4i-8i^2$
$=3-6i+4i+8$
$=11-2i$ 답 $11-2i$

0295 $\frac{5-3i}{1+i}=\frac{(5-3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{5-5i-3i+3i^2}{1-i^2}$
$=\frac{2-8i}{2}=1-4i$ 답 $1-4i$

0296 $i^{25}=(i^4)^6\times i=i$ 답 i

0297 $(-i)^5=-i^5=-i^4\times i=-i$ 답 $-i$

0298 $-i^7=-i^4\times i^3=-(-i)=i$ 답 i

0299 $i^{100}+i^{200}=(i^4)^{25}+(i^4)^{50}=1+1=2$ 답 2

0300 $\sqrt{-3}=\sqrt{3}i$ 답 $\sqrt{3}i$

0301 $\sqrt{-25}=\sqrt{25}i=5i$ 답 $5i$

0302 $-\sqrt{-32}=-\sqrt{32}i=-4\sqrt{2}i$ 답 $-4\sqrt{2}i$

0303 $\pm\sqrt{-1}=\pm i$ 답 $\pm i$

0304 $\pm\sqrt{-8}=\pm\sqrt{8}i=\pm2\sqrt{2}i$ 답 $\pm2\sqrt{2}i$

0305 $\sqrt{-2}\sqrt{-8}=\sqrt{2}i\times\sqrt{8}i=\sqrt{16}i^2=-4$ 답 -4
다른 풀이 $-2<0$, $-8<0$이므로
$\sqrt{-2}\sqrt{-8}=-\sqrt{(-2)\times(-8)}=-\sqrt{16}=-4$

0306 $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{-3}}=\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}i}=\frac{\sqrt{15}i}{\sqrt{3}i^2}=-\sqrt{5}i$ 답 $-\sqrt{5}i$
다른 풀이 $15>0$, $-3<0$이므로
$\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{-3}}=-\sqrt{\frac{15}{-3}}=-\sqrt{-5}=-\sqrt{5}i$

0307 $\frac{\sqrt{-12}}{\sqrt{-4}}=\frac{\sqrt{12}i}{\sqrt{4}i}=\sqrt{3}$ 답 $\sqrt{3}$

0308 $\sqrt{-3}\sqrt{-6}-\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{-16}}=\sqrt{3}i\times\sqrt{6}i-\frac{2\sqrt{2}}{4i}$
$=\sqrt{18}i^2-\frac{\sqrt{2}i}{2i^2}$
$=-3\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$
답 $-3\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$

유형 익히기

• 본책 046~052쪽

0309 ① 모든 실수는 복소수이므로 0도 복소수이다.
② $3-2i$의 실수부분은 3이고 허수부분은 -2이다.
⑤ -9의 제곱근은 $\pm\sqrt{-9}=\pm 3i$이다.

답 ③, ④

0310 $1+\sqrt{-4}=1+2i$, $i^2+1=-1+1=0$
따라서 허수는 $3i$, $1+\sqrt{-4}$, $2-5i$의 3개이다. 답 **3**

0311 $(1+2i)(4-5i)+\dfrac{-1+3i}{1+i}$

$=4-5i+8i-10i^2+\dfrac{(-1+3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}$

$=14+3i+\dfrac{-1+i+3i-3i^2}{1-i^2}=14+3i+\dfrac{2+4i}{2}$

$=14+3i+1+2i=15+5i$

따라서 $a=15$, $b=5$이므로

$a+b=15+5=20$ 답 **20**

0312 $3(1+4i)+(4-5i)-7(2-i)$
$=3+12i+4-5i-14+7i$
$=-7+14i$ 답 $\boldsymbol{-7+14i}$

0313 $(2+\sqrt{3}i)^2+(2-\sqrt{3}i)^2$
$=(4+4\sqrt{3}i+3i^2)+(4-4\sqrt{3}i+3i^2)$
$=1+4\sqrt{3}i+1-4\sqrt{3}i$
$=2$ 답 ②

0314 $z_1=\dfrac{1}{(1+i)^2}=\dfrac{1}{1+2i+i^2}=\dfrac{1}{2i}=-\dfrac{i}{2}$

$z_2=\dfrac{3+\sqrt{2}i}{\sqrt{2}-3i}=\dfrac{(3+\sqrt{2}i)(\sqrt{2}+3i)}{(\sqrt{2}-3i)(\sqrt{2}+3i)}$

$=\dfrac{3\sqrt{2}+9i+2i+3\sqrt{2}i^2}{2-9i^2}=\dfrac{11i}{11}=i$

$\therefore z_1z_2=-\dfrac{i}{2}\times i=\dfrac{1}{2}$ 답 ③

0315 $(3-i)*(2+5i)$
$=2(3-i)(2+5i)-(3-i)+(2+5i)$ … 1단계
$=2(6+15i-2i-5i^2)-3+i+2+5i$
$=2(11+13i)-1+6i$
$=22+26i-1+6i$
$=21+32i$ … 2단계
따라서 구하는 실수부분은 21이다. … 3단계

답 **21**

채점 요소	비율
1단계 주어진 식을 사칙연산으로 나타내기	20 %
2단계 $(3-i)*(2+5i)$를 계산하기	60 %
3단계 실수부분 구하기	20 %

0316 $x=\dfrac{1+\sqrt{2}i}{3}$에서 $3x=1+\sqrt{2}i$

$3x-1=\sqrt{2}i$

양변을 제곱하면 $9x^2-6x+1=-2$

$9x^2-6x=-3$ $\therefore 3x^2-2x=-1$

$\therefore 6x^2-4x+3=2(3x^2-2x)+3$

$=2\times(-1)+3=1$

답 **1**

다른 풀이 $6x^2-4x+3=6\times\left(\dfrac{1+\sqrt{2}i}{3}\right)^2-4\times\dfrac{1+\sqrt{2}i}{3}+3$

$=6\times\dfrac{-1+2\sqrt{2}i}{9}-\dfrac{4}{3}-\dfrac{4\sqrt{2}i}{3}+3$

$=-\dfrac{2}{3}+\dfrac{4\sqrt{2}i}{3}-\dfrac{4}{3}-\dfrac{4\sqrt{2}i}{3}+3$

$=1$

0317 $z=4+\sqrt{5}i$에서 $z-4=\sqrt{5}i$
양변을 제곱하면 $z^2-8z+16=-5$
$\therefore z^2-8z=-21$ 답 ①

0318 $z=\dfrac{3-i}{1-i}=\dfrac{(3-i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{4+2i}{2}=2+i$에서

$z-2=i$

양변을 제곱하면 $z^2-4z+4=-1$

$\therefore z^2-4z+5=0$

$\therefore z^3-4z^2+5z+3=z(z^2-4z+5)+3$

$=z\times 0+3=3$ 답 ③

0319 $x^2=1-2i$에서 $x^2-1=-2i$

양변을 제곱하면 $x^4-2x^2+1=-4$

$\therefore x^4-2x^2=-5$

$x\neq 0$이므로 양변을 x로 나누면 $x^3-2x=-\dfrac{5}{x}$

$\therefore x^3-2x+\dfrac{5}{x}=0$

$\therefore x^4+x^3-2x^2-2x+\dfrac{5}{x}$

$=(x^4-2x^2)+\left(x^3-2x+\dfrac{5}{x}\right)$

$=-5+0$

$=-5$ 답 **−5**

0320 $\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}=\dfrac{x^2+y^2}{xy}=\dfrac{(x+y)^2-2xy}{xy}$ …… ㉠

이때 $x=3+i$, $y=3-i$에서

$x+y=(3+i)+(3-i)=6$

$xy=(3+i)(3-i)=10$

따라서 ㉠에서

$\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}=\dfrac{6^2-2\times 10}{10}=\dfrac{8}{5}$ 답 ⑤

RPM 비법 노트

곱셈 공식의 변형

(1) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(a-b)^2+2ab$
(2) $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$
(3) $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

다른 풀이 $\frac{y}{x}+\frac{x}{y}=\frac{3-i}{3+i}+\frac{3+i}{3-i}$

$$=\frac{(3-i)^2+(3+i)^2}{(3+i)(3-i)}$$

$$=\frac{8-6i+8+6i}{10}=\frac{8}{5}$$

0321 $\frac{z+1}{z}-\frac{\bar{z}-1}{\bar{z}}=\frac{\bar{z}(z+1)-z(\bar{z}-1)}{z\bar{z}}$

$$=\frac{z\bar{z}+\bar{z}-z\bar{z}+z}{z\bar{z}}$$

$$=\frac{z+\bar{z}}{z\bar{z}} \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $z=4-3i$에서 $\bar{z}=4+3i$이므로

$z+\bar{z}=(4-3i)+(4+3i)=8$

$z\bar{z}=(4-3i)(4+3i)=25$

따라서 ㉠에서

$\frac{z+1}{z}-\frac{\bar{z}-1}{\bar{z}}=\frac{8}{25}$ 답 $\frac{8}{25}$

0322 $x^3-x^2y-xy^2+y^3$

$=x^2(x-y)-y^2(x-y)$

$=(x^2-y^2)(x-y)$

$=(x+y)(x-y)^2 \quad \cdots\cdots ㉠$

이때 $x=\frac{5}{1+2i}=\frac{5(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=1-2i$,

$y=\frac{5}{1-2i}=\frac{5(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}=1+2i$이므로

$x+y=(1-2i)+(1+2i)=2$

$x-y=(1-2i)-(1+2i)=-4i$

따라서 ㉠에서

$x^3-x^2y-xy^2+y^3=2\times(-4i)^2=-32$ 답 -32

0323 $xy=50$에서

$y=\frac{50}{x}=\frac{50}{7-i}=\frac{50(7+i)}{(7-i)(7+i)}=7+i$

따라서 $x-y=(7-i)-(7+i)=-2i$이므로

$x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$

$=(-2i)^3+3\times50\times(-2i)$

$=-292i$ 답 $-292i$

0324 $x^2+(i-5)x-i+4=(x^2-5x+4)+(x-1)i$

이 복소수가 순허수가 되려면

$x^2-5x+4=0,\ x-1\neq0$

(i) $x^2-5x+4=0$에서 $(x-1)(x-4)=0$

∴ $x=1$ 또는 $x=4$

(ii) $x-1\neq0$에서 $x\neq1$

(i), (ii)에서 $x=4$ 답 4

0325 $z=i(x+i)^2=i(x^2+2xi-1)$

$=-2x+(x^2-1)i \quad \cdots\cdots ㉠$

z가 실수가 되려면

$x^2-1=0,\quad (x+1)(x-1)=0$

∴ $x=-1$ 또는 $x=1$

이때 음수 x의 값이 a이므로

$a=-1$

$x=-1$을 ㉠에 대입하면

$z=2 \quad ∴\ b=2$

∴ $a-b=-1-2=-3$ 답 -3

0326 z^2이 실수가 되려면 z는 실수 또는 순허수이어야 하므로

$a^2-3a+2=0$ 또는 $a^2+a-2=0$ … 1단계

(i) $a^2-3a+2=0$에서 $(a-1)(a-2)=0$

∴ $a=1$ 또는 $a=2$

(ii) $a^2+a-2=0$에서 $(a+2)(a-1)=0$

∴ $a=-2$ 또는 $a=1$

(i), (ii)에서 $a=-2$ 또는 $a=1$ 또는 $a=2$ … 2단계

따라서 구하는 모든 실수 a의 값의 합은

$-2+1+2=1$ … 3단계

답 1

채점 요소	비율
1단계 z^2이 실수가 되기 위한 조건 알기	30 %
2단계 z^2이 실수가 되도록 하는 a의 값 구하기	50 %
3단계 모든 실수 a의 값의 합 구하기	20 %

다른 풀이 $z^2=(a^2-3a+2)^2-(a^2+a-2)^2$

$+2(a^2-3a+2)(a^2+a-2)i$

z^2이 실수가 되려면

$2(a^2-3a+2)(a^2+a-2)=0$

$(a+2)(a-1)^2(a-2)=0$

∴ $a=-2$ 또는 $a=1$ 또는 $a=2$

0327 $z=(1+i)a^2+(3+i)a-(4+12i)$

$=(a^2+3a-4)+(a^2+a-12)i$

z^2이 양의 실수가 되려면 z는 0이 아닌 실수이어야 하므로

$a^2+3a-4\neq0,\ a^2+a-12=0$

(i) $a^2+3a-4\neq0$에서 $(a+4)(a-1)\neq0$

∴ $a\neq-4,\ a\neq1$

(ii) $a^2+a-12=0$에서 $(a+4)(a-3)=0$

∴ $a=-4$ 또는 $a=3$

(i), (ii)에서 $a=3$ 답 ④

0328 $(3+2i)x+(2-3i)y=\overline{4-7i}$에서

$3x+2xi+2y-3yi=4+7i$

$\therefore (3x+2y)+(2x-3y)i=4+7i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$3x+2y=4,\ 2x-3y=7$

두 식을 연립하여 풀면　$x=2,\ y=-1$

$\therefore x+y=2+(-1)=1$

답 **1**

0329 $\dfrac{x}{1-i}+\dfrac{y}{1+i}=\dfrac{x(1+i)+y(1-i)}{(1-i)(1+i)}$

$=\dfrac{x+xi+y-yi}{2}$

$=\dfrac{x+y}{2}+\dfrac{x-y}{2}i$

즉 $\dfrac{x+y}{2}+\dfrac{x-y}{2}i=10-7i$이므로

$(x+y)+(x-y)i=20-14i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x+y=20,\ x-y=-14$

두 식을 연립하여 풀면　$x=3,\ y=17$

$\therefore 2x-y=2\times3-17=-11$

답 **-11**

0330 $\overline{x-3xyi-5}=9i-y$에서

$\overline{(x-5)-3xyi}=9i-y$

$\therefore (x-5)+3xyi=9i-y$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x-5=-y,\ 3xy=9$

$\therefore x+y=5,\ xy=3$

$\therefore x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

$=5^2-2\times3=19$

답 **19**

0331 $x^2+y^2i+2x+2yi-3-8i=0$에서

$(x^2+2x-3)+(y^2+2y-8)i=0$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x^2+2x-3=0,\ y^2+2y-8=0$

(i) $x^2+2x-3=0$에서　$(x+3)(x-1)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=1$

(ii) $y^2+2y-8=0$에서　$(y+4)(y-2)=0$

$\therefore y=-4$ 또는 $y=2$

(i), (ii)에서

$x+y=-7$ 또는 $x+y=-3$ 또는

$x+y=-1$ 또는 $x+y=3$

따라서 $x+y$의 값이 될 수 없는 것은 ②이다.

답 ②

0332 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\overline{z}=a-bi$이다.

ㄱ. $z\overline{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2=0$에서

$a=0,\ b=0$　$\therefore z=0$ (참)

ㄴ. $\overline{z}=a-bi$가 순허수이면　$a=0,\ b\neq0$

따라서 $z=bi$이므로 z도 순허수이다. (참)

ㄷ. $\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{\overline{z}}=\dfrac{1}{a+bi}+\dfrac{1}{a-bi}$

$=\dfrac{a-bi+a+bi}{(a+bi)(a-bi)}=\dfrac{2a}{a^2+b^2}$

이므로 실수이다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ㄱ, ㄴ

0333 $\overline{z}=-z$에서 z는 순허수 또는 0이다.

④ $z=i(1-i)=i+1$

⑤ $z=(\sqrt{5}i-1)i^2=-\sqrt{5}i+1$

따라서 조건을 만족시키는 복소수 z는 ②이다.

답 ②

0334 $z=\overline{z}$이고 $z\neq0$이므로 z는 0이 아닌 실수이다.

$z=(x^2-4)+(x^2-x-2)i$에서

$x^2-4\neq0,\ x^2-x-2=0$

(i) $x^2-4\neq0$에서　$(x+2)(x-2)\neq0$

$\therefore x\neq-2,\ x\neq2$

(ii) $x^2-x-2=0$에서　$(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

(i), (ii)에서　$x=-1$

답 **-1**

0335 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면　$\overline{z}=a-bi$

$(1+i)z+3\overline{z}=10-i$에서

$(1+i)(a+bi)+3(a-bi)=10-i$

$a+bi+ai-b+3a-3bi=10-i$

$\therefore (4a-b)+(a-2b)i=10-i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$4a-b=10,\ a-2b=-1$

두 식을 연립하여 풀면　$a=3,\ b=2$

$\therefore z=3+2i$

답 **$3+2i$**

0336 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면　$\overline{z}=a-bi$

$(3+i)\overline{z}+(3-i)z=16$에서

$(3+i)(a-bi)+(3-i)(a+bi)=16$

$3a-3bi+ai+b+3a+3bi-ai+b=16$

$6a+2b=16$　$\therefore 3a+b=8$

ㄱ. $a=3,\ b=-1$이므로　$3a+b=8$

ㄴ. $a=-2,\ b=14$이므로　$3a+b=8$

ㄷ. $a=2,\ b=-1$이므로　$3a+b=5$

이상에서 복소수 z가 될 수 있는 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ④

0337 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면

$\overline{z}=a-bi$　··· 1단계

$z\overline{z}=7$에서　$(a+bi)(a-bi)=7$

$\therefore a^2+b^2=7$　······ ㉠

또 $\overline{z}=\dfrac{7}{z}$이므로 $z+\dfrac{7}{z}=4$에서　$z+\overline{z}=4$

$(a+bi)+(a-bi)=4$,　$2a=4$

$\therefore a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면

$4+b^2=7,\quad b^2=3\quad \therefore b=\pm\sqrt{3}$ … 2단계

$\therefore z=2\pm\sqrt{3}i$ … 3단계

답 $2\pm\sqrt{3}i$

	채점 요소	비율
1단계	$z=a+bi$로 놓고 $\bar{z}$ 구하기	20 %
2단계	a, b의 값 구하기	60 %
3단계	복소수 z를 모두 구하기	20 %

0338 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면

$z-zi=(a+bi)-(a+bi)i=a+bi-ai+b$
$=(a+b)+(b-a)i$

이므로 $\overline{z-zi}=(a+b)-(b-a)i$

$\therefore (a+b)-(b-a)i=2+i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a+b=2,\ -(b-a)=1$

두 식을 연립하여 풀면 $a=\frac{3}{2},\ b=\frac{1}{2}$

따라서 $z=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i$이므로

$2z-i=2\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i\right)-i=3$

답 3

0339 $i+i^2+i^3+i^4+\cdots+i^{3002}$

$=(i+i^2+i^3+i^4)+\cdots$
$+(i^{2997}+i^{2998}+i^{2999}+i^{3000})+i^{3001}+i^{3002}$
$=(i-1-i+1)+\cdots+(i-1-i+1)+i-1$
$=i-1$

답 ④

0340 $i+2i^2+3i^3+\cdots+49i^{49}+50i^{50}$

$=(i+2i^2+3i^3+4i^4)+\cdots$
$+(45i^{45}+46i^{46}+47i^{47}+48i^{48})+49i^{49}+50i^{50}$
$=(i-2-3i+4)+\cdots+(45i-46-47i+48)+49i-50$
$=(2-2i)+\cdots+(2-2i)+49i-50$
$=12(2-2i)+49i-50$
$=-26+25i$

따라서 $x=-26$, $y=25$이므로

$x+y=-26+25=-1$

답 -1

0341 $x=1+\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\cdots+\frac{1}{i^{10}}$

$=\left(1+\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}\right)+\left(\frac{1}{i^4}+\frac{1}{i^5}+\frac{1}{i^6}+\frac{1}{i^7}\right)$
$+\frac{1}{i^8}+\frac{1}{i^9}+\frac{1}{i^{10}}$
$=\left(1+\frac{1}{i}-1-\frac{1}{i}\right)+\left(1+\frac{1}{i}-1-\frac{1}{i}\right)+1+\frac{1}{i}-1$
$=\frac{1}{i}=-i$

$\therefore x+\frac{2}{x}=-i+\frac{2}{-i}=-i+2i=i$

답 ⑤

0342 $\frac{1}{i}-\frac{2}{i^2}+\frac{3}{i^3}-\frac{4}{i^4}+\cdots+\frac{101}{i^{101}}-\frac{102}{i^{102}}$

$=\left(\frac{1}{i}-\frac{2}{i^2}+\frac{3}{i^3}-\frac{4}{i^4}\right)+\cdots$
$+\left(\frac{97}{i^{97}}-\frac{98}{i^{98}}+\frac{99}{i^{99}}-\frac{100}{i^{100}}\right)+\frac{101}{i^{101}}-\frac{102}{i^{102}}$
$=\left(\frac{1}{i}+2-\frac{3}{i}-4\right)+\cdots$
$+\left(\frac{97}{i}+98-\frac{99}{i}-100\right)+\frac{101}{i}+102$
$=\left(-2-\frac{2}{i}\right)+\cdots+\left(-2-\frac{2}{i}\right)+\frac{101}{i}+102$
$=25\left(-2-\frac{2}{i}\right)+\frac{101}{i}+102$
$=52+\frac{51}{i}=52-51i$

따라서 $a=52$, $b=-51$이므로

$a-b=52-(-51)=103$

답 103

0343 $\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$

$\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$

$\therefore \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2051}-\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2051}=i^{2051}-(-i)^{2051}$
$=i^{2051}+i^{2051}=2i^{2051}$
$=2\times(i^4)^{512}\times i^3$
$=-2i$

답 ①

0344 $(1-i)^{30}=\{(1-i)^2\}^{15}=(-2i)^{15}$
$=(-2)^{15}\times(i^4)^3\times i^3=2^{15}i$

$(1+i)^{30}=\{(1+i)^2\}^{15}=(2i)^{15}$
$=2^{15}\times(i^4)^3\times i^3=-2^{15}i$

$\therefore (1-i)^{30}+(1+i)^{30}=2^{15}i+(-2^{15}i)=0$

답 0

0345 $z^2=\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{-2i}{2}=-i$이므로

$1+z^2+z^4+z^6+z^8=1+z^2+(z^2)^2+(z^2)^3+(z^2)^4$
$=1-i+(-i)^2+(-i)^3+(-i)^4$
$=1-i-1+i+1=1$

답 1

다른 풀이 $z^2=-i$이므로

$z^4=(z^2)^2=(-i)^2=-1$

$\therefore 1+z^2+z^4+z^6+z^8=(1+z^2)+z^4(1+z^2)+z^8$
$=(1+z^2)-(1+z^2)+z^8$
$=z^8=(z^4)^2$
$=(-1)^2=1$

0346 $\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$

$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$

$$\therefore f\left(\frac{1-i}{1+i}\right)+f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$$
$$=f(-i)+f(i)$$
$$=\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{1002}+\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{1002}$$
$$=(-i)^{1002}+i^{1002}=i^{1002}+i^{1002}$$
$$=2i^{1002}=2\times(i^4)^{250}\times i^2$$
$$=-2$$

답 ③

0347 ① $\sqrt{-2}\sqrt{3}=\sqrt{2}i\times\sqrt{3}=\sqrt{6}i=\sqrt{-6}$

② $\sqrt{-2}\sqrt{-3}=\sqrt{2}i\times\sqrt{3}i=\sqrt{6}i^2=-\sqrt{6}$

③ $\dfrac{\sqrt{-2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{2}i}{\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{2}{3}}i=\sqrt{-\dfrac{2}{3}}$

④ $\dfrac{\sqrt{-2}}{\sqrt{-3}}=\dfrac{\sqrt{2}i}{\sqrt{3}i}=\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

⑤ $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}i}=\dfrac{\sqrt{2}i}{\sqrt{3}i^2}=-\sqrt{\dfrac{2}{3}}i=-\sqrt{-\dfrac{2}{3}}$

답 ⑤

참고 | $a<0$, $b<0$ 이외의 경우에는 $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$

$a>0$, $b<0$ 이외의 경우에는 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ (단, $b\neq0$)

0348 $\dfrac{\sqrt{32}}{\sqrt{-2}}+\dfrac{\sqrt{-48}}{\sqrt{-4}}+\sqrt{-2}\sqrt{-6}$

$=-\sqrt{\dfrac{32}{-2}}+\sqrt{\dfrac{-48}{-4}}-\sqrt{12}$

$=-4i+2\sqrt{3}-2\sqrt{3}$

$=-4i$ … 1단계

따라서 $-4i=a+bi$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a=0$, $b=-4$ … 2단계

$\therefore a-b=0-(-4)=4$ … 3단계

답 4

채점 요소	비율
1단계 주어진 등식의 좌변을 간단히 하기	70 %
2단계 a, b의 값 구하기	20 %
3단계 $a-b$의 값 구하기	10 %

0349 $(\sqrt{3}+\sqrt{-3})(2\sqrt{3}-\sqrt{-3})+\sqrt{-3}\sqrt{-27}+\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{-3}}$

$=(\sqrt{3}+\sqrt{3}i)(2\sqrt{3}-\sqrt{3}i)-\sqrt{81}-\sqrt{\dfrac{27}{-3}}$

$=6-3i+6i+3-9-3i=0$

답 0

0350 $-2<x<2$이므로

$x+2>0$, $x-2<0$, $2-x>0$, $-2-x<0$

$\therefore \sqrt{x+2}\times\sqrt{x-2}\times\sqrt{2-x}\times\sqrt{-2-x}$

$=\sqrt{x+2}\times\sqrt{2-x}\,i\times\sqrt{2-x}\times\sqrt{x+2}\,i$

$=-\sqrt{(x+2)^2(2-x)^2}$

$=-\sqrt{\{(x+2)(2-x)\}^2}$

$=-|(x+2)(2-x)|$

이때 $(x+2)(2-x)>0$이므로

(주어진 식)$=-(x+2)(2-x)=x^2-4$

답 x^2-4

0351 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$이므로 $a>0$, $b<0$

따라서 $a-b>0$이므로

$\sqrt{(a-b)^2}-2|a|+\sqrt{b^2}=|a-b|-2|a|+|b|$

$=a-b-2a-b$

$=-a-2b$

답 $-a-2b$

0352 $\dfrac{\sqrt{4-a}}{\sqrt{1-a}}=-\sqrt{\dfrac{4-a}{1-a}}$이므로

$4-a>0$, $1-a<0$

따라서 $a-1>0$, $a-4<0$이므로

$\sqrt{(a-1)^2}+|a-4|=|a-1|+|a-4|$

$=(a-1)-(a-4)=3$

답 3

0353 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$이므로 $a<0$, $b<0$

ㄱ. $\sqrt{ab^2}=|b|\sqrt{a}=-b\sqrt{a}$ (참)

ㄴ. $\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=\sqrt{\dfrac{b}{a}}$ (거짓)

ㄷ. $\sqrt{a^2}\sqrt{b^2}=|a||b|=-a\times(-b)=ab$ (거짓)

ㄹ. $a+b<0$이므로

$|a+b|=-a-b$, $|a|+|b|=-a-b$

$\therefore |a+b|=|a|+|b|$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다.

답 ②

0354 ㄱ. $\alpha=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면

$\overline{\alpha}=a-bi$

이때 $\alpha=\overline{\alpha}$에서 $a+bi=a-bi$ $\therefore b=0$

따라서 α는 실수이다. (참)

ㄴ. $\alpha=1$, $\beta=i$이면 $\alpha^2+\beta^2=0$이지만 $\alpha\neq0$, $\beta\neq0$이다. (거짓)

ㄷ. $\overline{(\alpha-i)(\beta+i)}=\overline{(\alpha-i)}\times\overline{(\beta+i)}$

$=(\overline{\alpha}+i)\times(\overline{\beta}-i)$

$=\overline{\alpha}\overline{\beta}-\overline{\alpha}i+\overline{\beta}i+1$

$=\overline{\alpha}\overline{\beta}-(\overline{\alpha}-\overline{\beta})i+1$ (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ㄱ

다른 풀이 ㄷ. $\overline{(\alpha-i)(\beta+i)}=\overline{\alpha\beta+\alpha i-\beta i+1}$

$=\overline{\alpha\beta}-\overline{\alpha}i+\overline{\beta}i+1$

$=\overline{\alpha}\overline{\beta}-(\overline{\alpha}-\overline{\beta})i+1$

0355 $z=a+bi$, $w=c+di$ (a, b, c, d는 실수, $b\neq0$, $d\neq0$)라 하면

$z+w=(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$

$zw=(a+bi)(c+di)=ac-bd+(ad+bc)i$

이때 $z+w$, zw가 모두 실수이므로

$b+d=0$, $ad+bc=0$

$b+d=0$에서 $d=-b$이므로 이것을 $ad+bc=0$에 대입하면

$-ab+bc=0,\qquad -a+c=0\ (\because b\neq 0)$

$\therefore c=a$

따라서 $w=a-bi$이므로 z와 w는 서로 켤레복소수이다.

$\therefore \overline{z}=w,\ \overline{w}=z$

ㄱ. $\overline{z-w}=\overline{z}-\overline{w}=w-z$이므로

$\overline{z-w}\neq z+w$ (거짓)

ㄴ. $\overline{z}-w=w-w=0,\ z-\overline{w}=z-z=0$이므로

$\overline{z}-w=z-\overline{w}$ (참)

ㄷ. $\overline{\left(\frac{w}{z}\right)}=\frac{\overline{w}}{\overline{z}}=\frac{z}{w}$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

0356 $\frac{1}{z^2-1}$이 실수이므로 z^2-1은 실수이다.

즉 $z^2-1=\overline{z^2-1}$이므로

$z^2-1=\overline{z}^2-1,\qquad z^2-\overline{z}^2=0$

$\therefore (z+\overline{z})(z-\overline{z})=0$

z는 허수이므로 $\qquad z\neq\overline{z}$

$\therefore z+\overline{z}=0$ 답 ④

0357 $\alpha\overline{\alpha}-\overline{\alpha}\beta-\alpha\overline{\beta}+\beta\overline{\beta}=\alpha(\overline{\alpha}-\overline{\beta})-\beta(\overline{\alpha}-\overline{\beta})$

$=(\alpha-\beta)(\overline{\alpha}-\overline{\beta})$

$=(\alpha-\beta)(\overline{\alpha-\beta})$ …… ㉠

이때 $\alpha=5-3i,\ \beta=3-2i$이므로

$\alpha-\beta=(5-3i)-(3-2i)=2-i,\ \overline{\alpha-\beta}=2+i$

따라서 ㉠에서

(주어진 식)$=(2-i)(2+i)=5$ 답 **5**

0358 $(z_1-1)(2z_2-1)=2z_1z_2-(z_1+2z_2)+1$ … ㉠

이때 $\overline{z_1}+2\overline{z_2}=\overline{z_1+2z_2}=2+5i$이므로

$z_1+2z_2=\overline{2+5i}=2-5i$

$\overline{z_1}\times\overline{z_2}=\overline{z_1z_2}=3-4i$이므로

$z_1z_2=\overline{3-4i}=3+4i$

따라서 ㉠에서

$(z_1-1)(2z_2-1)=2(3+4i)-(2-5i)+1$

$=6+8i-2+5i+1$

$=5+13i$ 답 **$5+13i$**

0359 $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta}$ …… ㉠

$\overline{\alpha}+\beta=i$이므로 $\qquad \alpha+\overline{\beta}=\overline{\overline{\alpha}+\beta}=\overline{i}=-i$

$\overline{\alpha}\beta=-1$이므로 $\qquad \alpha\overline{\beta}=\overline{(\overline{\alpha}\beta)}=\overline{-1}=-1$

따라서 ㉠에서

$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\overline{\beta}}=\frac{-i}{-1}=i$ 답 ④

0360 $z\overline{z}=2$에서 $\qquad z=\frac{2}{\overline{z}}$

$w\overline{w}=2$에서 $\qquad w=\frac{2}{\overline{w}}$

$\therefore \frac{1}{z}+\frac{1}{w}=\frac{\overline{z}}{2}+\frac{\overline{w}}{2}=\frac{\overline{z}+\overline{w}}{2}=\frac{\overline{z+w}}{2}$

$=\frac{\overline{2i}}{2}=\frac{-2i}{2}=-i$ 답 **$-i$**

시험에 꼭 나오는 문제

● 본책 053~054쪽

0361 ① $(2-3i)+(5+4i)=7+i$

② $-3i-(-2+5i)=-3i+2-5i=2-8i$

③ $(1+i^2)(1-i^2)=(1-1)\times(1+1)=0$

④ $(5-i)^2=25-10i+i^2=24-10i$

⑤ $\frac{i}{2-i}=\frac{i(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{2i+i^2}{5}=-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$

답 ⑤

0362 $f(1,\ 3)+f(2,\ 6)+f(3,\ 9)+f(4,\ 12)+f(5,\ 15)$

$=\frac{1-3i}{1+3i}+\frac{2-6i}{2+6i}+\frac{3-9i}{3+9i}+\frac{4-12i}{4+12i}+\frac{5-15i}{5+15i}$

$=\frac{1-3i}{1+3i}+\frac{1-3i}{1+3i}+\frac{1-3i}{1+3i}+\frac{1-3i}{1+3i}+\frac{1-3i}{1+3i}$

$=5\times\frac{1-3i}{1+3i}=5\times\frac{(1-3i)^2}{(1+3i)(1-3i)}$

$=5\times\frac{1-6i+9i^2}{10}=\frac{-8-6i}{2}=-4-3i$

답 **$-4-3i$**

0363 $x^3-2x^2y-2xy^2+y^3$

$=x^3+y^3-2xy(x+y)$

$=(x+y)^3-3xy(x+y)-2xy(x+y)$

$=(x+y)^3-5xy(x+y)$ …… ㉠

이때 $x=\frac{1+\sqrt{3}i}{2},\ y=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$에서

$x+y=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}+\frac{1-\sqrt{3}i}{2}=1$

$xy=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\times\frac{1-\sqrt{3}i}{2}=\frac{4}{4}=1$

따라서 ㉠에서

(주어진 식)$=1^3-5\times1\times1=-4$ 답 **-4**

0364 $z=(2+i)(x-i)=(2x+1)+(x-2)i$

(i) z^2이 양의 실수가 되려면 z는 0이 아닌 실수이어야 하므로

$2x+1\neq0,\ x-2=0\qquad\therefore x=2$

(ii) z^2이 음의 실수가 되려면 z는 순허수이어야 하므로

$2x+1=0,\ x-2\neq0\qquad\therefore x=-\frac{1}{2}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a=2$, $b=-\frac{1}{2}$이므로

$\frac{a}{b}=2\times(-2)=-4$ 답 -4

0365 $(1+2i)x+\frac{2-yi}{1-2i}$

$=x+2xi+\frac{(2-yi)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}$

$=x+2xi+\frac{(2+2y)+(4-y)i}{5}$

$=\frac{5x+2y+2}{5}+\frac{10x-y+4}{5}i$

즉 $\frac{5x+2y+2}{5}+\frac{10x-y+4}{5}i=3-2i$이므로

$(5x+2y+2)+(10x-y+4)i=15-10i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$5x+2y+2=15$, $10x-y+4=-10$

$\therefore 5x+2y=13$, $10x-y=-14$

두 식을 연립하여 풀면

$x=-\frac{3}{5}$, $y=8$

$\therefore 5x+y=5\times\left(-\frac{3}{5}\right)+8=5$ 답 5

다른 풀이 $(1+2i)x+\frac{2-yi}{1-2i}=3-2i$에서

$(1+2i)(1-2i)x+2-yi=(3-2i)(1-2i)$

$\therefore 5x+2-yi=-1-8i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$5x+2=-1$, $-y=-8$

$\therefore x=-\frac{3}{5}$, $y=8$

0366 $\bar{z}=-z$에서 z는 순허수 또는 0이어야 한다.

$z=x^2-(5-i)x+4-2i$

$=(x^2-5x+4)+(x-2)i$

에서 $x^2-5x+4=0$

$(x-1)(x-4)=0$ $\therefore x=1$ 또는 $x=4$

따라서 구하는 모든 실수 x의 값의 합은

$1+4=5$ 답 ⑤

0367 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$

$(1+i)z+2i\bar{z}=-1+3i$에서

$(1+i)(a+bi)+2i(a-bi)=-1+3i$

$a+bi+ai-b+2ai+2b=-1+3i$

$\therefore (a+b)+(3a+b)i=-1+3i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a+b=-1$, $3a+b=3$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-3$

$\therefore z=2-3i$

$\therefore z\bar{z}=(2-3i)(2+3i)=13$ 답 13

0368 $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2n}=\left\{\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}^n=\left(\frac{2i}{2}\right)^n=i^n$

따라서 $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2n}=1$에서

$i^n=1$

n이 4의 배수일 때 $i^n=1$이므로 50 이하의 자연수 n은

4, 8, 12, ⋯, 48

의 12개이다. 답 12

0369 $b<a<0$이므로

$a-b>0$, $b-a<0$, $-a>0$, $-b>0$

$\therefore \frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{b-a}}+\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{-a}}+\frac{\sqrt{-b}}{\sqrt{b}}$

$=-\sqrt{\frac{a-b}{b-a}}+\sqrt{\frac{a}{-a}}-\sqrt{\frac{-b}{b}}$

$=-\sqrt{-1}+\sqrt{-1}-\sqrt{-1}$

$=-i+i-i$

$=-i$ 답 ②

0370 ㄱ. $\overline{z-w}=\bar{z}-\bar{w}$ (참)

ㄴ. $z=i$이면 $z^2=-1$이므로 z^2은 실수이지만

$(z-1)^2=(i-1)^2=-2i$

이므로 $(z-1)^2$은 허수이다. (거짓)

ㄷ. $z=\bar{w}$이면 $\bar{z}=\overline{(\bar{w})}=w$

$z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $w=a-bi$이므로

$z+w=(a+bi)+(a-bi)=2a$

$zw=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$

따라서 $z+w$, zw는 모두 실수이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

0371 $\bar{\alpha}^2-\bar{\beta}^2=4+2i$이므로

$(\bar{\alpha}+\bar{\beta})(\bar{\alpha}-\bar{\beta})=4+2i$

$\overline{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}=4+2i$

$\therefore (\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\overline{4+2i}=4-2i$

이때 $\alpha+\beta=1+i$이므로

$(1+i)(\alpha-\beta)=4-2i$

$\therefore \alpha-\beta=\frac{4-2i}{1+i}=\frac{(4-2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}$

$=\frac{2-6i}{2}=1-3i$

즉 $\alpha+\beta=1+i$, $\alpha-\beta=1-3i$이므로 두 식을 연립하여 풀면

$\alpha=1-i$, $\beta=2i$

$\therefore 2\alpha+\beta=2(1-i)+2i=2$ 답 2

0372 $z=(1+i)x+(1-i)y-2+6i$

$=(x+y-2)+(x-y+6)i$

이므로

$\bar{z}=(x+y-2)-(x-y+6)i$ ⋯ 1단계

$z\bar{z}=0$에서

$\{(x+y-2)+(x-y+6)i\}\{(x+y-2)-(x-y+6)i\}$
$=0$

$\therefore (x+y-2)^2+(x-y+6)^2=0$

이때 x, y는 실수이므로

$x+y-2=0$, $x-y+6=0$

$\therefore x+y=2$, $x-y=-6$

두 식을 연립하여 풀면

$x=-2$, $y=4$ … 2단계

$\therefore x^2+y^2=(-2)^2+4^2=20$ … 3단계

답 **20**

채점 요소	비율
1단계 $\bar{z}$ 구하기	30 %
2단계 x, y의 값 구하기	50 %
3단계 x^2+y^2의 값 구하기	20 %

0373 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$이므로 $a<0$, $b<0$

$\dfrac{\sqrt{d}}{\sqrt{c}}=-\sqrt{\dfrac{d}{c}}$이므로 $c<0$, $d>0$ … 1단계

따라서 $b+c<0$, $a-d<0$이므로

$\sqrt{a^2}-|b|-\sqrt{c^2}+\sqrt{(b+c)^2}-|a-d|$
$=|a|-|b|-|c|+|b+c|-|a-d|$
$=-a+b+c-(b+c)+(a-d)$
$=-d$ … 2단계

답 $-d$

채점 요소	비율
1단계 a, b, c, d의 부호 구하기	40 %
2단계 주어진 식을 간단히 하기	60 %

0374 전략 z_2, z_3, z_4, z_5, …를 각각 구하여 z_n의 실수부분과 허수부분을 추정한다.

$z_1=1+2i$이므로

$z_2=\overline{z_1}+(1+i)=(1-2i)+(1+i)=2-i$
$z_3=\overline{z_2}+(1+i)=(2+i)+(1+i)=3+2i$
$z_4=\overline{z_3}+(1+i)=(3-2i)+(1+i)=4-i$
$z_5=\overline{z_4}+(1+i)=(4+i)+(1+i)=5+2i$
⋮

따라서 자연수 n에 대하여

$$z_n=\begin{cases} n+2i & (n\text{은 홀수}) \\ n-i & (n\text{은 짝수}) \end{cases}$$

$\therefore z_{100}=100-i$

답 $100-i$

0375 전략 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^n$, $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^n$의 규칙성을 파악하여 주어진 등식을 만족시키는 자연수 n의 조건을 구한다.

$z_1=\dfrac{\sqrt{2}}{1+i}$라 하면

$z_1^2=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^2=\dfrac{2}{2i}=-i$

$z_1^3=z_1^2\times z_1=-i\times\dfrac{\sqrt{2}}{1+i}=-i\times\dfrac{\sqrt{2}(1-i)}{(1+i)(1-i)}$
$=-\dfrac{\sqrt{2}(1+i)}{2}$

$z_1^4=(z_1^2)^2=(-i)^2=-1$

$z_1^5=z_1^4\times z_1=-z_1=-\dfrac{\sqrt{2}}{1+i}$

$z_1^6=z_1^4\times z_1^2=-z_1^2=i$

$z_1^7=z_1^4\times z_1^3=-z_1^3=\dfrac{\sqrt{2}(1+i)}{2}$

$z_1^8=(z_1^4)^2=(-1)^2=1$
⋮

$z_2=\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$라 하면

$z_2^2=\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^2=\dfrac{2+2\sqrt{3}i}{4}=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$

$z_2^3=z_2^2\times z_2=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}=\dfrac{4i}{4}=i$

$z_2^4=z_2^3\times z_2=i\times\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}=\dfrac{\sqrt{3}i-1}{2}$

$z_2^5=z_2^3\times z_2^2=i\times\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}=\dfrac{i-\sqrt{3}}{2}$

$z_2^6=(z_2^3)^2=i^2=-1$

$z_2^7=z_2^6\times z_2=-z_2=-\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$

$z_2^8=z_2^6\times z_2^2=-z_2^2=-\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$

$z_2^9=z_2^6\times z_2^3=-z_2^3=-i$

$z_2^{10}=z_2^6\times z_2^4=-z_2^4=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$

$z_2^{11}=z_2^6\times z_2^5=-z_2^5=\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}$

$z_2^{12}=(z_2^6)^2=(-1)^2=1$
⋮

따라서 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^n+\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^n=2$, 즉 $z_1^n+z_2^n=2$를 만족시키려면 $z_1^n=1$, $z_2^n=1$이어야 한다.

이때 $z_1^n=1$이려면 n은 8의 배수이어야 하고, $z_2^n=1$이려면 n은 12의 배수이어야 하므로 구하는 자연수 n의 최솟값은 8과 12의 최소공배수인 24이다.

답 **24**

04 복소수

05 이차방정식

교과서 문제 정복하기

본책 057쪽

0376 $x^2-5x+4=0$에서 $(x-1)(x-4)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=4$

답 $x=1$ 또는 $x=4$

0377 $10x^2-x-3=0$에서 $(2x+1)(5x-3)=0$

$\therefore x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{5}$

답 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{5}$

0378 $x^2+3x+1=0$에서

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\times1\times1}}{2\times1}=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$$

답 $x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$

0379 $x^2-8x+28=0$에서

$$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-1\times28}}{1}$$
$$=4\pm\sqrt{-12}=4\pm2\sqrt{3}i$$

답 $x=4\pm2\sqrt{3}i$

0380 $2x^2-7x-4=0$에서 $(2x+1)(x-4)=0$

$\therefore x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=4$

따라서 주어진 이차방정식의 근은 실근이다.

답 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=4$, 실근

0381 $4x^2-12x+9=0$에서 $(2x-3)^2=0$

$\therefore x=\frac{3}{2}$

따라서 주어진 이차방정식의 근은 실근이다.

답 $x=\frac{3}{2}$, 실근

0382 $x^2+2x+3=0$에서

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-1\times3}}{1}=-1\pm\sqrt{-2}=-1\pm\sqrt{2}i$$

따라서 주어진 이차방정식의 근은 허근이다.

답 $x=-1\pm\sqrt{2}i$, 허근

0383 각 이차방정식의 판별식을 D라 하면

ㄱ. $D=(-5)^2-4\times1\times2=17>0$

ㄴ. $D=(-3)^2-4\times1\times5=-11<0$

ㄷ. $\frac{D}{4}=(-3)^2-1\times9=0$

ㄹ. $\frac{D}{4}=(-10)^2-4\times25=0$

ㅁ. $D=(-3)^2-4\times2\times2=-7<0$

ㅂ. $\frac{D}{4}=4^2-1\times4=12>0$

(1) 서로 다른 두 실근을 가지면 $D>0$이므로 ㄱ, ㅂ

(2) 중근(서로 같은 두 실근)을 가지면 $D=0$이므로 ㄷ, ㄹ

(3) 서로 다른 두 허근을 가지면 $D<0$이므로 ㄴ, ㅁ

답 (1) ㄱ, ㅂ (2) ㄷ, ㄹ (3) ㄴ, ㅁ

0384 이차방정식 $x^2-3x+k=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-3)^2-4\times1\times k=9-4k$

(1) 서로 다른 두 실근을 가지려면 $D>0$이어야 하므로

$D=9-4k>0 \quad \therefore k<\frac{9}{4}$

(2) 중근을 가지려면 $D=0$이어야 하므로

$D=9-4k=0 \quad \therefore k=\frac{9}{4}$

(3) 서로 다른 두 허근을 가지려면 $D<0$이어야 하므로

$D=9-4k<0 \quad \therefore k>\frac{9}{4}$

답 (1) $k<\frac{9}{4}$ (2) $k=\frac{9}{4}$ (3) $k>\frac{9}{4}$

0385 이차방정식 $x^2+2x-2=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

(1) $\alpha+\beta=-2$

(2) $\alpha\beta=-2$

(3) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-2)^2-2\times(-2)=8$

(4) $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(-2)^2-4\times(-2)=12$

답 (1) -2 (2) -2 (3) 8 (4) 12

0386 $x^2-(-1+2)x+(-1)\times2=0$

$\therefore x^2-x-2=0$

답 $x^2-x-2=0$

0387 $x^2-\{(3+2\sqrt{2})+(3-2\sqrt{2})\}x$
$+(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})=0$

$\therefore x^2-6x+1=0$

답 $x^2-6x+1=0$

0388 $x^2-\{(2+i)+(2-i)\}x+(2+i)(2-i)=0$

$\therefore x^2-4x+5=0$

답 $x^2-4x+5=0$

0389 $x^2+2x-4=0$에서 근의 공식에 의하여

$x=-1\pm\sqrt{1^2-1\times(-4)}=-1\pm\sqrt{5}$

$\therefore x^2+2x-4=\{x-(-1+\sqrt{5})\}\{x-(-1-\sqrt{5})\}$
$=(x+1-\sqrt{5})(x+1+\sqrt{5})$

답 $(x+1-\sqrt{5})(x+1+\sqrt{5})$

0390 $x^2+25=0$에서 $x^2=-25$

$\therefore x=\pm\sqrt{-25}=\pm5i$

$\therefore x^2+25=(x+5i)(x-5i)$

답 $(x+5i)(x-5i)$

0391 $2x^2-3x+2=0$에서 근의 공식에 의하여

$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\times2\times2}}{2\times2}=\frac{3\pm\sqrt{-7}}{4}$$
$$=\frac{3\pm\sqrt{7}i}{4}$$

$\therefore 2x^2-3x+2=2\left(x-\frac{3+\sqrt{7}i}{4}\right)\left(x-\frac{3-\sqrt{7}i}{4}\right)$

답 $2\left(x-\frac{3+\sqrt{7}i}{4}\right)\left(x-\frac{3-\sqrt{7}i}{4}\right)$

0392 a, b가 유리수이고 주어진 이차방정식의 한 근이 $2+\sqrt{3}$이므로 다른 한 근은 $2-\sqrt{3}$이다.
따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=-a$, $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=b$
$\therefore a=-4$, $b=1$ 답 $a=-4$, $b=1$

다른 풀이 $x^2+ax+b=0$에 $x=2+\sqrt{3}$을 대입하면
$(2+\sqrt{3})^2+a(2+\sqrt{3})+b=0$
$\therefore (2a+b+7)+(a+4)\sqrt{3}=0$
a, b가 유리수이므로
$2a+b+7=0$, $a+4=0$
$\therefore a=-4$, $b=1$

0393 a, b가 실수이고 주어진 이차방정식의 한 근이 $3+2i$이므로 다른 한 근은 $3-2i$이다.
따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$(3+2i)+(3-2i)=-a$, $(3+2i)(3-2i)=b$
$\therefore a=-6$, $b=13$ 답 $a=-6$, $b=13$

다른 풀이 $x^2+ax+b=0$에 $x=3+2i$를 대입하면
$(3+2i)^2+a(3+2i)+b=0$
$\therefore (3a+b+5)+(2a+12)i=0$
a, b가 실수이므로
$3a+b+5=0$, $2a+12=0$
$\therefore a=-6$, $b=13$

유형 익히기

● 본책 058~065쪽

0394 $(x-5)(x-3)=-x(x+4)$에서
$x^2-8x+15=-x^2-4x$, $2x^2-4x+15=0$
$\therefore x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-2\times 15}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{26}i}{2}$

답 ④

0395 $3x^2-7x+5=0$에서
$x=\frac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4\times 3\times 5}}{2\times 3}=\frac{7\pm\sqrt{11}i}{6}$
따라서 $a=7$, $b=11$이므로
$a+b=7+11=18$ 답 18

0396 $(x\circledcirc x)-(x\circledcirc 1)=4$에서
$x^2-x-x-(x-x-1)=4$
$x^2-2x-3=0$, $(x+1)(x-3)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$
따라서 모든 실수 x의 값의 합은
$-1+3=2$ 답 ④

0397 주어진 방정식의 양변에 $\sqrt{2}+1$을 곱하면
$(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)x^2-(\sqrt{2}+1)(3-\sqrt{2})x+\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)=0$
$x^2-(1+2\sqrt{2})x+\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)=0$
$(x-\sqrt{2})(x-\sqrt{2}-1)=0$
$\therefore x=\sqrt{2}$ 또는 $x=\sqrt{2}+1$
이때 $\alpha>\beta$이므로 $\alpha=\sqrt{2}+1$, $\beta=\sqrt{2}$
$\therefore \alpha-\beta=(\sqrt{2}+1)-\sqrt{2}=1$ 답 1

참고 | x^2의 계수가 무리수인 이차방정식은 먼저 x^2의 계수를 유리화한다.

0398 이차방정식 $kx^2+ax+(k+1)b=0$의 한 근이 1이므로
$k+a+(k+1)b=0$ $\therefore (1+b)k+a+b=0$
이 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로
$1+b=0$, $a+b=0$
$\therefore a=1$, $b=-1$
$\therefore a-b=1-(-1)=2$

답 2

RPM 비법 노트

다음은 모두 k에 대한 항등식을 나타낸다.
① k의 값에 관계없이 항상 성립하는 등식
② 모든 k에 대하여 성립하는 등식
③ 임의의 k에 대하여 성립하는 등식
④ 어떤 k의 값에 대하여도 항상 성립하는 등식

0399 이차방정식 $x^2+(k+2)x-2k=0$의 한 근이 1이므로
$1+k+2-2k=0$ $\therefore k=3$ … 1단계
$k=3$을 주어진 방정식에 대입하면
$x^2+5x-6=0$, $(x+6)(x-1)=0$
$\therefore x=-6$ 또는 $x=1$
따라서 다른 한 근은 -6이므로 $a=-6$ … 2단계
$\therefore k+a=3+(-6)=-3$ … 3단계

답 -3

채점 요소		비율
1단계	k의 값 구하기	40 %
2단계	a의 값 구하기	40 %
3단계	$k+a$의 값 구하기	20 %

0400 이차방정식 $x^2-ax+2\sqrt{3}=0$의 한 근이 $1+\sqrt{3}$이므로
$(1+\sqrt{3})^2-a(1+\sqrt{3})+2\sqrt{3}=0$
$1+2\sqrt{3}+3-a(1+\sqrt{3})+2\sqrt{3}=0$
$a(1+\sqrt{3})=4+4\sqrt{3}$
$\therefore a=\frac{4+4\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}=\frac{4(1+\sqrt{3})}{1+\sqrt{3}}=4$ 답 ④

0401 이차방정식 $x^2-2x-1=0$의 한 근이 α이므로

$\alpha^2-2\alpha-1=0$

이때 $\alpha\neq0$이므로 양변을 α로 나누면

$\alpha-2-\frac{1}{\alpha}=0 \qquad \therefore\ \alpha-\frac{1}{\alpha}=2$

$\therefore\ \alpha^3-\frac{1}{\alpha^3}=\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)^3+3\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)$

$=2^3+3\times2=14$

답 **14**

0402 $x^2-|x-2|-4=0$에서

(i) $x<2$일 때, $\quad x^2+(x-2)-4=0$

$x^2+x-6=0, \quad (x+3)(x-2)=0$

$\therefore\ x=-3$ 또는 $x=2$

그런데 $x<2$이므로 $\quad x=-3$

(ii) $x\geq2$일 때, $\quad x^2-(x-2)-4=0$

$x^2-x-2=0, \quad (x+1)(x-2)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=2$

그런데 $x\geq2$이므로 $\quad x=2$

(i), (ii)에서 $\quad x=-3$ 또는 $x=2$

따라서 모든 근의 합은 $\quad -3+2=-1$

답 **-1**

0403 $x^2-2|x|-2=0$에서

(i) $x<0$일 때, $\quad x^2+2x-2=0 \qquad \therefore\ x=-1\pm\sqrt{3}$

그런데 $x<0$이므로 $\quad x=-1-\sqrt{3}$

(ii) $x\geq0$일 때, $\quad x^2-2x-2=0 \qquad \therefore\ x=1\pm\sqrt{3}$

그런데 $x\geq0$이므로 $\quad x=1+\sqrt{3}$

(i), (ii)에서 $\quad x=-1-\sqrt{3}$ 또는 $x=1+\sqrt{3}$

답 **$x=-1-\sqrt{3}$ 또는 $x=1+\sqrt{3}$**

다른 풀이 $x^2=|x|^2$이므로 $x^2-2|x|-2=0$에서

$|x|^2-2|x|-2=0 \qquad \therefore\ |x|=1\pm\sqrt{3}$

그런데 $|x|\geq0$이므로 $\quad |x|=1+\sqrt{3}$

$\therefore\ x=-1-\sqrt{3}$ 또는 $x=1+\sqrt{3}$

0404 $|x^2+2x|=3$에서 $\quad x^2+2x=\pm3$

(i) $x^2+2x=3$일 때, $\quad x^2+2x-3=0$

$(x+3)(x-1)=0 \qquad \therefore\ x=-3$ 또는 $x=1$

(ii) $x^2+2x=-3$일 때, $\quad x^2+2x+3=0$

$\therefore\ x=-1\pm\sqrt{2}i$

그런데 x는 실수이어야 하므로 해가 아니다.

(i), (ii)에서 $\quad x=-3$ 또는 $x=1$

따라서 모든 실근의 곱은 $\quad -3\times1=-3$

답 ③

0405 $x^2-|x|-2=\sqrt{(x-1)^2}$에서

$x^2-|x|-2=|x-1|$

(i) $x<0$일 때, $\quad x^2+x-2=-(x-1)$

$x^2+2x-3=0, \quad (x+3)(x-1)=0$

$\therefore\ x=-3$ 또는 $x=1$

그런데 $x<0$이므로 $\quad x=-3$

(ii) $0\leq x<1$일 때, $\quad x^2-x-2=-(x-1)$

$x^2=3 \qquad \therefore\ x=\pm\sqrt{3}$

그런데 $0\leq x<1$이므로 $x=\pm\sqrt{3}$은 해가 아니다.

(iii) $x\geq1$일 때, $\quad x^2-x-2=x-1$

$x^2-2x-1=0 \qquad \therefore\ x=1\pm\sqrt{2}$

그런데 $x\geq1$이므로 $\quad x=1+\sqrt{2}$

이상에서 $\quad x=-3$ 또는 $x=1+\sqrt{2}$

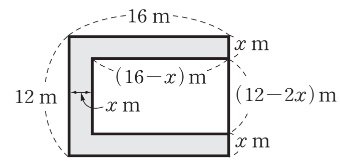
따라서 모든 근의 합은

$-3+(1+\sqrt{2})=-2+\sqrt{2}$

답 **$-2+\sqrt{2}$**

참고 | 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값이 2개이므로 x의 값의 범위를 세 구간으로 나눈다.

0406 잔디가 깔리지 않는 땅의 넓이가 78 m^2이므로



$(16-x)(12-2x)=78$

$x^2-22x+57=0$

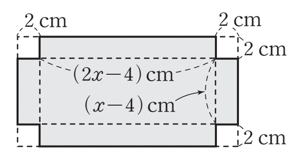
$(x-3)(x-19)=0$

$\therefore\ x=3$ 또는 $x=19$

그런데 $0<x<6$이므로 $\quad x=3$

답 **3**

0407 직사각형 모양의 종이의 세로의 길이를 x cm라 하면 가로의 길이는 $2x$ cm이다.



이때 직육면체 모양의 상자의 부피가 192 cm^3이므로

$2(2x-4)(x-4)=192, \quad x^2-6x-40=0$

$(x+4)(x-10)=0 \qquad \therefore\ x=-4$ 또는 $x=10$

그런데 $x>4$이므로 $\quad x=10$

따라서 처음 종이의 가로의 길이는 20 cm, 세로의 길이는 10 cm이므로 구하는 넓이는

$20\times10=200\,(cm^2)$

답 **200 cm^2**

0408 처음 물건의 가격을 a라 하면 x % 인상한 가격은

$a\left(1+\frac{x}{100}\right)$

다시 x % 인하한 가격은 $\quad a\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1-\frac{x}{100}\right)$

이 가격이 처음 물건의 가격 a보다 9 % 낮으므로

$a\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1-\frac{x}{100}\right)=a\left(1-\frac{9}{100}\right)$

$1-\frac{x^2}{10000}=1-\frac{9}{100}, \qquad \frac{x^2}{10000}=\frac{9}{100}$

$x^2=900 \qquad \therefore\ x=\pm30$

그런데 $x>0$이므로 $\quad x=30$

답 ③

다른 풀이 x % 인상한 후 다시 x % 인하한 가격이 9 % 인하한 가격과 같으므로

$\frac{x}{100}\times\left(-\frac{x}{100}\right)=-\frac{9}{100}, \qquad x^2=900 \qquad \therefore\ x=\pm30$

그런데 $x>0$이므로 $\quad x=30$

0409 이차방정식 $x^2-5x+k+2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-5)^2-4\times1\times(k+2)>0$

$17-4k>0 \quad \therefore k<\frac{17}{4}$

따라서 가장 큰 정수 k의 값은 4이다. 답 ②

0410 이차방정식 $(m^2+10)x^2+2(m+1)x+1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(m+1)^2-(m^2+10)<0$

$2m-9<0 \quad \therefore m<\frac{9}{2}$

따라서 자연수 m은 1, 2, 3, 4의 4개이다. 답 ④

0411 이차방정식 $(x-1)^2-k(2x-1)+12=0$, 즉 $x^2-2(k+1)x+k+13=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(k+1)\}^2-(k+13)=0$

$k^2+k-12=0, \quad (k+4)(k-3)=0$

$\therefore k=-4$ 또는 $k=3$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은

$-4+3=-1$ 답 **−1**

0412 이차방정식 $x^2-2(k-a)x+(k^2-6k+b)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(k-a)\}^2-(k^2-6k+b)=0$

$k^2-2ak+a^2-k^2+6k-b=0$

$\therefore (-2a+6)k+a^2-b=0$

이 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$-2a+6=0,\ a^2-b=0 \quad \therefore a=3,\ b=9$

$\therefore a+b=3+9=12$ 답 **12**

0413 이차방정식 $x^2+ax+3-a=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=a^2-4\times1\times(3-a)=0$

$a^2+4a-12=0, \quad (a+6)(a-2)=0$

$\therefore a=2\ (\because a>0)$

$a=2$를 $2x^2-ax+a+1=0$에 대입하면

$2x^2-2x+3=0$ …… ㉠

이차방정식 ㉠의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=(-1)^2-2\times3=-5<0$

따라서 ㉠은 서로 다른 두 허근을 갖는다. 답 ③

0414 이차방정식 $x^2+6x-a=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=3^2-(-a)<0$

$\therefore a<-9$ …… ㉠ … 1단계

이차방정식 $x^2+3x-(a+1)=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=3^2-4\times1\times\{-(a+1)\}=4a+13$

이때 ㉠에서 $4a+13<-23$이므로

$D_2<0$ … 2단계

따라서 이차방정식 $x^2+3x-(a+1)=0$은 서로 다른 두 허근을 갖는다. … 3단계

답 **서로 다른 두 허근**

	채점 요소	비율
1단계	a의 값의 범위 구하기	30 %
2단계	이차방정식 $x^2+3x-(a+1)=0$의 판별식의 부호 알기	50 %
3단계	이차방정식 $x^2+3x-(a+1)=0$의 근을 판별하기	20 %

0415 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$이므로

$a<0,\ b<0$ …… ㉠

이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-4b$

이때 ㉠에서 $a^2>0,\ -4b>0$이므로

$D=a^2-4b>0$

따라서 이차방정식 $x^2+ax+b=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다. 답 **서로 다른 두 실근**

0416 주어진 식이 x에 대한 이차식이므로

$k+1\neq0 \quad \therefore k\neq-1$

또 주어진 이차식이 완전제곱식이 되려면 x에 대한 이차방정식 $(k+1)x^2+(2k+3)x+k+3=0$의 판별식을 D라 할 때

$D=(2k+3)^2-4(k+1)(k+3)=0$

$-4k-3=0 \quad \therefore k=-\frac{3}{4}$ 답 ①

0417 주어진 식이 x에 대한 이차식이므로

$a\neq0$

또 주어진 이차식이 완전제곱식이 되려면 x에 대한 이차방정식 $ax^2+2(k-1)x+k^2-bk+a=0$의 판별식을 D라 할 때

$\frac{D}{4}=(k-1)^2-a(k^2-bk+a)=0$

$k^2-2k+1-ak^2+abk-a^2=0$

$\therefore (1-a)k^2+(ab-2)k+1-a^2=0$

이 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$1-a=0,\ ab-2=0,\ 1-a^2=0$

$\therefore a=1,\ b=2$

$\therefore a+b=1+2=3$ 답 **3**

0418 주어진 이차식이 $(x-n)^2$으로 인수분해되려면 x에 대한 이차방정식 $x^2-mx+2m+5=0$의 판별식을 D라 할 때

$D=(-m)^2-4\times1\times(2m+5)=0$

$m^2-8m-20=0, \quad (m+2)(m-10)=0$

$\therefore m=10\ (\because m>0)$

따라서 주어진 이차식은 $x^2-10x+25$이고, 이것은 $(x-5)^2$으로 인수분해되므로 $n=5$

$\therefore m+n=10+5=15$ 답 ⑤

0419 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3,\ \alpha\beta=1$

$\therefore\ \alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=3^3-3\times1\times3=18$

답 18

0420 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=\dfrac{1}{4}$

① $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\dfrac{2}{\frac{1}{4}}=8$

② $(2\alpha-1)(2\beta-1)=4\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+1$

$=4\times\dfrac{1}{4}-2\times2+1=-2$

③ $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=2^2-2\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{7}{2}$

④ $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=2^2-4\times\dfrac{1}{4}=3$

$\therefore\ |\alpha-\beta|=\sqrt{3}$

⑤ $\dfrac{1}{1+\alpha}+\dfrac{1}{1+\beta}=\dfrac{1+\beta+1+\alpha}{(1+\alpha)(1+\beta)}=\dfrac{(\alpha+\beta)+2}{1+(\alpha+\beta)+\alpha\beta}$

$=\dfrac{2+2}{1+2+\frac{1}{4}}=\dfrac{16}{13}$

답 ⑤

0421 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2,\ \alpha\beta=\dfrac{3}{2}$

$\therefore\ \dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\dfrac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}$

$=\dfrac{(-2)^2-2\times\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}}=\dfrac{2}{3}$

답 $\dfrac{2}{3}$

0422 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=9,\ \alpha\beta=4$ …… ㉠

$\therefore\ (\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2$

$=\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}$

$=\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}$ ($\because$ ㉠에서 $\alpha>0,\ \beta>0$)

$=9+2\sqrt{4}=13$

$\therefore\ \sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{13}$

답 $\sqrt{13}$

0423 이차방정식 $x^2-2x-4=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로

$\alpha^2-2\alpha-4=0,\ \beta^2-2\beta-4=0$

$\therefore\ \alpha^2-3\alpha+1=-\alpha+5,\ \beta^2-3\beta+1=-\beta+5$

$\therefore\ (\alpha^2-3\alpha+1)(\beta^2-3\beta+1)$

$=(-\alpha+5)(-\beta+5)$

$=\alpha\beta-5(\alpha+\beta)+25$ …… ㉠

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=-4$

따라서 ㉠에서

(주어진 식)$=-4-5\times2+25=11$

답 ③

0424 α가 주어진 이차방정식의 근이므로

$\alpha^2-7\alpha+5=0 \qquad \therefore\ \alpha^2=7\alpha-5$

$\therefore\ \alpha^2+7\beta=(7\alpha-5)+7\beta=7(\alpha+\beta)-5$ …… ㉠

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=7$

따라서 ㉠에서

$\alpha^2+7\beta=7\times7-5=44$

답 44

0425 이차방정식 $x^2+4x+8=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로

$\alpha^2+4\alpha+8=0,\ \beta^2+4\beta+8=0$

$\therefore\ \alpha^2=-4\alpha-8,\ \beta^2=-4\beta-8$

$\therefore\ \alpha^2+2\beta^2-2\alpha+2\beta+5$

$=(-4\alpha-8)+2(-4\beta-8)-2\alpha+2\beta+5$

$=-6\alpha-6\beta-19$

$=-6(\alpha+\beta)-19$ …… ㉠

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-4$

따라서 ㉠에서

(주어진 식)$=-6\times(-4)-19=5$

답 ③

0426 이차방정식 $x^2-5x+2=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로

$\alpha^2-5\alpha+2=0,\ \beta^2-5\beta+2=0$

$\therefore\ \alpha^2-4\alpha+2=\alpha,\ \beta^2-4\beta+2=\beta$

$\therefore\ \dfrac{\beta}{\alpha^2-4\alpha+2}+\dfrac{\alpha}{\beta^2-4\beta+2}$

$=\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}$

$=\dfrac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}$ …… ㉠ … 1단계

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=5,\ \alpha\beta=2$ … 2단계

따라서 ㉠에서

(주어진 식)$=\dfrac{5^2-2\times2}{2}=\dfrac{21}{2}$ … 3단계

답 $\dfrac{21}{2}$

	채점 요소	비율
1단계	주어진 식을 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$에 대한 식으로 나타내기	60 %
2단계	$\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값 구하기	30 %
3단계	주어진 식의 값 구하기	10 %

0427 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=k+1,\ \alpha\beta=k-1$

$\therefore\ (\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$=(k+1)^2-4(k-1)$

$=k^2-2k+5$

따라서 $(\alpha-\beta)^2=5$에서 $\quad k^2-2k+5=5$

$k^2-2k=0, \qquad k(k-2)=0$

$\therefore\ k=2$ ($\because\ k>0$)

답 2

0428 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2k-1,\ \alpha\beta=k$

$$\begin{aligned}\therefore\ \alpha^2\beta+\alpha+\alpha\beta^2+\beta&=\alpha\beta(\alpha+\beta)+(\alpha+\beta)\\&=(\alpha+\beta)(\alpha\beta+1)\\&=(2k-1)(k+1)\\&=2k^2+k-1\end{aligned}$$

$\alpha^2\beta+\alpha+\alpha\beta^2+\beta=9$에서

$2k^2+k-1=9,\qquad 2k^2+k-10=0$

$(2k+5)(k-2)=0$

$\therefore\ k=2$ ($\because$ k는 정수) 답 ②

0429 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-3,\ \alpha\beta=k$

$|\alpha|+|\beta|=7$의 양변을 제곱하면

$|\alpha|^2+2|\alpha||\beta|+|\beta|^2=49,\qquad \alpha^2+2|\alpha\beta|+\beta^2=49$

$(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+2|\alpha\beta|=49$

$(-3)^2-2k+2|k|=49$

$\therefore\ |k|-k=20$

(i) $k<0$일 때, $\qquad -k-k=20\qquad \therefore\ k=-10$

(ii) $k\geq0$일 때, $|k|-k=0$이므로 등식을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $\qquad k=-10$ 답 -10

0430 주어진 이차방정식의 두 근을 2α, 3α ($\alpha\neq0$)라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$2\alpha+3\alpha=k+1$이므로 $\qquad k=5\alpha-1$ …… ㉠

$2\alpha\times3\alpha=k$이므로 $\qquad k=6\alpha^2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$5\alpha-1=6\alpha^2,\qquad 6\alpha^2-5\alpha+1=0$

$(2\alpha-1)(3\alpha-1)=0$

$\therefore\ \alpha=\frac{1}{2}$ 또는 $\alpha=\frac{1}{3}$ …… ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면 $\qquad k=\frac{3}{2}$ 또는 $k=\frac{2}{3}$

따라서 모든 실수 k의 값의 곱은

$\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}=1$ 답 1

0431 이차방정식 $x^2+2x+m^2-2m=0$의 두 근을 α, $\alpha+2$라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(\alpha+2)=-2,\ \alpha(\alpha+2)=m^2-2m$

$\alpha+(\alpha+2)=-2$에서 $\qquad 2\alpha=-4\qquad \therefore\ \alpha=-2$

$\alpha=-2$를 $\alpha(\alpha+2)=m^2-2m$에 대입하면

$m^2-2m=0,\qquad m(m-2)=0$

$\therefore\ m=2$ ($\because$ $m\neq0$)

$m=2$를 $3x^2-mx+4m+1=0$에 대입하면

$3x^2-2x+9=0$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 두 근의 곱은 3이다. 답 ⑤

다른 풀이 이차방정식 $x^2+2x+m^2-2m=0$의 두 근을 α, β ($\alpha>\beta$)라 하면

$\alpha-\beta=2$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2,\ \alpha\beta=m^2-2m$

이때 $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$이므로

$2^2=(-2)^2-4(m^2-2m),\qquad m^2-2m=0$

$m(m-2)=0\qquad \therefore\ m=2$ ($\because$ $m\neq0$)

0432 주어진 이차방정식의 두 근을 α, $\alpha+1$ (α는 자연수)이라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(\alpha+1)=m$이므로 $\qquad m=2\alpha+1$ …… ㉠

$\alpha(\alpha+1)=m+1$이므로 $\qquad m=\alpha^2+\alpha-1$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$2\alpha+1=\alpha^2+\alpha-1,\qquad \alpha^2-\alpha-2=0$

$(\alpha+1)(\alpha-2)=0$

$\therefore\ \alpha=2$ ($\because$ α는 자연수)

$\alpha=2$를 ㉠에 대입하면

$m=5$ 답 5

0433 주어진 이차방정식의 두 근을 α, $-\alpha$ ($\alpha\neq0$)라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(-\alpha)=-\frac{m^2+m-6}{3}$ …… ㉠

$\alpha\times(-\alpha)=\frac{-m+1}{3}$ …… ㉡

㉠에서 $\qquad m^2+m-6=0,\qquad (m+3)(m-2)=0$

$\therefore\ m=-3$ 또는 $m=2$ …… ㉢

㉡에서 $-\alpha^2<0$이므로

$\frac{-m+1}{3}<0\qquad \therefore\ m>1$ …… ㉣

㉢, ㉣에서 $\qquad m=2$ 답 2

참고 | 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 실근 α, β의 절댓값이 같고 부호가 서로 다르면

$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=0,\ \alpha\beta=\frac{c}{a}<0$

0434 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-a,\ \alpha\beta=b$ …… ㉠

이차방정식 $x^2+bx+a=0$의 두 근이 $\alpha+1$, $\beta+1$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$(\alpha+1)+(\beta+1)=-b,\ (\alpha+1)(\beta+1)=a$

$\therefore\ (\alpha+\beta)+2=-b,\ \alpha\beta+(\alpha+\beta)+1=a$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$-a+2=-b,\ b-a+1=a$

$\therefore\ a-b=2,\ 2a-b=1$

두 식을 연립하여 풀면 $\qquad a=-1,\ b=-3$

$\therefore\ ab=-1\times(-3)=3$ 답 3

05 이차방정식

0435 이차방정식 $x^2-ax+5=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=a$, $\alpha\beta=5$ …… ㉠

이차방정식 $x^2+bx+15=0$의 두 근이 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$(\alpha+\beta)+\alpha\beta=-b$, $(\alpha+\beta)\alpha\beta=15$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$a+5=-b$, $a\times5=15$

$\therefore a=3$, $b=-8$

$\therefore a-b=3-(-8)=11$

답 ②

0436 이차방정식 $x^2+3x+1=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-3$, $\alpha\beta=1$ …… ㉠

이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 $\alpha-\frac{1}{\alpha}$, $\beta-\frac{1}{\beta}$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)+\left(\beta-\frac{1}{\beta}\right)=-a,\ \left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)\left(\beta-\frac{1}{\beta}\right)=b$$

$$\therefore \alpha+\beta-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)=\alpha+\beta-\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=-a,$$

$$\alpha\beta-\left(\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}-\frac{1}{\alpha\beta}\right)$$

$$=\alpha\beta-\frac{\alpha^2+\beta^2-1}{\alpha\beta}$$

$$=\alpha\beta-\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta-1}{\alpha\beta}=b \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$-3-\frac{-3}{1}=-a,\ 1-\frac{(-3)^2-2\times1-1}{1}=b$$

$\therefore a=0$, $b=-5$

$\therefore a+b=0+(-5)=-5$

답 ②

0437 이차방정식 $x^2-5x+3=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=5$, $\alpha\beta=3$

$$\therefore (3-\alpha)+(3-\beta)=6-(\alpha+\beta)=6-5=1$$

$$(3-\alpha)(3-\beta)=9-3(\alpha+\beta)+\alpha\beta=9-3\times5+3=-3$$

따라서 $3-\alpha$, $3-\beta$를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2-x-3=0$

답 ③

0438 이차방정식 $2x^2+3x+1=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\frac{3}{2}$, $\alpha\beta=\frac{1}{2}$

$$\therefore \left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)+\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)=\alpha+\beta+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=-\frac{3}{2}+\frac{-\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}=-\frac{9}{2}$$

$$\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)=\alpha\beta+\frac{1}{\alpha\beta}+2=\frac{1}{2}+2+2=\frac{9}{2}$$

따라서 $\alpha+\frac{1}{\beta}$, $\beta+\frac{1}{\alpha}$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 2인 이차방정식은

$$2\left(x^2+\frac{9}{2}x+\frac{9}{2}\right)=0 \qquad \therefore 2x^2+9x+9=0$$

즉 $a=9$, $b=9$이므로

$a+b=9+9=18$

답 **18**

0439 이차방정식 $x^2-2x-1=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=-1$ … 1단계

$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=2^2-2\times(-1)=6$

$\alpha^2\beta^2=(\alpha\beta)^2=(-1)^2=1$ … 2단계

따라서 α^2, β^2을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2-6x+1=0$ $\qquad\therefore a=-6$, $b=1$ … 3단계

답 $\boldsymbol{a=-6}$, $\boldsymbol{b=1}$

채점 요소		비율
1단계	$\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값 구하기	20 %
2단계	$\alpha^2+\beta^2$, $\alpha^2\beta^2$의 값 구하기	40 %
3단계	a, b의 값 구하기	40 %

0440 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 2, α이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$2+\alpha=-a$, $2\alpha=b$

$\therefore a=-2-\alpha$, $b=2\alpha$ …… ㉠

이차방정식 $x^2-(a+1)x+b-1=0$의 두 근이 1, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$1+\beta=a+1$, $\beta=b-1$

$\therefore a=\beta$, $b=\beta+1$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\quad -2-\alpha=\beta$, $2\alpha=\beta+1$

$\therefore \alpha+\beta=-2$, $2\alpha-\beta=1$

두 식을 연립하여 풀면 $\quad \alpha=-\frac{1}{3}$, $\beta=-\frac{5}{3}$

따라서 $-\frac{1}{3}$, $-\frac{5}{3}$를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 9인 이차방정식은

$$9\left[x^2-\left\{-\frac{1}{3}+\left(-\frac{5}{3}\right)\right\}x+\left(-\frac{1}{3}\right)\times\left(-\frac{5}{3}\right)\right]=0$$

$\therefore 9x^2+18x+5=0$

즉 $p=18$, $q=5$이므로

$p-q=18-5=13$

답 **13**

0441 a, b가 유리수이므로 이차방정식 $x^2+ax+2b=0$의 한 근이 $3+\sqrt{5}$이면 다른 한 근은 $3-\sqrt{5}$이다.
따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(3+\sqrt{5})+(3-\sqrt{5})=-a,\ (3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})=2b$$

$\therefore\ a=-6,\ b=2$

$\therefore\ a-b=-6-2=-8$

답 ①

0442 m, n이 실수이므로 이차방정식 $x^2+mx+n=0$의 한 근이 $-1-i$이면 다른 한 근은 $-1+i$이다.
따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(-1-i)+(-1+i)=-m,\ (-1-i)(-1+i)=n$$

$\therefore\ m=2,\ n=2$

이때 $\frac{1}{m}$, n, 즉 $\frac{1}{2}$, 2를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 2인 이차방정식은

$$2\left\{x^2-\left(\frac{1}{2}+2\right)x+\frac{1}{2}\times 2\right\}=0 \qquad \therefore\ 2x^2-5x+2=0$$

답 $\boldsymbol{2x^2-5x+2=0}$

0443 $\frac{1}{1-i}=\frac{1+i}{(1-i)(1+i)}=\frac{1+i}{2}$

a, b가 실수이므로 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $\frac{1+i}{2}$이면 다른 한 근은 $\frac{1-i}{2}$이다. … 1단계

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{1+i}{2}+\frac{1-i}{2}=-a,\ \frac{1+i}{2}\times\frac{1-i}{2}=b$$

$\therefore\ a=-1,\ b=\frac{1}{2}$

$\therefore\ f(x)=x^2-x+\frac{1}{2}$ … 2단계

따라서 다항식 $f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는

$f(2)=4-2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$ … 3단계

답 $\frac{5}{2}$

채점 요소	비율
1단계 주어진 이차방정식의 다른 한 근 구하기	30 %
2단계 $f(x)$ 구하기	40 %
3단계 $f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지 구하기	30 %

0444 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$x^2+(y-1)x-6y^2+7y-k$$

x에 대한 이차방정식 $x^2+(y-1)x-6y^2+7y-k=0$의 판별식을 D라 하면

$$\begin{aligned}D&=(y-1)^2-4(-6y^2+7y-k)\\&=25y^2-30y+4k+1\end{aligned}$$

이때 주어진 식이 x, y에 대한 두 일차식의 곱으로 인수분해되려면 D가 완전제곱식이어야 한다.
따라서 y에 대한 이차방정식 $25y^2-30y+4k+1=0$의 판별식을 D'이라 하면

$$\frac{D'}{4}=(-15)^2-25(4k+1)=0, \qquad 225-100k-25=0$$

$100k=200 \qquad \therefore\ k=2$

답 2

0445 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$2x^2-(3y+3)x+ay^2+y+1$$

x에 대한 이차방정식 $2x^2-(3y+3)x+ay^2+y+1=0$의 판별식을 D라 하면

$$\begin{aligned}D&=\{-(3y+3)\}^2-4\times 2\times(ay^2+y+1)\\&=(9-8a)y^2+10y+1\end{aligned}$$

이때 주어진 식이 x, y에 대한 두 일차식의 곱으로 인수분해되려면 D가 완전제곱식이어야 한다.

즉 $9-8a\neq 0$에서 $\quad a\neq\frac{9}{8}$

y에 대한 이차방정식 $(9-8a)y^2+10y+1=0$의 판별식을 D'이라 하면

$$\frac{D'}{4}=5^2-(9-8a)=0, \qquad 25-9+8a=0$$

$8a=-16 \qquad \therefore\ a=-2$

답 -2

0446 소라는 a와 c를 바르게 보고 풀었으므로

$$\frac{c}{a}=-3\times 4=-12$$

$\therefore\ c=-12a$

민혁이는 a와 b를 바르게 보고 풀었으므로

$$-\frac{b}{a}=(-2+\sqrt{5})+(-2-\sqrt{5})=-4$$

$\therefore\ b=4a$

따라서 주어진 이차방정식은

$$ax^2+4ax-12a=0$$

$a\neq 0$이므로 $\quad x^2+4x-12=0$

$(x+6)(x-2)=0 \qquad \therefore\ x=-6$ 또는 $x=2$

답 $\boldsymbol{x=-6}$ **또는** $\boldsymbol{x=2}$

0447 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 근의 공식을 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{2a}$로 잘못 적용하여 얻은 두 근이 -6, 1이므로

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-ac}}{2a}=-6+1,$$

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-ac}}{2a}\times\frac{-b-\sqrt{b^2-ac}}{2a}=-6\times 1$$

$$-\frac{b}{a}=-5,\ \frac{c}{4a}=-6$$

$\therefore\ b=5a,\ c=-24a$

따라서 주어진 이차방정식은

$$ax^2+5ax-24a=0$$

$a\neq 0$이므로 $\quad x^2+5x-24=0$

$(x+8)(x-3)=0 \qquad \therefore\ x=-8$ 또는 $x=3$

답 $\boldsymbol{x=-8}$ **또는** $\boldsymbol{x=3}$

다른 풀이 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근의 공식은

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

이므로 잘못 적용한 근의 공식은 c의 값을 $\frac{1}{4}c$로 잘못 대입한 것과 같다.

이때 -6, 1을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 a인 이차방정식은

$$a\{x^2-(-6+1)x+(-6)\times1\}=0$$

$$\therefore ax^2+5ax-6a=0$$

따라서 주어진 방정식의 상수항은 $-6a\times4=-24a$이므로 주어진 방정식은

$$ax^2+5ax-24a=0$$

0448 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을 α, β라 하면

$$\alpha+\beta=5$$

$f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$이므로 $f(3x+1)=0$이려면

$3x+1=\alpha$ 또는 $3x+1=\beta$

$\therefore x=\frac{\alpha-1}{3}$ 또는 $x=\frac{\beta-1}{3}$

따라서 이차방정식 $f(3x+1)=0$의 두 근의 합은

$$\frac{\alpha-1}{3}+\frac{\beta-1}{3}=\frac{\alpha+\beta-2}{3}=\frac{5-2}{3}=1$$

답 **1**

다른 풀이 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을 α, β라 하면

$$f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)\ (a\neq0)$$

로 놓을 수 있다.

이때 $f(3x+1)=a(3x+1-\alpha)(3x+1-\beta)$이므로

$f(3x+1)=0$에서

$$(3x+1-\alpha)(3x+1-\beta)=0$$

$\therefore x=\frac{\alpha-1}{3}$ 또는 $x=\frac{\beta-1}{3}$

0449 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을 α, β라 하면

$$\alpha\beta=16$$

$f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$이므로 $f(4x)=0$이려면

$4x=\alpha$ 또는 $4x=\beta$

$\therefore x=\frac{\alpha}{4}$ 또는 $x=\frac{\beta}{4}$

따라서 이차방정식 $f(4x)=0$의 두 근의 곱은

$$\frac{\alpha}{4}\times\frac{\beta}{4}=\frac{\alpha\beta}{16}=\frac{16}{16}=1$$

답 ①

0450 $f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$이므로 $f(2x+5)=0$이려면

$2x+5=\alpha$ 또는 $2x+5=\beta$

$\therefore x=\frac{\alpha-5}{2}$ 또는 $x=\frac{\beta-5}{2}$

따라서 이차방정식 $f(2x+5)=0$의 두 근의 곱은

$$\frac{\alpha-5}{2}\times\frac{\beta-5}{2}=\frac{\alpha\beta-5(\alpha+\beta)+25}{4}=\frac{-4-5\times3+25}{4}=\frac{3}{2}$$

답 $\frac{3}{2}$

다른 풀이 $f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)\ (a\neq0)$라 하면

$$f(2x+5)=a(2x+5-\alpha)(2x+5-\beta)$$

$f(2x+5)=0$에서 $(2x+5-\alpha)(2x+5-\beta)=0$

$\therefore x=\frac{\alpha-5}{2}$ 또는 $x=\frac{\beta-5}{2}$

시험에 꼭 나오는 문제

• 본책 066~069쪽

0451 $2x^2+3=(x+1)(x-5)$에서

$2x^2+3=x^2-4x-5$, $\quad x^2+4x+8=0$

$\therefore x=-2\pm2i$

답 ①

0452 이차방정식 $x^2-(a+2)x+2a=0$의 한 근이 3이므로

$9-3(a+2)+2a=0 \quad \therefore a=3$

$a=3$을 이차방정식 $x^2+ax+a^2-1=0$에 대입하면

$x^2+3x+8=0 \quad \therefore x=\frac{-3\pm\sqrt{23}i}{2}$

따라서 $p=-3$, $q=23$이므로

$pq=-3\times23=-69$

답 **-69**

0453 이차방정식 $x^2-2x+2=0$의 한 근이 α이므로

$\alpha^2-2\alpha+2=0 \quad \therefore \alpha^2-2\alpha=-2$

$\therefore \alpha^3-\alpha^2=\alpha(\alpha^2-2\alpha)+\alpha^2=\alpha^2-2\alpha=-2$

답 ①

다른 풀이 이차방정식 $x^2-2x+2=0$의 한 근이 α이므로

$\alpha^2-2\alpha+2=0$

양변에 α를 곱하면 $\quad \alpha^3-2\alpha^2+2\alpha=0$

$\therefore \alpha^3-\alpha^2=(2\alpha^2-2\alpha)-\alpha^2=\alpha^2-2\alpha=-2$

0454 방정식 $|x^2+(a+2)x+a^2|=1$의 한 근이 -2이므로

$|4-2a-4+a^2|=1$, $\quad |a^2-2a|=1$

$\therefore a^2-2a=\pm1$

(i) $a^2-2a=1$일 때, $\quad a^2-2a-1=0$

$\therefore a=1\pm\sqrt{2}$

(ii) $a^2-2a=-1$일 때, $\quad a^2-2a+1=0$

$(a-1)^2=0 \quad \therefore a=1$

(i), (ii)에서 $\quad a=1\pm\sqrt{2}$ 또는 $a=1$

따라서 모든 실수 a의 값의 곱은

$(1+\sqrt{2})\times(1-\sqrt{2})\times1=-1$

답 **-1**

0455 지면에 떨어졌을 때의 높이는 0 m이므로

$-4.9t^2+39t+100=0$, $\quad 49t^2-390t-1000=0$

$(49t+100)(t-10)=0 \quad \therefore t=-\frac{100}{49}$ 또는 $t=10$

그런데 $t>0$이므로 $\quad t=10$

따라서 지면에 떨어지는 것은 쏘아 올린 지 10초 후이다.

답 **10초**

0456 처음 땅의 한 변의 길이를 x m라 하면 도로의 넓이는

$$20x+12x-20\times12=32x-240\,(\mathrm{m}^2)$$

이때 도로의 넓이가 처음 땅의 넓이의 $\frac{1}{4}$이므로

$$32x-240=\frac{1}{4}x^2,\qquad x^2-128x+960=0$$

$$(x-8)(x-120)=0$$

$\therefore\ x=8$ 또는 $x=120$

그런데 $x>20$이므로 $\quad x=120$

따라서 처음 땅의 한 변의 길이는 120 m이다. 답 **120 m**

0457 이차방정식 $x^2+2(k-2)x+k^2+k-6=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(k-2)^2-(k^2+k-6)\geq0$$

$-5k+10\geq0\qquad\therefore\ k\leq2$

따라서 자연수 k의 최댓값은 2이다. 답 ②

0458 이차방정식 $x^2+(am+b)x+m^2+c+2=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=(am+b)^2-4\times1\times(m^2+c+2)=0$$

$$a^2m^2+2abm+b^2-4m^2-4c-8=0$$

$$\therefore\ (a^2-4)m^2+2abm+b^2-4c-8=0$$

이 등식이 m의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$$a^2-4=0,\ 2ab=0,\ b^2-4c-8=0$$

$a^2-4=0$에서 $\quad(a+2)(a-2)=0$

$\therefore\ a=-2$ 또는 $a=2$

$2ab=0$에서 $a\neq0$이므로 $\quad b=0$

$b=0$을 $b^2-4c-8=0$에 대입하면

$-4c-8=0\qquad\therefore\ c=-2$

$\therefore\ a^2+b^2+c^2=4+0+4=8$ 답 **8**

0459 이차방정식 $x^2+(n+2)x+2n+1=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=(n+2)^2-4\times1\times(2n+1)$$
$$=n^2-4n$$

(i) $n=2$일 때,

$D=2^2-4\times2=-4<0$이므로 $\quad f(2)=0$

(ii) $n=4$일 때,

$D=4^2-4\times4=0$이므로 $\quad f(4)=1$

(iii) $n=6$일 때,

$D=6^2-4\times6=12>0$이므로 $\quad f(6)=2$

이상에서 $\quad f(2)-f(4)+f(6)=0-1+2=1$

답 **1**

0460 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a-2}}=-\sqrt{\dfrac{a}{a-2}}$이므로

$a>0,\ a-2<0$

이때 a는 정수이므로 $\quad a=1$

ㄱ. $x^2+ax+a=0$, 즉 $x^2+x+1=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=1^2-4\times1\times1=-3<0$$

이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

ㄴ. $2x^2+(a-1)x+2a=0$, 즉 $2x^2+2=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=0-4\times2\times2=-16<0$$

이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

ㄷ. $x^2-ax+a-4=0$, 즉 $x^2-x-3=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=(-1)^2-4\times1\times(-3)=13>0$$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

이상에서 허근을 갖는 이차방정식은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ㄱ, ㄴ

0461 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)$$
$$=x^2-(a+b)x+ab+x^2-(b+c)x+bc$$
$$+x^2-(c+a)x+ca$$
$$=3x^2-2(a+b+c)x+ab+bc+ca$$

이 이차식이 완전제곱식이 되려면 이차방정식

$3x^2-2(a+b+c)x+ab+bc+ca=0$의 판별식을 D라 할 때

$$\frac{D}{4}=\{-(a+b+c)\}^2-3(ab+bc+ca)=0$$

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$$

$$\therefore\ \frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$$

이때 $a,\ b,\ c$가 실수이므로

$$a-b=0,\ b-c=0,\ c-a=0$$

$\therefore\ a=b=c$

따라서 $a,\ b,\ c$를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 정삼각형이다.

답 **정삼각형**

0462 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-\frac{3}{2},\ \alpha\beta=-2$$

$$\therefore\ \frac{\beta}{\alpha+1}+\frac{\alpha}{\beta+1}=\frac{\beta(\beta+1)+\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+1)(\beta+1)}$$
$$=\frac{\beta^2+\beta+\alpha^2+\alpha}{\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1}$$
$$=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+(\alpha+\beta)}{\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1}$$
$$=\frac{\left(-\frac{3}{2}\right)^2-2\times(-2)-\frac{3}{2}}{-2-\frac{3}{2}+1}$$
$$=-\frac{19}{10}$$

답 $-\dfrac{19}{10}$

0463 이차방정식 $x^2-3x+k=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로

$$\alpha^2-3\alpha+k=0,\ \beta^2-3\beta+k=0$$

$$\therefore\ \alpha^2-\alpha+k=2\alpha,\ \beta^2-\beta+k=2\beta$$

$$\therefore \frac{1}{\alpha^2-\alpha+k}+\frac{1}{\beta^2-\beta+k}=\frac{1}{2\alpha}+\frac{1}{2\beta}$$
$$=\frac{\alpha+\beta}{2\alpha\beta} \quad \cdots\cdots ㉠$$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3,\ \alpha\beta=k$

따라서 ㉠에서

$\frac{3}{2k}=\frac{1}{4} \quad \therefore k=6$ 답 **6**

0464 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=k$

$|\alpha-\beta|=4$에서 $(\alpha-\beta)^2=16$이므로

$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=16$

$2^2-4k=16 \quad \therefore k=-3$ 답 ③

0465 주어진 이차방정식의 두 근을 $\alpha,\ 2\alpha\ (\alpha\neq 0)$라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+2\alpha=-(k+1)$이므로 $\quad k=-3\alpha-1 \quad \cdots\cdots ㉠$

$\alpha\times 2\alpha=2$이므로 $\quad \alpha^2=1$

$\therefore \alpha=-1$ 또는 $\alpha=1 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉡을 ㉠에 대입하면

$k=2$ 또는 $k=-4$

그런데 k는 자연수이므로 $\quad k=2$ 답 **2**

0466 이차방정식 $x^2+2x+10=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2,\ \alpha\beta=10$

따라서 $-2,\ 10$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2-(-2+10)x+(-2)\times 10=0$

$\therefore x^2-8x-20=0$ 답 $\boldsymbol{x^2-8x-20=0}$

0467 이차방정식 $x^2+4x-2=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-4,\ \alpha\beta=-2$

$$\therefore \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{-4}{-2}=2$$
$$\frac{1}{\alpha}\times\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha\beta}=-\frac{1}{2}$$

따라서 $\frac{1}{\alpha},\ \frac{1}{\beta}$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 2인 이차방정식은

$2\left(x^2-2x-\frac{1}{2}\right)=0 \quad \therefore 2x^2-4x-1=0$ 답 ①

0468 이차방정식 $\frac{1}{2}x^2+x+1=0$, 즉 $x^2+2x+2=0$에서

$x=-1\pm\sqrt{1^2-1\times 2}=-1\pm i$

$$\therefore \frac{1}{2}x^2+x+1=\frac{1}{2}\{x-(-1+i)\}\{x-(-1-i)\}$$
$$=\frac{1}{2}(x+1-i)(x+1+i)$$

따라서 인수인 것은 ⑤이다. 답 ⑤

0469 ㄱ. 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 하면

$D=b^2-4ac$

이때 $ac<0$이면 $b^2-4ac>0$이므로 $\quad D>0$

따라서 주어진 방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다. (참)

ㄴ. $a=1,\ b=2\sqrt{2},\ c=-7$이면 $x^2+2\sqrt{2}x-7=0$에서

$x=-\sqrt{2}\pm 3$

따라서 한 근이 $3-\sqrt{2}$이지만 다른 한 근은 $-3-\sqrt{2}$이다. (거짓)

ㄷ. 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

따라서 두 근의 차는

$$\left|\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}-\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right|$$
$$=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{|a|} \text{ (참)}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

0470 $a,\ b$가 유리수이므로 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $2-\sqrt{3}$이면 다른 한 근은 $2+\sqrt{3}$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(2-\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})=-a,\ (2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=b$

$\therefore a=-4,\ b=1$

따라서 이차방정식 $x^2-bx+a=0$, 즉 $x^2-x-4=0$의 근은

$$x=\frac{1\pm\sqrt{17}}{2}$$

답 $\boldsymbol{x=\frac{1\pm\sqrt{17}}{2}}$

0471 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^2+2(y+2)x-2y^2-4y+a$

x에 대한 이차방정식 $x^2+2(y+2)x-2y^2-4y+a=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(y+2)^2-(-2y^2-4y+a)=3y^2+8y+4-a$$

이때 주어진 식이 $x,\ y$에 대한 두 일차식의 곱으로 인수분해되려면 D가 완전제곱식이어야 한다.

따라서 y에 대한 이차방정식 $3y^2+8y+4-a=0$의 판별식을 D'이라 하면

$\frac{D'}{4}=4^2-3(4-a)=0, \quad 4+3a=0$

$\therefore a=-\frac{4}{3}$ 답 $\boldsymbol{-\frac{4}{3}}$

0472 A는 q를 바르게 보고 풀었으므로

$q=-5\times(-1)=5$

B는 p를 바르게 보고 풀었으므로

$-p=(3+2i)+(3-2i)=6$

$\therefore p=-6$

$\therefore p+q=-6+5=-1$ 답 **−1**

0473 방정식 $f(x)=0$의 한 근이 -1이므로

$f(-1)=0$

각 방정식의 좌변에 $x=2$를 대입하면

① $f(-2-1)=f(-3)$

② $f(2+1)=f(3)$

③ $f(2\times2-1)=f(3)$

④ $f(2\times2+2)=f(6)$

⑤ $f(2^2-5)=f(-1)=0$

따라서 2를 반드시 근으로 갖는 방정식은 ⑤이다. 답 ⑤

0474 이차방정식 $x^2+(a+k)x+(k-1)b=0$의 한 근이 2이므로

$4+2a+2k+bk-b=0$

$\therefore (2+b)k+4+2a-b=0$ … 1단계

이 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$2+b=0,\ 4+2a-b=0$

$\therefore a=-3,\ b=-2$ … 2단계

$\therefore ab=-3\times(-2)=6$ … 3단계

답 **6**

채점 요소	비율
1단계 k에 대한 항등식 세우기	40 %
2단계 a, b의 값 구하기	40 %
3단계 ab의 값 구하기	20 %

0475 $(a-c)x^2+2bx+a+c=0$이 이차방정식이므로

$a-c\neq0 \qquad \therefore a\neq c$

또 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=b^2-(a-c)(a+c)=0$

$b^2-a^2+c^2=0 \qquad \therefore b^2+c^2=a^2$ … 1단계

즉 세 변의 길이가 a, b, c인 삼각형은 빗변의 길이가 a인 직각삼각형이다. … 2단계

따라서 구하는 넓이는

$\dfrac{1}{2}bc$ … 3단계

답 $\dfrac{1}{2}bc$

채점 요소	비율
1단계 a, b, c 사이의 관계식 구하기	50 %
2단계 어떤 삼각형인지 파악하기	30 %
3단계 삼각형의 넓이 구하기	20 %

참고 | 주어진 방정식이 x에 대한 이차방정식이므로 x^2의 계수는 0이 될 수 없다.

0476 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 1, α이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$1+\alpha=-a,\ \alpha=b$

$\therefore a=-\alpha-1,\ b=\alpha$ …… ㉠

이차방정식 $x^2+bx+a=0$의 두 근이 -3, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$-3+\beta=-b,\ -3\beta=a$ …… ㉡ … 1단계

㉠, ㉡에서

$-3+\beta=-\alpha,\ -3\beta=-\alpha-1$

$\therefore \alpha+\beta=3,\ \alpha-3\beta=-1$

두 식을 연립하여 풀면

$\alpha=2,\ \beta=1$ … 2단계

따라서 α, β, 즉 2, 1을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2-(2+1)x+2\times1=0$

$\therefore x^2-3x+2=0$ … 3단계

답 $x^2-3x+2=0$

채점 요소	비율
1단계 a, b를 α, β에 대한 식으로 나타내기	40 %
2단계 α, β의 값 구하기	30 %
3단계 이차방정식 구하기	30 %

다른 풀이 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 1이므로

$1+a+b=0$

$\therefore a+b=-1$ …… ㉢

이차방정식 $x^2+bx+a=0$의 한 근이 -3이므로

$9-3b+a=0$

$\therefore a-3b=-9$ …… ㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면

$a=-3,\ b=2$

따라서 이차방정식 $x^2+ax+b=0$, 즉 $x^2-3x+2=0$에서

$(x-1)(x-2)=0 \qquad \therefore x=1$ 또는 $x=2$

$\therefore \alpha=2$

또 이차방정식 $x^2+bx+a=0$, 즉 $x^2+2x-3=0$에서

$(x+3)(x-1)=0 \qquad \therefore x=-3$ 또는 $x=1$

$\therefore \beta=1$

0477 $\dfrac{1}{1+2i}=\dfrac{1-2i}{(1+2i)(1-2i)}=\dfrac{1-2i}{5}$

a, b가 실수이므로 이차방정식 $5x^2+ax+b=0$의 한 근이 $\dfrac{1-2i}{5}$이면 다른 한 근은 $\dfrac{1+2i}{5}$이다. … 1단계

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\dfrac{1-2i}{5}+\dfrac{1+2i}{5}=-\dfrac{a}{5},\ \dfrac{1-2i}{5}\times\dfrac{1+2i}{5}=\dfrac{b}{5}$

$\therefore a=-2,\ b=1$ … 2단계

$\therefore a+b=-2+1=-1$ … 3단계

답 -1

채점 요소	비율
1단계 주어진 이차방정식의 다른 한 근 구하기	30 %
2단계 a, b의 값 구하기	50 %
3단계 $a+b$의 값 구하기	20 %

05 이차방정식

0478 전략 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 참, 거짓을 판별한다.

이차방정식 $x^2-ax+2=0$의 서로 다른 두 실근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=a$, $\alpha\beta=2$

ㄱ. 주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-4\times1\times2>0$

$\therefore a^2>8$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=a^2-4>4$ (참)

ㄴ. $\alpha\beta>0$이므로 α, β의 부호는 서로 같다.

$\therefore |\alpha+\beta|=|\alpha|+|\beta|$ (참)

ㄷ. $\alpha\beta=2$에서 $\beta=\frac{2}{\alpha}$

이때 $\alpha>4$이면 $\beta>0$이고

$\frac{1}{\alpha}<\frac{1}{4}$ $\quad\therefore \frac{2}{\alpha}<\frac{1}{2}$

$\therefore 0<\beta<\frac{1}{2}$ (참)

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

0479 전략 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 두 근이 α, β임을 이용하여 $f(\alpha^2)=3\alpha$, $f(\beta^2)=3\beta$를 α^2, β^2에 대한 식으로 변형한다.

이차방정식 $x^2+x+1=0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha^2+\alpha+1=0$, $\beta^2+\beta+1=0$

$\therefore \alpha=-\alpha^2-1$, $\beta=-\beta^2-1$

$f(\alpha^2)=3\alpha$, $f(\beta^2)=3\beta$에서

$f(\alpha^2)=3(-\alpha^2-1)$, $f(\beta^2)=3(-\beta^2-1)$

$\therefore f(\alpha^2)=-3\alpha^2-3$, $f(\beta^2)=-3\beta^2-3$

따라서 $f(x)=-3x-3$, 즉 $f(x)+3x+3=0$의 두 근이 α^2, β^2이다.

이때 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-1$, $\alpha\beta=1$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-1)^2-2\times1=-1$

$\alpha^2\beta^2=(\alpha\beta)^2=1^2=1$

따라서 α^2, β^2을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2+x+1=0$

즉 $f(x)+3x+3=x^2+x+1$이므로

$f(x)=x^2-2x-2$ $\quad\therefore f(-1)=1$ 답 1

다른 풀이 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha^2+\alpha+1=0$, $\beta^2+\beta+1=0$

$\therefore \alpha^2=-\alpha-1$, $\beta^2=-\beta-1$

$f(\alpha^2)=3\alpha$, $f(\beta^2)=3\beta$에서

$f(-\alpha-1)-3\alpha=0$, $f(-\beta-1)-3\beta=0$

따라서 $f(-x-1)-3x=0$의 두 근이 α, β이므로

$f(-x-1)-3x=(x-\alpha)(x-\beta)$

$=x^2+x+1$

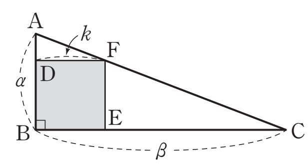
위의 식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f(-1)=1$

0480 전략 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 구하고 닮음인 두 삼각형을 찾는다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=5$, $\alpha\beta=5$



위의 그림과 같이 직각삼각형 ABC에 내접하는 정사각형 DBEF의 한 변의 길이를 k라 하면

$\triangle ADF \backsim \triangle ABC$ (AA 닮음)

이므로 $\overline{AD}:\overline{AB}=\overline{DF}:\overline{BC}$에서

$(\alpha-k):\alpha=k:\beta$

$\alpha k=\beta(\alpha-k)$, $\quad(\alpha+\beta)k=\alpha\beta$

$\therefore k=\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}=\frac{5}{5}=1$

따라서 정사각형 DBEF의 넓이는 1, 둘레의 길이는 4이므로 1, 4를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2-(1+4)x+1\times4=0$

$\therefore x^2-5x+4=0$

즉 $m=-5$, $n=4$이므로

$m+n=-5+4=-1$ 답 -1

06 이차방정식과 이차함수

교과서 문제 정복하기

본책 071쪽

0481 $3x^2-6x=0$에서

$3x(x-2)=0 \quad \therefore x=0$ 또는 $x=2$ 　답 **0, 2**

0482 $-x^2+4x-3=0$에서

$x^2-4x+3=0, \quad (x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=3$ 　답 **1, 3**

0483 이차방정식 $2x^2-7x+4=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-7)^2-4\times2\times4=17>0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 x축의 교점은 2개이다.

답 **2**

0484 이차방정식 $x^2+3x+5=0$의 판별식을 D라 하면

$D=3^2-4\times1\times5=-11<0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 x축의 교점은 0개이다.

답 **0**

0485 이차방정식 $-x^2+2x-1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1^2-(-1)\times(-1)=0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 x축의 교점은 1개이다.

답 **1**

0486 이차방정식 $x^2-4x+k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-1\times k=4-k$

(1) $\frac{D}{4}=4-k>0 \quad \therefore k<4$

(2) $\frac{D}{4}=4-k=0 \quad \therefore k=4$

(3) $\frac{D}{4}=4-k<0 \quad \therefore k>4$

답 (1) $\boldsymbol{k<4}$ (2) $\boldsymbol{k=4}$ (3) $\boldsymbol{k>4}$

0487 이차방정식 $x^2+6x+k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=3^2-1\times k=9-k$

주어진 이차함수의 그래프가 x축과 만나려면 $D\geq0$이어야 하므로

$9-k\geq0 \quad \therefore k\leq9$ 　답 $\boldsymbol{k\leq9}$

0488 $x^2+2x+2=-2x-1$에서

$x^2+4x+3=0, \quad (x+3)(x+1)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=-1$ 　답 **−3, −1**

0489 $-x^2+6x-9=2x-5$에서

$x^2-4x+4=0, \quad (x-2)^2=0$

$\therefore x=2$ 　답 **2**

0490 이차방정식 $x^2-3x-2=x-7$, 즉 $x^2-4x+5=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-1\times5=-1<0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 직선은 만나지 않는다.

답 **만나지 않는다.**

0491 이차방정식 $x^2+2x-1=-3x+5$, 즉 $x^2+5x-6=0$의 판별식을 D라 하면

$D=5^2-4\times1\times(-6)=49>0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다. 　답 **서로 다른 두 점에서 만난다.**

0492 이차방정식 $-x^2-2x+1=2x+5$, 즉 $x^2+4x+4=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=2^2-1\times4=0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 직선은 한 점에서 만난다. (접한다.) 　답 **한 점에서 만난다. (접한다.)**

0493 이차방정식 $x^2-4x+1=2x+k$, 즉 $x^2-6x+1-k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-3)^2-1\times(1-k)=8+k$

(1) $\frac{D}{4}=8+k>0 \quad \therefore k>-8$

(2) $\frac{D}{4}=8+k=0 \quad \therefore k=-8$

(3) $\frac{D}{4}=8+k<0 \quad \therefore k<-8$

답 (1) $\boldsymbol{k>-8}$ (2) $\boldsymbol{k=-8}$ (3) $\boldsymbol{k<-8}$

0494 이차방정식 $-2x^2+x-1=4x+k$, 즉 $2x^2+3x+k+1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=3^2-4\times2\times(k+1)=1-8k$

주어진 이차함수의 그래프와 직선이 만나려면 $D\geq0$이어야 하므로

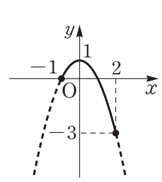
$1-8k\geq0 \quad \therefore k\leq\frac{1}{8}$ 　답 $\boldsymbol{k\leq\frac{1}{8}}$

0495 $-1\leq x\leq2$에서

$f(-1)=0,\ f(0)=1,\ f(2)=-3$

따라서 $f(x)$의 최댓값은 1, 최솟값은 -3이다.

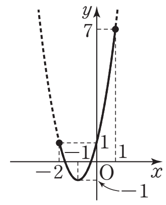
답 **최댓값: 1, 최솟값: −3**



0496 $-2\le x\le 1$에서

$f(-2)=1,\ f(-1)=-1,\ f(1)=7$

따라서 $f(x)$의 최댓값은 7, 최솟값은 -1이다.



답 최댓값: 7, 최솟값: -1

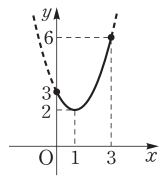
0497 $f(x)=x^2-2x+3$

$=(x-1)^2+2$

$0\le x\le 3$에서

$f(0)=3,\ f(1)=2,\ f(3)=6$

따라서 $f(x)$의 최댓값은 6, 최솟값은 2이다.



답 최댓값: 6, 최솟값: 2

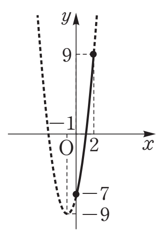
0498 $f(x)=2x^2+4x-7$

$=2(x+1)^2-9$

$0\le x\le 2$에서

$f(0)=-7,\ f(2)=9$

따라서 $f(x)$의 최댓값은 9, 최솟값은 -7이다.



답 최댓값: 9, 최솟값: -7

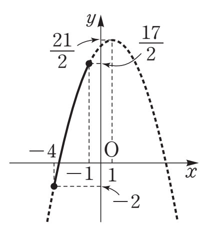
0499 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+x+10$

$=-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{21}{2}$

$-4\le x\le -1$에서

$f(-4)=-2,\ f(-1)=\frac{17}{2}$

따라서 $f(x)$의 최댓값은 $\frac{17}{2}$, 최솟값은 -2이다.



답 최댓값: $\frac{17}{2}$, 최솟값: -2

유형 익히기

• 본책 072~077쪽

0500 이차함수 $y=2x^2+ax+b$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 -3, 2이므로 -3, 2는 이차방정식 $2x^2+ax+b=0$의 두 근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-3+2=-\frac{a}{2},\ -3\times 2=\frac{b}{2}$

$\therefore\ a=2,\ b=-12$

$\therefore\ a+b=2+(-12)=-10$

답 ①

0501 이차함수 $y=-5x^2+15x+25$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 $\alpha,\ \beta$이므로 $\alpha,\ \beta$는 이차방정식 $-5x^2+15x+25=0$의 두 근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\frac{15}{-5}=3,\ \alpha\beta=\frac{25}{-5}=-5$

$\therefore\ \alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=3^3-3\times(-5)\times 3=72$

답 72

0502 이차함수 $y=x^2-ax+b$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 2, 3이므로 2, 3은 이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 두 근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$2+3=a,\ 2\times 3=b$

$\therefore\ a=5,\ b=6$

이차함수 $y=x^2-bx+a$, 즉 $y=x^2-6x+5$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 이차방정식 $x^2-6x+5=0$의 실근과 같다.

$x^2-6x+5=0$에서 $\quad (x-1)(x-5)=0$

$\therefore\ x=1$ 또는 $x=5$

따라서 두 교점의 좌표가 $(1,\ 0)$, $(5,\ 0)$이므로 두 점 사이의 거리는

$5-1=4$

답 4

0503 두 점 A, B의 x좌표를 각각 $\alpha,\ \beta$라 하면 $\alpha,\ \beta$는 이차방정식 $x^2-6x+a=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=6,\ \alpha\beta=a$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이때 $\overline{AB}=8$이므로 $\quad |\alpha-\beta|=8$

양변을 제곱하면 $\quad (\alpha-\beta)^2=64$

$\therefore\ (\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=64$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$36-4a=64,\quad 4a=-28$

$\therefore\ a=-7$

답 -7

다른 풀이 $\overline{AB}=8$에서 이차방정식 $x^2-6x+a=0$의 두 근의 차가 8이므로 $x^2-6x+a=0$의 두 근을 $\alpha,\ \alpha+8$이라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(\alpha+8)=6$ $\quad\cdots\cdots$ ㉢

$\alpha(\alpha+8)=a$ $\quad\cdots\cdots$ ㉣

㉢에서 $\quad 2\alpha+8=6,\quad 2\alpha=-2$

$\therefore\ \alpha=-1$

$\alpha=-1$을 ㉣에 대입하면

$a=-1\times(-1+8)=-7$

0504 이차함수 $y=-x^2+ax$의 그래프와 직선 $y=x-b$의 두 교점의 x좌표가 -1, 5이므로 -1, 5는 이차방정식

$-x^2+ax=x-b$, 즉 $x^2-(a-1)x-b=0$

의 두 근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-1+5=a-1,\ -1\times 5=-b$

$\therefore\ a=5,\ b=5$

$\therefore\ ab=5\times 5=25$

답 ⑤

0505 이차함수 $y=x^2-1$의 그래프와 직선 $y=ax+b$가 서로 다른 두 점 P, Q에서 만나므로 두 점 P, Q의 x좌표는 이차방정식

$$x^2-1=ax+b,\ 즉\ x^2-ax-1-b=0$$

의 두 근이다.

이때 이차방정식 $x^2-ax-1-b=0$의 계수가 모두 유리수이고 한 근이 $1+\sqrt{3}$이므로 다른 한 근은 $1-\sqrt{3}$이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(1+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})=a,\ (1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})=-1-b$$

$$\therefore a=2,\ b=1$$

$$\therefore a+b=2+1=3$$

답 ③

RPM 비법 노트

이차방정식의 켤레근

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 a, b, c가 유리수일 때, $p+q\sqrt{m}$이 근이면 $p-q\sqrt{m}$도 근이다.

(단, p, q는 유리수, $q\neq0$, $\sqrt{m}$은 무리수이다.)

0506 이차함수 $y=2x^2+3x+1$의 그래프와 직선 $y=5x+k$의 교점의 x좌표는 이차방정식

$$2x^2+3x+1=5x+k,\ 즉$$

$$2x^2-2x+1-k=0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

의 근이므로 ㉠의 한 근이 -2이다.

$x=-2$를 ㉠에 대입하면

$$8+4+1-k=0 \qquad \therefore k=13$$

$k=13$을 ㉠에 대입하면

$$2x^2-2x-12=0, \qquad x^2-x-6=0$$

$$(x+2)(x-3)=0$$

$$\therefore x=-2\ 또는\ x=3$$

$x=3$을 $y=5x+13$에 대입하면

$$y=15+13=28$$

따라서 점 B의 좌표는 $(3,\ 28)$이다.

답 **(3, 28)**

0507 이차함수 $y=x^2-2kx+k^2-2k+4$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 이차방정식 $x^2-2kx+k^2-2k+4=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-k)^2-(k^2-2k+4)>0$$

$$2k-4>0 \qquad \therefore k>2$$

따라서 정수 k의 최솟값은 3이다.

답 ④

0508 이차함수 $y=x^2+2ax-b^2+15$의 그래프가 x축과 만나지 않으므로 이차방정식 $x^2+2ax-b^2+15=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=a^2-(-b^2+15)<0$$

$$\therefore a^2+b^2<15$$

이를 만족시키는 자연수 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(1,\ 1)$, $(1,\ 2)$, $(1,\ 3)$, $(2,\ 1)$, $(2,\ 2)$, $(2,\ 3)$, $(3,\ 1)$, $(3,\ 2)$

의 8개이다.

답 **8**

0509 이차함수 $y=\frac{1}{2}kx^2-x-k+\frac{3}{2}$의 그래프가 x축과 한 점에서 만나므로 이차방정식 $\frac{1}{2}kx^2-x-k+\frac{3}{2}=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$$D_1=(-1)^2-4\times\frac{1}{2}k\times\left(-k+\frac{3}{2}\right)=0$$

$$2k^2-3k+1=0$$

$$(2k-1)(k-1)=0$$

$$\therefore k=\frac{1}{2}\ 또는\ k=1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

… 1단계

이차함수 $y=-x^2+3x+k-3$의 그래프가 x축과 만나지 않으므로 이차방정식 $-x^2+3x+k-3=0$의 판별식을 D_2라 하면

$$D_2=3^2-4\times(-1)\times(k-3)<0$$

$$4k-3<0$$

$$\therefore k<\frac{3}{4} \quad \cdots\cdots ㉡$$

… 2단계

㉠, ㉡에서 $k=\frac{1}{2}$

… 3단계

답 $\mathbf{\frac{1}{2}}$

	채점 요소	비율
1단계	$y=\frac{1}{2}kx^2-x-k+\frac{3}{2}$의 그래프가 x축과 한 점에서 만나도록 하는 k의 값 구하기	40 %
2단계	$y=-x^2+3x+k-3$의 그래프가 x축과 만나지 않도록 하는 k의 값의 범위 구하기	40 %
3단계	k의 값 구하기	20 %

0510 이차함수 $y=x^2+2ax+ak+k+b$의 그래프가 x축에 접하므로 이차방정식 $x^2+2ax+ak+k+b=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=a^2-(ak+k+b)=0$$

$$\therefore a^2-b-k(a+1)=0$$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$$a^2-b=0,\ a+1=0$$

$$\therefore a=-1,\ b=1$$

$$\therefore a+b=-1+1=0$$

답 **0**

0511 이차함수 $y=3x^2-2x$의 그래프와 직선 $y=2x-a$가 서로 다른 두 점에서 만나므로 이차방정식 $3x^2-2x=2x-a$, 즉 $3x^2-4x+a=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-2)^2-3a>0$$

$$\therefore a<\frac{4}{3}$$

따라서 자연수 a는 1의 1개이다.

답 **1**

0512 이차함수 $y=2x^2$의 그래프와 직선 $y=kx-8$이 접하므로 이차방정식 $2x^2=kx-8$, 즉 $2x^2-kx+8=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-k)^2-4\times2\times8=0$

$k^2-64=0,\quad (k+8)(k-8)=0$

$\therefore k=8\ (\because k>0)$

답 **8**

0513 이차함수 $y=x^2+2ax+a^2$의 그래프와 직선 $y=2x+1$이 적어도 한 점에서 만나므로 이차방정식 $x^2+2ax+a^2=2x+1$, 즉 $x^2+2(a-1)x+a^2-1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a-1)^2-(a^2-1)\geq0$

$-2a+2\geq0\qquad\therefore a\leq1$

따라서 실수 a의 최댓값은 1이다.

답 **1**

0514 이차함수 $y=(k-3)x^2+3kx+5$의 그래프와 직선 $y=k(x-1)-2$가 만나지 않으므로 이차방정식 $(k-3)x^2+3kx+5=k(x-1)-2$, 즉 $(k-3)x^2+2kx+k+7=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=k^2-(k-3)(k+7)<0$

$-4k+21<0\qquad\therefore k>\frac{21}{4}$

$\therefore a=\frac{21}{4}$

답 $\mathbf{\frac{21}{4}}$

0515 직선 $y=ax+b$가 직선 $y=2x+8$에 평행하므로

$a=2$

직선 $y=2x+b$가 이차함수 $y=-x^2+2$의 그래프에 접하므로 이차방정식 $-x^2+2=2x+b$, 즉 $x^2+2x+b-2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1^2-(b-2)=0\qquad\therefore b=3$

$\therefore a+b=2+3=5$

답 ⑤

참고 | 두 직선 $y=ax+b$, $y=a'x+b'$이 평행하면 $a=a'$, $b\neq b'$이다.

0516 직선 $y=-2x+1$을 y축의 방향으로 $2k$만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y=-2x+2k+1$

이 직선이 이차함수 $y=x^2-4x$의 그래프에 접하므로 이차방정식 $x^2-4x=-2x+2k+1$, 즉 $x^2-2x-2k-1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-(-2k-1)=0$

$2k+2=0\qquad\therefore k=-1$

답 **−1**

0517 점 $(3, 2)$를 지나는 직선의 방정식을 $y=m(x-3)+2$라 하자.

이 직선이 이차함수 $y=-x^2-2x+8$의 그래프에 접하므로 이차방정식 $-x^2-2x+8=m(x-3)+2$, 즉 $x^2+(m+2)x-3m-6=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(m+2)^2-4(-3m-6)=0$

$m^2+16m+28=0,\quad (m+14)(m+2)=0$

$\therefore m=-14$ 또는 $m=-2$

따라서 구하는 두 직선의 기울기의 곱은

$-14\times(-2)=28$

답 **28**

0518 구하는 직선의 방정식을 $y=mx+n$이라 하자.

이 직선이 이차함수 $y=x^2-2ax+a^2+2$의 그래프에 접하므로 이차방정식 $x^2-2ax+a^2+2=mx+n$, 즉 $x^2-(2a+m)x+a^2-n+2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(2a+m)\}^2-4(a^2-n+2)=0$

$\therefore 4am+m^2+4n-8=0$

이 식이 a의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$4m=0,\ m^2+4n-8=0$

$\therefore m=0,\ n=2$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y=2$

답 $\mathbf{y=2}$

0519 $f(x)=2x^2-8x+5=2(x-2)^2-3$

$-2\leq x\leq1$에서

$f(-2)=29,\ f(1)=-1$

이므로 $f(x)$의 최솟값은 -1이다.

$\therefore p=-1$

$1\leq x\leq4$에서

$f(1)=-1,\ f(2)=-3,\ f(4)=5$

이므로 $f(x)$의 최솟값은 -3이다.

$\therefore q=-3$

$4\leq x\leq7$에서

$f(4)=5,\ f(7)=47$

이므로 $f(x)$의 최솟값은 5이다.

$\therefore r=5$

$\therefore p+q+r=-1+(-3)+5=1$

답 **1**

0520 ① $f(x)=-3(x-2)^2$이라 하면 $-1\leq x\leq1$에서

$f(-1)=-27,\ f(1)=-3$

이므로 최댓값은 -3이다.

② $f(x)=-2(x+1)^2+3$이라 하면 $-1\leq x\leq1$에서

$f(-1)=3,\ f(1)=-5$

이므로 최댓값은 3이다.

③ $f(x)=-4x^2+1$이라 하면 $-1\leq x\leq1$에서

$f(-1)=-3,\ f(0)=1,\ f(1)=-3$

이므로 최댓값은 1이다.

④ $f(x)=-x^2+2x+4=-(x-1)^2+5$
라 하면 $-1\le x\le 1$에서
$f(-1)=1,\ f(1)=5$
이므로 최댓값은 5이다.

⑤ $f(x)=-2x^2-6x=-2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{2}$
라 하면 $-1\le x\le 1$에서
$f(-1)=4,\ f(1)=-8$
이므로 최댓값은 4이다.

따라서 최댓값이 가장 큰 것은 ④이다. **답** ④

0521 $y=-\frac{1}{2}x^2+kx+4$의 그래프가 점 $(2,\ 10)$을 지나므로

$10=-2+2k+4,\qquad 2k=8$

$\therefore k=4$ … 1단계

즉 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+4x+4=-\frac{1}{2}(x-4)^2+12$이고, $2\le x\le 5$에서

$f(2)=10,\ f(4)=12,\ f(5)=\frac{23}{2}$

이므로 최댓값은 12, 최솟값은 10이다. … 2단계

따라서 구하는 곱은

$12\times 10=120$ … 3단계

답 120

채점 요소		비율
1단계	k의 값 구하기	30 %
2단계	$2\le x\le 5$에서 $f(x)$의 최댓값과 최솟값 구하기	50 %
3단계	최댓값과 최솟값의 곱 구하기	20 %

0522 $y=x^2-4ax+16a-5$
$=(x-2a)^2-4a^2+16a-5$

이므로 $x=2a$일 때 최솟값 $-4a^2+16a-5$를 갖는다.

따라서 $f(a)=-4a^2+16a-5=-4(a-2)^2+11$이고, $0\le a\le 3$에서

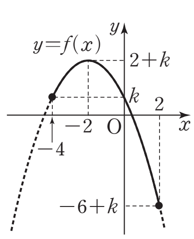
$f(0)=-5,\ f(2)=11,\ f(3)=7$

이므로 $f(a)$는 최댓값 11, 최솟값 -5를 갖는다.

즉 $M=11,\ m=-5$이므로

$M-m=11-(-5)=16$ **답** 16

0523 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2-2x+k$
$=-\frac{1}{2}(x+2)^2+2+k$



이므로 $-4\le x\le 2$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

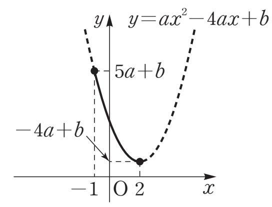
$x=-2$에서 최댓값 $2+k$를 가지므로

$2+k=3\qquad \therefore k=1$

따라서 $f(x)$의 최솟값은

$-6+k=-6+1=-5$ **답** -5

0524 $y=ax^2-4ax+b$
$=a(x-2)^2-4a+b$



이므로 $-1\le x\le 2$에서 이 이차함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $x=-1$에서 최댓값 $5a+b$, $x=2$에서 최솟값 $-4a+b$를 가지므로

$5a+b=7,\ -4a+b=1$

두 식을 연립하여 풀면

$a=\frac{2}{3},\ b=\frac{11}{3}$

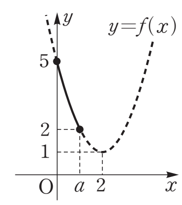
$\therefore a-b=\frac{2}{3}-\frac{11}{3}=-3$ **답** -3

0525 $f(x)=x^2-4x+5=(x-2)^2+1$이라 하자.

$f(2)=1$이므로 $a\ge 2$이면 $0\le x\le a$에서 $f(x)$의 최솟값은 1이다.

따라서 최솟값이 2이려면

$a<2$



$0\le x\le a$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=a$에서 최솟값 2를 갖는다.

$f(a)=a^2-4a+5=2$에서

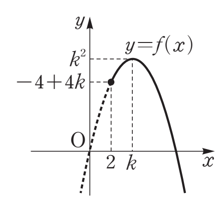
$a^2-4a+3=0$

$(a-1)(a-3)=0$

$\therefore a=1\ (\because a<2)$ **답** 1

0526 $f(x)=-x^2+2kx=-(x-k)^2+k^2$이라 하면

(i) $k\ge 2$일 때,



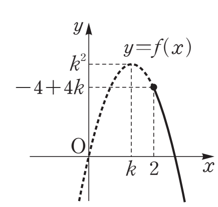
$x\ge 2$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

$f(x)$는 $x=k$에서 최댓값 k^2을 가지므로

$k^2=16$

$\therefore k=4\ (\because k\ge 2)$

(ii) $k<2$일 때,



$x\ge 2$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

$f(x)$는 $x=2$에서 최댓값 $-4+4k$를 가지므로

$-4+4k=16$

$\therefore k=5$

그런데 $k<2$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $\qquad k=4$

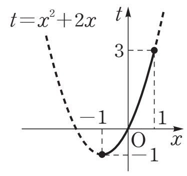
답 4

0527 $x^2+2x=t$로 놓으면

$t=x^2+2x=(x+1)^2-1$

$-1\le x\le 1$이므로 오른쪽 그림에서

$-1\le t\le 3$

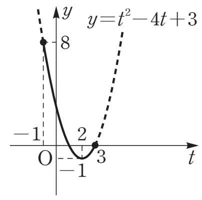


이때 주어진 함수는

$y=t^2-4t+3$

$=(t-2)^2-1\ (-1\le t\le 3)$

이므로 이 이차함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $t=-1$에서 최댓값 8을 갖는다.

답 **8**

0528 $x^2-4x+6=t$로 놓으면

$t=x^2-4x+6=(x-2)^2+2\quad \therefore\ t\ge 2$

이때 주어진 함수는

$y=-2t^2+12t+k$

$=-2(t-3)^2+k+18\ (t\ge 2)$

따라서 $t=3$에서 최댓값 $k+18$을 가지므로

$k+18=3\quad \therefore\ k=-15$

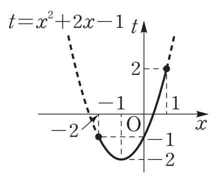
답 ①

0529 $x^2+2x-1=t$로 놓으면

$t=x^2+2x-1=(x+1)^2-2$

$-2\le x\le 1$이므로 오른쪽 그림에서

$-2\le t\le 2$

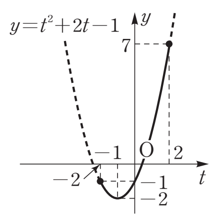


이때 주어진 함수는

$y=t^2+2(t+1)-3=t^2+2t-1$

$=(t+1)^2-2\ (-2\le t\le 2)$

이므로 이 이차함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $t=2$에서 최댓값 7, $t=-1$에서 최솟값 -2를 가지므로

$M=7,\ m=-2$

$\therefore\ M+m=7+(-2)=5$

답 **5**

0530 $x^2-2x+3=t$로 놓으면

$t=x^2-2x+3=(x-1)^2+2\quad \therefore\ t\ge 2$

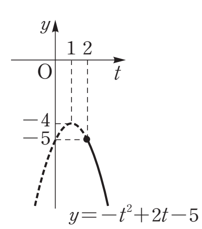
이때 주어진 함수는

$y=-t^2+2(t-3)+1$

$=-t^2+2t-5$

$=-(t-1)^2-4\ (t\ge 2)$

이므로 이 이차함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $t=2$에서 최댓값 -5를 가지므로

$b=-5$

이때 $t=2$에서 $\quad x^2-2x+3=2$

$x^2-2x+1=0,\quad (x-1)^2=0\quad \therefore\ x=1$

즉 $a=1$이므로

$a+b=1+(-5)=-4$

답 **−4**

0531 $2x^2-12x+y^2+4y+18=2(x-3)^2+(y+2)^2-4$

이때 x, y가 실수이므로

$(x-3)^2\ge 0,\ (y+2)^2\ge 0$

$\therefore\ 2x^2-12x+y^2+4y+18\ge -4$

따라서 주어진 식의 최솟값은 -4이다.

답 ②

0532 $-x^2-y^2-2x+4y+10$

$=-(x+1)^2-(y-2)^2+15$ ··· 1단계

이때 x, y가 실수이므로

$(x+1)^2\ge 0,\ (y-2)^2\ge 0$

$\therefore\ -(x+1)^2\le 0,\ -(y-2)^2\le 0$

$\therefore\ -x^2-y^2-2x+4y+10\le 15$

따라서 주어진 식은 $x=-1$, $y=2$일 때 최댓값 15를 가지므로

$a=-1,\ b=2,\ c=15$

$\therefore\ a+b+c=-1+2+15=16$ ··· 2단계

답 **16**

	채점 요소	비율
1단계	주어진 식을 변형하여 완전제곱식의 꼴로 나타내기	30 %
2단계	$a+b+c$의 값 구하기	70 %

0533 $x^2+4y^2+\frac{1}{2}z^2-2x+4y+2z+5$

$=(x-1)^2+4\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}(z+2)^2+1$

이때 x, y, z가 실수이므로

$(x-1)^2\ge 0,\ \left(y+\frac{1}{2}\right)^2\ge 0,\ (z+2)^2\ge 0$

$\therefore\ x^2+4y^2+\frac{1}{2}z^2-2x+4y+2z+5\ge 1$

따라서 주어진 식의 최솟값은 1이다.

답 ①

0534 $x+y+3=0$에서 $\quad y=-x-3$

$\therefore\ x^2+2y^2=x^2+2(-x-3)^2=3x^2+12x+18$

$=3(x+2)^2+6$

이때 $-3\le x\le 0$이므로 $x=0$에서 최댓값 18, $x=-2$에서 최솟값 6을 갖는다.

따라서 최댓값과 최솟값의 합은

$18+6=24$

답 **24**

0535 $x+y=1$에서 $\quad y=1-x$

$x>0$, $y>0$이므로 $\quad 0<x<1$

$\therefore\ 2x^2+y^2=2x^2+(1-x)^2=3x^2-2x+1$

$=3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{3}$

이때 $0<x<1$이므로 $x=\frac{1}{3}$에서 최솟값 $\frac{2}{3}$를 갖는다.

답 $\frac{2}{3}$

0536 $2x+y=4$에서 $\quad y=-2x+4$

$\therefore\ xy=x(-2x+4)=-2x^2+4x$

$=-2(x-1)^2+2$

이때 $-4 \le x \le 3$이므로 $x=1$에서 최댓값 2, $x=-4$에서 최솟값 -48을 갖는다.
따라서 최댓값과 최솟값의 차는

$$2-(-48)=50$$

답 **50**

0537 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=2a,\ \alpha\beta=-4a^2$$

$$\begin{aligned}\therefore\ (\alpha+1)(\beta+1)&=\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1\\&=-4a^2+2a+1\\&=-4\left(a-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{5}{4}\end{aligned}$$

이때 $0<a\le 1$이므로 $a=1$에서 최솟값 -1을 갖는다.

답 **-1**

참고 | 이차방정식 $x^2-2ax-4a^2=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-a)^2-1\times(-4a^2)=5a^2\ge 0$$

따라서 이 이차방정식은 실근을 갖는다.

0538 $-x^2+9=0$에서 $x^2-9=0$

$$(x+3)(x-3)=0 \qquad \therefore\ x=-3 \text{ 또는 } x=3$$

따라서 이차함수 $y=-x^2+9$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 -3, 3이다.
점 B의 좌표를 $(a,\ 0)$ $(0<a<3)$이라 하면

$$\mathrm{A}(-a,\ 0),\ \mathrm{C}(a,\ -a^2+9)$$

$$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}}=2a,\ \overline{\mathrm{BC}}=-a^2+9$$

직사각형 ABCD의 둘레의 길이는

$$\begin{aligned}2\{2a+(-a^2+9)\}&=-2a^2+4a+18\\&=-2(a-1)^2+20\end{aligned}$$

이때 $0<a<3$이므로 $a=1$에서 최댓값 20을 갖는다.
따라서 직사각형 ABCD의 둘레의 길이의 최댓값은 20이다.

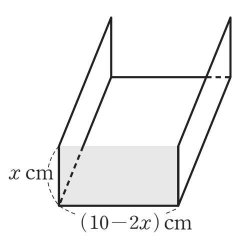
답 **20**

0539 $$\begin{aligned}h(t)&=-5t^2+30t+18\\&=-5(t-3)^2+63\end{aligned}$$

이때 $t\ge 0$이므로 $t=3$에서 최댓값 63을 갖는다.
따라서 구하는 높이는 63 m이다.

답 **63 m**

0540 오른쪽 그림과 같이 물받이의 높이를 x cm라 하면 단면은 가로의 길이가 $(10-2x)$ cm, 세로의 길이가 x cm인 직사각형이다.



이때 변의 길이는 양수이므로

$$0<x<5$$

색칠한 단면의 넓이는

$$\begin{aligned}x(10-2x)&=-2x^2+10x\\&=-2\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{25}{2}\end{aligned}$$ … 1단계

이때 $0<x<5$이므로 $x=\frac{5}{2}$에서 최댓값 $\frac{25}{2}$를 갖는다.
따라서 단면의 최대 넓이는 $\frac{25}{2}$ cm^2이고 그때의 물받이의 높이는 $\frac{5}{2}$ cm이므로

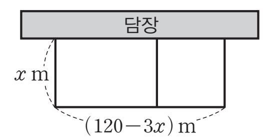
$$S=\frac{25}{2},\ h=\frac{5}{2}$$ … 2단계

$$\therefore\ S+h=\frac{25}{2}+\frac{5}{2}=15$$ … 3단계

답 **15**

채점 요소		비율
1단계	단면의 넓이를 이차식으로 나타내기	60 %
2단계	S, h의 값 구하기	30 %
3단계	$S+h$의 값 구하기	10 %

0541 오른쪽 그림과 같이 우리의 세로의 길이를 x m라 하면 전체 우리의 가로의 길이는 $(120-3x)$ m이다.



이때 변의 길이는 양수이므로

$$0<x<40$$

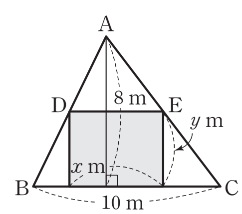
전체 우리의 넓이는

$$\begin{aligned}x(120-3x)&=-3x^2+120x\\&=-3(x-20)^2+1200\end{aligned}$$

이때 $0<x<40$이므로 $x=20$에서 최댓값 1200을 갖는다.
따라서 전체 우리의 최대 넓이는 1200 m^2이다.

답 **1200 m^2**

0542 오른쪽 그림과 같이 밭의 가로의 길이를 x m, 세로의 길이를 y m라 하면 $\triangle\mathrm{ABC}\backsim\triangle\mathrm{ADE}$ (AA 닮음)이므로



$$10 : x=8 : (8-y)$$

$$8x=80-10y$$

$$\therefore\ y=8-\frac{4}{5}x$$

이때 변의 길이는 양수이므로 $0<x<10$
밭의 넓이는

$$\begin{aligned}x\left(8-\frac{4}{5}x\right)&=-\frac{4}{5}x^2+8x\\&=-\frac{4}{5}(x-5)^2+20\end{aligned}$$

이때 $0<x<10$이므로 $x=5$에서 최댓값 20을 갖는다.
$x=5$일 때 $y=4$이므로 구하는 밭의 둘레의 길이는

$$2\times(5+4)=18\ (\mathrm{m})$$

답 **18 m**

0543 A 패키지 상품의 예약자가 x명일 때, 상품의 총판매 금액을 y원이라 하면
(i) $0\le x\le 30$일 때

$$y=50000x$$

따라서 $x=30$에서 최댓값 1500000을 갖는다.

(ii) $30<x\le 45$일 때

상품 가격은

$$50000-(x-30)\times 1000=80000-1000x$$

이므로

$$y=(80000-1000x)x=-1000x^2+80000x$$
$$=-1000(x-40)^2+1600000$$

따라서 $x=40$에서 최댓값 1600000을 갖는다.

(i), (ii)에서 총판매 금액이 최대가 되려면 예약자는 40명이어야 한다. 답 **40명**

시험에 꼭 나오는 문제

• 본책 078~080쪽

0544 이차함수 $y=x^2-2kx+k$의 그래프가 x축과 만나는 두 점의 x좌표를 α, β라 하면 α, β는 이차방정식 $x^2-2kx+k=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=2k,\ \alpha\beta=k \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 주어진 이차함수의 그래프가 x축과 만나는 두 점 사이의 거리가 $2\sqrt{2}$이므로

$$|\alpha-\beta|=2\sqrt{2}$$

양변을 제곱하면 $(\alpha-\beta)^2=8$

$$\therefore (\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=8 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면 $4k^2-4k=8$

$$k^2-k-2=0,\quad (k+1)(k-2)=0$$
$$\therefore k=2\ (\because k>0)$$

답 ②

다른 풀이 이차함수 $y=x^2-2kx+k$의 그래프가 x축과 만나는 두 점 사이의 거리는 이차방정식 $x^2-2kx+k=0$의 두 근의 차이므로 이차방정식 $x^2-2kx+k=0$의 두 근을 α, β라 하면

$$|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{(-2k)^2-4\times1\times k}}{1}=2\sqrt{2}$$
$$4k^2-4k=8,\quad k^2-k-2=0$$
$$(k+1)(k-2)=0\quad \therefore k=2\ (\because k>0)$$

RPM 비법 노트

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 실근을 α, β라 할 때,

$$|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{|a|}$$

0545 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 α, β이므로 α, β는 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이다.

즉 $f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$이므로 $f(x+5)=0$이려면

$$x+5=\alpha \text{ 또는 } x+5=\beta$$
$$\therefore x=\alpha-5 \text{ 또는 } x=\beta-5$$

따라서 이차방정식 $f(x+5)=0$의 두 근의 합은

$$(\alpha-5)+(\beta-5)=\alpha+\beta-10=-3-10=-13$$

답 **−13**

0546 이차함수 $y=-x^2+14x-4$의 그래프와 직선 $y=ax-10$이 서로 다른 두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2)에서 만나므로 x_1, x_2는 이차방정식

$$-x^2+14x-4=ax-10,\ \text{즉}$$
$$x^2+(a-14)x-6=0$$

의 두 근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$x_1+x_2=-(a-14)$$

즉 $-a+14=4$이므로

$$a=10$$

답 **10**

0547 이차함수 $y=3x^2-ax+1$의 그래프와 직선 $y=2x-b$의 두 교점의 x좌표가 -2, 3이므로 -2, 3은 이차방정식

$$3x^2-ax+1=2x-b,\ \text{즉}$$
$$3x^2-(a+2)x+1+b=0$$

의 두 근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-2+3=\frac{a+2}{3},\quad -2\times3=\frac{1+b}{3}$$
$$\therefore a=1,\ b=-19$$
$$\therefore a+b=1+(-19)=-18$$

답 ②

0548 이차함수 $y=-x^2+4x+2-k$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로 이차방정식 $-x^2+4x+2-k=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=2^2-(-1)\times(2-k)>0$$
$$6-k>0\quad \therefore k<6$$

따라서 정수 k의 최댓값은 5이다. 답 **5**

0549 이차함수 $y=x^2-2(a+m)x+m^2-4m+b$의 그래프가 x축에 접하므로 이차방정식

$x^2-2(a+m)x+m^2-4m+b=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(a+m)^2-(m^2-4m+b)=0$$
$$a^2+2am+m^2-m^2+4m-b=0$$
$$\therefore a^2-b+2m(a+2)=0$$

이 식이 m의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$$a^2-b=0,\ a+2=0$$

따라서 $a=-2$, $b=4$이므로

$$ab=-2\times4=-8$$

답 ②

0550 이차함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프가 점 $(1, 0)$에서 x축과 접하므로 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 1이다.

따라서 $1+a+b=0$이므로

$$b=-a-1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

또 $x^2+ax+b=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=a^2-4b=0$$

㉠을 이 식에 대입하면

$a^2-4(-a-1)=0,\quad a^2+4a+4=0$

$(a+2)^2=0\quad \therefore a=-2$

$a=-2$를 ㉠에 대입하면 $\quad b=1$

이차함수 $y=x^2+bx+a$, 즉 $y=x^2+x-2$의 그래프가 x축과 만나는 두 점의 x좌표는 이차방정식 $x^2+x-2=0$의 서로 다른 두 실근이다.

$x^2+x-2=0$에서 $\quad (x+2)(x-1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$

따라서 두 교점의 좌표가 $(-2, 0)$, $(1, 0)$이므로 두 점 사이의 거리는

$1-(-2)=3$

답 ③

다른 풀이 이차함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프가 점 $(1, 0)$에서 x축과 접하므로 이차방정식 $x^2+ax+b=0$은 $x=1$을 중근으로 갖는다.

이때 최고차항의 계수가 1이고 $x=1$을 중근으로 갖는 이차방정식은 $\quad (x-1)^2=0 \quad \therefore x^2-2x+1=0$

$\therefore a=-2,\ b=1$

0551 이차함수 $y=-x^2-2kx+1$의 그래프가 직선 $y=2x+k^2$보다 항상 아래쪽에 있으려면 이차함수의 그래프와 직선이 만나지 않아야 한다.

따라서 방정식 $-x^2-2kx+1=2x+k^2$, 즉 $x^2+2(k+1)x+k^2-1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k+1)^2-(k^2-1)<0$

$2k+2<0\quad \therefore k<-1$

따라서 정수 k의 최댓값은 -2이다. 답 -2

0552 이차함수 $y=x^2-2ax+4b$의 그래프가 x축에 접하므로 이차방정식 $x^2-2ax+4b=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=(-a)^2-4b=0$

$\therefore a^2=4b \quad \cdots\cdots ㉠$

또 이차함수 $y=x^2-2ax+4b$의 그래프가 직선 $y=-2x-4$에 접하므로 이차방정식 $x^2-2ax+4b=-2x-4$, 즉 $x^2-2(a-1)x+4b+4=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=(a-1)^2-(4b+4)=0$

$\therefore a^2-2a+1-4b-4=0$

㉠을 이 식에 대입하면

$4b-2a+1-4b-4=0,\quad -2a-3=0$

$\therefore a=-\frac{3}{2}$

이것을 ㉠에 대입하면 $\quad \frac{9}{4}=4b \quad \therefore b=\frac{9}{16}$

$\therefore \frac{a}{b}=-\frac{3}{2}\times\frac{16}{9}=-\frac{8}{3}$ 답 $-\frac{8}{3}$

0553 이차함수 $y=x^2-3x+a$의 그래프가 점 $(2, 3)$을 지나므로

$3=4-6+a\quad \therefore a=5$

또 직선 $y=bx+c$가 점 $(2, 3)$을 지나므로

$3=2b+c$

$\therefore c=-2b+3 \quad \cdots\cdots ㉠$

이때 직선 $y=bx+c$, 즉 $y=bx-2b+3$이 이차함수 $y=x^2-3x+5$의 그래프에 접하므로 이차방정식 $x^2-3x+5=bx-2b+3$, 즉 $x^2-(b+3)x+2b+2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(b+3)\}^2-4(2b+2)=0$

$b^2-2b+1=0,\quad (b-1)^2=0$

$\therefore b=1$

$b=1$을 ㉠에 대입하면 $\quad c=1$

$\therefore a+b+c=5+1+1=7$ 답 7

0554 이차함수 $y=2x^2+ax+b$의 그래프가 x축과 두 점 $(-5, 0)$, $(2, 0)$에서 만나므로 -5, 2는 이차방정식 $2x^2+ax+b=0$의 두 근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-5+2=-\frac{a}{2},\ -5\times2=\frac{b}{2}$

$\therefore a=6,\ b=-20$

$\therefore f(x)=2x^2+6x-20$

$=2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{49}{2}$

$-1\le x\le 2$에서

$f(-1)=-24,\ f(2)=0$

이므로 $f(x)$의 최솟값은 -24이다.

$\therefore m=-24$

$\therefore a+b-m=6+(-20)-(-24)=10$ 답 10

0555 $y=\frac{1}{2}x^2+ax-4=\frac{1}{2}(x+a)^2-\frac{1}{2}a^2-4$

이므로 $x=-a$에서 최솟값 $-\frac{1}{2}a^2-4$를 갖는다.

즉 $-\frac{1}{2}a^2-4=-6$이므로

$\frac{1}{2}a^2=2,\quad a^2=4$

$\therefore a=2\ (\because a>0)$

$f(x)=-x^2+2ax+3=-x^2+4x+3$

$=-(x-2)^2+7$

이라 하면 $-1\le x\le 1$에서

$f(-1)=-2,\ f(1)=6$

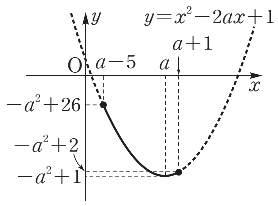
이므로 $f(x)$의 최댓값은 6, 최솟값은 -2이다.

따라서 구하는 합은

$6+(-2)=4$

답 4

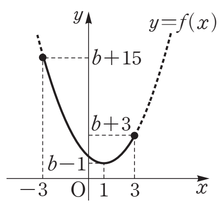
0556 $y=x^2-2ax+1$
$=(x-a)^2-a^2+1$



$a-5\le x\le a+1$에서 이 이차함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 $x=a-5$에서 최댓값 $-a^2+26$을 가지므로
$-a^2+26=-10$, $\quad a^2=36$
$\therefore\ a=6\ (\because\ a>0)$

답 ③

0557 조건 (가)에서 $\quad 4-2a+b=16+4a+b$
$6a=-12 \quad \therefore\ a=-2$
$\therefore\ f(x)=x^2-2x+b=(x-1)^2+b-1$



$-3\le x\le 3$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 $x=-3$에서 최댓값 $b+15$를 가지므로 조건 (나)에서
$b+15=20 \quad \therefore\ b=5$
$\therefore\ a+b=-2+5=3$

답 3

다른 풀이 조건 (가)에서 $f(-2)=f(4)$이므로 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식은
$$x=\frac{-2+4}{2}=1$$
즉 $-\dfrac{a}{2}=1$이므로 $\quad a=-2$

0558 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$가 직선 $x-3y+4=0$ 위를 움직이므로
$a-3b+4=0 \quad \therefore\ a=3b-4$
점 $\mathrm{P}(a,\ b)$가 제1사분면 위의 점이므로
$a>0,\ b>0 \quad \therefore\ b>\dfrac{4}{3}$
$\therefore\ a^2-b^2=(3b-4)^2-b^2=8b^2-24b+16$
$=8\left(b-\dfrac{3}{2}\right)^2-2$
이때 $b>\dfrac{4}{3}$이므로 $b=\dfrac{3}{2}$에서 최솟값 -2를 갖는다.

답 -2

0559 장미 한 송이의 가격이 $(2000+10x)$원일 때 장미의 하루 판매량은 $(300-x)$송이이므로 하루 판매 금액은
$(2000+10x)(300-x)=-10x^2+1000x+600000$
$=-10(x-50)^2+625000$
이때 $0\le x\le 300$이므로 $x=50$에서 최댓값 625000을 갖는다.
따라서 구하는 장미 한 송이의 가격은
$2000+10\times 50=2500$(원)

답 ⑤

0560 이차함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프와 직선 $y=3x-2$의 한 교점의 x좌표가 $2-\sqrt{3}$이므로 $2-\sqrt{3}$은 이차방정식
$x^2+ax+b=3x-2$, 즉 $x^2+(a-3)x+b+2=0$
의 한 근이다.
이때 $x^2+(a-3)x+b+2=0$의 계수가 모두 유리수이고 한 근이 $2-\sqrt{3}$이므로 다른 한 근은 $2+\sqrt{3}$이다. … 1단계
따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$(2-\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})=-(a-3)$,
$(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=b+2$
$\therefore\ a=-1,\ b=-1$ … 2단계
$\therefore\ ab=-1\times(-1)=1$ … 3단계

답 1

채점 요소		비율
1단계	이차방정식 $x^2+ax+b=3x-2$의 두 근 찾기	40 %
2단계	a, b의 값 구하기	40 %
3단계	ab의 값 구하기	20 %

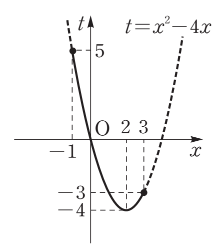
0561 이차함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프가 x축과 접하므로 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 판별식을 D라 하면
$D=a^2-4b=0 \quad \therefore\ a^2=4b$ …… ㉠ … 1단계
따라서 $f(x)=x^2+ax+b=\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2$이고, $0\le x\le a$에서
$f(0)=b,\ f(a)=2a^2+b=9b\ (\because$ ㉠$)$
이므로 $f(x)$는 $x=a$에서 최댓값 $9b$를 갖는다. … 2단계

답 $9b$

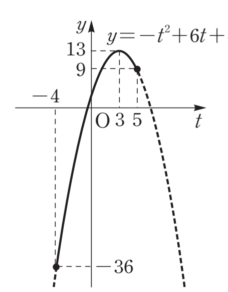
채점 요소		비율
1단계	이차방정식의 판별식을 이용하여 a, b에 대한 식 세우기	40 %
2단계	$0\le x\le a$에서 $f(x)$의 최댓값을 b에 대한 식으로 나타내기	60 %

참고 | $a^2>0$이므로 ㉠에서 $\quad b>0$
따라서 $b<9b$이므로 $\quad f(0)<f(a)$

0562 $x^2-4x=t$로 놓으면
$t=x^2-4x=(x-2)^2-4$



$-1\le x\le 3$이므로 오른쪽 그림에서
$-4\le t\le 5$ … 1단계
이때 주어진 함수는
$y=(t+1)^2-2(t-1)^2+5$
$=-t^2+6t+4$
$=-(t-3)^2+13\ (-4\le t\le 5)$



이므로 이 이차함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 $t=3$에서 최댓값 13, $t=-4$에서 최솟값 -36을 가지므로
$M=13,\ m=-36$ … 2단계
$\therefore\ M+m=13+(-36)$
$=-23$ … 3단계

답 -23

채점 요소		비율
1단계	공통부분을 t로 치환하고 t의 값의 범위 구하기	30 %
2단계	M, m의 값 구하기	50 %
3단계	$M+m$의 값 구하기	20 %

0563 점 B의 좌표를 $(a,\ 0)$ $(0<a<3)$이라 하면

$\mathrm{A}(a,\ (a-3)^2)$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}}=(a-3)^2,\ \overline{\mathrm{AC}}=a$ … 1단계

따라서 직사각형 OBAC의 둘레의 길이는

$$2\{(a-3)^2+a\}=2a^2-10a+18$$
$$=2\left(a-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{11}{2}$$ … 2단계

이때 $0<a<3$이므로 $a=\frac{5}{2}$에서 최솟값 $\frac{11}{2}$을 갖는다.

따라서 직사각형 OBAC의 둘레의 길이의 최솟값은 $\frac{11}{2}$이다.

… 3단계

답 $\frac{11}{2}$

채점 요소	비율
1단계 직사각형 OBAC의 가로, 세로의 길이를 한 문자로 나타내기	20 %
2단계 직사각형 OBAC의 둘레의 길이를 이차식으로 나타내기	50 %
3단계 직사각형 OBAC의 둘레의 길이의 최솟값 구하기	30 %

0564 전략 이차방정식의 판별식을 이용하여 a, b에 대한 부등식을 세운다.

이차함수 $y=(x+a)(x+b)+1$의 그래프가 x축과 만나지 않으므로 이차방정식 $(x+a)(x+b)+1=0$, 즉 $x^2+(a+b)x+ab+1=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=(a+b)^2-4(ab+1)<0$$
$$a^2+2ab+b^2-4ab-4<0$$
$$a^2-2ab+b^2<4,\qquad (a-b)^2<4$$
$$\therefore\ |a-b|<2$$

따라서 $|a-b|$의 값이 될 수 있는 것은 0, 1이다.

(i) $|a-b|=0$일 때

순서쌍 $(a,\ b)$는

$(1,\ 1),\ (2,\ 2),\ (3,\ 3),\ (4,\ 4),\ (5,\ 5),\ (6,\ 6)$

의 6개이다.

(ii) $|a-b|=1$일 때

순서쌍 $(a,\ b)$는

$(1,\ 2),\ (2,\ 3),\ (3,\ 4),\ (4,\ 5),\ (5,\ 6),$

$(6,\ 5),\ (5,\ 4),\ (4,\ 3),\ (3,\ 2),\ (2,\ 1)$

의 10개이다.

(i), (ii)에서 이차함수 $y=(x+a)(x+b)+1$의 그래프가 x축과 만나지 않도록 하는 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는

$$6+10=16$$

따라서 구하는 확률은

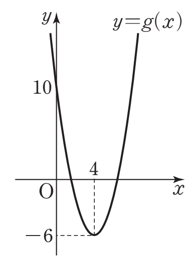
$$\frac{16}{36}=\frac{4}{9}$$

답 $\frac{4}{9}$

참고 | 주사위를 두 번 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는

$6\times6=36$

0565 전략 이차함수의 식을 $y=(x-p)^2+q$의 꼴로 변형하고 주어진 x의 값의 범위에 꼭짓점의 x좌표가 포함되는지 확인한다.



$g(x)=x^2-8x+10=(x-4)^2-6$

이라 하면 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

$f(2)$는 $1\le x\le3$에서 함수 $g(x)$의 최솟값이므로

$$f(2)=g(3)=-5$$

$f(3),\ f(4),\ f(5)$는 각각 $2\le x\le4$, $3\le x\le5$, $4\le x\le6$에서 함수 $g(x)$의 최솟값이므로

$$f(3)=f(4)=f(5)=g(4)=-6$$

$f(6)$은 $5\le x\le7$에서 함수 $g(x)$의 최솟값이므로

$$f(6)=g(5)=-5$$

$$\therefore\ f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)$$
$$=-5+(-6)\times3+(-5)$$
$$=-28$$

답 ③

0566 전략 $-2\le x<0$인 경우와 $0\le x\le3$인 경우로 나누어 최댓값을 구한다.

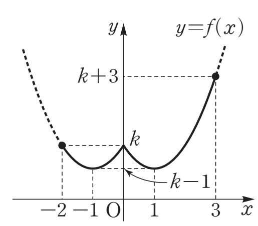
$f(x)=x^2-2|x|+k$라 하면

(i) $-2\le x<0$일 때,

$$f(x)=x^2+2x+k=(x+1)^2+k-1$$

(ii) $0\le x\le3$일 때,

$$f(x)=x^2-2x+k=(x-1)^2+k-1$$



(i), (ii)에서 $-2\le x\le3$일 때, $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $-2\le x\le3$에서 $f(x)$는 $x=3$일 때 최댓값 $k+3$을 가지므로

$$k+3=6\qquad\therefore\ k=3$$

이때 $f(x)$는 $x=-1$ 또는 $x=1$에서 최솟값

$$k-1=3-1=2$$

를 갖는다.

답 2

07 여러 가지 방정식

교과서 문제 정복하기

본책 083쪽, 085쪽

0567 $x^3-27=0$의 좌변을 인수분해하면

$(x-3)(x^2+3x+9)=0$

$\therefore x=3$ 또는 $x=\dfrac{-3\pm3\sqrt{3}i}{2}$

답 $\boldsymbol{x=3}$ **또는** $\boldsymbol{x=\dfrac{-3\pm3\sqrt{3}i}{2}}$

0568 $x^3-x^2-12x=0$의 좌변을 인수분해하면

$x(x^2-x-12)=0,\quad x(x+3)(x-4)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=0$ 또는 $x=4$

답 $\boldsymbol{x=-3}$ **또는** $\boldsymbol{x=0}$ **또는** $\boldsymbol{x=4}$

0569 $x^4+8x=0$의 좌변을 인수분해하면

$x(x^3+8)=0,\quad x(x+2)(x^2-2x+4)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1\pm\sqrt{3}i$

답 $\boldsymbol{x=-2}$ **또는** $\boldsymbol{x=0}$ **또는** $\boldsymbol{x=1\pm\sqrt{3}i}$

0570 $16x^4-1=0$의 좌변을 인수분해하면

$(4x^2-1)(4x^2+1)=0$

$(2x+1)(2x-1)(4x^2+1)=0$

$\therefore x=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $x=\dfrac{1}{2}$ 또는 $x=\pm\dfrac{1}{2}i$

답 $\boldsymbol{x=-\dfrac{1}{2}}$ **또는** $\boldsymbol{x=\dfrac{1}{2}}$ **또는** $\boldsymbol{x=\pm\dfrac{1}{2}i}$

0571 $f(x)=x^3-4x^2+3x+2$라 하면

$f(2)=8-16+6+2=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -4 & 3 & 2 \\ & & 2 & -4 & -2 \\ \hline & 1 & -2 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-2)(x^2-2x-1)$

따라서 주어진 방정식은

$(x-2)(x^2-2x-1)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=1\pm\sqrt{2}$

답 $\boldsymbol{x=2}$ **또는** $\boldsymbol{x=1\pm\sqrt{2}}$

0572 $f(x)=x^3+x+10$이라 하면

$f(-2)=-8-2+10=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 0 & 1 & 10 \\ & & -2 & 4 & -10 \\ \hline & 1 & -2 & 5 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x+2)(x^2-2x+5)$

따라서 주어진 방정식은

$(x+2)(x^2-2x+5)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1\pm2i$

답 $\boldsymbol{x=-2}$ **또는** $\boldsymbol{x=1\pm2i}$

0573 $f(x)=x^3-2x-1$이라 하면

$f(-1)=-1+2-1=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ & & -1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & -1 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x+1)(x^2-x-1)$

따라서 주어진 방정식은

$(x+1)(x^2-x-1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

답 $\boldsymbol{x=-1}$ **또는** $\boldsymbol{x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}}$

0574 $f(x)=x^4+3x^3+3x^2-x-6$이라 하면

$f(1)=1+3+3-1-6=0,$

$f(-2)=16-24+12+2-6=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 3 & 3 & -1 & -6 \\ & & 1 & 4 & 7 & 6 \\ \hline -2 & 1 & 4 & 7 & 6 & \boxed{0} \\ & & -2 & -4 & -6 & \\ \hline & 1 & 2 & 3 & \boxed{0} & \end{array}$$

$f(x)=(x+2)(x-1)(x^2+2x+3)$

따라서 주어진 방정식은

$(x+2)(x-1)(x^2+2x+3)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{2}i$

답 $\boldsymbol{x=-2}$ **또는** $\boldsymbol{x=1}$ **또는** $\boldsymbol{x=-1\pm\sqrt{2}i}$

0575 $f(x)=x^4-3x^3+x^2+4$라 하면

$f(2)=16-24+4+4=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 1 & -3 & 1 & 0 & 4 \\ & & 2 & -2 & -2 & -4 \\ \hline 2 & 1 & -1 & -1 & -2 & \boxed{0} \\ & & 2 & 2 & 2 & \\ \hline & 1 & 1 & 1 & \boxed{0} & \end{array}$$

← $g(x)=x^3-x^2-x-2$라 하면 $g(2)=8-4-2-2=0$

$f(x)=(x-2)^2(x^2+x+1)$

따라서 주어진 방정식은

$(x-2)^2(x^2+x+1)=0$

$\therefore x=2$ (중근) 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

답 $\boldsymbol{x=2}$ **(중근) 또는** $\boldsymbol{x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}}$

0576 $f(x)=x^4+x^3-7x^2-x+6$이라 하면

$f(1)=1+1-7-1+6=0$,

$f(-1)=1-1-7+1+6=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 1 & -7 & -1 & 6 \\ & & 1 & 2 & -5 & -6 \\ \hline -1 & 1 & 2 & -5 & -6 & \boxed{0} \\ & & -1 & -1 & 6 & \\ \hline & 1 & 1 & -6 & \boxed{0} & \end{array}$$

$f(x)=(x+1)(x-1)(x^2+x-6)$

$=(x+1)(x-1)(x+3)(x-2)$

따라서 주어진 방정식은

$(x+3)(x+1)(x-1)(x-2)=0$

$\therefore$ $x=-3$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

답 $\boldsymbol{x=-3}$ **또는** $\boldsymbol{x=-1}$ **또는** $\boldsymbol{x=1}$ **또는** $\boldsymbol{x=2}$

0577 $x^2+3x=t$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2-2t-8=0,\quad (t+2)(t-4)=0$

$\therefore$ $t=-2$ 또는 $t=4$

(i) $t=-2$일 때, $x^2+3x=-2$에서

$x^2+3x+2=0,\quad (x+2)(x+1)=0$

$\therefore$ $x=-2$ 또는 $x=-1$

(ii) $t=4$일 때, $x^2+3x=4$에서

$x^2+3x-4=0,\quad (x+4)(x-1)=0$

$\therefore$ $x=-4$ 또는 $x=1$

(i), (ii)에서 $x=-4$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$

답 $\boldsymbol{x=-4}$ **또는** $\boldsymbol{x=-2}$ **또는** $\boldsymbol{x=-1}$ **또는** $\boldsymbol{x=1}$

0578 $x^2+1=t$로 놓으면 주어진 방정식은

$4t^2-13t+10=0,\quad (4t-5)(t-2)=0$

$\therefore$ $t=\dfrac{5}{4}$ 또는 $t=2$

(i) $t=\dfrac{5}{4}$일 때, $x^2+1=\dfrac{5}{4}$에서

$x^2=\dfrac{1}{4}\quad \therefore x=\pm\dfrac{1}{2}$

(ii) $t=2$일 때, $x^2+1=2$에서

$x^2=1\quad \therefore x=\pm1$

(i), (ii)에서 $x=\pm\dfrac{1}{2}$ 또는 $x=\pm1$

답 $\boldsymbol{x=\pm\dfrac{1}{2}}$ **또는** $\boldsymbol{x=\pm1}$

0579 $x^2-2x=t$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2-5t-24=0,\quad (t+3)(t-8)=0$

$\therefore$ $t=-3$ 또는 $t=8$

(i) $t=-3$일 때, $x^2-2x=-3$에서

$x^2-2x+3=0\quad \therefore x=1\pm\sqrt{2}i$

(ii) $t=8$일 때, $x^2-2x=8$에서

$x^2-2x-8=0,\quad (x+2)(x-4)=0$

$\therefore$ $x=-2$ 또는 $x=4$

(i), (ii)에서 $x=-2$ 또는 $x=4$ 또는 $x=1\pm\sqrt{2}i$

답 $\boldsymbol{x=-2}$ **또는** $\boldsymbol{x=4}$ **또는** $\boldsymbol{x=1\pm\sqrt{2}i}$

0580 $x^2=t$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2-5t+4=0,\quad (t-1)(t-4)=0$

$\therefore$ $t=1$ 또는 $t=4$

따라서 $x^2=1$ 또는 $x^2=4$이므로

$x=\pm1$ 또는 $x=\pm2$

답 $\boldsymbol{x=\pm1}$ **또는** $\boldsymbol{x=\pm2}$

0581 $x^4+x^2+1=0$에서

$(x^4+2x^2+1)-x^2=0,\quad (x^2+1)^2-x^2=0$

$(x^2+x+1)(x^2-x+1)=0$

$x^2+x+1=0$ 또는 $x^2-x+1=0$

$\therefore$ $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

답 $\boldsymbol{x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}}$ **또는** $\boldsymbol{x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}}$

0582 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

(1) $\alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{4}{1}=-4$

(2) $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\dfrac{2}{1}=2$

(3) $\alpha\beta\gamma=-\dfrac{-6}{1}=6$

답 (1) $\boldsymbol{-4}$ (2) **2** (3) **6**

0583 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=5,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-2,\ \alpha\beta\gamma=-4$

(1) $\alpha^2\beta\gamma+\alpha\beta^2\gamma+\alpha\beta\gamma^2=\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)$

$=-4\times5=-20$

(2) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

$=5^2-2\times(-2)=29$

(3) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}=\dfrac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=\dfrac{-2}{-4}=\dfrac{1}{2}$

답 (1) $\boldsymbol{-20}$ (2) **29** (3) $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

0584 x^3의 계수가 1이고 세 근이 -2, 1, 3인 삼차방정식은

$x^3-(-2+1+3)x^2+\{-2\times1+1\times3+3\times(-2)\}x$

$-(-2)\times1\times3=0$

$\therefore$ $x^3-2x^2-5x+6=0$

답 $\boldsymbol{x^3-2x^2-5x+6=0}$

0585 x^3의 계수가 1이고 세 근이 -1, $3+\sqrt{5}$, $3-\sqrt{5}$인 삼차방정식은

$$x^3-\{-1+(3+\sqrt{5})+(3-\sqrt{5})\}x^2$$
$$+\{-1\times(3+\sqrt{5})+(3+\sqrt{5})\times(3-\sqrt{5})$$
$$+(3-\sqrt{5})\times(-1)\}x$$
$$-(-1)\times(3+\sqrt{5})\times(3-\sqrt{5})=0$$
$$\therefore\ x^3-5x^2-2x+4=0$$

답 $\boldsymbol{x^3-5x^2-2x+4=0}$

0586 x^3의 계수가 4이고 세 근이 1, $\frac{1}{2}i$, $-\frac{1}{2}i$인 삼차방정식은

$$4\left[x^3-\left\{1+\frac{1}{2}i+\left(-\frac{1}{2}i\right)\right\}x^2\right.$$
$$+\left\{1\times\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}i\times\left(-\frac{1}{2}i\right)+\left(-\frac{1}{2}i\right)\times1\right\}x$$
$$\left.-1\times\frac{1}{2}i\times\left(-\frac{1}{2}i\right)\right]=0$$
$$4\left(x^3-x^2+\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}\right)=0 \qquad \therefore\ 4x^3-4x^2+x-1=0$$

답 $\boldsymbol{4x^3-4x^2+x-1=0}$

0587 주어진 삼차방정식의 계수가 유리수이므로 $1-\sqrt{3}$이 근이면 $1+\sqrt{3}$도 근이다.
따라서 주어진 방정식의 세 근이 -2, $1-\sqrt{3}$, $1+\sqrt{3}$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-2\times(1-\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})\times(1+\sqrt{3})+(1+\sqrt{3})\times(-2)=a,$$
$$-2\times(1-\sqrt{3})\times(1+\sqrt{3})=-b$$
$$\therefore\ a=-6,\ b=-4$$

답 $\boldsymbol{a=-6,\ b=-4}$

0588 주어진 삼차방정식의 계수가 실수이므로 $-2+3i$가 근이면 $-2-3i$도 근이다.
따라서 주어진 방정식의 세 근이 2, $-2+3i$, $-2-3i$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$2+(-2+3i)+(-2-3i)=-a,$$
$$2\times(-2+3i)\times(-2-3i)=-b$$
$$\therefore\ a=2,\ b=-26$$

답 $\boldsymbol{a=2,\ b=-26}$

0589 주어진 삼차방정식의 계수가 실수이므로 $-2i$가 근이면 $2i$도 근이다.
나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+(-2i)+2i=-1 \qquad \therefore\ \alpha=-1$$

따라서 주어진 방정식의 세 근이 -1, $-2i$, $2i$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-1\times(-2i)+(-2i)\times2i+2i\times(-1)=a,$$
$$-1\times(-2i)\times2i=-b$$
$$\therefore\ a=4,\ b=4$$

답 $\boldsymbol{a=4,\ b=4}$

0590 $x^3=1$에서 $\quad x^3-1=0$

$$\therefore\ (x-1)(x^2+x+1)=0$$

(1) ω는 $x^2+x+1=0$의 한 허근이므로

$$\omega^2+\omega+1=0$$

(2) $x^2+x+1=0$의 두 허근이 ω, $\overline{\omega}$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\omega+\overline{\omega}=-1,\ \omega\overline{\omega}=1$$
$$\therefore\ \omega+\overline{\omega}-\omega\overline{\omega}=-1-1=-2$$

(3) $\omega^2+\omega+1=0$에서 $\omega^2+1=-\omega$이므로

$$\omega+\frac{1}{\omega}=\frac{\omega^2+1}{\omega}=\frac{-\omega}{\omega}=-1$$

(4) $\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$이므로

$$\omega^{20}+\omega^{10}+1=(\omega^3)^6\times\omega^2+(\omega^3)^3\times\omega+1$$
$$=\omega^2+\omega+1=0$$

답 (1) **0** (2) $\boldsymbol{-2}$ (3) $\boldsymbol{-1}$ (4) **0**

0591 $x^3=-1$에서 $\quad x^3+1=0$

$$\therefore\ (x+1)(x^2-x+1)=0$$

(1) ω는 $x^2-x+1=0$의 한 허근이므로

$$\omega^2-\omega+1=0$$

(2) $x^2-x+1=0$의 두 허근이 ω, $\overline{\omega}$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\omega+\overline{\omega}=1,\ \omega\overline{\omega}=1$$
$$\therefore\ \omega+\overline{\omega}+\omega\overline{\omega}=1+1=2$$

(3) $\omega^2-\omega+1=0$에서 $\omega^2+1=\omega$이므로

$$\omega+\frac{1}{\omega}=\frac{\omega^2+1}{\omega}=\frac{\omega}{\omega}=1$$

(4) $\omega^3=-1$, $\omega^2-\omega+1=0$이므로

$$\omega^{20}+\omega^{10}+1=(\omega^3)^6\times\omega^2+(\omega^3)^3\times\omega+1$$
$$=\omega^2-\omega+1=0$$

답 (1) **0** (2) **2** (3) **1** (4) **0**

0592 $x-y=-2$에서 $\quad y=x+2 \quad\cdots\cdots$ ㉠
㉠을 $x^2+y^2=20$에 대입하면

$$x^2+(x+2)^2=20, \qquad 2x^2+4x-16=0$$
$$x^2+2x-8=0, \qquad (x+4)(x-2)=0$$
$$\therefore\ x=-4 \text{ 또는 } x=2$$

$x=-4$를 ㉠에 대입하면 $\quad y=-2$
$x=2$를 ㉠에 대입하면 $\quad y=4$
따라서 구하는 해는

$$\begin{cases}x=-4\\y=-2\end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases}x=2\\y=4\end{cases}$$

답 $\boldsymbol{\begin{cases}x=-4\\y=-2\end{cases}}$ **또는** $\boldsymbol{\begin{cases}x=2\\y=4\end{cases}}$

0593 $x-3y=0$에서 $\quad x=3y \quad\cdots\cdots$ ㉠
㉠을 $x^2+y^2=40$에 대입하면

$$(3y)^2+y^2=40, \qquad 10y^2=40$$
$$y^2=4 \qquad \therefore\ y=\pm2$$

$y=2$를 ㉠에 대입하면 $\quad x=6$

$y=-2$를 ㉠에 대입하면 $\quad x=-6$

따라서 구하는 해는

$\begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-6 \\ y=-2 \end{cases}$

답 $\begin{cases} \boldsymbol{x=6} \\ \boldsymbol{y=2} \end{cases}$ **또는** $\begin{cases} \boldsymbol{x=-6} \\ \boldsymbol{y=-2} \end{cases}$

0594 $x+y=1$에서 $\quad x=1-y \quad$ …… ㉠

㉠을 $4y^2-x^2=15$에 대입하면

$4y^2-(1-y)^2=15, \quad 3y^2+2y-16=0$

$(3y+8)(y-2)=0 \quad \therefore y=-\frac{8}{3}$ 또는 $y=2$

$y=-\frac{8}{3}$을 ㉠에 대입하면 $\quad x=\frac{11}{3}$

$y=2$를 ㉠에 대입하면 $\quad x=-1$

따라서 구하는 해는

$\begin{cases} x=\frac{11}{3} \\ y=-\frac{8}{3} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$

답 $\begin{cases} \boldsymbol{x=\frac{11}{3}} \\ \boldsymbol{y=-\frac{8}{3}} \end{cases}$ **또는** $\begin{cases} \boldsymbol{x=-1} \\ \boldsymbol{y=2} \end{cases}$

0595 $\begin{cases} x^2+xy-2y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+2xy-y^2=8 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $\quad (x-y)(x+2y)=0$

$\therefore x=y$ 또는 $x=-2y$

(i) $x=y$를 ㉡에 대입하면

$y^2+2y^2-y^2=8, \quad 2y^2=8, \quad y^2=4$

$\therefore y=\pm 2$

$x=y$이므로

$x=2, y=2$ 또는 $x=-2, y=-2$

(ii) $x=-2y$를 ㉡에 대입하면

$(-2y)^2+2\times(-2y)\times y-y^2=8$

$y^2=-8 \quad \therefore y=\pm 2\sqrt{2}i$

$x=-2y$이므로

$x=-4\sqrt{2}i, y=2\sqrt{2}i$ 또는 $x=4\sqrt{2}i, y=-2\sqrt{2}i$

(i), (ii)에서 구하는 해는

$\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-2 \end{cases}$

또는 $\begin{cases} x=-4\sqrt{2}i \\ y=2\sqrt{2}i \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4\sqrt{2}i \\ y=-2\sqrt{2}i \end{cases}$

답 $\begin{cases} \boldsymbol{x=2} \\ \boldsymbol{y=2} \end{cases}$ **또는** $\begin{cases} \boldsymbol{x=-2} \\ \boldsymbol{y=-2} \end{cases}$

또는 $\begin{cases} \boldsymbol{x=-4\sqrt{2}i} \\ \boldsymbol{y=2\sqrt{2}i} \end{cases}$ **또는** $\begin{cases} \boldsymbol{x=4\sqrt{2}i} \\ \boldsymbol{y=-2\sqrt{2}i} \end{cases}$

0596 $\begin{cases} 3x^2+2xy-y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=12-2x & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $\quad (x+y)(3x-y)=0$

$\therefore y=-x$ 또는 $y=3x$

(i) $y=-x$를 ㉡에 대입하면

$x^2+(-x)^2=12-2x, \quad 2x^2=12-2x$

$x^2+x-6=0, \quad (x+3)(x-2)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=2$

$y=-x$이므로

$x=-3, y=3$ 또는 $x=2, y=-2$

(ii) $y=3x$를 ㉡에 대입하면

$x^2+(3x)^2=12-2x, \quad 10x^2=12-2x$

$5x^2+x-6=0, \quad (5x+6)(x-1)=0$

$\therefore x=-\frac{6}{5}$ 또는 $x=1$

$y=3x$이므로

$x=-\frac{6}{5}, y=-\frac{18}{5}$ 또는 $x=1, y=3$

(i), (ii)에서 구하는 해는

$\begin{cases} x=-3 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\frac{6}{5} \\ y=-\frac{18}{5} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$

답 $\begin{cases} \boldsymbol{x=-3} \\ \boldsymbol{y=3} \end{cases}$ **또는** $\begin{cases} \boldsymbol{x=2} \\ \boldsymbol{y=-2} \end{cases}$ **또는** $\begin{cases} \boldsymbol{x=-\frac{6}{5}} \\ \boldsymbol{y=-\frac{18}{5}} \end{cases}$ **또는** $\begin{cases} \boldsymbol{x=1} \\ \boldsymbol{y=3} \end{cases}$

0597 $x+y=2, xy=-8$에서 x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2-2t-8=0$의 두 근이다.

$t^2-2t-8=0$에서 $\quad (t+2)(t-4)=0$

$\therefore t=-2$ 또는 $t=4$

따라서 구하는 해는

$\begin{cases} x=-2 \\ y=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=-2 \end{cases}$

답 $\begin{cases} \boldsymbol{x=-2} \\ \boldsymbol{y=4} \end{cases}$ **또는** $\begin{cases} \boldsymbol{x=4} \\ \boldsymbol{y=-2} \end{cases}$

0598 $\begin{cases} x^2+y^2=10 & \cdots\cdots ㉠ \\ xy=3 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $\quad (x+y)^2-2xy=10 \quad$ …… ㉢

㉡을 ㉢에 대입하면

$(x+y)^2-6=10, \quad (x+y)^2=16$

$\therefore x+y=\pm 4$

(i) $x+y=4, xy=3$일 때, x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2-4t+3=0$의 두 근이다.

$t^2-4t+3=0$에서 $\quad (t-1)(t-3)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=3$

$\therefore x=1, y=3$ 또는 $x=3, y=1$

(ii) $x+y=-4, xy=3$일 때, x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2+4t+3=0$의 두 근이다.

$t^2+4t+3=0$에서 $\quad (t+3)(t+1)=0$

$\therefore t=-3$ 또는 $t=-1$

$\therefore x=-3, y=-1$ 또는 $x=-1, y=-3$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 해는

$\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-3 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=-3 \end{cases}$

답 $\begin{cases} \boldsymbol{x=1} \\ \boldsymbol{y=3} \end{cases}$ **또는** $\begin{cases} \boldsymbol{x=3} \\ \boldsymbol{y=1} \end{cases}$ **또는** $\begin{cases} \boldsymbol{x=-3} \\ \boldsymbol{y=-1} \end{cases}$ **또는** $\begin{cases} \boldsymbol{x=-1} \\ \boldsymbol{y=-3} \end{cases}$

유형 익히기

• 본책 086~095쪽

0599 $f(x)=x^3-2x^2-9x+18$이라 하면

$f(2)=8-8-18+18=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -2 & -9 & 18 \\ & & 2 & 0 & -18 \\ \hline & 1 & 0 & -9 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-2)(x^2-9)$

$=(x-2)(x+3)(x-3)$

즉 주어진 방정식은

$(x+3)(x-2)(x-3)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$

따라서 가장 큰 근은 3, 가장 작은 근은 -3이므로 구하는 곱은

$3\times(-3)=-9$ 답 ①

다른 풀이 $x^3-2x^2-9x+18=0$에서

$x^2(x-2)-9(x-2)=0,\quad (x-2)(x^2-9)=0$

$(x-2)(x+3)(x-3)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=-3$ 또는 $x=3$

0600 $f(x)=x^3+x^2+2x+8$이라 하면

$f(-2)=-8+4-4+8=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 1 & 2 & 8 \\ & & -2 & 2 & -8 \\ \hline & 1 & -1 & 4 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x+2)(x^2-x+4)$

즉 주어진 방정식은

$(x+2)(x^2-x+4)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{15}i}{2}$

따라서 $\alpha=-2,\ \beta=1,\ \gamma=15$이므로

$\alpha+\beta+\gamma=-2+1+15=14$ 답 **14**

0601 $f(x)=x^4-4x^2+12x-9$라 하면

$f(1)=1-4+12-9=0,$

$f(-3)=81-36-36-9=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 0 & -4 & 12 & -9 \\ & & 1 & 1 & -3 & 9 \\ \hline -3 & 1 & 1 & -3 & 9 & \boxed{0} \\ & & -3 & 6 & -9 & \\ \hline & 1 & -2 & 3 & \boxed{0} & \end{array}$$

$f(x)=(x-1)(x+3)(x^2-2x+3)$

즉 주어진 방정식은

$(x-1)(x+3)(x^2-2x+3)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=-3$ 또는 $x=1\pm\sqrt{2}i$

따라서 모든 실근의 합은

$1+(-3)=-2$ 답 **-2**

0602 $f(x)=x^4-3x^3+2x^2+2x-4$라 하면

$f(-1)=1+3+2-2-4=0,$

$f(2)=16-24+8+4-4=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & -3 & 2 & 2 & -4 \\ & & -1 & 4 & -6 & 4 \\ \hline 2 & 1 & -4 & 6 & -4 & \boxed{0} \\ & & 2 & -4 & 4 & \\ \hline & 1 & -2 & 2 & \boxed{0} & \end{array}$$

$f(x)=(x+1)(x-2)(x^2-2x+2)$

따라서 주어진 방정식은

$(x+1)(x-2)(x^2-2x+2)=0$

이때 방정식 $f(x)=0$의 두 허근 $\alpha,\ \beta$는 이차방정식 $x^2-2x+2=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=2$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=2^2-2\times2=0$ 답 ③

0603 $x^3-2x^2+ax=0$에서 $\quad x(x^2-2x+a)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x^2-2x+a=0$

이때 방정식 $x^3-2x^2+ax=0$의 두 근 $\alpha,\ \beta$에 대하여 $\alpha\beta\neq0$이므로 $\alpha,\ \beta$는 이차방정식 $x^2-2x+a=0$의 두 근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=a$ … 1단계

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$이므로

$8^2=2^2-4a,\quad 4a=-60$

$\therefore a=-15$ … 2단계

답 **-15**

채점 요소		비율
1단계	$\alpha+\beta,\ \alpha\beta$의 값 구하기	60 %
2단계	a의 값 구하기	40 %

0604 $f(x)=x^3+2x^2+9x+8$이라 하면

$f(-1)=-1+2-9+8=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 2 & 9 & 8 \\ & & -1 & -1 & -8 \\ \hline & 1 & 1 & 8 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x+1)(x^2+x+8)$

따라서 주어진 방정식은

$(x+1)(x^2+x+8)=0$

이때 방정식 $f(x)=0$의 허근 α는 이차방정식 $x^2+x+8=0$의 한 근이므로

$$\alpha^2+\alpha+8=0$$

양변을 α로 나누면 $\quad \alpha+1+\dfrac{8}{\alpha}=0$

$$\therefore\ \alpha+\frac{8}{\alpha}=-1$$

양변을 제곱하면 $\quad \alpha^2+16+\dfrac{64}{\alpha^2}=1$

$$\therefore\ \alpha^2+\frac{64}{\alpha^2}=-15$$

답 **−15**

0605 $f(x)=x^4+2x^3+3x^2-2x-4$라 하면

$$f(1)=1+2+3-2-4=0,$$
$$f(-1)=1-2+3+2-4=0$$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr}
1 & 1 & 2 & 3 & -2 & -4 \\
 & & 1 & 3 & 6 & 4 \\
\hline
-1 & 1 & 3 & 6 & 4 & 0 \\
 & & -1 & -2 & -4 & \\
\hline
 & 1 & 2 & 4 & 0 &
\end{array}$$

$$f(x)=(x-1)(x+1)(x^2+2x+4)$$

따라서 주어진 방정식은

$$(x-1)(x+1)(x^2+2x+4)=0$$

이때 방정식 $f(x)=0$의 허근 α는 이차방정식 $x^2+2x+4=0$의 한 근이므로

$$\alpha^2+2\alpha+4=0 \qquad \therefore\ \alpha^2=-2\alpha-4 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

한편 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 2α이므로

$$4\alpha^2+2a\alpha+b=0$$

㉠을 이 식에 대입하면

$$4(-2\alpha-4)+2a\alpha+b=0$$
$$\therefore\ (2a-8)\alpha+b-16=0$$

이때 a, b는 실수이고 α는 허수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$2a-8=0,\ b-16=0$$
$$\therefore\ a=4,\ b=16$$
$$\therefore\ a+b=4+16=20$$

답 ③

다른 풀이 $x^4+2x^3+3x^2-2x-4=0$에서

$$(x+1)(x-1)(x^2+2x+4)=0$$
$$\therefore\ x=-1 \text{ 또는 } x=1 \text{ 또는 } x=-1\pm\sqrt{3}i$$

이때 $\alpha=-1+\sqrt{3}i$라 하면 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $-2+2\sqrt{3}i$이고, a, b가 실수이므로 다른 한 근은 $-2-2\sqrt{3}i$이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(-2+2\sqrt{3}i)+(-2-2\sqrt{3}i)=-a,$$
$$(-2+2\sqrt{3}i)(-2-2\sqrt{3}i)=b$$
$$\therefore\ a=4,\ b=16$$

0606 $x^2+4x=t$로 놓으면 주어진 방정식은

$$t^2-3t-10=0, \qquad (t+2)(t-5)=0$$
$$\therefore\ t=-2 \text{ 또는 } t=5$$

(i) $t=-2$일 때, $x^2+4x=-2$에서

$$x^2+4x+2=0 \qquad \therefore\ x=-2\pm\sqrt{2}$$

(ii) $t=5$일 때, $x^2+4x=5$에서

$$x^2+4x-5=0, \qquad (x+5)(x-1)=0$$
$$\therefore\ x=-5 \text{ 또는 } x=1$$

(i), (ii)에서

$$x=-2\pm\sqrt{2} \text{ 또는 } x=-5 \text{ 또는 } x=1$$

따라서 주어진 방정식의 근인 것은 ①이다.

답 ①

0607 $x^2-2x=t$로 놓으면 주어진 방정식은

$$(t-4)(t-2)-3=0, \qquad t^2-6t+5=0$$
$$(t-1)(t-5)=0 \qquad \therefore\ t=1 \text{ 또는 } t=5$$

(i) $t=1$일 때, $x^2-2x=1$에서

$$x^2-2x-1=0$$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 이 이차방정식의 두 근의 곱은 -1이다.

(ii) $t=5$일 때, $x^2-2x=5$에서

$$x^2-2x-5=0$$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 이 이차방정식의 두 근의 곱은 -5이다.

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 모든 근의 곱은

$$-1\times(-5)=5$$

답 **5**

0608 $(x-1)(x-3)(x+5)(x+7)+63=0$에서

$$\{(x-1)(x+5)\}\{(x-3)(x+7)\}+63=0$$
$$\therefore\ (x^2+4x-5)(x^2+4x-21)+63=0$$

$x^2+4x=t$로 놓으면 주어진 방정식은

$$(t-5)(t-21)+63=0, \qquad t^2-26t+168=0$$
$$(t-12)(t-14)=0 \qquad \therefore\ t=12 \text{ 또는 } t=14$$

(i) $t=12$일 때, $x^2+4x=12$에서

$$x^2+4x-12=0, \qquad (x+6)(x-2)=0$$
$$\therefore\ x=-6 \text{ 또는 } x=2$$

(ii) $t=14$일 때, $x^2+4x=14$에서

$$x^2+4x-14=0 \qquad \therefore\ x=-2\pm3\sqrt{2}$$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 양수인 근은 2, $-2+3\sqrt{2}$이므로 구하는 합은

$$2+(-2+3\sqrt{2})=3\sqrt{2}$$

답 $\mathbf{3\sqrt{2}}$

0609 $x(x+1)(x+2)(x+3)-3=0$에서

$$\{x(x+3)\}\{(x+1)(x+2)\}-3=0$$
$$\therefore\ (x^2+3x)(x^2+3x+2)-3=0$$

$x^2+3x=t$로 놓으면 주어진 방정식은

$$t(t+2)-3=0, \qquad t^2+2t-3=0$$
$$(t+3)(t-1)=0 \qquad \therefore\ t=-3 \text{ 또는 } t=1$$

(i) $t=-3$일 때, $x^2+3x=-3$에서

$$x^2+3x+3=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 하면

$$D_1=3^2-4\times1\times3=-3<0$$

이므로 이 이차방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(ii) $t=1$일 때, $x^2+3x=1$에서

$$x^2+3x-1=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D_2라 하면

$$D_2=3^2-4\times1\times(-1)=13>0$$

이므로 이 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 두 허근 α, β는 이차방정식 $x^2+3x+3=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-3$, $\alpha\beta=3$

$$\therefore (\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$$
$$=(-3)^2-4\times3=-3$$

답 -3

0610 $x^4-6x^2+1=0$에서

$(x^4-2x^2+1)-4x^2=0$, $(x^2-1)^2-(2x)^2=0$

$(x^2+2x-1)(x^2-2x-1)=0$

$x^2+2x-1=0$ 또는 $x^2-2x-1=0$

$\therefore x=-1\pm\sqrt{2}$ 또는 $x=1\pm\sqrt{2}$

따라서 주어진 방정식의 모든 양수인 근의 곱은

$(-1+\sqrt{2})\times(1+\sqrt{2})=1$

답 ①

0611 $x^2=t$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2-10t+9=0$, $(t-1)(t-9)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=9$

따라서 $x^2=1$ 또는 $x^2=9$이므로

$x=\pm1$ 또는 $x=\pm3$

$\therefore |\alpha|+|\beta|+|\gamma|+|\delta|=|1|+|-1|+|3|+|-3|$
$=8$

답 8

0612 $x^2=t$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2+t-20=0$, $(t+5)(t-4)=0$

$\therefore t=-5$ 또는 $t=4$

즉 $x^2=-5$ 또는 $x^2=4$이므로

$x=\pm\sqrt{5}i$ 또는 $x=\pm2$

따라서 주어진 방정식의 두 실근의 곱은

$2\times(-2)=-4$

답 -4

0613 $x^4-11x^2+25=0$에서

$(x^4-10x^2+25)-x^2=0$, $(x^2-5)^2-x^2=0$

$(x^2+x-5)(x^2-x-5)=0$

$\therefore x^2+x-5=0$ 또는 $x^2-x-5=0$

방정식 $x^2+x-5=0$의 두 근을 α, β라 하고, 방정식 $x^2-x-5=0$의 두 근을 γ, δ라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-1$, $\alpha\beta=-5$, $\gamma+\delta=1$, $\gamma\delta=-5$

$$\therefore \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+\frac{\gamma+\delta}{\gamma\delta}$$
$$=\frac{-1}{-5}+\frac{1}{-5}=0$$

답 0

0614 $f(x)=x^3+ax+4$라 하면 주어진 방정식의 한 근이 -2이므로 $f(-2)=0$에서

$-8-2a+4=0$ $\therefore a=-2$

즉 $f(x)=x^3-2x+4$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr}
-2 & 1 & 0 & -2 & 4 \\
 & & -2 & 4 & -4 \\
\hline
 & 1 & -2 & 2 & \boxed{0}
\end{array}$$

$f(x)=(x+2)(x^2-2x+2)$

따라서 주어진 방정식은

$(x+2)(x^2-2x+2)=0$

이때 α, β는 이차방정식 $x^2-2x+2=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2$

$\therefore a+\alpha+\beta=-2+2=0$

답 ③

0615 $f(x)=x^3+ax^2+7bx-12b$라 하면 주어진 방정식의 두 근이 2, 3이므로

$f(2)=0$에서 $8+4a+14b-12b=0$

$\therefore 2a+b=-4$ …… ㉠

$f(3)=0$에서 $27+9a+21b-12b=0$

$\therefore a+b=-3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=-2$

즉 $f(x)=x^3-x^2-14x+24$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr}
2 & 1 & -1 & -14 & 24 \\
 & & 2 & 2 & -24 \\
\hline
3 & 1 & 1 & -12 & \boxed{0} \\
 & & 3 & 12 & \\
\hline
 & 1 & 4 & \boxed{0} &
\end{array}$$

$f(x)$
$=(x-2)(x-3)(x+4)$

따라서 주어진 방정식은

$(x-2)(x-3)(x+4)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=3$ 또는 $x=-4$

즉 나머지 한 근은 -4이다.

답 -4

0616 $f(x)=x^4+4x^3-2ax^2-(2a+1)x-10$이라 하면 주어진 방정식의 한 근이 2이므로 $f(2)=0$에서

$16+32-8a-2(2a+1)-10=0$

$36-12a=0$ $\therefore a=3$

즉 $f(x)=x^4+4x^3-6x^2-7x-10$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr}
2 & 1 & 4 & -6 & -7 & -10 \\
 & & 2 & 12 & 12 & 10 \\
\hline
-5 & 1 & 6 & 6 & 5 & \boxed{0} \\
 & & -5 & -5 & -5 & \\
\hline
 & 1 & 1 & 1 & \boxed{0} &
\end{array}$$

$\leftarrow g(x)=x^3+6x^2+6x+5$ 라 하면 $g(-5)=0$

$f(x)=(x-2)(x+5)(x^2+x+1)$

따라서 주어진 방정식은

$(x-2)(x+5)(x^2+x+1)=0$

즉 주어진 방정식의 두 허근은 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 합은 -1이다. 답 -1

0617 $f(x)=x^4-x^2+ax+b$라 하면 주어진 방정식의 두 근이 -2, 1이므로

$f(-2)=0$에서 $\quad 16-4-2a+b=0$

$\therefore 2a-b=12$ ······ ㉠

$f(1)=0$에서 $\quad 1-1+a+b=0$

$\therefore a+b=0$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=4,\ b=-4$

즉 $f(x)=x^4-x^2+4x-4$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -2 & 1 & 0 & -1 & 4 & -4 \\ & & -2 & 4 & -6 & 4 \\ \hline 1 & 1 & -2 & 3 & -2 & \boxed{0} \\ & & 1 & -1 & 2 & \\ \hline & 1 & -1 & 2 & \boxed{0} & \end{array}$$

$f(x)=(x+2)(x-1)(x^2-x+2)$

따라서 주어진 방정식은

$(x+2)(x-1)(x^2-x+2)=0$

이때 α, β는 이차방정식 $x^2-x+2=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=1,\ \alpha\beta=2$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=1^2-2\times2=-3$

$\therefore a^2+b^2+\alpha^2+\beta^2=4^2+(-4)^2+(-3)=29$ 답 29

0618 $f(x)=x^3-(a-3)x^2+ax-4$라 하면

$f(1)=1-(a-3)+a-4=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -(a-3) & a & -4 \\ & & 1 & -a+4 & 4 \\ \hline & 1 & -a+4 & 4 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-1)\{x^2+(-a+4)x+4\}$

이때 방정식 $f(x)=0$이 중근을 가지려면

(ⅰ) 방정식 $x^2+(-a+4)x+4=0$이 $x=1$을 근으로 갖는 경우

$1+(-a+4)+4=0 \qquad \therefore a=9$

(ⅱ) 방정식 $x^2+(-a+4)x+4=0$이 중근을 갖는 경우

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(-a+4)^2-4\times1\times4=0$

$a^2-8a=0, \qquad a(a-8)=0$

$\therefore a=0$ 또는 $a=8$

(ⅰ), (ⅱ)에서 모든 실수 a의 값의 합은

$9+0+8=17$ 답 ⑤

0619 $f(x)=x^3-4x^2+(k+4)x-2k$라 하면

$f(2)=8-16+2(k+4)-2k=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -4 & k+4 & -2k \\ & & 2 & -4 & 2k \\ \hline & 1 & -2 & k & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)$

$=(x-2)(x^2-2x+k)$

이때 방정식 $f(x)=0$의 근이 모두 실수가 되려면 이차방정식 $x^2-2x+k=0$이 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(-1)^2-k\ge0 \qquad \therefore k\le1$

따라서 자연수 k는 1의 1개이다. 답 1

0620 $3x^3+3x^2+kx+k=0$에서

$3x^2(x+1)+k(x+1)=0$

$\therefore (x+1)(3x^2+k)=0$

이때 주어진 방정식이 한 실근과 두 허근을 가지려면 이차방정식 $3x^2+k=0$이 두 허근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=0^2-4\times3\times k<0$

$\therefore k>0$ 답 $k>0$

0621 $f(x)=2x^3+6x^2-(a-4)x-a$라 하면

$f(-1)=-2+6+(a-4)-a=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 2 & 6 & -(a-4) & -a \\ & & -2 & -4 & a \\ \hline & 2 & 4 & -a & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)$

$=(x+1)(2x^2+4x-a)$

이때 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근이 1개이려면

(ⅰ) 이차방정식 $2x^2+4x-a=0$이 $x=-1$을 중근으로 갖는 경우

$2-4-a=0 \qquad \therefore a=-2$

(ⅱ) 이차방정식 $2x^2+4x-a=0$이 허근을 갖는 경우

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=2^2-2\times(-a)<0$

$\therefore a<-2$

(ⅰ), (ⅱ)에서 실수 a의 값의 범위는

$a\le-2$

따라서 실수 a의 최댓값은 -2이다.

답 -2

RPM 비법 노트

삼차방정식의 서로 다른 실근이 1개인 경우는 다음과 같다.

① 서로 같은 세 실근을 갖는 경우

② 실근 1개와 허근 2개를 갖는 경우

0622 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=5,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=9,\ \alpha\beta\gamma=5$

이때 $\alpha+\beta=5-\gamma$, $\beta+\gamma=5-\alpha$, $\gamma+\alpha=5-\beta$이므로

$$\begin{aligned}\frac{\beta+\gamma}{\alpha}+\frac{\gamma+\alpha}{\beta}+\frac{\alpha+\beta}{\gamma}&=\frac{5-\alpha}{\alpha}+\frac{5-\beta}{\beta}+\frac{5-\gamma}{\gamma}\\&=5\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)-3\\&=5\times\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}-3\\&=5\times\frac{9}{5}-3\\&=6\end{aligned}$$

답 ①

0623 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-3$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=4$, $\alpha\beta\gamma=9$

$$\begin{aligned}\therefore\ &(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)\\&=1-(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma\\&=1-(-3)+4-9=-1\end{aligned}$$

답 -1

다른 풀이 $x^3+3x^2+4x-9=0$의 세 근이 α, β, γ이므로

$x^3+3x^2+4x-9=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

양변에 $x=1$을 대입하면

$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=1+3+4-9=-1$

0624 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-3$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-5$, $\alpha\beta\gamma=-1$ … 1단계

$$\begin{aligned}\therefore\ &\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}\\&=\frac{\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2+\alpha^2\beta^2}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}\\&=\frac{(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)}{(\alpha\beta\gamma)^2}\\&=\frac{(-5)^2-2\times(-1)\times(-3)}{(-1)^2}=19\end{aligned}$$

… 2단계

답 19

채점 요소		비율
1단계	$\alpha+\beta+\gamma$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$, $\alpha\beta\gamma$의 값 구하기	40 %
2단계	$\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}$의 값 구하기	60 %

0625 주어진 삼차방정식의 세 근을 α, 2α, 3α $(\alpha\neq0)$라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+2\alpha+3\alpha=-12$, $\quad 6\alpha=-12$

$\therefore\ \alpha=-2$

따라서 세 근이 -2, -4, -6이므로

$-2\times(-4)+(-4)\times(-6)+(-6)\times(-2)=a$,

$-2\times(-4)\times(-6)=-b$

$\therefore\ a=44$, $b=48$

$\therefore\ a+b=44+48=92$

답 92

0626 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-3$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-2$, $\alpha\beta\gamma=1$

$$\therefore\ \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=\frac{-2}{1}=-2,$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha}\times\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta}\times\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\gamma}\times\frac{1}{\alpha}&=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}\\&=\frac{-3}{1}=-3,\end{aligned}$$

$$\frac{1}{\alpha}\times\frac{1}{\beta}\times\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\alpha\beta\gamma}=1$$

즉 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$을 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$x^3+2x^2-3x-1=0$

따라서 $a=2$, $b=-3$, $c=-1$이므로

$abc=2\times(-3)\times(-1)=6$

답 ③

0627 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=0$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2$, $\alpha\beta\gamma=-1$

이때 $\alpha+\beta=-\gamma$, $\beta+\gamma=-\alpha$, $\gamma+\alpha=-\beta$이므로

$(\alpha+\beta)+(\beta+\gamma)+(\gamma+\alpha)=2(\alpha+\beta+\gamma)=0$,

$$\begin{aligned}&(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)+(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)+(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)\\&=-\gamma\times(-\alpha)+(-\alpha)\times(-\beta)+(-\beta)\times(-\gamma)\\&=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)&=-\gamma\times(-\alpha)\times(-\beta)\\&=-\alpha\beta\gamma=1\end{aligned}$$

따라서 $\alpha+\beta$, $\beta+\gamma$, $\gamma+\alpha$를 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$x^3+2x-1=0$

답 $x^3+2x-1=0$

0628 $f(1)=f(2)=f(4)=-1$에서

$f(1)+1=f(2)+1=f(4)+1=0$

이므로 삼차방정식 $f(x)+1=0$의 세 근이 1, 2, 4이다.

이때 1, 2, 4를 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$x^3-(1+2+4)x^2+(1\times2+2\times4+4\times1)x-1\times2\times4=0$

$\therefore\ x^3-7x^2+14x-8=0$

즉 $f(x)+1=x^3-7x^2+14x-8$이므로

$f(x)=x^3-7x^2+14x-9$

따라서 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 방정식 $f(x)=0$의 모든 근의 곱은 9이다.

답 9

0629 주어진 삼차방정식의 계수가 유리수이므로 $1+\sqrt{2}$가 근이면 $1-\sqrt{2}$도 근이다.

나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})\alpha=3$, $\quad -\alpha=3$

$\therefore\ \alpha=-3$

따라서 주어진 방정식의 세 근이 -3, $1+\sqrt{2}$, $1-\sqrt{2}$이므로

$-3+(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})=-a$,

$-3(1+\sqrt{2})+(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})\times(-3)=b$

$\therefore\ a=1$, $b=-7$

$\therefore\ ab=1\times(-7)=-7$

답 -7

다른 풀이 $x^3+ax^2+bx-3=0$의 한 근이 $1+\sqrt{2}$이므로

$$(1+\sqrt{2})^3+a(1+\sqrt{2})^2+b(1+\sqrt{2})-3=0$$
$$(7+5\sqrt{2})+a(3+2\sqrt{2})+b(1+\sqrt{2})-3=0$$
$$\therefore (4+3a+b)+(5+2a+b)\sqrt{2}=0$$

a, b는 유리수이므로 무리수가 서로 같을 조건에 의하여

$$4+3a+b=0,\ 5+2a+b=0$$
$$\therefore a=1,\ b=-7$$

0630 주어진 삼차방정식의 계수가 실수이므로 $2-\sqrt{3}i$가 근이면 $2+\sqrt{3}i$도 근이다.

나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(2-\sqrt{3}i)(2+\sqrt{3}i)\alpha=-14, \qquad 7\alpha=-14$$
$$\therefore \alpha=-2$$

따라서 나머지 두 근이 $2+\sqrt{3}i$, -2이므로 구하는 합은

$$(2+\sqrt{3}i)+(-2)=\sqrt{3}i$$

답 ③

0631 방정식 $f(x)=0$의 계수가 유리수이므로 $1-\sqrt{5}$가 근이면 $1+\sqrt{5}$도 근이다.

따라서 $f(x)=(x+1)(x-1+\sqrt{5})(x-1-\sqrt{5})$이므로

$$f(2)=3(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})=-12$$

답 -12

0632 주어진 삼차방정식의 계수가 실수이므로 $\frac{2}{1-i}$, 즉 $1+i$가 근이면 $1-i$도 근이다.

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(1+i)+(1-i)+2=-\frac{b}{a}$에서

$$\frac{b}{a}=-4 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$(1+i)(1-i)+(1-i)\times 2+2(1+i)=\frac{c}{a}$에서

$$\frac{c}{a}=6 \quad \cdots\cdots ㉡$$

$(1+i)(1-i)\times 2=\frac{4}{a}$에서 $\qquad a=1$

$a=1$을 ㉠, ㉡에 각각 대입하면

$$b=-4,\ c=6$$
$$\therefore a+b+c=1+(-4)+6=3$$

답 3

0633 밑면의 반지름의 길이를 x m 늘였다고 하면 원래의 물탱크의 부피와 새로운 물탱크의 부피가 같으므로

$$\pi\times 4^2\times 4=\pi(4+x)^2(4-x)$$
$$64=-x^3-4x^2+16x+64, \qquad x^3+4x^2-16x=0$$
$$x(x^2+4x-16)=0$$
$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=-2\pm 2\sqrt{5}$$

그런데 $0<x<4$이어야 하므로

$$x=-2+2\sqrt{5}$$

따라서 새로운 물탱크의 밑면의 반지름의 길이는

$$4+(-2+2\sqrt{5})=2+2\sqrt{5}\ (\text{m})$$

답 ③

0634 구멍을 파낸 후 남은 부분의 부피가 26 m^3이므로

$$x^3-1\times 1\times\frac{x}{3}=26, \qquad 3x^3-x-78=0$$
$$(x-3)(3x^2+9x+26)=0$$
$$\therefore x=3 \text{ 또는 } x=\frac{-9\pm\sqrt{231}\,i}{6}$$

이때 $x>1$이므로 $\qquad x=3$

답 3

0635 $f(x)=x^2+3x-5$의 그래프와 직선 $y=ax+2$의 교점의 x좌표가 α, β이므로

$$x^2+3x-5=ax+2,\ \text{즉 } x^2+(3-a)x-7=0$$

의 두 근이 α, β이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=a-3,\ \alpha\beta=-7$$
$$\begin{aligned}\therefore \alpha^3+\beta^3&=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)\\&=(a-3)^3-3\times(-7)\times(a-3)\\&=(a-3)^3+21(a-3)\end{aligned}$$

즉 $(a-3)^3+21(a-3)=50$이므로 $a-3=A$로 놓으면

$$A^3+21A=50, \qquad A^3+21A-50=0$$
$$(A-2)(A^2+2A+25)=0$$
$$\therefore A=2 \text{ 또는 } A=-1\pm 2\sqrt{6}i$$

이때 A는 실수이므로 $\qquad A=2$

따라서 $a-3=2$이므로 $\qquad a=5$

답 5

0636 $\begin{cases} x-y=-1 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=5 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $\qquad y=x+1 \quad \cdots\cdots ㉢$

㉢을 ㉡에 대입하면 $\qquad x^2+(x+1)^2=5$

$$2x^2+2x-4=0, \qquad x^2+x-2=0$$
$$(x+2)(x-1)=0 \qquad \therefore x=-2 \text{ 또는 } x=1$$

$x=-2$를 ㉢에 대입하면 $\qquad y=-1$

$x=1$을 ㉢에 대입하면 $\qquad y=2$

따라서 $\alpha=-2$, $\beta=-1$ 또는 $\alpha=1$, $\beta=2$이므로

$$\alpha\beta=2$$

답 ①

0637 $\begin{cases} x+2y=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+3xy=-5 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $\qquad x=1-2y \quad \cdots\cdots ㉢$

㉢을 ㉡에 대입하면 $\qquad (1-2y)^2+3y(1-2y)=-5$

$$2y^2+y-6=0, \qquad (y+2)(2y-3)=0$$
$$\therefore y=-2 \text{ 또는 } y=\frac{3}{2}$$

$y=-2$를 ㉢에 대입하면 $\qquad x=5$

$y=\frac{3}{2}$을 ㉢에 대입하면 $\qquad x=-2$

즉 $\alpha=5$, $\beta=-2$ 또는 $\alpha=-2$, $\beta=\frac{3}{2}$이므로

$$\alpha-\beta=7 \text{ 또는 } \alpha-\beta=-\frac{7}{2}$$

따라서 $\alpha-\beta$의 최댓값은 7이다.

답 7

0638 $\begin{cases} x-y=2 \\ x+y=a \end{cases}$ 의 해가 $\begin{cases} x^2+y^2=10 \\ x+by=1 \end{cases}$ 을 만족시키므로 두 연립방정식의 공통인 해는 연립방정식

$\begin{cases} x-y=2 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=10 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

을 만족시킨다.

㉠에서 $y=x-2$ ⋯⋯ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$x^2+(x-2)^2=10,\quad 2x^2-4x-6=0$

$x^2-2x-3=0,\quad (x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

$x=-1$을 ㉢에 대입하면 $y=-3$

$x=3$을 ㉢에 대입하면 $y=1$ ⋯ 1단계

이때 $x+y=a>0$이므로 $x=3,\ y=1$

$x=3,\ y=1$을 $x+y=a$에 대입하면

$a=3+1=4$

또 $x=3,\ y=1$을 $x+by=1$에 대입하면

$3+b=1\quad \therefore b=-2$

$\therefore a+b=4+(-2)=2$ ⋯ 2단계

답 **2**

채점 요소		비율
1단계	연립방정식 $\begin{cases} x-y=2 \\ x^2+y^2=10 \end{cases}$의 해 구하기	60 %
2단계	$a+b$의 값 구하기	40 %

0639 $\begin{cases} x^2-y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-xy+2y^2=4 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(x-y)(x+y)=0$

$\therefore y=x$ 또는 $y=-x$

(i) $y=x$를 ㉡에 대입하면

$x^2-x^2+2x^2=4,\quad x^2=2$

$\therefore x=\pm\sqrt{2}$

$y=x$이므로

$x=\sqrt{2},\ y=\sqrt{2}$ 또는 $x=-\sqrt{2},\ y=-\sqrt{2}$

(ii) $y=-x$를 ㉡에 대입하면

$x^2-x\times(-x)+2\times(-x)^2=4,\quad x^2=1$

$\therefore x=\pm1$

$y=-x$이므로

$x=1,\ y=-1$ 또는 $x=-1,\ y=1$

(i), (ii)에서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=\sqrt{2} \\ y=\sqrt{2} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{2} \\ y=-\sqrt{2} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$

$\therefore x+y=2\sqrt{2}$ 또는 $x+y=-2\sqrt{2}$ 또는 $x+y=0$

따라서 $M=2\sqrt{2},\ m=-2\sqrt{2}$이므로

$M-m=2\sqrt{2}-(-2\sqrt{2})=4\sqrt{2}$

답 $4\sqrt{2}$

0640 $\begin{cases} x^2-2xy-3y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=40 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(x+y)(x-3y)=0$

$\therefore x=-y$ 또는 $x=3y$

(i) $x=-y$를 ㉡에 대입하면

$(-y)^2+y^2=40,\quad y^2=20$

$\therefore y=\pm2\sqrt{5}$

$x=-y$이므로

$x=-2\sqrt{5},\ y=2\sqrt{5}$ 또는 $x=2\sqrt{5},\ y=-2\sqrt{5}$

(ii) $x=3y$를 ㉡에 대입하면

$(3y)^2+y^2=40,\quad y^2=4$

$\therefore y=\pm2$

$x=3y$이므로

$x=6,\ y=2$ 또는 $x=-6,\ y=-2$

(i), (ii)에서 $x,\ y$는 정수이므로

$x=6,\ y=2$ 또는 $x=-6,\ y=-2$

$\therefore xy=12$

답 **12**

0641 $\begin{cases} x^2-3xy+2y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+2xy-3y^2=20 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(x-y)(x-2y)=0$

$\therefore x=y$ 또는 $x=2y$

(i) $x=y$를 ㉡에 대입하면

$y^2+2y^2-3y^2=20$

이때 $0\neq20$이므로 이를 만족시키는 $x,\ y$의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $x=2y$를 ㉡에 대입하면

$(2y)^2+2\times2y\times y-3y^2=20,\quad y^2=4$

$\therefore y=\pm2$

$x=2y$이므로

$x=4,\ y=2$ 또는 $x=-4,\ y=-2$

(i), (ii)에서 $\alpha=4,\ \beta=2$ 또는 $\alpha=-4,\ \beta=-2$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=16+4=20$

답 **20**

0642 $\begin{cases} 2x^2+3xy-2y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+xy=12 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(2x-y)(x+2y)=0$

$\therefore y=2x$ 또는 $x=-2y$

(i) $y=2x$를 ㉡에 대입하면

$x^2+x\times2x=12,\quad x^2=4\quad \therefore x=\pm2$

$y=2x$이므로

$x=2,\ y=4$ 또는 $x=-2,\ y=-4$

(ii) $x=-2y$를 ㉡에 대입하면

$(-2y)^2+(-2y)\times y=12,\quad y^2=6$

$\therefore y=\pm\sqrt{6}$

$x=-2y$이므로

$x=-2\sqrt{6},\ y=\sqrt{6}$ 또는 $x=2\sqrt{6},\ y=-\sqrt{6}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2\sqrt{6} \\ y=\sqrt{6} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2\sqrt{6} \\ y=-\sqrt{6} \end{cases}$

$\therefore$ $xy=8$ 또는 $xy=-12$

따라서 xy의 최솟값은 -12이다. 답 ③

0643 $\begin{cases} x^2+y^2=13 & \cdots\cdots ㉠ \\ xy=-6 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(x+y)^2-2xy=13$ ⋯⋯ ㉢

㉡을 ㉢에 대입하면 $(x+y)^2+12=13$

$(x+y)^2=1$ $\therefore$ $x+y=\pm1$

(ⅰ) $x+y=1$, $xy=-6$일 때

x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2-t-6=0$의 두 근이다.

$t^2-t-6=0$에서

$(t+2)(t-3)=0$ $\therefore$ $t=-2$ 또는 $t=3$

$\therefore$ $x=-2$, $y=3$ 또는 $x=3$, $y=-2$

(ⅱ) $x+y=-1$, $xy=-6$일 때

x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2+t-6=0$의 두 근이다.

$t^2+t-6=0$에서

$(t+3)(t-2)=0$ $\therefore$ $t=-3$ 또는 $t=2$

$\therefore$ $x=-3$, $y=2$ 또는 $x=2$, $y=-3$

(ⅰ), (ⅱ)에서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=-2 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-3 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=-3 \end{cases}$

$\therefore$ $x^3-y^3=-35$ 또는 $x^3-y^3=35$

따라서 $M=35$, $m=-35$이므로

$M-m=35-(-35)=70$ 답 70

0644 $\begin{cases} xy+x+y=-5 \\ x^2+xy+y^2=7 \end{cases}$에서 $\begin{cases} (x+y)+xy=-5 \\ (x+y)^2-xy=7 \end{cases}$

$x+y=u$, $xy=v$라 하면

$\begin{cases} u+v=-5 & \cdots\cdots ㉠ \\ u^2-v=7 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $v=-u-5$ ⋯⋯ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$u^2-(-u-5)=7$, $u^2+u-2=0$

$(u+2)(u-1)=0$ $\therefore$ $u=-2$ 또는 $u=1$

$u=-2$를 ㉢에 대입하면 $v=-3$

$u=1$을 ㉢에 대입하면 $v=-6$

(ⅰ) $u=-2$, $v=-3$, 즉 $x+y=-2$, $xy=-3$일 때

x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2+2t-3=0$의 두 근이다.

$t^2+2t-3=0$에서

$(t+3)(t-1)=0$ $\therefore$ $t=-3$ 또는 $t=1$

$\therefore$ $x=-3$, $y=1$ 또는 $x=1$, $y=-3$

(ⅱ) $u=1$, $v=-6$, 즉 $x+y=1$, $xy=-6$일 때

x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2-t-6=0$의 두 근이다.

$t^2-t-6=0$에서

$(t+2)(t-3)=0$ $\therefore$ $t=-2$ 또는 $t=3$

$\therefore$ $x=-2$, $y=3$ 또는 $x=3$, $y=-2$

(ⅰ), (ⅱ)에서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=-3 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$

$\therefore$ $|\alpha-\beta|=4$ 또는 $|\alpha-\beta|=5$

따라서 $|\alpha-\beta|$의 최댓값은 5이다. 답 5

0645 두 연립방정식의 공통인 해는 연립방정식

$\begin{cases} xy=12 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=25 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

를 만족시킨다.

㉡에서 $(x+y)^2-2xy=25$ ⋯⋯ ㉢

㉠을 ㉢에 대입하면

$(x+y)^2-24=25$, $(x+y)^2=49$

$\therefore$ $x+y=\pm7$

이때 b는 자연수이므로 $b=x+y=7$

즉 $x+y=7$, $xy=12$이므로 x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2-7t+12=0$의 두 근이다.

$t^2-7t+12=0$에서

$(t-3)(t-4)=0$ $\therefore$ $t=3$ 또는 $t=4$

$\therefore$ $x=3$, $y=4$ 또는 $x=4$, $y=3$

$x=3$, $y=4$를 $ax-y=1$에 대입하면

$3a-4=1$ $\therefore$ $a=\frac{5}{3}$

$x=4$, $y=3$을 $ax-y=1$에 대입하면

$4a-3=1$ $\therefore$ $a=1$

이때 a는 자연수이므로 $a=1$

$\therefore$ $a+b=1+7=8$ 답 8

0646 $\begin{cases} x-y=a & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=18 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=x-a$

이것을 ㉡에 대입하면 $x^2+(x-a)^2=18$

$\therefore$ $2x^2-2ax+a^2-18=0$ ⋯⋯ ㉢

주어진 연립방정식이 오직 한 쌍의 해를 가지려면 이차방정식 ㉢이 중근을 가져야 하므로 ㉢의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-a)^2-2(a^2-18)=0$

$a^2=36$ $\therefore$ $a=\pm6$

따라서 양수 a의 값은 6이다. 답 6

0647 주어진 연립방정식의 해 x, y는 t에 대한 이차방정식

$t^2-2(a-3)t+a^2+4=0$ ⋯⋯ ㉠

의 두 근이다.

주어진 연립방정식이 실근을 가지려면 이차방정식 ㉠이 실근을 가져야 하므로 ㉠의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=\{-(a-3)\}^2-(a^2+4)\geq 0$$

$$-6a+5\geq 0 \qquad \therefore a\leq \frac{5}{6}$$

따라서 실수 a의 최댓값은 $\frac{5}{6}$이다. 답 $\mathbf{\frac{5}{6}}$

0648 $\begin{cases} 2x-y=k & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+2x-2y=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=2x-k$를 ㉡에 대입하면

$$x^2+2x-2(2x-k)=0$$

$$\therefore x^2-2x+2k=0 \qquad \cdots\cdots ㉢$$

주어진 연립방정식의 실근이 존재하지 않으려면 이차방정식 ㉢의 실근이 존재하지 않아야 하므로 ㉢의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-1)^2-2k<0$$

$$1-2k<0 \qquad \therefore k>\frac{1}{2}$$

따라서 정수 k의 최솟값은 1이다. 답 **1**

0649 두 이차방정식의 공통인 근이 α이므로

$$\begin{cases} \alpha^2+k\alpha+3=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ \alpha^2+3\alpha+k=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠$-$㉡을 하면 $\quad (k-3)\alpha+3-k=0$

$$(k-3)(\alpha-1)=0$$

$$\therefore k=3 \text{ 또는 } \alpha=1$$

(i) $k=3$일 때, 두 이차방정식은 모두 $x^2+3x+3=0$으로 일치하므로 서로 다른 두 이차방정식이라는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $\alpha=1$일 때, 이것을 ㉠에 대입하면

$$1+k+3=0 \qquad \therefore k=-4$$

(i), (ii)에서 $k=-4$, $\alpha=1$이므로

$$k+\alpha=-4+1=-3$$

답 ②

0650 두 이차방정식의 공통인 근을 α라 하면

$$\begin{cases} \alpha^2+(m+2)\alpha-4=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ \alpha^2+(m+4)\alpha-6=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠$-$㉡을 하면 $\quad -2\alpha+2=0$

$$\therefore \alpha=1$$

$\alpha=1$을 ㉠에 대입하면

$$1+m+2-4=0 \qquad \therefore m=1$$

답 $\boldsymbol{m=1}$, **공통인 근: 1**

0651 두 이차방정식의 공통인 근을 α라 하면

$$\begin{cases} \alpha^2+k\alpha+2k+2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ \alpha^2-\alpha-k^2-k=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠$-$㉡을 하면

$$(k+1)\alpha+k^2+3k+2=0$$

$$(k+1)\alpha+(k+1)(k+2)=0$$

$$(k+1)(\alpha+k+2)=0$$

$$\therefore k=-1 \text{ 또는 } \alpha=-k-2$$

(i) $k=-1$일 때, 두 이차방정식은 모두 $x^2-x=0$으로 일치하므로 공통인 근은 2개이다.
따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

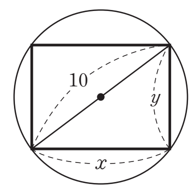
(ii) $\alpha=-k-2$일 때, 이것을 ㉠에 대입하면

$$(-k-2)^2+k(-k-2)+2k+2=0$$

$$4k+6=0 \qquad \therefore k=-\frac{3}{2}$$

(i), (ii)에서 $\quad k=-\frac{3}{2}$ 답 $\mathbf{-\frac{3}{2}}$

0652 원에 내접하는 직사각형의 가로, 세로의 길이를 각각 x, y라 하면



$$\begin{cases} 2(x+y)=28 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=100 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $\quad x+y=14$

$$\therefore y=14-x \qquad \cdots\cdots ㉢$$

㉢을 ㉡에 대입하면

$$x^2+(14-x)^2=100, \qquad 2x^2-28x+96=0$$

$$x^2-14x+48=0, \qquad (x-6)(x-8)=0$$

$$\therefore x=6 \text{ 또는 } x=8$$

이것을 ㉢에 대입하면

$$x=6,\ y=8 \text{ 또는 } x=8,\ y=6$$

따라서 직사각형의 긴 변의 길이는 8이다. 답 **8**

0653 처음 두 자리 자연수의 십의 자리의 숫자를 x, 일의 자리의 숫자를 $y\ (x>y)$라 하면

$$\begin{cases} x^2+y^2=73 & \cdots\cdots ㉠ \\ (10y+x)+(10x+y)=121 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉡에서

$$11x+11y=121, \qquad x+y=11$$

$$\therefore y=11-x \qquad \cdots\cdots ㉢$$

㉢을 ㉠에 대입하면

$$x^2+(11-x)^2=73, \qquad 2x^2-22x+48=0$$

$$x^2-11x+24=0, \qquad (x-3)(x-8)=0$$

$$\therefore x=3 \text{ 또는 } x=8$$

이것을 ㉢에 대입하면

$$x=3,\ y=8 \text{ 또는 } x=8,\ y=3$$

그런데 $x>y$이므로

$$x=8,\ y=3$$

따라서 처음 수는 83이다.

답 **83**

0654 두 원 O_1, O_2의 반지름의 길이를 각각 r_1, r_2라 하면

$\begin{cases} 2\pi r_1+2\pi r_2=12\pi \\ \pi r_1^2+\pi r_2^2=20\pi \end{cases}$, 즉 $\begin{cases} r_1+r_2=6 & \cdots\cdots ㉠ \\ r_1^2+r_2^2=20 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

… 1단계

㉠에서 $r_2=6-r_1$ …… ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$r_1^2+(6-r_1)^2=20,\quad 2r_1^2-12r_1+16=0$

$r_1^2-6r_1+8=0,\quad (r_1-2)(r_1-4)=0$

$\therefore r_1=2$ 또는 $r_1=4$

이것을 ㉢에 대입하면

$r_1=2,\ r_2=4$ 또는 $r_1=4,\ r_2=2$ … 2단계

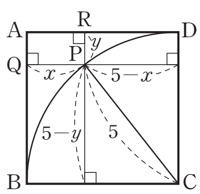
따라서 두 원의 반지름의 길이의 차는

$|r_1-r_2|=2$ … 3단계

답 **2**

채점 요소	비율
1단계 연립이차방정식 세우기	40 %
2단계 두 원의 반지름의 길이 구하기	50 %
3단계 두 원의 반지름의 길이의 차 구하기	10 %

0655 $\overline{PQ}$의 길이를 x, $\overline{PR}$의 길이를 y라 하면



$\begin{cases} 2(x+y)=8 & \cdots\cdots ㉠ \\ (5-x)^2+(5-y)^2=25 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x+y=4$

$\therefore y=4-x$ …… ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$(5-x)^2+\{5-(4-x)\}^2=25$

$(5-x)^2+(1+x)^2=25,\quad 2x^2-8x+1=0$

$\therefore x=\dfrac{4\pm\sqrt{14}}{2}$

이것을 ㉢에 대입하면

$x=\dfrac{4\pm\sqrt{14}}{2},\ y=\dfrac{4\mp\sqrt{14}}{2}$ (복호동순)

이때 $x>y$이므로 $x=\dfrac{4+\sqrt{14}}{2},\ y=\dfrac{4-\sqrt{14}}{2}$

$\therefore \overline{PQ}-\overline{PR}=x-y=\dfrac{4+\sqrt{14}}{2}-\dfrac{4-\sqrt{14}}{2}=\sqrt{14}$

답 $\sqrt{14}$

0656 $x^3=1$에서 $x^3-1=0$

$\therefore (x-1)(x^2+x+1)=0$

따라서 ω는 $x^2+x+1=0$의 한 허근이므로

$\omega^2+\omega+1=0 \quad \therefore \omega+1=-\omega^2$

$\therefore \dfrac{\omega+1}{\omega^2}+\dfrac{\omega^2}{\omega+1}=\dfrac{-\omega^2}{\omega^2}+\dfrac{\omega^2}{-\omega^2}$

$=-1+(-1)=-2$

답 **−2**

0657 $x^2+x+1=0$의 양변에 $x-1$을 곱하면

$(x-1)(x^2+x+1)=0,\quad x^3-1=0$

$\therefore x^3=1$

따라서 ω는 $x^3=1$, $x^2+x+1=0$의 한 허근이므로

$\omega^3=1,\ \omega^2+\omega+1=0$

$\therefore \omega^{101}+\omega^{100}+\omega^{99}+\omega^{98}+\omega^{97}$

$=(\omega^3)^{33}\times\omega^2+(\omega^3)^{33}\times\omega+(\omega^3)^{33}$

$\quad+(\omega^3)^{32}\times\omega^2+(\omega^3)^{32}\times\omega$

$=(\omega^2+\omega+1)+(\omega^2+\omega)$

$=0+(-1)=-1$

답 ②

0658 $x^3=-1$에서 $x^3+1=0$

$\therefore (x+1)(x^2-x+1)=0$

따라서 ω는 $x^3=-1$, $x^2-x+1=0$의 한 허근이므로

$\omega^3=-1,\ \omega^2-\omega+1=0$

$\therefore (1-\omega)(1+\omega^2)(1-\omega^3)(1+\omega^4)(1-\omega^5)(1+\omega^6)$

$=(1-\omega)(1+\omega^2)(1+1)(1-\omega)(1+\omega^2)(1+1)$

$=4(1-\omega)^2(1+\omega^2)^2$

$=4(-\omega^2)^2\omega^2$

$=4\omega^6=4$

답 **4**

0659 ㄱ. $x^3=-1$에서 $x^3+1=0$

$\therefore (x+1)(x^2-x+1)=0$

ω는 $x^2-x+1=0$의 한 허근이므로

$\omega^2-\omega+1=0$ (참)

ㄴ. ω가 $x^2-x+1=0$의 한 허근이므로 $\overline{\omega}$도 $x^2-x+1=0$의 근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega\overline{\omega}=1$ (참)

ㄷ. ω는 $x^3=-1$의 한 허근이므로

$\omega^3=-1$

$\therefore \omega^5-\omega^4-1=\omega^3\times\omega^2-\omega^3\times\omega-1=-\omega^2+\omega-1$

$=-(\omega^2-\omega+1)=0$ (거짓)

ㄹ. $\omega\overline{\omega}=1$에서 $\overline{\omega}=\dfrac{1}{\omega}=\dfrac{-\omega^3}{\omega}=-\omega^2$ (참)

ㅁ. $\omega^{2025}+\dfrac{1}{\omega^{2025}}=(\omega^3)^{675}+\dfrac{1}{(\omega^3)^{675}}$

$=-1+(-1)=-2$ (거짓)

ㅂ. $1-\omega+\omega^2-\omega^3+\omega^4-\omega^5+\cdots-\omega^{99}$

$=(1-\omega+\omega^2)-\omega^3(1-\omega+\omega^2)+\cdots$

$\quad+\omega^{96}(1-\omega+\omega^2)-\omega^{99}$

$=-\omega^{99}=-(\omega^3)^{33}=1$ (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄴ, ㄹ

다른 풀이 ㄹ. 방정식 $x^2-x+1=0$의 두 근이 ω, $\overline{\omega}$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=1$

$\therefore \overline{\omega}=1-\omega=-\omega^2$ (참)

0660 $x^3+1=0$에서 $\quad (x+1)(x^2-x+1)=0$
따라서 ω가 $x^2-x+1=0$의 한 허근이므로 $\overline{\omega}$도 $x^2-x+1=0$의 근이다.
이때 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\omega+\overline{\omega}=1,\ \omega\overline{\omega}=1$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{(2\omega-3)\overline{(2\omega-3)}}{(\omega+1)\overline{(\omega+1)}}&=\frac{(2\omega-3)(2\overline{\omega}-3)}{(\omega+1)(\overline{\omega}+1)}\\&=\frac{4\omega\overline{\omega}-6(\omega+\overline{\omega})+9}{\omega\overline{\omega}+(\omega+\overline{\omega})+1}\\&=\frac{4-6+9}{1+1+1}=\frac{7}{3}\end{aligned}$$

답 $\frac{7}{3}$

0661 $f(x)=x^3-2x^2+2x-1$이라 하면

$$f(1)=1-2+2-1=0$$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ & & 1 & -1 & 1 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

$$f(x)=(x-1)(x^2-x+1)$$

따라서 주어진 방정식은 $(x-1)(x^2-x+1)=0$이므로 ω는 이차방정식 $x^2-x+1=0$의 한 허근이다.

$$\therefore \omega^2-\omega+1=0$$

양변에 $\omega+1$을 곱하면 $\quad \omega^3+1=0$

$$\therefore \omega^3=-1$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{\omega}{1+\omega}-\frac{\omega^2}{1-\omega^2}&=\frac{\omega(1-\omega^2)-\omega^2(1+\omega)}{(1+\omega)(1-\omega^2)}\\&=\frac{\omega-\omega^3-\omega^2-\omega^3}{1+\omega-\omega^2-\omega^3}\\&=\frac{\omega-\omega^2+2}{\omega-\omega^2+2}=1\end{aligned}$$

답 ③

0662 $x^3=1$에서 $\quad x^3-1=0$

$$\therefore (x-1)(x^2+x+1)=0$$

따라서 ω는 $x^3=1$, $x^2+x+1=0$의 한 허근이므로

$$\omega^3=1,\ \omega^2+\omega+1=0$$

$f(n)=\omega^{2n+1}$이므로

$$\begin{aligned}&f(1)=\omega^3=1,\\&f(2)=\omega^5=\omega^3\times\omega^2=\omega^2,\\&f(3)=\omega^7=(\omega^3)^2\times\omega=\omega,\\&f(4)=\omega^9=(\omega^3)^3=1,\\&f(5)=\omega^{11}=(\omega^3)^3\times\omega^2=\omega^2,\\&f(6)=\omega^{13}=(\omega^3)^4\times\omega=\omega,\\&\quad\vdots\end{aligned}$$

따라서 $f(n)$의 값은 1, ω^2, ω가 이 순서대로 반복되므로

$$f(n)=\begin{cases}1 & (n=3k-2)\\ \omega^2 & (n=3k-1)\ (\text{단, } k\text{는 자연수})\\ \omega & (n=3k)\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ & f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(19)\\&=(1+\omega^2+\omega)+(1+\omega^2+\omega)+\cdots+(1+\omega^2+\omega)+1\\&=1\end{aligned}$$

답 1

0663 $xy-4x-3y+2=0$에서

$$x(y-4)-3(y-4)-10=0$$
$$\therefore (x-3)(y-4)=10$$

이때 x, y는 자연수이므로 $x-3$, $y-4$는 정수이고 $x-3\geq-2$, $y-4\geq-3$이다.
따라서 $x-3$, $y-4$의 값은 다음 표와 같다.

$x-3$	1	2	5	10
$y-4$	10	5	2	1

(ⅰ) $x-3=1$, $y-4=10$일 때,
$x=4$, $y=14$ $\quad\therefore x+y=18$
(ⅱ) $x-3=2$, $y-4=5$일 때,
$x=5$, $y=9$ $\quad\therefore x+y=14$
(ⅲ) $x-3=5$, $y-4=2$일 때,
$x=8$, $y=6$ $\quad\therefore x+y=14$
(ⅳ) $x-3=10$, $y-4=1$일 때,
$x=13$, $y=5$ $\quad\therefore x+y=18$
이상에서 $x+y$의 최댓값은 18이다.

답 ③

0664 $x^2-xy-y=4$에서 $\quad x^2-1-xy-y=3$

$$(x+1)(x-1)-y(x+1)=3$$
$$\therefore (x+1)(x-y-1)=3$$

이때 x, y는 정수이므로 $x+1$, $x-y-1$도 정수이다.
따라서 $x+1$, $x-y-1$의 값은 다음 표와 같다.

$x+1$	-3	-1	1	3
$x-y-1$	-1	-3	3	1

(ⅰ) $x+1=-3$, $x-y-1=-1$일 때,
$x=-4$, $y=-4$ $\quad\therefore xy=16$
(ⅱ) $x+1=-1$, $x-y-1=-3$일 때,
$x=-2$, $y=0$ $\quad\therefore xy=0$
(ⅲ) $x+1=1$, $x-y-1=3$일 때,
$x=0$, $y=-4$ $\quad\therefore xy=0$
(ⅳ) $x+1=3$, $x-y-1=1$일 때,
$x=2$, $y=0$ $\quad\therefore xy=0$
이상에서 xy의 최댓값은 16이다.

답 **16**

0665 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{4}$에서 $\quad \frac{x+y}{xy}=\frac{1}{4}$

$$xy-4x-4y=0$$
$$x(y-4)-4(y-4)-16=0$$
$$\therefore (x-4)(y-4)=16$$

이때 x, y는 양의 정수이므로 $x-4$, $y-4$는 정수이고 $x-4\geq-3$, $y-4\geq-3$이다.
따라서 $x-4$, $y-4$의 값은 다음 표와 같다.

$x-4$	1	2	4	8	16
$y-4$	16	8	4	2	1

(i) $x-4=1$, $y-4=16$일 때, $\quad x=5$, $y=20$
(ii) $x-4=2$, $y-4=8$일 때, $\quad x=6$, $y=12$
(iii) $x-4=4$, $y-4=4$일 때, $\quad x=8$, $y=8$
(iv) $x-4=8$, $y-4=2$일 때, $\quad x=12$, $y=6$
(v) $x-4=16$, $y-4=1$일 때, $\quad x=20$, $y=5$
이상에서 x, y의 순서쌍 (x, y)는

$$(5, 20), (6, 12), (8, 8), (12, 6), (20, 5)$$

의 5개이다. 답 ⑤

0666 이차방정식 $x^2-(m+2)x+2m+2=0$의 두 근을 α, β라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=m+2$ …… ㉠
$\alpha\beta=2m+2$ …… ㉡

㉡−㉠×2를 하면 $\quad \alpha\beta-2(\alpha+\beta)=-2$

$\alpha\beta-2\alpha-2\beta=-2$
$\alpha(\beta-2)-2(\beta-2)-4=-2$
$\therefore (\alpha-2)(\beta-2)=2$

이때 α, β가 양의 정수이므로 $\alpha-2$, $\beta-2$는 정수이고 $\alpha-2\ge-1$, $\beta-2\ge-1$이다.
따라서 $\alpha-2$, $\beta-2$의 값은 오른쪽 표와 같다.

$\alpha-2$	1	2
$\beta-2$	2	1

(i) $\alpha-2=1$, $\beta-2=2$일 때,
$\alpha=3$, $\beta=4$
(ii) $\alpha-2=2$, $\beta-2=1$일 때,
$\alpha=4$, $\beta=3$

(i), (ii)에서 $\begin{cases}\alpha=3\\ \beta=4\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}\alpha=4\\ \beta=3\end{cases}$

따라서 $\alpha+\beta=7$이므로 ㉠에서 $\quad 7=m+2$
$\therefore m=5$ 답 5

0667 $9x^2+6xy+2y^2-4y+4=0$에서

$(9x^2+6xy+y^2)+(y^2-4y+4)=0$
$\therefore (3x+y)^2+(y-2)^2=0$

이때 x, y가 실수이므로

$3x+y=0$, $y-2=0$
$\therefore x=-\dfrac{2}{3}$, $y=2$
$\therefore x-y=-\dfrac{2}{3}-2=-\dfrac{8}{3}$ 답 ①

다른 풀이 $9x^2+6xy+2y^2-4y+4=0$ …… ㉠
x가 실수이므로 x에 대한 이차방정식 ㉠이 실근을 가져야 한다.
㉠의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(3y)^2-9(2y^2-4y+4)\ge0$
$-9y^2+36y-36\ge0$, $\quad y^2-4y+4\le0$
$\therefore (y-2)^2\le0$

이때 y도 실수이므로

$y-2=0 \quad \therefore y=2$

$y=2$를 ㉠에 대입하면

$9x^2+12x+4=0$, $\quad (3x+2)^2=0$
$\therefore x=-\dfrac{2}{3}$

0668 $x^2-4xy+5y^2+2x-8y+5=0$에서

$x^2-2(2y-1)x+5y^2-8y+5=0$ …… ㉠

x가 실수이므로 x에 대한 이차방정식 ㉠이 실근을 가져야 한다.
㉠의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(2y-1)^2-(5y^2-8y+5)\ge0$
$-y^2+4y-4\ge0$, $\quad y^2-4y+4\le0$
$\therefore (y-2)^2\le0$

이때 y도 실수이므로 $\quad y-2=0 \quad \therefore y=2$
$y=2$를 ㉠에 대입하면

$x^2-6x+9=0$, $\quad (x-3)^2=0$
$\therefore x=3$
$\therefore x+y=3+2=5$ 답 5

시험에 꼭 나오는 문제

• 본책 096~099쪽

0669 $f(x)=x^3+2x^2+5x+4$라 하면

$f(-1)=-1+2-5+4=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 2 & 5 & 4 \\ & & -1 & -1 & -4 \\ \hline & 1 & 1 & 4 & 0 \end{array}$$

$f(x)=(x+1)(x^2+x+4)$

따라서 주어진 방정식은

$(x+1)(x^2+x+4)=0$

이때 방정식 $f(x)=0$의 허근은 이차방정식 $x^2+x+4=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 합은 -1이다. 답 ②

0670 $f(x)=x^4+2x^3+x^2-2x-2$라 하면

$f(1)=1+2+1-2-2=0$,
$f(-1)=1-2+1+2-2=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 2 & 1 & -2 & -2 \\ & & 1 & 3 & 4 & 2 \\ \hline -1 & 1 & 3 & 4 & 2 & 0 \\ & & -1 & -2 & -2 & \\ \hline & 1 & 2 & 2 & 0 & \end{array}$$

$f(x)=(x-1)(x+1)(x^2+2x+2)$

따라서 주어진 방정식은

$(x-1)(x+1)(x^2+2x+2)=0$

이때 방정식 $f(x)=0$의 두 허근 α, β는 이차방정식 $x^2+2x+2=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=2$

$$\begin{aligned}\therefore\ \alpha^3+\beta^3&=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)\\&=(-2)^3-3\times2\times(-2)=4\end{aligned}$$

답 **4**

0671 $x^2+x-6=0$에서 $\quad (x+3)(x-2)=0$

$\therefore\ x=-3$ 또는 $x=2$

$f(x)=x^3-(a-4)x^2-4(a-1)x-4a$라 하면

$f(-2)=-8-4(a-4)+8(a-1)-4a=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & -(a-4) & -4(a-1) & -4a \\ & & -2 & 2a-4 & 4a \\ \hline & 1 & -a+2 & -2a & \boxed{0} \end{array}$$

$$\begin{aligned}f(x)&=(x+2)\{x^2+(-a+2)x-2a\}\\&=(x+2)^2(x-a)\end{aligned}$$

따라서 주어진 삼차방정식은

$(x+2)^2(x-a)=0$

$\therefore\ x=-2$ (중근) 또는 $x=a$

즉 주어진 두 방정식이 공통인 근을 가지려면

$a=-3$ 또는 $a=2$

이어야 하므로 구하는 합은

$-3+2=-1$

답 **-1**

0672 $(x-3)(x-2)(x+1)(x+2)=21$에서

$\{(x-3)(x+2)\}\{(x-2)(x+1)\}-21=0$

$\therefore\ (x^2-x-6)(x^2-x-2)-21=0$

$x^2-x=t$로 놓으면 주어진 방정식은

$(t-6)(t-2)-21=0$

$t^2-8t-9=0, \qquad (t+1)(t-9)=0$

$\therefore\ t=-1$ 또는 $t=9$

(i) $t=-1$일 때, $x^2-x=-1$에서

$x^2-x+1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=(-1)^2-4\times1\times1=-3<0$

이므로 이 이차방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(ii) $t=9$일 때, $x^2-x=9$에서

$x^2-x-9=0$

이 이차방정식의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=(-1)^2-4\times1\times(-9)=37>0$

이므로 이 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 실근은 이차방정식 $x^2-x-9=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 곱은 -9이다.

답 ②

0673 $x^4-12x^2+4=0$에서

$(x^4+4x^2+4)-16x^2=0, \qquad (x^2+2)^2-(4x)^2=0$

$(x^2+4x+2)(x^2-4x+2)=0$

$x^2+4x+2=0$ 또는 $x^2-4x+2=0$

$\therefore\ x=-2\pm\sqrt{2}$ 또는 $x=2\pm\sqrt{2}$

따라서 주어진 방정식의 네 근 중 가장 큰 근은 $2+\sqrt{2}$, 가장 작은 근은 $-2-\sqrt{2}$이므로

$\alpha=2+\sqrt{2}$, $\beta=-2-\sqrt{2}$

$\therefore\ \alpha-\beta=2+\sqrt{2}-(-2-\sqrt{2})=4+2\sqrt{2}$

답 **$4+2\sqrt{2}$**

0674 $x^2=t$로 놓으면 주어진 방정식에서

$t^2-at+a^2-2a-8=0$ ...... ㉠

이때 주어진 방정식이 두 허근과 중근인 실근을 가지려면 이차방정식 ㉠의 두 근이 각각 음수와 0이어야 한다.

㉠의 한 근이 $t=0$이므로

$a^2-2a-8=0, \qquad (a+2)(a-4)=0$

$\therefore\ a=-2$ 또는 $a=4$ ...... ㉡

또 ㉠의 두 근의 합이 음수이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\quad a<0$ ...... ㉢

㉡, ㉢에서 $\quad a=-2$

답 **-2**

RPM 비법 노트

이차방정식 ㉠의 한 근을 α라 할 때

(i) $\alpha>0$이면 $\quad x^2=\alpha \quad \therefore\ x=\pm\sqrt{\alpha}$ ⇨ 서로 다른 두 실근

(ii) $\alpha=0$이면 $\quad x^2=0 \quad \therefore\ x=0$ ⇨ 중근

(iii) $\alpha<0$이면 $\quad x^2=\alpha \quad \therefore\ x=\pm\sqrt{\alpha}$ ⇨ 서로 다른 두 허근

이상에서 주어진 방정식이 두 허근과 중근인 실근을 가지려면 ㉠이 0과 음수인 근을 가져야 한다.

0675 ㄱ. $P(\sqrt{n})=(\sqrt{n})^4+(\sqrt{n})^2-n^2-n$
$\qquad\qquad=n^2+n-n^2-n=0$ (참)

ㄴ. $x^2=t$로 놓으면 방정식 $P(x)=0$은

$t^2+t-n^2-n=0, \qquad t^2+t-n(n+1)=0$

$(t-n)(t+n+1)=0$

$\therefore\ t=n$ 또는 $t=-n-1$

따라서 $x^2=n$ 또는 $x^2=-n-1$이므로

$x=\pm\sqrt{n}$ 또는 $x=\pm\sqrt{-n-1}$

이때 n은 자연수이므로 방정식 $P(x)=0$의 실근은 $x=\pm\sqrt{n}$의 2개이다. (참)

ㄷ. $P(k)=k^4+k^2-n^2-n=(k^2+n)(k^2-n)+k^2-n$
$\qquad=(k^2+n+1)(k^2-n)$

이때 모든 정수 k에 대하여 $k^2+n+1>0$이므로 $P(k)\neq0$이 되려면 $\quad k^2-n\neq0$, 즉 $n\neq k^2$

따라서 n은 정수의 제곱의 꼴이 아닌 9 이하의 자연수이므로

$n=2, 3, 5, 6, 7, 8$

즉 모든 n의 값의 합은 $\quad 2+3+5+6+7+8=31$ (참)

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

0676 $f(x)=x^3+x^2+3(a-2)x-6a$라 하면

$f(2)=8+4+6(a-2)-6a=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & 1 & 3(a-2) & -6a \\ & & 2 & 6 & 6a \\ \hline & 1 & 3 & 3a & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-2)(x^2+3x+3a)$

ㄱ. 주어진 방정식은 $x=2$를 근으로 가지므로 적어도 하나의 실근을 갖는다. (참)

ㄴ. 주어진 방정식이 한 실근과 두 허근을 가지려면 이차방정식 $x^2+3x+3a=0$이 두 허근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$D=3^2-4\times1\times3a<0 \qquad \therefore a>\frac{3}{4}$$

따라서 정수 a의 최솟값은 1이다. (참)

ㄷ. 주어진 방정식이 중근을 가지려면

(i) 이차방정식 $x^2+3x+3a=0$이 $x=2$를 근으로 갖는 경우

$$4+6+3a=0 \qquad \therefore a=-\frac{10}{3}$$

(ii) 이차방정식 $x^2+3x+3a=0$이 중근을 갖는 경우

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$D=3^2-4\times1\times3a=0 \qquad \therefore a=\frac{3}{4}$$

(i), (ii)에서 중근을 갖도록 하는 실수 a는 2개이다. (참)

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

0677 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-2,\ \alpha\beta\gamma=1$

이때 $\alpha+\beta+\gamma=-2$에서

$\alpha+\beta+2=-\gamma,\ \beta+\gamma+2=-\alpha,\ \gamma+\alpha+2=-\beta$

이므로

$(\alpha+\beta+2)(\beta+\gamma+2)(\gamma+\alpha+2)$

$=-\gamma\times(-\alpha)\times(-\beta)$

$=-\alpha\beta\gamma=-1$ 답 ③

0678 주어진 삼차방정식의 세 근을 $-\alpha,\ \alpha,\ \beta\ (\alpha\neq0)$라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-\alpha+\alpha+\beta=-3 \qquad \therefore \beta=-3$

따라서 $x^3+3x^2+ax-6=0$의 한 근이 -3이므로

$-27+27-3a-6=0 \qquad \therefore a=-2$ 답 ②

다른 풀이 주어진 삼차방정식의 세 근을 $-\alpha,\ \alpha,\ \beta\ (\alpha\neq0)$라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-\alpha+\alpha+\beta=-3,\ -\alpha\times\alpha\times\beta=6$

$\therefore \alpha=\pm\sqrt{2},\ \beta=-3$

따라서 세 근이 $-\sqrt{2},\ \sqrt{2},\ -3$이므로

$a=-\sqrt{2}\times\sqrt{2}+\sqrt{2}\times(-3)+(-3)\times(-\sqrt{2})$

$=-2$

0679 $x^3-4x^2-x+a=0$에서 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=4,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-1,\ \alpha\beta\gamma=-a$

이때 $x^3+bx^2+cx+12=0$에서 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(\alpha+1)+(\beta+1)+(\gamma+1)=-b$이므로

$\alpha+\beta+\gamma+3=-b, \qquad 4+3=-b$

$\therefore b=-7$

$(\alpha+1)(\beta+1)+(\beta+1)(\gamma+1)+(\gamma+1)(\alpha+1)=c$이므로

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha+2(\alpha+\beta+\gamma)+3=c$

$-1+2\times4+3=c \qquad \therefore c=10$

$(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)=-12$이므로

$\alpha\beta\gamma+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+(\alpha+\beta+\gamma)+1=-12$

$-a+(-1)+4+1=-12 \qquad \therefore a=16$

$\therefore a+b+c=16+(-7)+10=19$ 답 **19**

0680 주어진 삼차방정식의 계수가 실수이므로 $1-i$가 근이면 $1+i$도 근이다.

나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(1+i)+(1-i)+\alpha=a+1$에서

$1+\alpha=a$ …… ㉠

$(1+i)(1-i)\alpha=a$에서

$2\alpha=a$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $1+\alpha=2\alpha \qquad \therefore \alpha=1$

따라서 나머지 두 근은 $1+i,\ 1$이므로 구하는 합은

$(1+i)+1=2+i$ 답 ⑤

0681 처음 정육면체의 한 모서리의 길이를 x cm라 하면

$(x+2)(x+3)(x-1)=\frac{5}{2}x^3$

$x^3+4x^2+x-6=\frac{5}{2}x^3, \qquad 3x^3-8x^2-2x+12=0$

$(x-2)(3x^2-2x-6)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=\frac{1\pm\sqrt{19}}{3}$

이때 x는 자연수이므로 $x=2$

따라서 처음 정육면체의 한 모서리의 길이는 2 cm이므로 부피는

$2^3=8\,(\mathrm{cm}^3)$ 답 **8 cm^3**

0682 정육면체의 한 모서리의 길이를 x라 하면

$V=5x^3,\ S=20x^2$

$V+S=40$에서 $\quad 5x^3+20x^2=40$

$x^3+4x^2-8=0, \qquad (x+2)(x^2+2x-4)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{5}$

이때 $x>0$이어야 하므로

$x=-1+\sqrt{5}$

따라서 정육면체의 한 모서리의 길이는 $-1+\sqrt{5}$이다.

답 $\mathbf{-1+\sqrt{5}}$

0683 $\begin{cases} 2x+y=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x^2-y^2=2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $\quad y=1-2x \quad \cdots\cdots ㉢$

㉢을 ㉡에 대입하면

$3x^2-(1-2x)^2=2, \quad -x^2+4x-3=0$

$x^2-4x+3=0, \quad (x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=3$

$x=1$을 ㉢에 대입하면 $\quad y=-1$

$x=3$을 ㉢에 대입하면 $\quad y=-5$

$\therefore xy=-1$ 또는 $xy=-15$

따라서 xy의 최솟값은 -15이다. 답 -15

0684 $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=2 \\ x^2+xy+y^2=1 \end{cases}$에서

$\begin{cases} (x+y)^2+(x+y)-2xy=2 \\ (x+y)^2-xy=1 \end{cases}$

$x+y=u$, $xy=v$로 놓으면

$\begin{cases} u^2+u-2v=2 & \cdots\cdots ㉠ \\ u^2-v=1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡에서 $\quad v=u^2-1 \quad \cdots\cdots ㉢$

㉢을 ㉠에 대입하면

$u^2+u-2(u^2-1)=2$

$-u^2+u=0, \quad u(u-1)=0$

$\therefore u=0$ 또는 $u=1$

$u=0$을 ㉢에 대입하면 $\quad v=-1$

$u=1$을 ㉢에 대입하면 $\quad v=0$

(i) $u=0$, $v=-1$, 즉 $x+y=0$, $xy=-1$일 때

x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2-1=0$의 두 근이다.

$t^2-1=0$에서

$(t+1)(t-1)=0 \quad \therefore t=-1$ 또는 $t=1$

$\therefore x=-1$, $y=1$ 또는 $x=1$, $y=-1$

(ii) $u=1$, $v=0$, 즉 $x+y=1$, $xy=0$일 때

x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2-t=0$의 두 근이다.

$t^2-t=0$에서

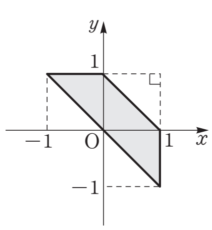
$t(t-1)=0 \quad \therefore t=0$ 또는 $t=1$

$\therefore x=0$, $y=1$ 또는 $x=1$, $y=0$

(i), (ii)에서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$

따라서 네 점 $(-1, 1)$, $(1, -1)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$을 꼭짓점으로 하는 사각형은 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 넓이는



$\frac{1}{2}\times2\times2-\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{3}{2}$

답 $\frac{3}{2}$

0685 $\begin{cases} 2x+y=k & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=5 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $\quad y=k-2x$

이것을 ㉡에 대입하면

$x^2+(k-2x)^2=5$

$\therefore 5x^2-4kx+k^2-5=0 \quad \cdots\cdots ㉢$

주어진 연립방정식이 오직 한 쌍의 해를 가지려면 이차방정식 ㉢이 중근을 가져야 하므로 ㉢의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2k)^2-5(k^2-5)=0$

$-k^2+25=0, \quad k^2=25$

$\therefore k=5 \ (\because k>0)$

$k=5$를 ㉢에 대입하면

$5x^2-20x+20=0, \quad x^2-4x+4=0$

$(x-2)^2=0 \quad \therefore x=2$

$x=2$를 ㉠에 대입하면

$4+y=5 \quad \therefore y=1$

따라서 $\alpha=2$, $\beta=1$이므로

$\alpha+\beta=2+1=3$ 답 3

0686 두 이차방정식의 공통인 근을 α라 하면

$\begin{cases} \alpha^2+a\alpha+b=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ \alpha^2+b\alpha+a=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠−㉡을 하면

$(a-b)\alpha+b-a=0$

$(a-b)(\alpha-1)=0$

$\therefore a=b$ 또는 $\alpha=1$

이때 $a\neq b$이므로 $\quad \alpha=1$

$\alpha=1$을 ㉠에 대입하면

$1+a+b=0 \quad \therefore a+b=-1$

$x^2+ax+b=0$, $x^2+bx+a=0$의 1이 아닌 근이 각각 p, q이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$1\times p=b$, $1\times q=a$

$\therefore b=p$, $a=q$

이때 $pq=-6$이므로 $\quad ab=-6$

$\therefore a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

$=(-1)^2-2\times(-6)$

$=13$ 답 ④

다른 풀이 주어진 두 이차방정식의 공통인 근이 1이므로

$1+a+b=0 \quad \therefore b=-a-1 \quad \cdots\cdots ㉢$

㉢을 $x^2+ax+b=0$에 대입하면

$x^2+ax-a-1=0, \quad (x-1)(x+a+1)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=-a-1$

㉢을 $x^2+bx+a=0$에 대입하면

$x^2+(-a-1)x+a=0, \quad (x-1)(x-a)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=a$

따라서 공통이 아닌 나머지 근은 $-a-1$, a이므로

$(-a-1)\times a=-6$, $\quad a^2+a-6=0$

$(a+3)(a-2)=0 \quad \therefore a=-3$ 또는 $a=2$

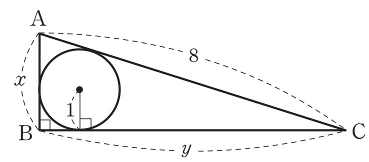
$a=-3$을 ㉢에 대입하면 $\quad b=2$

$a=2$를 ㉢에 대입하면 $\quad b=-3$

$\therefore a^2+b^2=13$

0687 직각삼각형의 빗변의 길이는 외접원의 지름의 길이와 같으므로 직각삼각형 ABC의 빗변의 길이는 8이다.

오른쪽 그림과 같이 나머지 두 변의 길이를 각각 x, y라 하면 피타고라스 정리에 의하여



$x^2+y^2=64 \quad \cdots\cdots$ ㉠

직각삼각형의 넓이에서

$\frac{1}{2}xy=\frac{1}{2}(x+y+8)\times 1$

$\therefore xy=x+y+8 \quad \cdots\cdots$ ㉡

$x+y=u$, $xy=v$라 하면

㉠에서 $(x+y)^2-2xy=64$이므로

$u^2-2v=64 \quad \cdots\cdots$ ㉢

㉡에서 $\quad v=u+8 \quad \cdots\cdots$ ㉣

㉣을 ㉢에 대입하면 $\quad u^2-2(u+8)=64$

$u^2-2u-80=0$, $\quad (u+8)(u-10)=0$

$\therefore u=10 \ (\because u>0)$

$u=10$을 ㉣에 대입하면 $\quad v=18$

$u=10$, $v=18$, 즉 $x+y=10$, $xy=18$일 때, x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2-10t+18=0$의 두 근이다.

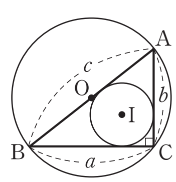
$t^2-10t+18=0$에서 $\quad t=5\pm\sqrt{7}$

따라서 직각삼각형 ABC의 빗변이 아닌 두 변의 길이는 $5+\sqrt{7}$, $5-\sqrt{7}$이므로 가장 짧은 변의 길이는 $5-\sqrt{7}$이다.

답 $5-\sqrt{7}$

RPM 비법 노트

$\angle C=90°$인 직각삼각형 ABC에서 점 O가 외심, 점 I가 내심일 때



(1) 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

⇨ $R=\frac{1}{2}\times$(빗변의 길이)$=\frac{1}{2}c$

(2) 내접원의 반지름의 길이를 r라 하면

⇨ $\triangle ABC=\frac{1}{2}\times r\times$($\triangle$ABC의 둘레의 길이)

⇨ $\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}r(a+b+c)$

0688 $x^3=1$에서 $\quad x^3-1=0$

$\therefore (x-1)(x^2+x+1)=0$

따라서 ω는 $x^3=1$, $x^2+x+1=0$의 한 허근이므로

$\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$

ㄱ. $\omega^{10}=(\omega^3)^3\times\omega=\omega$ (참)

ㄴ. ω가 $x^2+x+1=0$의 한 허근이므로 $\overline{\omega}$도 $x^2+x+1=0$의 허근이다.

따라서 $\overline{\omega}^2+\overline{\omega}+1=0$이므로

$$\frac{\omega^2}{1+\omega}+\frac{\overline{\omega}}{1+\overline{\omega}^2}=\frac{\omega^2}{-\omega^2}+\frac{\overline{\omega}}{-\overline{\omega}}$$
$$=-1+(-1)$$
$$=-2 \text{ (참)}$$

ㄷ. $1+\omega^2+\omega^4+\omega^6+\cdots+\omega^{200}$

$=1+\omega^2+\omega^3\times\omega+(\omega^3)^2+(\omega^3)^2\times\omega^2+(\omega^3)^3\times\omega+\cdots$
$\quad +(\omega^3)^{66}+(\omega^3)^{66}\times\omega^2$

$=(1+\omega^2+\omega)+(1+\omega^2+\omega)+\cdots+1+\omega^2$

$=1+\omega^2$

$=-\omega$ (참)

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

0689 이차방정식 $x^2-2(a+b)x+a^2+b^2-4a+2b-6=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a+b)^2-(a^2+b^2-4a+2b-6)=0$

$2ab+4a-2b+6=0$

$ab+2a-b+3=0$

$a(b+2)-(b+2)+5=0$

$\therefore (a-1)(b+2)=-5$

이때 a, b가 정수이므로 $a-1$, $b+2$도 정수이다.

따라서 $a-1$, $b+2$의 값은 다음 표와 같다.

$a-1$	-5	-1	1	5
$b+2$	1	5	-5	-1

(ⅰ) $a-1=-5$, $b+2=1$일 때,

$a=-4$, $b=-1 \quad \therefore ab=4$

(ⅱ) $a-1=-1$, $b+2=5$일 때,

$a=0$, $b=3 \quad \therefore ab=0$

(ⅲ) $a-1=1$, $b+2=-5$일 때,

$a=2$, $b=-7 \quad \therefore ab=-14$

(ⅳ) $a-1=5$, $b+2=-1$일 때,

$a=6$, $b=-3 \quad \therefore ab=-18$

이상에서 ab의 최솟값은 -18이다.

답 -18

0690 $f(x)=x^4-15x^2+ax+b$라 하면 주어진 방정식의 두 근이 -1, 2이므로

$f(-1)=0$에서 $\quad 1-15-a+b=0$

$\therefore a-b=-14 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$f(2)=0$에서 $\quad 16-60+2a+b=0$

$\therefore 2a+b=44 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=10$, $b=24 \quad \cdots$ 1단계

즉 $f(x)=x^4-15x^2+10x+24$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & 0 & -15 & 10 & 24 \\ & & -1 & 1 & 14 & -24 \\ \hline 2 & 1 & -1 & -14 & 24 & \boxed{0} \\ & & 2 & 2 & -24 & \\ \hline & 1 & 1 & -12 & \boxed{0} & \end{array}$$

$f(x)=(x+1)(x-2)(x^2+x-12)$

$\quad=(x+1)(x-2)(x-3)(x+4)$

따라서 주어진 방정식은

$(x+1)(x-2)(x-3)(x+4)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$ 또는 $x=-4$

즉 나머지 두 근은 3, -4이므로

$\alpha=3,\ \beta=-4\ (\because \alpha>\beta)$ … 2단계

$\therefore \dfrac{\alpha}{\beta}=-\dfrac{3}{4}$ … 3단계

답 $-\dfrac{3}{4}$

채점 요소	비율
1단계 a, b의 값 구하기	50 %
2단계 α, β의 값 구하기	40 %
3단계 $\dfrac{\alpha}{\beta}$의 값 구하기	10 %

0691 $f(x)=x^3+(a+1)x^2-a$라 하면

$f(-1)=-1+a+1-a=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & a+1 & 0 & -a \\ & & -1 & -a & a \\ \hline & 1 & a & -a & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x+1)(x^2+ax-a)$ … 1단계

이때 방정식 $f(x)=0$이 중근을 가지려면

(i) 방정식 $x^2+ax-a=0$이 $x=-1$을 근으로 갖는 경우

$1-a-a=0 \qquad \therefore a=\dfrac{1}{2}$ … 2단계

(ii) 방정식 $x^2+ax-a=0$이 중근을 갖는 경우

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-4\times1\times(-a)=0, \qquad a(a+4)=0$

$\therefore a=-4$ 또는 $a=0$ … 3단계

(i), (ii)에서 모든 실수 a의 값의 합은

$\dfrac{1}{2}+(-4)+0=-\dfrac{7}{2}$ … 4단계

답 $-\dfrac{7}{2}$

채점 요소	비율
1단계 주어진 삼차방정식의 좌변을 인수분해하기	30 %
2단계 $x^2+ax-a=0$이 $x=-1$을 근으로 가질 때의 a의 값 구하기	30 %
3단계 $x^2+ax-a=0$이 중근을 가질 때의 a의 값 구하기	30 %
4단계 모든 실수 a의 값의 합 구하기	10 %

0692 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-1,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-5,\ \alpha\beta\gamma=3$ … 1단계

$\therefore \dfrac{\gamma}{\alpha\beta}+\dfrac{\alpha}{\beta\gamma}+\dfrac{\beta}{\gamma\alpha}$

$=\dfrac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{\alpha\beta\gamma}$

$=\dfrac{(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)}{\alpha\beta\gamma}$ … 2단계

$=\dfrac{(-1)^2-2\times(-5)}{3}$

$=\dfrac{11}{3}$ … 3단계

답 $\dfrac{11}{3}$

채점 요소	비율
1단계 $\alpha+\beta+\gamma$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$, $\alpha\beta\gamma$의 값 구하기	40 %
2단계 주어진 식을 변형하기	40 %
3단계 식의 값 구하기	20 %

0693 $\begin{cases} 2x^2-3xy-2y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+2y^2=54 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $\quad (2x+y)(x-2y)=0$

$\therefore y=-2x$ 또는 $x=2y$ … 1단계

(i) $y=-2x$를 ㉡에 대입하면

$x^2+2\times(-2x)^2=54, \qquad x^2=6$

$\therefore x=\pm\sqrt{6}$

$y=-2x$이므로

$x=\sqrt{6},\ y=-2\sqrt{6}$ 또는 $x=-\sqrt{6},\ y=2\sqrt{6}$

(ii) $x=2y$를 ㉡에 대입하면

$(2y)^2+2y^2=54, \qquad y^2=9$

$\therefore y=\pm3$

$x=2y$이므로

$x=6,\ y=3$ 또는 $x=-6,\ y=-3$

(i), (ii)에서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=\sqrt{6} \\ y=-2\sqrt{6} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{6} \\ y=2\sqrt{6} \end{cases}$ 또는

$\begin{cases} x=6 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-6 \\ y=-3 \end{cases}$ … 2단계

따라서 $xy=-12$ 또는 $xy=18$이므로 xy의 최댓값은 18이다.

… 3단계

답 18

채점 요소	비율
1단계 한 이차방정식의 좌변을 인수분해하여 x, y의 관계식 구하기	30 %
2단계 연립방정식의 해 구하기	50 %
3단계 xy의 최댓값 구하기	20 %

0694 전략 $x^2=t$로 치환하여 좌변을 인수분해한 후 근을 a를 사용하여 나타낸다.

$x^2=t$로 놓으면 주어진 방정식은

$$t^2+(3-2a)t+a^2-3a-10=0$$
$$t^2+(3-2a)t+(a+2)(a-5)=0$$
$$(t-a-2)(t-a+5)=0$$
$$\therefore\ t=a+2 \text{ 또는 } t=a-5$$

따라서 $x^2=a+2$ 또는 $x^2=a-5$이므로

$$x=\pm\sqrt{a+2} \text{ 또는 } x=\pm\sqrt{a-5}$$

ㄱ. $a=1$이면 주어진 방정식의 근은

$$x=\pm\sqrt{3} \text{ 또는 } x=\pm 2i$$

따라서 모든 실근의 곱은

$$\sqrt{3}\times(-\sqrt{3})=-3 \text{ (참)}$$

ㄴ. a는 실수이므로 $\quad a-5<a+2$

이때 주어진 방정식이 실근과 허근을 모두 가지므로 실근은 $x=\pm\sqrt{a+2}$이고, 허근은 $x=\pm\sqrt{a-5}$이다.

모든 실근의 곱이 -4이므로

$$\sqrt{a+2}\times(-\sqrt{a+2})=-4$$
$$-a-2=-4 \qquad \therefore\ a=2$$

따라서 허근은 $x=\pm\sqrt{3}i$이므로 모든 허근의 곱은

$$\sqrt{3}i\times(-\sqrt{3}i)=3 \text{ (참)}$$

ㄷ. 주어진 방정식이 정수인 근을 가지려면 $\pm\sqrt{a+2}$가 정수이어야 하므로 $a+2$가 정수의 제곱의 꼴이어야 한다.

한편 주어진 방정식이 실근과 허근을 모두 가지려면 $a+2\ge 0$, $a-5<0$이어야 하므로

$$0\le a+2<7$$

따라서 $a+2$의 값이 될 수 있는 것은 0^2, 1^2, 2^2, 즉 0, 1, 4이므로

$$a=-2 \text{ 또는 } a=-1 \text{ 또는 } a=2$$

따라서 정수인 근을 갖도록 하는 모든 실수 a의 값의 합은

$$-2+(-1)+2=-1 \text{ (참)}$$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. **답** ⑤

0695 **전략** 계수가 실수인 삼차방정식의 한 허근이 α이면 $\overline{\alpha}$도 근임을 이용한다.

주어진 삼차방정식의 계수가 실수이므로 두 허근은 켤레근이다.

$$\therefore\ \overline{\alpha}=\alpha^2$$

$\alpha=a+bi$ (a, b는 실수, $b\neq 0$)라 하면 $\overline{\alpha}=\alpha^2$에서

$$a-bi=(a+bi)^2, \qquad a-bi=a^2-b^2+2abi$$
$$\therefore\ a=a^2-b^2,\ -b=2ab$$

$-b=2ab$에서 $b\neq 0$이므로 $\qquad 2a=-1$

$$\therefore\ a=-\frac{1}{2}$$

$a=-\frac{1}{2}$을 $a=a^2-b^2$에 대입하면

$$-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}-b^2, \qquad b^2=\frac{3}{4} \qquad \therefore\ b=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

따라서 두 허근은 $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$이다.

나머지 한 실근을 β라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\beta=-2$$
$$\therefore\ \beta=-2$$

따라서 주어진 방정식의 세 근이 $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$, -2이므로

$$\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+(-2)=-p,$$
$$\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\times(-2)$$
$$+(-2)\times\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=q$$
$$\therefore\ p=3,\ q=3$$
$$\therefore\ p+q=3+3=6$$

답 6

0696 **전략** 구하는 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)로 놓고 등식을 세운다.

$f(x^9)=x^{18}-x^9+1$을 $f(x)=x^2-x+1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$$x^{18}-x^9+1=(x^2-x+1)Q(x)+ax+b \quad \cdots\cdots ㉠$$

한편 $x^2-x+1=0$의 두 허근을 ω, $\overline{\omega}$라 하면

$$\omega^2-\omega+1=0,\ \overline{\omega}^2-\overline{\omega}+1=0$$

$x^2-x+1=0$의 양변에 $x+1$을 곱하면

$$(x+1)(x^2-x+1)=0, \qquad x^3+1=0$$
$$\therefore\ x^3=-1$$

따라서 ω, $\overline{\omega}$는 $x^3=-1$의 두 허근이므로

$$\omega^3=-1,\ \overline{\omega}^3=-1$$

㉠의 양변에 $x=\omega$를 대입하면

$$\omega^{18}-\omega^9+1=(\omega^2-\omega+1)Q(\omega)+a\omega+b$$
$$(\omega^3)^6-(\omega^3)^3+1=a\omega+b$$
$$1-(-1)+1=a\omega+b$$
$$\therefore\ 3=a\omega+b \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠의 양변에 $x=\overline{\omega}$를 대입하면

$$\overline{\omega}^{18}-\overline{\omega}^9+1=(\overline{\omega}^2-\overline{\omega}+1)Q(\overline{\omega})+a\overline{\omega}+b$$
$$(\overline{\omega}^3)^6-(\overline{\omega}^3)^3+1=a\overline{\omega}+b$$
$$1-(-1)+1=a\overline{\omega}+b$$
$$\therefore\ 3=a\overline{\omega}+b \quad \cdots\cdots ㉢$$

㉡$-$㉢을 하면

$$a\omega-a\overline{\omega}=0, \qquad a(\omega-\overline{\omega})=0$$
$$\therefore\ a=0\ (\because\ \omega\neq\overline{\omega})$$

$a=0$을 ㉡에 대입하면 $\qquad b=3$

따라서 구하는 나머지는 3이다. **답** ③

08 연립일차부등식

교과서 문제 정복하기

본책 101쪽

0697 답 $1<x<8$

0698 답 $-4\le x<3$

0699 답 $x>2$

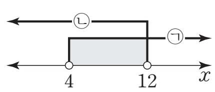
0700 답 $x<-7$

0701 $x-3>1$에서　$x>4$ ⋯⋯ ㉠

$2x-8<x+4$에서　$x<12$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$4<x<12$



답 $4<x<12$

0702 $2(x+2)\ge x+10$에서　$2x+4\ge x+10$

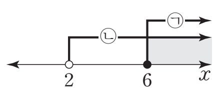
$\therefore x\ge 6$ ⋯⋯ ㉠

$3x-2>-x+6$에서　$4x>8$

$\therefore x>2$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$x\ge 6$



답 $x\ge 6$

0703 $\frac{x}{3}-\frac{x+4}{2}\le -1$의 양변에 6을 곱하면

$2x-3(x+4)\le -6$,　$2x-3x-12\le -6$

$-x\le 6$　$\therefore x\ge -6$ ⋯⋯ ㉠

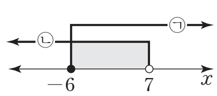
$\frac{2x+1}{5}<3$의 양변에 5를 곱하면

$2x+1<15$,　$2x<14$

$\therefore x<7$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-6\le x<7$



답 $-6\le x<7$

0704 $0.1x+0.2<0.5$의 양변에 10을 곱하면

$x+2<5$　$\therefore x<3$ ⋯⋯ ㉠

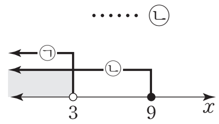
$0.4x\le 0.3(x+3)$의 양변에 10을 곱하면

$4x\le 3(x+3)$,　$4x\le 3x+9$

$\therefore x\le 9$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$x<3$



답 $x<3$

0705 $-x+1\ge -1$에서　$-x\ge -2$

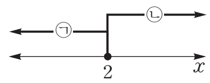
$\therefore x\le 2$ ⋯⋯ ㉠

$4x-7\ge 3-x$에서　$5x\ge 10$

$\therefore x\ge 2$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$x=2$　답 $x=2$



0706 $3(x+4)>2(1-x)$에서

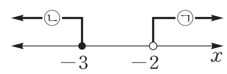
$3x+12>2-2x$,　$5x>-10$

$\therefore x>-2$ ⋯⋯ ㉠

$0.1x\le -0.3$의 양변에 10을 곱하면

$x\le -3$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분이 없으므로 주어진 연립부등식의 해는 없다.



답 해는 없다.

0707 (1) $2x+5<4x-7$에서

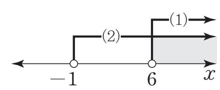
$-2x<-12$　$\therefore x>6$

(2) $4x-7<9x-2$에서

$-5x<5$　$\therefore x>-1$

(3) (1), (2)의 공통부분을 구하면

$x>6$



답 (1) $x>6$　(2) $x>-1$　(3) $x>6$

0708 주어진 부등식은

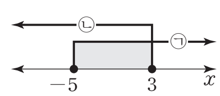
$$\begin{cases} -3\le x+2 & \cdots\cdots ㉠ \\ x+2\le 17-4x & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서　$x\ge -5$

㉡에서　$5x\le 15$　$\therefore x\le 3$

㉠, ㉡의 해의 공통부분을 구하면

$-5\le x\le 3$



답 $-5\le x\le 3$

0709 주어진 부등식은

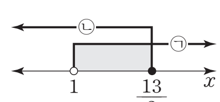
$$\begin{cases} x-2<3x-4 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x-4\le x+9 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서　$-2x<-2$　$\therefore x>1$

㉡에서　$2x\le 13$　$\therefore x\le \frac{13}{2}$

㉠, ㉡의 해의 공통부분을 구하면

$1<x\le \frac{13}{2}$



답 $1<x\le \frac{13}{2}$

0710 $|6-x|<3$에서

$-3<6-x<3$,　$-9<-x<-3$

$\therefore 3<x<9$　답 $3<x<9$

0711 $|3x-2|\ge 5$에서

$3x-2\le -5$ 또는 $3x-2\ge 5$

$3x\le -3$ 또는 $3x\ge 7$ $\quad\therefore x\le -1$ 또는 $x\ge \frac{7}{3}$

답 $\boldsymbol{x\le -1}$ **또는** $\boldsymbol{x\ge \frac{7}{3}}$

0712 $2|x-1|<x$에서

(1) $x<1$일 때, $x-1<0$이므로

$-2(x-1)<x$, $\quad -2x+2<x$

$-3x<-2$ $\quad\therefore x>\frac{2}{3}$

그런데 $x<1$이므로 $\quad \frac{2}{3}<x<1$

(2) $x\ge 1$일 때, $x-1\ge 0$이므로

$2(x-1)<x$, $\quad 2x-2<x$

$\therefore x<2$

그런데 $x\ge 1$이므로 $\quad 1\le x<2$

(3) (1), (2)에서 $\quad \frac{2}{3}<x<2$

답 (1) $\boldsymbol{\frac{2}{3}<x<1}$ (2) $\boldsymbol{1\le x<2}$ (3) $\boldsymbol{\frac{2}{3}<x<2}$

0713 $|x+1|+|x-5|\le 8$에서

(1) $x<-1$일 때, $x+1<0$, $x-5<0$이므로

$-(x+1)-(x-5)\le 8$

$-x-1-x+5\le 8$

$-2x\le 4$ $\quad\therefore x\ge -2$

그런데 $x<-1$이므로 $\quad -2\le x<-1$

(2) $-1\le x<5$일 때, $x+1\ge 0$, $x-5<0$이므로

$x+1-(x-5)\le 8$, $\quad x+1-x+5\le 8$

$\therefore 0\times x\le 2$

따라서 항상 성립하므로 부등식의 해는 모든 실수이다.

그런데 $-1\le x<5$이므로 $\quad -1\le x<5$

(3) $x\ge 5$일 때, $x+1>0$, $x-5\ge 0$이므로

$x+1+x-5\le 8$, $\quad 2x\le 12$

$\therefore x\le 6$

그런데 $x\ge 5$이므로 $\quad 5\le x\le 6$

(4) (1), (2), (3)에서 $\quad -2\le x\le 6$

답 (1) $\boldsymbol{-2\le x<-1}$ (2) $\boldsymbol{-1\le x<5}$
(3) $\boldsymbol{5\le x\le 6}$ (4) $\boldsymbol{-2\le x\le 6}$

유형 익히기

• 본책 102~107쪽

0714 $3x+2\le 2(x-1)$에서

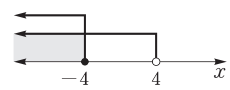
$3x+2\le 2x-2$ $\quad\therefore x\le -4$

$x+1>3(x-3)+2$에서

$x+1>3x-9+2$, $\quad -2x>-8$ $\quad\therefore x<4$

따라서 주어진 연립부등식의 해는

$x\le -4$



이므로 가장 큰 정수 x는 -4이다.

답 $\boldsymbol{-4}$

0715 $6(x-1)<x+4$에서

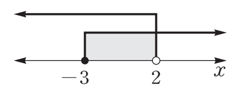
$6x-6<x+4$, $\quad 5x<10$ $\quad\therefore x<2$

$5-3(x+3)\le 2x+11$에서

$5-3x-9\le 2x+11$, $\quad -5x\le 15$ $\quad\therefore x\ge -3$

따라서 주어진 연립부등식의 해는

$-3\le x<2$



이므로 $\quad a=-3$, $b=2$

$\therefore b-a=2-(-3)=5$

답 **5**

0716 $0.2x-3\ge 0.5-0.1x$의 양변에 10을 곱하면

$2x-30\ge 5-x$, $\quad 3x\ge 35$

$\therefore x\ge \frac{35}{3}$

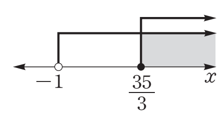
$\frac{1}{2}x+\frac{5}{6}<\frac{2}{3}x+1$의 양변에 6을 곱하면

$3x+5<4x+6$, $\quad -x<1$

$\therefore x>-1$

따라서 주어진 연립부등식의 해는

$x\ge \frac{35}{3}$



이므로 자연수 x의 최솟값은 12이다.

답 **12**

0717 $\frac{x+1}{2}\ge \frac{3x-4}{5}$의 양변에 10을 곱하면

$5(x+1)\ge 2(3x-4)$, $\quad 5x+5\ge 6x-8$

$-x\ge -13$ $\quad\therefore x\le 13$

$\frac{2x-3}{3}-\frac{x+1}{4}<\frac{x-3}{2}$의 양변에 12를 곱하면

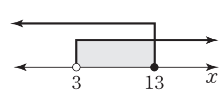
$4(2x-3)-3(x+1)<6(x-3)$

$8x-12-3x-3<6x-18$

$-x<-3$ $\quad\therefore x>3$

따라서 주어진 연립부등식의 해는

$3<x\le 13$



이므로 정수 x는 4, 5, $\cdots$, 13의 10개이다.

답 **10**

RPM 비법 노트

두 정수 m, n $(m<n)$에 대하여

① $m<x<n$을 만족시키는 정수 x의 개수는

$n-m-1$

② $m\le x<n$ (또는 $m<x\le n$)을 만족시키는 정수 x의 개수는

$n-m$

③ $m\le x\le n$을 만족시키는 정수 x의 개수는

$n-m+1$

08

연립일차부등식

0718 주어진 부등식은

$$\begin{cases} 2(x-5)<5x-1 & \cdots\cdots ㉠ \\ 5x-1\le 4(2-x) & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $2x-10<5x-1$, $-3x<9$

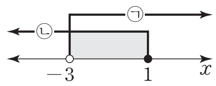
$\therefore x>-3$

㉡에서 $5x-1\le 8-4x$, $9x\le 9$

$\therefore x\le 1$

따라서 주어진 부등식의 해는

$-3<x\le 1$



즉 정수 x는 -2, -1, 0, 1이므로 구하는 합은

$-2+(-1)+0+1=-2$

답 **−2**

0719 주어진 부등식은

$$\begin{cases} 8x-5<2x+7 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x+7\le -(3x+8) & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

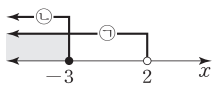
㉠에서 $6x<12$ $\therefore x<2$

㉡에서 $2x+7\le -3x-8$, $5x\le -15$

$\therefore x\le -3$

따라서 주어진 부등식의 해는

$x\le -3$



이므로 해가 아닌 것은 ⑤이다.

답 ⑤

0720 주어진 부등식은

$$\begin{cases} 0.3x-1<0.5x+\dfrac{2}{5} & \cdots\cdots ㉠ \\ 0.5x+\dfrac{2}{5}\le 3+0.3x & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠의 양변에 10을 곱하면

$3x-10<5x+4$, $-2x<14$

$\therefore x>-7$

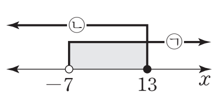
㉡의 양변에 10을 곱하면

$5x+4\le 30+3x$, $2x\le 26$

$\therefore x\le 13$

따라서 주어진 부등식의 해는

$-7<x\le 13$



이므로 $a=-7$, $b=13$

$\therefore a+b=-7+13=6$

답 **6**

0721 주어진 부등식은

$$\begin{cases} 1-\dfrac{2(1-x)}{3}<\dfrac{3x+5}{4} & \cdots\cdots ㉠ \\ \dfrac{3x+5}{4}\le \dfrac{x-1}{2}+1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠의 양변에 12를 곱하면 $12-8(1-x)<3(3x+5)$

$12-8+8x<9x+15$, $-x<11$

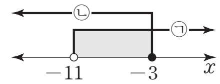
$\therefore x>-11$

㉡의 양변에 4를 곱하면 $3x+5\le 2(x-1)+4$

$3x+5\le 2x-2+4$ $\therefore x\le -3$

따라서 주어진 부등식의 해는

$-11<x\le -3$



이때 $3\le -x<11$이므로

$6\le -x+3<14$

$\therefore 6\le A<14$

답 **$6\le A<14$**

0722 ① $4x-1\ge 2(x-2)+1$에서

$4x-1\ge 2x-4+1$, $2x\ge -2$

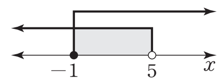
$\therefore x\ge -1$

$x+4>2x-1$에서 $-x>-5$

$\therefore x<5$

따라서 주어진 연립부등식의 해는

$-1\le x<5$



② $4(3-x)<x-8$에서

$12-4x<x-8$, $-5x<-20$

$\therefore x>4$

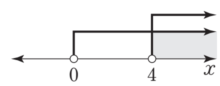
$2(x-6)<3(x-4)$에서

$2x-12<3x-12$, $-x<0$

$\therefore x>0$

따라서 주어진 연립부등식의 해는

$x>4$



③ $\dfrac{x-1}{2}-\dfrac{x-2}{3}\ge 0$의 양변에 6을 곱하면

$3(x-1)-2(x-2)\ge 0$

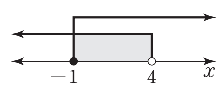
$3x-3-2x+4\ge 0$ $\therefore x\ge -1$

$7x-5<2x+15$에서 $5x<20$

$\therefore x<4$

따라서 주어진 연립부등식의 해는

$-1\le x<4$



④ $5x+13>-3(x+1)$에서

$5x+13>-3x-3$, $8x>-16$ $\therefore x>-2$

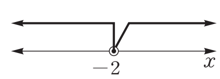
$\dfrac{2x+4}{3}\le \dfrac{x-2}{2}-x$의 양변에 6을 곱하면

$2(2x+4)\le 3(x-2)-6x$

$4x+8\le 3x-6-6x$, $7x\le -14$

$\therefore x\le -2$

따라서 주어진 연립부등식의 해는 없다.



⑤ $0.5x-0.2\ge 0.4x-0.8$의 양변에 10을 곱하면

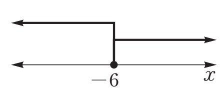
$5x-2\ge 4x-8$ $\therefore x\ge -6$

$4(x-2)\le 3x-14$에서

$4x-8\le 3x-14$ $\therefore x\le -6$

따라서 주어진 연립부등식의 해는

$x=-6$



답 ④

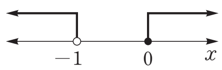
0723 $2x+5<x+4$에서

$x<-1$

$\frac{1}{3}(x-6)\geq-2$의 양변에 3을 곱하면

$x-6\geq-6 \qquad \therefore x\geq0$

따라서 주어진 연립부등식의 해는 없다.



답 ④

0724 주어진 부등식은

$$\begin{cases} \dfrac{x+2}{3}\leq\dfrac{2x+3}{5} & \cdots\cdots ㉠ \\ \dfrac{2x+3}{5}\leq\dfrac{-x+5}{4} & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$ ··· 1단계

㉠의 양변에 15를 곱하면

$5(x+2)\leq3(2x+3), \qquad 5x+10\leq6x+9$

$-x\leq-1 \qquad \therefore x\geq1$

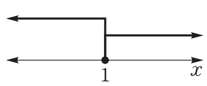
㉡의 양변에 20을 곱하면

$4(2x+3)\leq5(-x+5), \qquad 8x+12\leq-5x+25$

$13x\leq13 \qquad \therefore x\leq1$ ··· 2단계

따라서 주어진 부등식의 해는

$x=1$ ··· 3단계



답 $x=1$

채점 요소	비율
1단계 연립부등식으로 변형하기	20 %
2단계 각 부등식의 해 구하기	60 %
3단계 주어진 부등식의 해 구하기	20 %

0725 $5x-a>2(x-1)$에서

$5x-a>2x-2, \qquad 3x>a-2 \qquad \therefore x>\frac{a-2}{3}$

$3x\leq8+x$에서

$2x\leq8 \qquad \therefore x\leq4$

주어진 연립부등식의 해가 $2<x\leq b$이므로

$\frac{a-2}{3}=2,\ b=4 \qquad \therefore a=8,\ b=4$

$\therefore a+b=8+4=12$

답 12

0726 $-x+1>3x+a$에서

$-4x>a-1 \qquad \therefore x<\frac{1-a}{4}$

$3x-5\leq b$에서

$3x\leq b+5 \qquad \therefore x\leq\frac{b+5}{3}$

이때 주어진 그림에서 $x<-2,\ x\leq6$이므로

$\frac{1-a}{4}=-2,\ \frac{b+5}{3}=6 \qquad \therefore a=9,\ b=13$

$\therefore ab=9\times13=117$

답 117

0727 주어진 부등식은

$$\begin{cases} x+a\leq2x-3 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x-3\leq-(x+b) & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $\quad -x\leq-a-3 \qquad \therefore x\geq a+3$

㉡에서 $\quad 2x-3\leq-x-b$

$3x\leq3-b \qquad \therefore x\leq\frac{3-b}{3}$

주어진 부등식의 해가 $4\leq x\leq6$이므로

$a+3=4,\ \frac{3-b}{3}=6 \qquad \therefore a=1,\ b=-15$

$\therefore a-b=1-(-15)=16$

답 16

0728 $\frac{5}{6}x-\frac{1}{2}\leq\frac{x}{3}+a$의 양변에 6을 곱하면

$5x-3\leq2x+6a, \qquad 3x\leq6a+3$

$\therefore x\leq2a+1$

$x+2\leq5(2x-b)$에서

$x+2\leq10x-5b, \qquad -9x\leq-5b-2$

$\therefore x\geq\frac{5b+2}{9}$

주어진 연립부등식의 해가 $x=3$이므로

$2a+1=3,\ \frac{5b+2}{9}=3 \qquad \therefore a=1,\ b=5$

$\therefore a+b=1+5=6$

답 6

0729 $\frac{3-2x}{2}\leq a$의 양변에 2를 곱하면

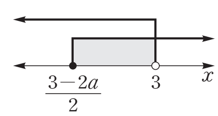
$3-2x\leq2a, \qquad -2x\leq2a-3$

$\therefore x\geq\frac{3-2a}{2}$

$3x+6>5x$에서 $\quad -2x>-6$

$\therefore x<3$

주어진 연립부등식이 해를 가지려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$\frac{3-2a}{2}<3, \qquad 3-2a<6$

$-2a<3 \qquad \therefore a>-\frac{3}{2}$

따라서 정수 a의 최솟값은 -1이다.

답 -1

참고 | $\frac{3-2a}{2}=3$, 즉 $a=-\frac{3}{2}$이면 주어진 연립부등식의 해는 없다.

0730 주어진 부등식은

$$\begin{cases} 2x+a\leq2(3-x) & \cdots\cdots ㉠ \\ 2(3-x)\leq3x-4 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

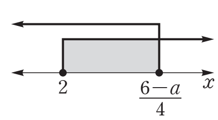
㉠에서 $\quad 2x+a\leq6-2x, \qquad 4x\leq6-a$

$\therefore x\leq\frac{6-a}{4}$

㉡에서 $\quad 6-2x\leq3x-4, \qquad -5x\leq-10$

$\therefore x\geq2$

주어진 부등식이 해를 가지려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$\frac{6-a}{4}\geq2, \qquad 6-a\geq8$

$-a\geq2 \qquad \therefore a\leq-2$

답 $a\leq-2$

08 연립일차부등식

0731 $\frac{2x+5}{3}+\frac{x-3}{2}>-1$의 양변에 6을 곱하면

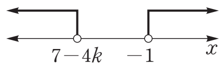
$2(2x+5)+3(x-3)>-6, \quad 4x+10+3x-9>-6$

$7x>-7 \quad \therefore x>-1$

$5x-7<4(x-k)$에서

$5x-7<4x-4k \quad \therefore x<7-4k$

주어진 연립부등식의 해가 없으려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$7-4k\le-1, \quad -4k\le-8$

$\therefore k\ge2$

답 $k\ge2$

0732 $\frac{1}{2}x+1<3x-a$의 양변에 2를 곱하면

$x+2<6x-2a, \quad -5x<-2a-2$

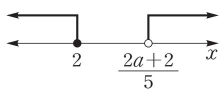
$\therefore x>\frac{2a+2}{5}$

$0.2(5-2x)\ge0.3x-0.4$의 양변에 10을 곱하면

$2(5-2x)\ge3x-4, \quad 10-4x\ge3x-4$

$-7x\ge-14 \quad \therefore x\le2$ … 1단계

주어진 연립부등식의 해가 없으려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$\frac{2a+2}{5}\ge2, \quad 2a+2\ge10$

$2a\ge8 \quad \therefore a\ge4$ … 2단계

따라서 정수 a의 최솟값은 4이다. … 3단계

답 4

	채점 요소	비율
1단계	각 일차부등식의 해 구하기	40 %
2단계	a의 값의 범위 구하기	50 %
3단계	정수 a의 최솟값 구하기	10 %

0733 더 넣어야 하는 소금의 양을 x g이라 하면

$\frac{20}{100}\times(200+x)\le\frac{16}{100}\times200+x\le\frac{25}{100}\times(200+x)$

$\therefore 4000+20x\le3200+100x\le5000+25x$

$4000+20x\le3200+100x$에서 $\quad -80x\le-800$

$\therefore x\ge10$ …… ㉠

$3200+100x\le5000+25x$에서 $\quad 75x\le1800$

$\therefore x\le24$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $\quad 10\le x\le24$

따라서 더 넣어야 하는 소금의 양은 10 g 이상 24 g 이하이다.

답 **10 g 이상 24 g 이하**

RPM 비법 노트

(1) $(\text{소금물의 농도})=\frac{(\text{소금의 양})}{(\text{소금물의 양})}\times100\ (\%)$

(2) $(\text{소금의 양})=\frac{(\text{소금물의 농도})}{100}\times(\text{소금물의 양})$

(3) 물을 더 넣거나 증발시켜도 소금의 양은 변하지 않는다.

0734 연속하는 세 홀수를 $x-2,\ x,\ x+2$라 하면

$119\le(x-2)+x+(x+2)<129$

$119\le3x<129 \quad \therefore \frac{119}{3}\le x<43$

이때 x는 홀수이므로 $\quad x=41$

따라서 연속하는 세 홀수는 39, 41, 43이므로 가장 큰 수는 43이다.

답 43

0735 $y=x^2+4x+k$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 이차방정식 $x^2+4x+k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=2^2-k>0 \quad \therefore k<4$ …… ㉠

$y=\frac{1}{2}x^2-5x-2k$의 그래프도 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 이차방정식 $\frac{1}{2}x^2-5x-2k=0$의 판별식을 D'이라 하면

$D'=(-5)^2-4\times\frac{1}{2}\times(-2k)>0$

$4k>-25 \quad \therefore k>-\frac{25}{4}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $\quad -\frac{25}{4}<k<4$

따라서 정수 k는 $-6, -5, \cdots, 3$의 10개이다.

답 10

0736 두 식품 A, B의 1 g당 탄수화물과 단백질의 양은 다음 표와 같다.

식품	탄수화물 (g)	단백질 (g)
A	0.1	0.12
B	0.25	0.06

섭취해야 하는 식품 B의 양을 x g이라 하면 식품 A는 $(300-x)$ g 섭취해야 하므로

$$\begin{cases} 0.1(300-x)+0.25x\ge42 & \cdots\cdots ㉠ \\ 0.12(300-x)+0.06x\ge24 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠의 양변에 100을 곱하면

$3000-10x+25x\ge4200, \quad 15x\ge1200$

$\therefore x\ge80$ …… ㉢

㉡의 양변에 100을 곱하면

$3600-12x+6x\ge2400, \quad -6x\ge-1200$

$\therefore x\le200$ …… ㉣

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면

$80\le x\le200$

따라서 섭취해야 하는 식품 B의 양은 80 g 이상 200 g 이하이다.

답 **80 g 이상 200 g 이하**

0737 $|2x-4|<6$에서

$-6<2x-4<6, \quad -2<2x<10$

$\therefore -1<x<5$

따라서 $a=-1,\ b=5$이므로

$b-a=5-(-1)=6$

답 6

0738 $|5-3x|\le 7$에서

$-7\le 5-3x\le 7,\qquad -12\le -3x\le 2$

$\therefore -\frac{2}{3}\le x\le 4$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x는 0, 1, 2, 3, 4의 5개이다.

답 ②

0739 $|2x-a|>4$에서

$2x-a<-4$ 또는 $2x-a>4$

$2x<a-4$ 또는 $2x>a+4$

$\therefore x<\frac{a}{2}-2$ 또는 $x>\frac{a}{2}+2$

주어진 부등식의 해가 $x<b$ 또는 $x>3$이므로

$\frac{a}{2}-2=b,\ \frac{a}{2}+2=3$

$\therefore a=2,\ b=-1$

$\therefore a+b=2+(-1)=1$

답 **1**

0740 $1<|x-2|<a$에서

$-a<x-2<-1$ 또는 $1<x-2<a$

$\therefore 2-a<x<1$ 또는 $3<x<a+2$

a가 자연수이므로 $2-a,\ a+2$는 모두 정수이다.

따라서 $2-a<x<1$을 만족시키는 정수 x의 개수는

$1-(2-a)-1=a-2$

$3<x<a+2$를 만족시키는 정수 x의 개수는

$(a+2)-3-1=a-2$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x의 개수는

$(a-2)+(a-2)=2a-4$

즉 $2a-4=10$이므로

$2a=14\qquad \therefore a=7$

답 ③

다른 풀이 $1<|x-2|<a$에서

(i) $x<2$일 때, $x-2<0$이므로

$1<-(x-2)<a,\qquad 1<-x+2<a$

$-1<-x<a-2\qquad \therefore 2-a<x<1$

(ii) $x\ge 2$일 때, $x-2\ge 0$이므로

$1<x-2<a\qquad \therefore 3<x<a+2$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$2-a<x<1$ 또는 $3<x<a+2$

참고 | $0<a<b$일 때, $a<|x|<b$를 만족시키는 x의 값의 범위는 $-b<x<-a$ 또는 $a<x<b$

0741 $|x-1|\le 3x-1$에서

(i) $x<1$일 때, $x-1<0$이므로

$-(x-1)\le 3x-1,\qquad -x+1\le 3x-1$

$-4x\le -2\qquad \therefore x\ge \frac{1}{2}$

그런데 $x<1$이므로 $\qquad \frac{1}{2}\le x<1$

(ii) $x\ge 1$일 때, $x-1\ge 0$이므로

$x-1\le 3x-1,\qquad -2x\le 0$

$\therefore x\ge 0$

그런데 $x\ge 1$이므로 $\qquad x\ge 1$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$x\ge \frac{1}{2}$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 실수 x의 최솟값은 $\frac{1}{2}$이다.

답 ④

0742 $|3x-1|>2x+7$에서

(i) $x<\frac{1}{3}$일 때, $3x-1<0$이므로

$-(3x-1)>2x+7$

$-3x+1>2x+7,\qquad -5x>6$

$\therefore x<-\frac{6}{5}$

그런데 $x<\frac{1}{3}$이므로 $\qquad x<-\frac{6}{5}$

(ii) $x\ge \frac{1}{3}$일 때, $3x-1\ge 0$이므로

$3x-1>2x+7\qquad \therefore x>8$

그런데 $x\ge \frac{1}{3}$이므로 $\qquad x>8$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$x<-\frac{6}{5}$ 또는 $x>8$

$\therefore a=-\frac{6}{5},\ b=8$

$\therefore b-5a=8-5\times\left(-\frac{6}{5}\right)=14$

답 ③

0743 $2|-x+1|<x+7$에서

(i) $x<1$일 때, $-x+1>0$이므로

$2(-x+1)<x+7$

$-2x+2<x+7,\qquad -3x<5$

$\therefore x>-\frac{5}{3}$

그런데 $x<1$이므로 $\qquad -\frac{5}{3}<x<1$

(ii) $x\ge 1$일 때, $-x+1\le 0$이므로

$-2(-x+1)<x+7,\qquad 2x-2<x+7$

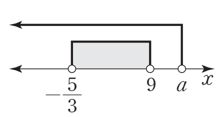
$\therefore x<9$

그런데 $x\ge 1$이므로 $\qquad 1\le x<9$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$-\frac{5}{3}<x<9$

따라서 $-\frac{5}{3}<x<9$가 $x<a$에 포함되려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$a\ge 9$

답 $a\ge 9$

0744 $|2x+5|<-x+4$에서

(ⅰ) $x<-\frac{5}{2}$일 때, $2x+5<0$이므로

$-(2x+5)<-x+4, \quad -2x-5<-x+4$

$-x<9 \quad \therefore x>-9$

그런데 $x<-\frac{5}{2}$이므로 $\quad -9<x<-\frac{5}{2}$

(ⅱ) $x\geq-\frac{5}{2}$일 때, $2x+5\geq0$이므로

$2x+5<-x+4, \quad 3x<-1 \quad \therefore x<-\frac{1}{3}$

그런데 $x\geq-\frac{5}{2}$이므로 $\quad -\frac{5}{2}\leq x<-\frac{1}{3}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 부등식 $|2x+5|<-x+4$의 해는

$-9<x<-\frac{1}{3}$

또 $|x-a|<b$에서 $\quad -b<x-a<b$

$\therefore a-b<x<a+b$

이때 주어진 두 부등식의 해가 같으므로

$a-b=-9, \ a+b=-\frac{1}{3}$

$\therefore a=-\frac{14}{3}, \ b=\frac{13}{3}$ 답 $\boldsymbol{a=-\frac{14}{3}, \ b=\frac{13}{3}}$

0745 $2|x-1|+3|x+1|<6$에서

(ⅰ) $x<-1$일 때, $x-1<0, \ x+1<0$이므로

$-2(x-1)-3(x+1)<6, \quad -2x+2-3x-3<6$

$-5x<7 \quad \therefore x>-\frac{7}{5}$

그런데 $x<-1$이므로 $\quad -\frac{7}{5}<x<-1$

(ⅱ) $-1\leq x<1$일 때, $x-1<0, \ x+1\geq0$이므로

$-2(x-1)+3(x+1)<6$

$-2x+2+3x+3<6 \quad \therefore x<1$

그런데 $-1\leq x<1$이므로 $\quad -1\leq x<1$

(ⅲ) $x\geq1$일 때, $x-1\geq0, \ x+1>0$이므로

$2(x-1)+3(x+1)<6$

$2x-2+3x+3<6, \quad 5x<5$

$\therefore x<1$

그런데 $x\geq1$이므로 해는 없다.

이상에서 주어진 부등식의 해는 $\quad -\frac{7}{5}<x<1$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x는 $-1, \ 0$이므로 구하는 합은

$-1+0=-1$ 답 **-1**

0746 $|x+1|+5\geq|2x-1|$에서

(ⅰ) $x<-1$일 때, $x+1<0, \ 2x-1<0$이므로

$-(x+1)+5\geq-(2x-1), \quad -x-1+5\geq-2x+1$

$\therefore x\geq-3$

그런데 $x<-1$이므로 $\quad -3\leq x<-1$

(ⅱ) $-1\leq x<\frac{1}{2}$일 때, $x+1\geq0, \ 2x-1<0$이므로

$x+1+5\geq-(2x-1), \quad x+6\geq-2x+1$

$3x\geq-5 \quad \therefore x\geq-\frac{5}{3}$

그런데 $-1\leq x<\frac{1}{2}$이므로 $\quad -1\leq x<\frac{1}{2}$

(ⅲ) $x\geq\frac{1}{2}$일 때, $x+1>0, \ 2x-1\geq0$이므로

$x+1+5\geq2x-1, \quad -x\geq-7$

$\therefore x\leq7$

그런데 $x\geq\frac{1}{2}$이므로 $\quad \frac{1}{2}\leq x\leq7$

이상에서 주어진 부등식의 해는 $\quad -3\leq x\leq7$

따라서 해의 최댓값은 7, 최솟값은 -3이므로 구하는 합은

$7+(-3)=4$ 답 ③

0747 $|2x+1|-4|x-2|>x-1$에서

(ⅰ) $x<-\frac{1}{2}$일 때, $2x+1<0, \ x-2<0$이므로

$-(2x+1)+4(x-2)>x-1$

$-2x-1+4x-8>x-1 \quad \therefore x>8$

그런데 $x<-\frac{1}{2}$이므로 해는 없다.

(ⅱ) $-\frac{1}{2}\leq x<2$일 때, $2x+1\geq0, \ x-2<0$이므로

$2x+1+4(x-2)>x-1$

$2x+1+4x-8>x-1, \quad 5x>6$

$\therefore x>\frac{6}{5}$

그런데 $-\frac{1}{2}\leq x<2$이므로 $\quad \frac{6}{5}<x<2$

(ⅲ) $x\geq2$일 때, $2x+1>0, \ x-2\geq0$이므로

$2x+1-4(x-2)>x-1$

$2x+1-4x+8>x-1, \quad -3x>-10$

$\therefore x<\frac{10}{3}$

그런데 $x\geq2$이므로 $\quad 2\leq x<\frac{10}{3}$

이상에서 주어진 부등식의 해는 $\quad \frac{6}{5}<x<\frac{10}{3}$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x는 2, 3의 2개이다.

답 **2**

0748 $\sqrt{(3-x)^2}+2|x+1|<9$에서

$|3-x|+2|x+1|<9$ ⋯ 1단계

(ⅰ) $x<-1$일 때, $3-x>0, \ x+1<0$이므로

$3-x-2(x+1)<9$

$3-x-2x-2<9, \quad -3x<8$

$\therefore x>-\frac{8}{3}$

그런데 $x<-1$이므로 $\quad -\frac{8}{3}<x<-1$

(ii) $-1\le x<3$일 때, $3-x>0$, $x+1\ge 0$이므로

$3-x+2(x+1)<9$

$3-x+2x+2<9 \qquad \therefore x<4$

그런데 $-1\le x<3$이므로 $\qquad -1\le x<3$

(iii) $x\ge 3$일 때, $3-x\le 0$, $x+1>0$이므로

$-(3-x)+2(x+1)<9$

$-3+x+2x+2<9, \qquad 3x<10 \qquad \therefore x<\dfrac{10}{3}$

그런데 $x\ge 3$이므로 $\qquad 3\le x<\dfrac{10}{3}$

이상에서 주어진 부등식의 해는 $\quad -\dfrac{8}{3}<x<\dfrac{10}{3}$ … 2단계

따라서 $a=-\dfrac{8}{3}$, $b=\dfrac{10}{3}$이므로

$b-a=\dfrac{10}{3}-\left(-\dfrac{8}{3}\right)=6$ … 3단계

답 6

채점 요소		비율
1단계	$\sqrt{A^2}=\lvert A\rvert$임을 이용하여 주어진 부등식 변형하기	20 %
2단계	주어진 부등식의 해 구하기	60 %
3단계	$b-a$의 값 구하기	20 %

0749 $\lvert x-4\rvert\le\dfrac{3}{4}k-9$에서 $\lvert x-4\rvert\ge 0$이므로 주어진 부등식의 해가 존재하지 않으려면

$\dfrac{3}{4}k-9<0, \qquad \dfrac{3}{4}k<9 \qquad \therefore k<12$

따라서 양의 정수 k는 1, 2, ⋯, 11의 11개이다.

답 ④

0750 $\lvert x-2\rvert\le k+2$에서 $\lvert x-2\rvert\ge 0$이므로 주어진 부등식의 해가 존재하려면

$k+2\ge 0 \qquad \therefore k\ge -2$

답 ②

0751 $\lvert 3x-4\rvert+2>a$에서 $\qquad \lvert 3x-4\rvert>a-2$

이때 $\lvert 3x-4\rvert\ge 0$이므로 주어진 부등식의 해가 모든 실수가 되려면

$a-2<0 \qquad \therefore a<2$

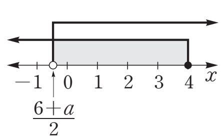
답 ③

0752 $1-x\ge -3$에서 $\qquad x\le 4$

$5x-a>3(x+2)$에서

$5x-a>3x+6, \qquad 2x>6+a \qquad \therefore x>\dfrac{6+a}{2}$

이때 주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x가 5개이려면 오른쪽 그림에서



$-1\le\dfrac{6+a}{2}<0$

$-2\le 6+a<0 \qquad \therefore -8\le a<-6$

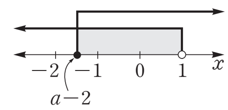
답 ③

0753 $3x+3<2(4-x)$에서

$3x+3<8-2x, \qquad 5x<5 \qquad \therefore x<1$

$x+a\le 2x+2$에서 $\qquad -x\le 2-a \qquad \therefore x\ge a-2$

주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x가 -1과 0뿐이려면 오른쪽 그림에서



$-2<a-2\le -1$

$\therefore 0<a\le 1$

답 $0<a\le 1$

0754 주어진 부등식은

$$\begin{cases} 2x+a<3-\dfrac{2-x}{2} & \cdots\cdots \text{㉠} \\ 3-\dfrac{2-x}{2}<\dfrac{3x-1}{3} & \cdots\cdots \text{㉡} \end{cases}$$

㉠의 양변에 2를 곱하면

$4x+2a<6-(2-x)$

$4x+2a<6-2+x, \qquad 3x<4-2a$

$\therefore x<\dfrac{4-2a}{3}$

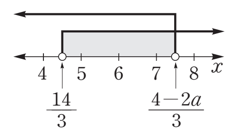
㉡의 양변에 6을 곱하면

$18-3(2-x)<2(3x-1)$

$18-6+3x<6x-2, \qquad -3x<-14$

$\therefore x>\dfrac{14}{3}$

주어진 부등식을 만족시키는 정수 x가 3개이려면 오른쪽 그림에서



$7<\dfrac{4-2a}{3}\le 8$

$21<4-2a\le 24, \qquad 17<-2a\le 20$

$\therefore -10\le a<-\dfrac{17}{2}$

따라서 실수 a의 최솟값은 -10이다.

답 -10

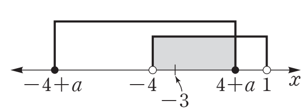
0755 $\lvert 2x+3\rvert<5$에서

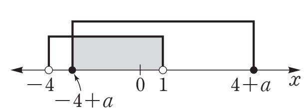
$-5<2x+3<5, \qquad -8<2x<2$

$\therefore -4<x<1$ … 1단계

$\lvert x-a\rvert\le 4$에서

$-4\le x-a\le 4 \qquad \therefore -4+a\le x\le 4+a$ … 2단계





주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x가 존재하려면 위의 그림에서

$4+a\ge -3$, $-4+a\le 0$

이어야 한다.

즉 $a\ge -7$, $a\le 4$이므로

$-7\le a\le 4$ … 3단계

답 $-7\le a\le 4$

채점 요소		비율
1단계	$\lvert 2x+3\rvert<5$의 해 구하기	30 %
2단계	$\lvert x-a\rvert\le 4$의 해 구하기	30 %
3단계	a의 값의 범위 구하기	40 %

08 연립일차부등식

0756 의자의 개수를 x라 하면 학생은 $(3x+5)$명이므로

$4(x-4)+1\le 3x+5\le 4(x-4)+4$

$\therefore \begin{cases} 4(x-4)+1\le 3x+5 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x+5\le 4(x-4)+4 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $4x-16+1\le 3x+5$

$\therefore x\le 20$ ······ ㉢

㉡에서 $3x+5\le 4x-16+4$

$-x\le -17$ $\therefore x\ge 17$ ······ ㉣

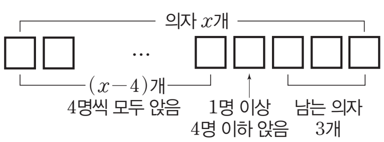
㉢, ㉣의 공통부분을 구하면

$17\le x\le 20$

따라서 의자의 개수가 될 수 없는 것은 ⑤이다.

답 ⑤

참고 |



0757 학생 수를 x라 하면 사탕은 $(4x+12)$개이므로

$7(x-1)+2\le 4x+12<7(x-1)+6$

$\therefore \begin{cases} 7(x-1)+2\le 4x+12 & \cdots\cdots ㉠ \\ 4x+12<7(x-1)+6 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $7x-7+2\le 4x+12$

$3x\le 17$ $\therefore x\le \frac{17}{3}$ ······ ㉢

㉡에서 $4x+12<7x-7+6$

$-3x<-13$ $\therefore x>\frac{13}{3}$ ······ ㉣

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면

$\frac{13}{3}<x\le\frac{17}{3}$

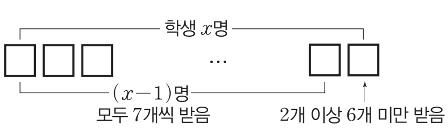
이때 x는 자연수이므로 $x=5$

따라서 학생 수가 5이므로 사탕의 개수는

$4\times 5+12=32$

답 ③

참고 |



0758 승용차의 수를 x라 하면 사람은 $(4x+11)$명이므로

$5(x-3)+1\le 4x+11\le 5(x-3)+5$

$\therefore \begin{cases} 5(x-3)+1\le 4x+11 & \cdots\cdots ㉠ \\ 4x+11\le 5(x-3)+5 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $5x-15+1\le 4x+11$

$\therefore x\le 25$ ······ ㉢

㉡에서 $4x+11\le 5x-15+5$

$-x\le -21$ $\therefore x\ge 21$ ······ ㉣

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면

$21\le x\le 25$

따라서 승용차는 최소 21대이다. 답 ①

시험에 꼭 나오는 문제

• 본책 108~109쪽

0759 $x+2>4x-13$에서

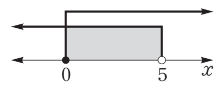
$-3x>-15$ $\therefore x<5$

$3(x-1)\ge 2x-3$에서

$3x-3\ge 2x-3$ $\therefore x\ge 0$

따라서 주어진 연립부등식의 해는

$0\le x<5$



이므로 x의 값이 될 수 없는 것은 ⑤이다.

답 ⑤

0760 $1.2x-2\le 0.8x+3.2$의 양변에 10을 곱하면

$12x-20\le 8x+32,$ $4x\le 52$

$\therefore x\le 13$

$3-\frac{x-2}{4}<\frac{2x-3}{2}$의 양변에 4를 곱하면

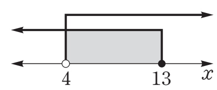
$12-(x-2)<2(2x-3)$

$12-x+2<4x-6,$ $-5x<-20$

$\therefore x>4$

따라서 주어진 연립부등식의 해는

$4<x\le 13$



이므로 $a=4,\ b=13$

이것을 $bx+a<0$에 대입하면

$13x+4<0,$ $13x<-4$

$\therefore x<-\frac{4}{13}$ 답 $x<-\frac{4}{13}$

0761 $4x+1\le 2x+a$에서 $2x\le a-1$

$\therefore x\le\frac{a-1}{2}$

$4x+1<5x-b$에서 $-x<-b-1$

$\therefore x>b+1$

잘못 변형한 연립부등식의 해가 $-3<x\le 3$이므로

$\frac{a-1}{2}=3,\ b+1=-3$

$\therefore a=7,\ b=-4$

즉 주어진 부등식은

$4x+1\le 2x+7<5x+4$

$4x+1\le 2x+7$에서 $2x\le 6$

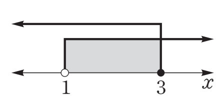
$\therefore x\le 3$

$2x+7<5x+4$에서 $-3x<-3$

$\therefore x>1$

따라서 구하는 해는

$1<x\le 3$ 답 $1<x\le 3$



0762 $5(x-2)\le 2x-7$에서

$5x-10\le 2x-7,$ $3x\le 3$

$\therefore x\le 1$

$\frac{1}{2}x+1>\frac{a}{3}x-1$의 양변에 6을 곱하면

$3x+6>2ax-6$

$\therefore (3-2a)x>-12$ ...... ㉠

이때 $a<\frac{3}{2}$이므로 $-2a>-3$

$\therefore 3-2a>0$

따라서 ㉠에서 $x>-\frac{12}{3-2a}$

주어진 연립부등식의 해가 $-6<x\le b$이므로

$-\frac{12}{3-2a}=-6,\ b=1 \quad \therefore a=\frac{1}{2},\ b=1$

$\therefore a+b=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$

답 $\frac{3}{2}$

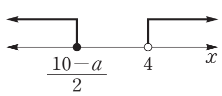
0763 $2x-3>x+1$에서

$x>4$

$2x+a\le 10$에서 $2x\le 10-a$

$\therefore x\le\frac{10-a}{2}$

주어진 연립부등식의 해가 없으려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$\frac{10-a}{2}\le 4,\quad 10-a\le 8$

$-a\le -2 \quad \therefore a\ge 2$

답 $a\ge 2$

0764 6 %의 설탕물의 양을 x g이라 하면 12 %의 설탕물의 양은 $(600-x)$ g이므로

$\frac{8}{100}\times 600\le\frac{6}{100}\times x+\frac{12}{100}\times(600-x)\le\frac{10}{100}\times 600$

$\therefore 4800\le 6x+12(600-x)\le 6000$

$4800\le 6x+12(600-x)$에서

$4800\le 6x+7200-12x$

$6x\le 2400 \quad \therefore x\le 400$ ...... ㉠

$6x+12(600-x)\le 6000$에서

$6x+7200-12x\le 6000$

$-6x\le -1200 \quad \therefore x\ge 200$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$200\le x\le 400$

따라서 섞어야 할 6 %의 설탕물의 양은 200 g 이상 400 g 이하이다.

답 **200 g 이상 400 g 이하**

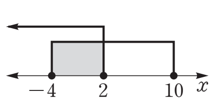
0765 $2x+5\le 9$에서 $2x\le 4$

$\therefore x\le 2$

$|x-3|\le 7$에서 $-7\le x-3\le 7$

$\therefore -4\le x\le 10$

따라서 주어진 연립부등식의 해는



$-4\le x\le 2$

이므로 정수 x는 $-4,\ -3,\ \cdots,\ 2$의 7개이다.

답 7

0766 $|2|x-1|-3|\le 1$에서

$-1\le 2|x-1|-3\le 1$

$2\le 2|x-1|\le 4$

$1\le |x-1|\le 2$

$-2\le x-1\le -1$ 또는 $1\le x-1\le 2$

$\therefore -1\le x\le 0$ 또는 $2\le x\le 3$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x는 $-1,\ 0,\ 2,\ 3$이므로 구하는 합은

$-1+0+2+3=4$

답 4

0767 $|5-x|\le 15-x$에서

(i) $x<5$일 때, $5-x>0$이므로

$5-x\le 15-x \quad \therefore 0\times x\le 10$

따라서 해는 모든 실수이다.

그런데 $x<5$이므로

$x<5$

(ii) $x\ge 5$일 때, $5-x\le 0$이므로

$-(5-x)\le 15-x,\quad -5+x\le 15-x$

$2x\le 20 \quad \therefore x\le 10$

그런데 $x\ge 5$이므로

$5\le x\le 10$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$x\le 10$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 자연수 x는 $1,\ 2,\ \cdots,\ 10$의 10개이다.

답 ②

0768 $\left|\frac{3}{4}x+1\right|-a<\frac{1}{2}$에서

$\left|\frac{3}{4}x+1\right|<a+\frac{1}{2}$

이때 $\left|\frac{3}{4}x+1\right|\ge 0$이므로 주어진 부등식의 해가 존재하지 않으려면

$a+\frac{1}{2}\le 0 \quad \therefore a\le -\frac{1}{2}$

답 $a\le -\frac{1}{2}$

0769 $0.3(2x+5)>0.7(x+1)$의 양변에 10을 곱하면

$3(2x+5)>7(x+1)$

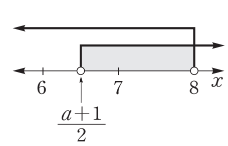
$6x+15>7x+7,\quad -x>-8$

$\therefore x<8$

$2x-1>a$에서 $2x>a+1$

$\therefore x>\frac{a+1}{2}$

주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x가 1개뿐이려면 오른쪽 그림에서



$6\le\frac{a+1}{2}<7,\quad 12\le a+1<14$

$\therefore 11\le a<13$

따라서 a의 값이 될 수 있는 것은 ③이다.

답 ③

0770 텐트의 개수를 x라 하면 학생은 $(5x+2)$명이므로

$6(x-2)+1\le 5x+2\le 6(x-2)+6$

$\therefore \begin{cases} 6(x-2)+1\le 5x+2 & \cdots\cdots ㉠ \\ 5x+2\le 6(x-2)+6 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $6x-12+1\le 5x+2$

$\therefore x\le 13$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉡에서 $5x+2\le 6x-12+6$

$-x\le -8$ $\therefore x\ge 8$ $\cdots\cdots$ ㉣

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면 $8\le x\le 13$

따라서 학생은 최대

$5\times 13+2=67$(명)

이다. **답 67명**

0771 $4x-(3x-2)<2x$에서

$4x-3x+2<2x,\quad -x<-2\quad \therefore x>2$

$5x-15\le 2(x+1)$에서

$5x-15\le 2x+2,\quad 3x\le 17\quad \therefore x\le \frac{17}{3}$

따라서 주어진 연립부등식의 해는

$2<x\le \frac{17}{3}$ $\cdots$ 1단계

즉 $M=5$, $m=3$이므로 $\cdots$ 2단계

$M-m=5-3=2$ $\cdots$ 3단계

답 2

채점 요소	비율
1단계 주어진 연립부등식의 해 구하기	60 %
2단계 M, m의 값 구하기	30 %
3단계 $M-m$의 값 구하기	10 %

0772 $|x+6|<a-1$에서

$-a+1<x+6<a-1$

$\therefore -a-5<x<a-7$ $\cdots$ 1단계

a가 자연수이므로 $a-7$은 정수이고, 정수 x의 최댓값이 4이므로

$a-7=5$

$\therefore a=12$ $\cdots$ 2단계

답 12

채점 요소	비율
1단계 주어진 부등식의 해 구하기	50 %
2단계 a의 값 구하기	50 %

0773 전략 합금 A의 양을 x g으로 놓고, 구리와 아연의 양에 대한 연립부등식을 세운다.

합금 A의 양을 x g이라 하면 합금 B의 양은 $(200-x)$ g이므로

$\begin{cases} \frac{25}{100}x+\frac{20}{100}(200-x)\ge 43 & \cdots\cdots ㉠ \\ \frac{30}{100}x+\frac{35}{100}(200-x)\ge 65 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠의 양변에 100을 곱하면

$25x+20(200-x)\ge 4300$

$25x+4000-20x\ge 4300$

$5x\ge 300$

$\therefore x\ge 60$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉡의 양변에 100을 곱하면

$30x+35(200-x)\ge 6500$

$30x+7000-35x\ge 6500$

$-5x\ge -500$

$\therefore x\le 100$ $\cdots\cdots$ ㉣

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면

$60\le x\le 100$

따라서 합금 A의 양은 60 g 이상 100 g 이하이다.

답 60 g 이상 100 g 이하

0774 전략 $a=n$, $b=n+3$일 때의 주어진 부등식의 해를 구한다.

주어진 부등식에 $a=n$, $b=n+3$을 대입하면

$|x-n|+|x|\le n+3$

(i) $x<0$일 때, $x-n<0$이므로

$-(x-n)-x\le n+3$

$-x+n-x\le n+3,\quad -2x\le 3$

$\therefore x\ge -\frac{3}{2}$

그런데 $x<0$이므로 $-\frac{3}{2}\le x<0$

(ii) $0\le x<n$일 때, $x-n<0$이므로

$-(x-n)+x\le n+3$

$-x+n+x\le n+3$

$\therefore 0\times x\le 3$

따라서 해는 모든 실수이다.

그런데 $0\le x<n$이므로 $0\le x<n$

(iii) $x\ge n$일 때, $x-n\ge 0$이므로

$x-n+x\le n+3,\quad 2x\le 2n+3$

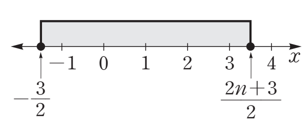
$\therefore x\le \frac{2n+3}{2}$

그런데 $x\ge n$이므로 $n\le x\le \frac{2n+3}{2}$

이상에서 부등식 $|x-n|+|x|\le n+3$의 해는

$-\frac{3}{2}\le x\le \frac{2n+3}{2}$

따라서 $f(n, n+3)=5$, 즉 부등식 $|x-n|+|x|\le n+3$을 만족시키는 정수 x가 5개이려면 오른쪽 그림에서



$3\le \frac{2n+3}{2}<4,\quad 6\le 2n+3<8,\quad 3\le 2n<5$

$\therefore \frac{3}{2}\le n<\frac{5}{2}$

즉 구하는 자연수 n의 값은 2이다. **답 2**

09 이차부등식과 연립이차부등식

교과서 문제 정복하기

본책 111쪽, 113쪽

0775 $f(x)>0$의 해는 $y=f(x)$의 그래프가 x축보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로

$x<-2$ 또는 $x>3$ 　　답 $x<-2$ 또는 $x>3$

0776 $f(x)\le 0$의 해는 $y=f(x)$의 그래프가 x축보다 아래쪽에 있거나 x축과 만나는 부분의 x의 값의 범위이므로

$-2\le x\le 3$ 　　답 $-2\le x\le 3$

0777 $ax^2+bx+c\ge 0$의 해는 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 x축보다 위쪽에 있거나 x축과 만나는 부분의 x의 값의 범위이므로

$\alpha\le x\le\gamma$ 　　답 $\alpha\le x\le\gamma$

0778 $ax^2+bx+c<mx+n$의 해는 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 직선 $y=mx+n$보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로

$x<\beta$ 또는 $x>\delta$ 　　답 $x<\beta$ 또는 $x>\delta$

0779 $x^2-2x-15<0$에서 　$(x+3)(x-5)<0$

$\therefore -3<x<5$ 　　답 $-3<x<5$

0780 $3x^2-2x-1\le 0$에서 　$(3x+1)(x-1)\le 0$

$\therefore -\frac{1}{3}\le x\le 1$ 　　답 $-\frac{1}{3}\le x\le 1$

0781 $5x^2-9x-2>0$에서 　$(5x+1)(x-2)>0$

$\therefore x<-\frac{1}{5}$ 또는 $x>2$ 　　답 $x<-\frac{1}{5}$ 또는 $x>2$

0782 $2x^2+5x-3\ge 0$에서 　$(x+3)(2x-1)\ge 0$

$\therefore x\le -3$ 또는 $x\ge\frac{1}{2}$ 　　답 $x\le -3$ 또는 $x\ge\frac{1}{2}$

0783 $-x^2+4x-3\ge 0$에서 　$x^2-4x+3\le 0$

$(x-1)(x-3)\le 0$ 　$\therefore 1\le x\le 3$ 　　답 $1\le x\le 3$

0784 $4x^2-4x+1>0$에서 　$(2x-1)^2>0$

따라서 주어진 부등식의 해는 $x\ne\frac{1}{2}$인 모든 실수이다.

답 $x\ne\frac{1}{2}$인 모든 실수

0785 $4x^2-12x+9\ge 0$에서 　$(2x-3)^2\ge 0$

따라서 주어진 부등식의 해는 모든 실수이다. 　　답 모든 실수

0786 $x^2+2x+1<0$에서 　$(x+1)^2<0$

그런데 $(x+1)^2\ge 0$이므로 주어진 부등식의 해는 없다.

답 해는 없다.

0787 $9x^2-6x+1\le 0$에서 　$(3x-1)^2\le 0$

그런데 $(3x-1)^2\ge 0$이므로 주어진 부등식의 해는

$x=\frac{1}{3}$ 　　답 $x=\frac{1}{3}$

0788 $x^2-x+2=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}\ge\frac{7}{4}$

따라서 $x^2-x+2>0$의 해는 모든 실수이다. 　　답 모든 실수

0789 $2x^2-4x+5=2(x-1)^2+3\ge 3$

따라서 $2x^2-4x+5<0$의 해는 없다. 　　답 해는 없다.

0790 $x^2\ge 2(x-1)$에서 　$x^2-2x+2\ge 0$

그런데 $x^2-2x+2=(x-1)^2+1\ge 1$이므로 주어진 부등식의 해는 모든 실수이다. 　　답 모든 실수

0791 $9x^2\le -12x-7$에서 　$9x^2+12x+7\le 0$

그런데 $9x^2+12x+7=(3x+2)^2+3\ge 3$이므로 주어진 부등식의 해는 없다. 　　답 해는 없다.

0792 $(x+1)(x-4)<0$에서

$x^2-3x-4<0$ 　　답 $x^2-3x-4<0$

0793 $(x+2)(x-3)\le 0$에서

$x^2-x-6\le 0$ 　　답 $x^2-x-6\le 0$

0794 $(x+2)(x-4)>0$에서

$x^2-2x-8>0$ 　　답 $x^2-2x-8>0$

0795 $(x-1)(x-3)\ge 0$에서

$x^2-4x+3\ge 0$ 　　답 $x^2-4x+3\ge 0$

0796 $(x-6)^2>0$에서

$x^2-12x+36>0$ 　　답 $x^2-12x+36>0$

0797 모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면 이차함수 $y=x^2+kx+2$의 그래프가 x축보다 항상 위쪽에 있어야 하므로 이차방정식 $x^2+kx+2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=k^2-4\times 1\times 2<0,$ 　$(k+2\sqrt{2})(k-2\sqrt{2})<0$

$\therefore -2\sqrt{2}<k<2\sqrt{2}$ 　　답 $-2\sqrt{2}<k<2\sqrt{2}$

0798 모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면 이차함수 $y=x^2-6kx-k$의 그래프가 x축과 접하거나 x축보다 항상 위쪽에 있어야 하므로 이차방정식 $x^2-6kx-k=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-3k)^2-(-k)\le 0, \qquad k(9k+1)\le 0$$

$\therefore -\frac{1}{9}\le k\le 0$ 답 $-\frac{1}{9}\le k\le 0$

0799 모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면 이차함수 $y=-x^2+4x-k+2$의 그래프가 x축보다 항상 아래쪽에 있어야 하므로 이차방정식 $-x^2+4x-k+2=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=2^2-(-1)\times(-k+2)<0, \qquad -k+6<0$$

$\therefore k>6$ 답 $k>6$

0800 모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면 이차함수 $y=-x^2+2kx-3k$의 그래프가 x축과 접하거나 x축보다 항상 아래쪽에 있어야 하므로 이차방정식 $-x^2+2kx-3k=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=k^2-(-1)\times(-3k)\le 0, \qquad k(k-3)\le 0$$

$\therefore 0\le k\le 3$ 답 $0\le k\le 3$

0801 (1) $x^2-5x+6\ge 0$에서 $(x-2)(x-3)\ge 0$

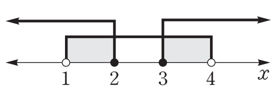
$\therefore x\le 2$ 또는 $x\ge 3$

(2) $x^2+4<5x$에서 $x^2-5x+4<0$

$(x-1)(x-4)<0$ $\therefore 1<x<4$

(3) (1), (2)의 공통부분을 구하면

$1<x\le 2$ 또는 $3\le x<4$



답 (1) $x\le 2$ 또는 $x\ge 3$ (2) $1<x<4$

(3) $1<x\le 2$ 또는 $3\le x<4$

0802 $2x+5>x+2$에서

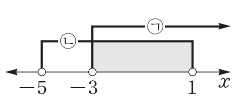
$x>-3$ …… ㉠

$x^2+4x-5<0$에서 $(x+5)(x-1)<0$

$\therefore -5<x<1$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-3<x<1$



답 $-3<x<1$

0803 $2x^2-5x+2<0$에서 $(2x-1)(x-2)<0$

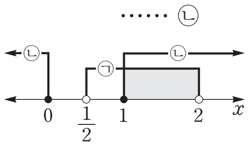
$\therefore \frac{1}{2}<x<2$ …… ㉠

$x^2-x\ge 0$에서 $x(x-1)\ge 0$

$\therefore x\le 0$ 또는 $x\ge 1$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$1\le x<2$



답 $1\le x<2$

0804 주어진 부등식은

$$\begin{cases} 2x+6\le x^2+3 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+3<2x+11 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $x^2-2x-3\ge 0$, $(x+1)(x-3)\ge 0$

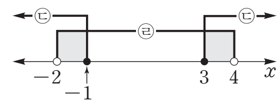
$\therefore x\le -1$ 또는 $x\ge 3$ …… ㉢

㉡에서 $x^2-2x-8<0$, $(x+2)(x-4)<0$

$\therefore -2<x<4$ …… ㉣

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면

$-2<x\le -1$ 또는 $3\le x<4$



답 $-2<x\le -1$ 또는 $3\le x<4$

0805 이차방정식 $x^2-x-2k+1=0$의 판별식을 D, 두 근을 α, β라 하면

(i) $D=(-1)^2-4\times 1\times(-2k+1)\ge 0$

$8k-3\ge 0$ $\therefore k\ge\frac{3}{8}$

(ii) $\alpha+\beta=1>0$

(iii) $\alpha\beta=-2k+1>0$ $\therefore k<\frac{1}{2}$

이상에서 공통부분을 구하면

$\frac{3}{8}\le k<\frac{1}{2}$ 답 $\frac{3}{8}\le k<\frac{1}{2}$

0806 이차방정식 $x^2+(k-1)x+4=0$의 판별식을 D, 두 근을 α, β라 하면

(i) $D=(k-1)^2-4\times 1\times 4\ge 0$

$k^2-2k-15\ge 0$, $(k+3)(k-5)\ge 0$

$\therefore k\le -3$ 또는 $k\ge 5$

(ii) $\alpha+\beta=-k+1<0$ $\therefore k>1$

(iii) $\alpha\beta=4>0$

이상에서 공통부분을 구하면

$k\ge 5$ 답 $k\ge 5$

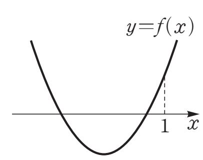
0807 이차방정식 $x^2+kx+k^2-4=0$의 두 근을 α, β라 하면 $\alpha\beta<0$에서

$k^2-4<0$, $(k+2)(k-2)<0$

$\therefore -2<k<2$ 답 $-2<k<2$

0808 답 (1) $\ge$, $>$, $>$ (2) $<$

0809 $f(x)=x^2-2kx+2-k$라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 1보다 작으므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-k)^2-(2-k)\ge 0$$

$k^2+k-2\ge 0$, $(k+2)(k-1)\ge 0$

$\therefore k\le -2$ 또는 $k\ge 1$

(ii) $f(1)=1-2k+2-k>0 \qquad \therefore k<1$

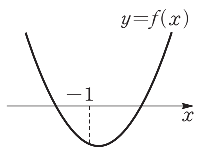
(iii) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=k$이므로

$k<1$

이상에서 공통부분을 구하면

$k\le -2$ 답 $\boldsymbol{k\le -2}$

0810 $f(x)=x^2-kx+1+5k$라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근 사이에 -1이 있으므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.

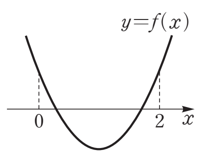


따라서 $f(-1)<0$이어야 하므로

$1+k+1+5k<0$

$\therefore k<-\dfrac{1}{3}$ 답 $\boldsymbol{k<-\dfrac{1}{3}}$

0811 $f(x)=x^2+2kx+5k+6$이라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 0과 2 사이에 있으므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=k^2-(5k+6)\ge 0$

$k^2-5k-6\ge 0, \qquad (k+1)(k-6)\ge 0$

$\therefore k\le -1$ 또는 $k\ge 6$

(ii) $f(0)=5k+6>0 \qquad \therefore k>-\dfrac{6}{5}$

(iii) $f(2)=4+4k+5k+6>0 \qquad \therefore k>-\dfrac{10}{9}$

(iv) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=-k$이므로

$0<-k<2 \qquad \therefore -2<k<0$

이상에서 공통부분을 구하면

$-\dfrac{10}{9}<k\le -1$ 답 $\boldsymbol{-\dfrac{10}{9}<k\le -1}$

유형 익히기

● 본책 114~123쪽

0812 $ax^2+(b-m)x+c-n\ge 0$에서

$ax^2+bx+c-(mx+n)\ge 0$

$\therefore ax^2+bx+c\ge mx+n$

따라서 주어진 이차부등식의 해는 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 직선 $y=mx+n$보다 위쪽에 있거나 만나는 부분의 x의 값의 범위이므로 주어진 그림에서

$-2\le x\le 2$ 답 $\boldsymbol{-2\le x\le 2}$

0813 $f(x)\le 0$의 해는 $y=f(x)$의 그래프가 x축보다 아래쪽에 있거나 x축과 만나는 부분의 x의 값의 범위이므로 주어진 그림에서

$-1\le x\le 2$

따라서 정수 x는 -1, 0, 1, 2의 4개이다. 답 **4**

0814 $f(x)g(x)>0$에서

$f(x)>0,\ g(x)>0$ 또는 $f(x)<0,\ g(x)<0$

(i) $f(x)>0,\ g(x)>0$을 만족시키는 x의 값의 범위는

$a<x<b$

(ii) $f(x)<0,\ g(x)<0$을 만족시키는 x의 값의 범위는

$c<x<d$

(i), (ii)에서 $f(x)g(x)>0$의 해는

$a<x<b$ 또는 $c<x<d$ 답 $\boldsymbol{a<x<b}$ **또는** $\boldsymbol{c<x<d}$

0815 $-2x^2+7x+6\ge 2x+3$에서

$2x^2-5x-3\le 0, \qquad (2x+1)(x-3)\le 0$

$\therefore -\dfrac{1}{2}\le x\le 3$

따라서 정수 x는 0, 1, 2, 3의 4개이다. 답 **4**

0816 이차방정식 $x^2-2x-7=0$의 해는 $x=1\pm 2\sqrt{2}$이므로 이차부등식 $x^2-2x-7\ge 0$의 해는

$x\le 1-2\sqrt{2}$ 또는 $x\ge 1+2\sqrt{2}$

따라서 $\alpha=1-2\sqrt{2},\ \beta=1+2\sqrt{2}$이므로

$\beta-\alpha=(1+2\sqrt{2})-(1-2\sqrt{2})=4\sqrt{2}$ 답 $\boldsymbol{4\sqrt{2}}$

다른 풀이 α, β가 이차방정식 $x^2-2x-7=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=-7$

$\therefore (\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=2^2-4\times(-7)=32$

이때 $\alpha<\beta$에서 $\beta-\alpha>0$이므로

$\beta-\alpha=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

0817 ① $x^2-6x+9>0$에서 $\qquad (x-3)^2>0$

따라서 $x^2-6x+9>0$의 해는 $x\ne 3$인 모든 실수이다.

② $4x^2+4x+1\le 0$에서 $\qquad (2x+1)^2\le 0$

따라서 $4x^2+4x+1\le 0$의 해는 $\qquad x=-\dfrac{1}{2}$

③ $9x^2\ge 6x-1$에서 $\qquad 9x^2-6x+1\ge 0$

$\therefore (3x-1)^2\ge 0$

따라서 $9x^2\ge 6x-1$의 해는 모든 실수이다.

④ $12x-9>4x^2$에서 $\qquad 4x^2-12x+9<0$

$\therefore (2x-3)^2<0$

그런데 $(2x-3)^2\ge 0$이므로 $12x-9>4x^2$의 해는 없다.

⑤ $x^2+2x-3\le 0$에서 $\qquad (x+3)(x-1)\le 0$

$\therefore -3\le x\le 1$

따라서 해가 존재하지 않는 것은 ④이다. 답 ④

0818 $x^2+6x-7\ge0$에서 $(x+7)(x-1)\ge0$

$\therefore x\le-7$ 또는 $x\ge1$

① $|x+3|\le4$에서 $-4\le x+3\le4$

$\therefore -7\le x\le1$

② $|x+3|\ge4$에서 $x+3\le-4$ 또는 $x+3\ge4$

$\therefore x\le-7$ 또는 $x\ge1$

③ $|x-3|\ge2$에서 $x-3\le-2$ 또는 $x-3\ge2$

$\therefore x\le1$ 또는 $x\ge5$

④ $|x-3|\le3$에서 $-3\le x-3\le3$

$\therefore 0\le x\le6$

⑤ $|x+2|\ge5$에서 $x+2\le-5$ 또는 $x+2\ge5$

$\therefore x\le-7$ 또는 $x\ge3$

따라서 $x^2+6x-7\ge0$과 해가 같은 것은 ②이다. 답 ②

0819 $x^2-x-5\le|2x-1|$에서

(i) $x<\frac{1}{2}$일 때, $2x-1<0$이므로

$x^2-x-5\le-(2x-1)$, $x^2+x-6\le0$

$(x+3)(x-2)\le0$ $\therefore -3\le x\le2$

그런데 $x<\frac{1}{2}$이므로 $-3\le x<\frac{1}{2}$

(ii) $x\ge\frac{1}{2}$일 때, $2x-1\ge0$이므로

$x^2-x-5\le2x-1$, $x^2-3x-4\le0$

$(x+1)(x-4)\le0$ $\therefore -1\le x\le4$

그런데 $x\ge\frac{1}{2}$이므로 $\frac{1}{2}\le x\le4$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$-3\le x\le4$

따라서 정수 x는 $-3, -2, \cdots, 4$의 8개이다. 답 ④

0820 $x^2+2|x|-3<0$에서

(i) $x<0$일 때

$x^2-2x-3<0$, $(x+1)(x-3)<0$

$\therefore -1<x<3$

그런데 $x<0$이므로 $-1<x<0$ … 1단계

(ii) $x\ge0$일 때

$x^2+2x-3<0$, $(x+3)(x-1)<0$

$\therefore -3<x<1$

그런데 $x\ge0$이므로 $0\le x<1$ … 2단계

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$-1<x<1$ … 3단계

답 $-1<x<1$

채점 요소	비율
1단계 $x<0$일 때, 부등식의 해 구하기	40 %
2단계 $x\ge0$일 때, 부등식의 해 구하기	40 %
3단계 주어진 부등식의 해 구하기	20 %

다른 풀이 $x^2=|x|^2$이므로 주어진 부등식은

$|x|^2+2|x|-3<0$, $(|x|+3)(|x|-1)<0$

$\therefore -3<|x|<1$

그런데 $|x|\ge0$이므로 $0\le|x|<1$

$\therefore -1<x<1$

0821 $|x^2-5x|>6$에서

$x^2-5x<-6$ 또는 $x^2-5x>6$

(i) $x^2-5x<-6$에서

$x^2-5x+6<0$, $(x-2)(x-3)<0$

$\therefore 2<x<3$

(ii) $x^2-5x>6$에서

$x^2-5x-6>0$, $(x+1)(x-6)>0$

$\therefore x<-1$ 또는 $x>6$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$x<-1$ 또는 $2<x<3$ 또는 $x>6$

따라서 주어진 부등식의 해가 아닌 것은 ③이다. 답 ③

0822 $ax^2+bx+10>0$의 해가 $x<-5$ 또는 $x>-1$이므로

$a>0$

해가 $x<-5$ 또는 $x>-1$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+5)(x+1)>0$, 즉 $x^2+6x+5>0$

양변에 a를 곱하면

$ax^2+6ax+5a>0$ ($\because a>0$)

이 부등식이 $ax^2+bx+10>0$과 같으므로

$6a=b$, $5a=10$ $\therefore a=2, b=12$

이것을 $x^2-2ax-b<0$에 대입하면

$x^2-4x-12<0$, $(x+2)(x-6)<0$

$\therefore -2<x<6$

답 $-2<x<6$

다른 풀이 이차방정식 $ax^2+bx+10=0$의 두 근이 -5, -1이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-5+(-1)=-\frac{b}{a}$, $-5\times(-1)=\frac{10}{a}$

$\therefore a=2, b=12$

0823 해가 $x=-3$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+3)^2\le0$, 즉 $x^2+6x+9\le0$

이 부등식이 $x^2-2kx-3k\le0$과 같으므로

$-2k=6$, $-3k=9$

$\therefore k=-3$ 답 -3

0824 해가 $x\le\alpha$ 또는 $x\ge\beta$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x-\alpha)(x-\beta)\ge0$, 즉 $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\ge0$

이 부등식이 $x^2+ax-8\ge0$과 같으므로

$\alpha+\beta=-a$, $\alpha\beta=-8$ …… ㉠

또 해가 $\alpha+1\le x\le\beta+1$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$\{x-(\alpha+1)\}\{x-(\beta+1)\}\le0$, 즉

$x^2-(\alpha+\beta+2)x+(\alpha+1)(\beta+1)\le0$

이 부등식이 $x^2+4x+b\le0$과 같으므로

$\alpha+\beta+2=-4$, $(\alpha+1)(\beta+1)=b$

$\therefore\ \alpha+\beta=-6$, $\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1=b$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$-a=-6$, $-8-a+1=b$

$\therefore\ a=6$, $b=-13$

$\therefore\ a-b=6-(-13)=19$

답 19

0825 $ax^2+bx+c>0$의 해가 $\frac{1}{7}<x<\frac{1}{2}$이므로

$a<0$

해가 $\frac{1}{7}<x<\frac{1}{2}$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$\left(x-\frac{1}{7}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)<0$, 즉 $x^2-\frac{9}{14}x+\frac{1}{14}<0$

양변에 a를 곱하면

$ax^2-\frac{9}{14}ax+\frac{1}{14}a>0$ ($\because$ $a<0$)

이 부등식이 $ax^2+bx+c>0$과 같으므로

$b=-\frac{9}{14}a$, $c=\frac{1}{14}a$

이것을 $4cx^2+2bx+a>0$에 대입하면

$4\times\frac{1}{14}ax^2+2\times\left(-\frac{9}{14}a\right)x+a>0$

$\therefore\ \frac{2}{7}ax^2-\frac{9}{7}ax+a>0$

양변에 $\frac{7}{a}$을 곱하면

$2x^2-9x+7<0$ ($\because$ $a<0$)

$(x-1)(2x-7)<0$

$\therefore\ 1<x<\frac{7}{2}$

따라서 정수 x는 2, 3이므로 구하는 합은

$2+3=5$

답 5

0826 $f(x)<0$의 해가 $x<-3$ 또는 $x>2$이므로

$f(x)=a(x+3)(x-2)$ $(a<0)$

라 하면

$f(-x)=a(-x+3)(-x-2)$

$=a(x-3)(x+2)$

따라서 $f(-x)\ge0$, 즉 $a(x-3)(x+2)\ge0$에서

$(x-3)(x+2)\le0$ ($\because$ $a<0$)

$\therefore\ -2\le x\le3$

답 $-2\le x\le3$

다른 풀이 $f(x)<0$의 해가 $x<-3$ 또는 $x>2$이므로

$f(x)\ge0$의 해는 $-3\le x\le2$

$f(-x)\ge0$의 해는 $-3\le -x\le2$

$\therefore\ -2\le x\le3$

0827 $f(x)<0$의 해가 $-1<x<2$이므로

$f(x)=a(x+1)(x-2)$ $(a>0)$

라 하면

$f(2x+1)=a(2x+1+1)(2x+1-2)$

$=2a(x+1)(2x-1)$

따라서 $f(2x+1)\le0$, 즉 $2a(x+1)(2x-1)\le0$에서

$(x+1)(2x-1)\le0$ ($\because$ $a>0$)

$\therefore\ -1\le x\le\frac{1}{2}$

즉 $\alpha=-1$, $\beta=\frac{1}{2}$이므로

$\alpha+\beta=-1+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$

답 $-\frac{1}{2}$

다른 풀이 $f(x)<0$의 해가 $-1<x<2$이므로

$f(2x+1)\le0$의 해는 $-1\le2x+1\le2$

$\therefore\ -1\le x\le\frac{1}{2}$

0828 $f(x)\ge0$의 해가 $-2\le x\le2$이므로

$f(x)=a(x+2)(x-2)$ $(a<0)$

라 하면

$f(2024-x)=a(2024-x+2)(2024-x-2)$

$=a(x-2022)(x-2026)$

따라서 $f(2024-x)<0$, 즉 $a(x-2022)(x-2026)<0$에서

$(x-2022)(x-2026)>0$ ($\because$ $a<0$)

$\therefore\ x<2022$ 또는 $x>2026$

따라서 해가 될 수 있는 것은 ⑤이다.

답 ⑤

다른 풀이 $f(x)\ge0$의 해가 $-2\le x\le2$이므로

$f(x)<0$의 해는 $x<-2$ 또는 $x>2$

$f(2024-x)<0$의 해는 $2024-x<-2$ 또는 $2024-x>2$

$\therefore\ x<2022$ 또는 $x>2026$

0829 $ax^2+bx+c\le0$의 해가 $1\le x\le5$이므로

$ax^2+bx+c=a(x-1)(x-5)$ $(a>0)$

라 하면

$a(x-5)^2+b(x-5)+c$

$=a\{(x-5)-1\}\{(x-5)-5\}$

$=a(x-6)(x-10)$

따라서 $a(x-5)^2+b(x-5)+c<0$, 즉 $a(x-6)(x-10)<0$

에서

$(x-6)(x-10)<0$ ($\because$ $a>0$)

$\therefore\ 6<x<10$

즉 정수 x는 7, 8, 9이므로 구하는 합은

$7+8+9=24$

답 24

다른 풀이 $f(x)=ax^2+bx+c$라 하면 $f(x)\le0$의 해가

$1\le x\le5$이므로 $f(x)<0$의 해는 $1<x<5$

따라서 $a(x-5)^2+b(x-5)+c<0$, 즉 $f(x-5)<0$의 해는

$1<x-5<5$ $\therefore\ 6<x<10$

0830 이차부등식 $2x^2-(k+3)x+2k\le 0$의 해가 오직 한 개 존재하므로 이차방정식 $2x^2-(k+3)x+2k=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(k+3)^2-4\times 2\times 2k=0$

$k^2-10k+9=0,\quad (k-1)(k-9)=0$

$\therefore k=1$ 또는 $k=9$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은

$1+9=10$ 답 **10**

0831 이차부등식 $kx^2-16x+k\ge 0$이 단 하나의 해를 가지므로

$k<0$

이차방정식 $kx^2-16x+k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-8)^2-k^2=0,\quad k^2-64=0$

$(k+8)(k-8)=0\quad \therefore k=-8$ 또는 $k=8$

그런데 $k<0$이므로 $\quad k=-8$ 답 **-8**

0832 이차부등식 $2x^2+6x-a<0$이 해를 가지려면 이차방정식 $2x^2+6x-a=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=3^2-2\times(-a)>0\quad \therefore a>-\frac{9}{2}$

따라서 정수 a의 최솟값은 -4이다. 답 **-4**

0833 $ax^2+4ax-8>0$에서

(i) $a>0$일 때

이차함수 $y=ax^2+4ax-8$의 그래프는 아래로 볼록하므로 주어진 부등식은 항상 해를 갖는다.

(ii) $a=0$일 때

$0\times x^2+0\times x-8=-8<0$이므로 주어진 부등식의 해는 없다.

(iii) $a<0$일 때

주어진 부등식이 해를 가지려면 이차방정식 $ax^2+4ax-8=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(2a)^2-a\times(-8)>0$

$4a^2+8a>0,\quad a(a+2)>0$

$\therefore a<-2$ 또는 $a>0$

그런데 $a<0$이므로 $\quad a<-2$

이상에서 조건을 만족시키는 a의 값의 범위는

$a<-2$ 또는 $a>0$

따라서 a의 값이 아닌 것은 ②이다. 답 ②

0834 $ax^2+6x\le 8-a$에서 $\quad ax^2+6x+a-8\le 0$

이 이차부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면

$a<0$

이차방정식 $ax^2+6x+a-8=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=3^2-a(a-8)\le 0$

$a^2-8a-9\ge 0,\quad (a+1)(a-9)\ge 0$

$\therefore a\le -1$ 또는 $a\ge 9$

그런데 $a<0$이므로 $\quad a\le -1$

따라서 정수 a의 최댓값은 -1이다. 답 **-1**

0835 이차부등식 $3x^2-2(k+1)x+k+1>0$이 x의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로 이차방정식 $3x^2-2(k+1)x+k+1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k+1)^2-3(k+1)<0$

$k^2-k-2<0,\quad (k+1)(k-2)<0$

$\therefore -1<k<2$

따라서 정수 k는 0, 1의 2개이다. 답 ①

RPM 비법 노트

다음은 모두 같은 표현이다.

① 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)>0$이 성립한다.

② x의 값에 관계없이 부등식 $f(x)>0$이 항상 성립한다.

③ 부등식 $f(x)>0$의 해는 모든 실수이다.

0836 이차부등식 $ax^2-2(a+2)x+2a+7<0$의 해가 모든 실수가 되려면

$a<0$

이차방정식 $ax^2-2(a+2)x+2a+7=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a+2)^2-a(2a+7)<0,\quad a^2+3a-4>0$

$(a+4)(a-1)>0\quad \therefore a<-4$ 또는 $a>1$

그런데 $a<0$이므로 $\quad a<-4$ 답 **$a<-4$**

0837 모든 실수 x에 대하여 $\sqrt{kx^2+2x+k}$가 실수가 되려면 모든 실수 x에 대하여 부등식

$kx^2+2x+k\ge 0 \quad \cdots\cdots ㉠$

이 성립해야 한다.

(i) $k=0$일 때

㉠에서 $2x\ge 0$이므로 $x<0$이면 성립하지 않는다.

(ii) $k\ne 0$일 때

모든 실수 x에 대하여 ㉠이 성립하려면 $\quad k>0$

이차방정식 $kx^2+2x+k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1^2-k^2\le 0$

$k^2-1\ge 0,\quad (k+1)(k-1)\ge 0$

$\therefore k\le -1$ 또는 $k\ge 1$

그런데 $k>0$이므로 $\quad k\ge 1$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 k의 값의 범위는

$k\ge 1$

따라서 실수 k의 최솟값은 1이다. 답 **1**

0838 $x^2+2(n+1)x-4(n+1)<0$이 해를 갖지 않으려면 모든 실수 x에 대하여

$x^2+2(n+1)x-4(n+1)\geq 0$

이 성립해야 한다.

이차방정식 $x^2+2(n+1)x-4(n+1)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(n+1)^2+4(n+1)\leq 0$

$(n+1)(n+5)\leq 0 \qquad \therefore -5\leq n\leq -1$

따라서 정수 n은 -5, -4, -3, -2, -1의 5개이다. 답 **5**

0839 $ax^2+2x>ax+2$에서

$ax^2+(2-a)x-2>0$

이 부등식이 해를 갖지 않으려면 모든 실수 x에 대하여

$ax^2+(2-a)x-2\leq 0$

이 성립해야 하므로 $\quad a<0$

이차방정식 $ax^2+(2-a)x-2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(2-a)^2-4\times a\times(-2)\leq 0$

$a^2+4a+4\leq 0, \qquad (a+2)^2\leq 0$

$\therefore a=-2$ 답 ②

0840 $(k-2)x^2-2(k-2)x+4\leq 0$이 해를 갖지 않으려면 모든 실수 x에 대하여

$(k-2)x^2-2(k-2)x+4>0$ …… ㉠

이 성립해야 한다. … 1단계

(i) $k=2$일 때

㉠은 $0\times x^2-0\times x+4=4>0$이므로 모든 실수 x에 대하여 성립한다. … 2단계

(ii) $k\neq 2$일 때

모든 실수 x에 대하여 ㉠이 성립하려면

$k-2>0 \qquad \therefore k>2$

이차방정식 $(k-2)x^2-2(k-2)x+4=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k-2)^2-4(k-2)<0$

$(k-2)(k-6)<0$

$\therefore 2<k<6$

그런데 $k>2$이므로 $\quad 2<k<6$ … 3단계

(i), (ii)에서 주어진 조건을 만족시키는 k의 값의 범위는

$2\leq k<6$

따라서 정수 k의 최댓값은 5, 최솟값은 2이므로 구하는 합은

$5+2=7$ … 4단계

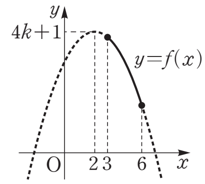
답 **7**

채점 요소		비율
1단계	주어진 부등식이 해를 갖지 않을 조건 구하기	20 %
2단계	$k=2$일 때, 부등식이 해를 갖지 않음을 알기	20 %
3단계	$k\neq 2$일 때, 부등식이 해를 갖지 않도록 하는 k의 값의 범위 구하기	40 %
4단계	정수 k의 최댓값과 최솟값의 합 구하기	20 %

0841 $f(x)=-x^2+4x-3+4k$라 하면

$f(x)=-(x-2)^2+4k+1$

$3\leq x\leq 6$에서 $f(x)\geq 0$이 항상 성립하려면 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



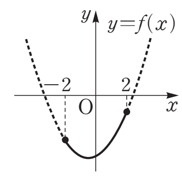
$f(6)\geq 0$에서 $\qquad -16+4k+1\geq 0$

$\therefore k\geq \frac{15}{4}$

따라서 정수 k의 최솟값은 4이다. 답 ③

0842 $f(x)=3x^2+ax-4a$라 하자.

$-2\leq x\leq 2$에서 $f(x)<0$이 항상 성립하려면 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



$f(-2)<0$에서

$12-2a-4a<0, \qquad 6a>12$

$\therefore a>2$ …… ㉠

$f(2)<0$에서

$12+2a-4a<0, \qquad 2a>12$

$\therefore a>6$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$a>6$ 답 $a>6$

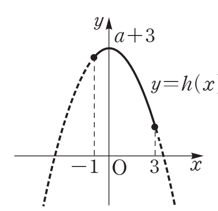
0843 $f(x)\leq g(x)$에서 $\qquad g(x)-f(x)\geq 0$

$h(x)=g(x)-f(x)$라 하면

$h(x)=-x^2+3x+a+1-(x^2+3x-2)$

$=-2x^2+a+3$

$-1\leq x\leq 3$에서 $h(x)\geq 0$이 항상 성립하려면 $y=h(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



$h(3)\geq 0$에서 $\qquad -18+a+3\geq 0$

$\therefore a\geq 15$

따라서 실수 a의 최솟값은 15이다.

답 **15**

0844 이차함수 $y=x^2-ax+5$의 그래프가 직선 $y=x-3$보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위는 부등식

$x^2-ax+5>x-3$, 즉

$x^2-(a+1)x+8>0$ …… ㉠

의 해이다.

해가 $x<2$ 또는 $x>b$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x-2)(x-b)>0$

$\therefore x^2-(2+b)x+2b>0$ …… ㉡

㉠, ㉡이 같아야 하므로 $\qquad a+1=2+b,\ 8=2b$

$\therefore a=5,\ b=4$

$\therefore a+b=5+4=9$ 답 **9**

0845 이차함수 $y=x^2-2x-8$의 그래프가 이차함수 $y=-2x^2+x-2$의 그래프보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위는 부등식

$x^2-2x-8<-2x^2+x-2$, 즉 $3x^2-3x-6<0$

의 해이므로

$x^2-x-2<0,\quad (x+1)(x-2)<0$

$\therefore -1<x<2$

답 ②

0846 이차함수 $y=-x^2+ax+3$의 그래프가 직선 $y=b$보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위는 부등식

$-x^2+ax+3>b$, 즉

$x^2-ax+b-3<0$ …… ㉠

의 해이다.

해가 $1<x<3$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x-1)(x-3)<0$

$\therefore x^2-4x+3<0$ …… ㉡

㉠, ㉡이 같아야 하므로

$a=4,\ b-3=3 \quad \therefore a=4,\ b=6$

$\therefore b-a=6-4=2$

답 **2**

0847 이차함수 $y=-x^2+4x-6$의 그래프가 직선 $y=m(x-2)+1$보다 항상 아래쪽에 있으려면 이차부등식

$-x^2+4x-6<m(x-2)+1$, 즉

$x^2+(m-4)x-2m+7>0$

이 모든 실수 x에 대하여 성립해야 한다.

이차방정식 $x^2+(m-4)x-2m+7=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(m-4)^2-4\times1\times(-2m+7)<0$

$m^2-12<0,\quad (m+2\sqrt{3})(m-2\sqrt{3})<0$

$\therefore -2\sqrt{3}<m<2\sqrt{3}$

따라서 $\alpha=-2\sqrt{3}$, $\beta=2\sqrt{3}$이므로

$\alpha\beta=-2\sqrt{3}\times2\sqrt{3}=-12$

답 **-12**

0848 이차함수 $y=x^2+(k+1)x+3$의 그래프가 직선 $y=x-1$보다 항상 위쪽에 있으려면 이차부등식

$x^2+(k+1)x+3>x-1$, 즉 $x^2+kx+4>0$

이 모든 실수 x에 대하여 성립해야 한다. … 1단계

이차방정식 $x^2+kx+4=0$의 판별식을 D라 하면

$D=k^2-4\times1\times4<0$

$(k+4)(k-4)<0$

$\therefore -4<k<4$ … 2단계

따라서 정수 k는 $-3, -2, \cdots, 3$의 7개이다. … 3단계

답 **7**

채점 요소	비율
1단계 주어진 조건을 만족시키는 이차부등식 세우기	30 %
2단계 k의 값의 범위 구하기	50 %
3단계 정수 k의 개수 구하기	20 %

0849 이차함수 $y=kx^2+5x+2k-6$의 그래프가 직선 $y=-3x+k$보다 항상 아래쪽에 있으려면 이차부등식

$kx^2+5x+2k-6<-3x+k$, 즉 $kx^2+8x+k-6<0$

이 모든 실수 x에 대하여 성립해야 하므로

$k<0$

이차방정식 $kx^2+8x+k-6=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=4^2-k(k-6)<0$

$k^2-6k-16>0,\quad (k+2)(k-8)>0$

$\therefore k<-2$ 또는 $k>8$

그런데 $k<0$이므로 $\quad k<-2$

답 ①

0850 직사각형의 가로의 길이를 x cm라 하면 세로의 길이는 $(24-x)$ cm이므로 넓이가 128 cm^2 이상이 되려면

$x(24-x)\ge128,\quad x^2-24x+128\le0$

$(x-8)(x-16)\le0 \quad \therefore 8\le x\le16$

따라서 직사각형의 가로의 길이의 최댓값은 16 cm, 최솟값은 8 cm이므로

$a=16,\ b=8$

$\therefore a-b=16-8=8$

답 **8**

0851 t초 후의 공의 높이가 35 m 이상이 되려면

$-5t^2+25t+15\ge35,\quad t^2-5t+4\le0$

$(t-1)(t-4)\le0$

$\therefore 1\le t\le4$

따라서 공의 높이가 35 m 이상인 시간은 $4-1=3$(초) 동안이다.

답 ③

0852 가격을 $100x$원 할인한다고 하면 판매량이 $50x$잔 늘어나므로 커피의 하루 판매액이 260만 원 이상이려면

$(3800-100x)(400+50x)\ge2600000$

$(38-x)(8+x)\ge520$

$x^2-30x+216\le0,\quad (x-12)(x-18)\le0$

$\therefore 12\le x\le18$

이때 커피 한 잔의 가격은 $(3800-100x)$원이고 $1200\le100x\le1800$이므로

$2000\le3800-100x\le2600$

따라서 커피 한 잔의 최소 가격은 2000원이다.

답 **2000원**

0853 $3x^2-8x-16<0$에서 $\quad (3x+4)(x-4)<0$

$\therefore -\dfrac{4}{3}<x<4$ …… ㉠

$2x^2-7x+6\ge0$에서 $\quad (2x-3)(x-2)\ge0$

$\therefore x\le\dfrac{3}{2}$ 또는 $x\ge2$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-\dfrac{4}{3}<x\le\dfrac{3}{2}$ 또는 $2\le x<4$

따라서 정수 x는 $-1, 0, 1, 2, 3$의 5개이다.

답 **5**

0854 $x^2-x-1\geq -x^2+4x+2$에서

$2x^2-5x-3\geq 0$, $(2x+1)(x-3)\geq 0$

$\therefore x\leq -\frac{1}{2}$ 또는 $x\geq 3$ …… ㉠

$-x-15<-x^2+x$에서

$x^2-2x-15<0$, $(x+3)(x-5)<0$

$\therefore -3<x<5$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-3<x\leq -\frac{1}{2}$ 또는 $3\leq x<5$

따라서 정수 x는 -2, -1, 3, 4이므로 구하는 합은

$-2+(-1)+3+4=4$

답 **4**

0855 주어진 부등식은

$\begin{cases} 2x^2-10\leq x^2+3x & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+3x<10x-6 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x^2-3x-10\leq 0$, $(x+2)(x-5)\leq 0$

$\therefore -2\leq x\leq 5$ …… ㉢

㉡에서 $x^2-7x+6<0$, $(x-1)(x-6)<0$

$\therefore 1<x<6$ …… ㉣

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면

$1<x\leq 5$

따라서 x의 값이 아닌 것은 ①이다.

답 ①

0856 $x^2\leq 4x$에서

$x^2-4x\leq 0$, $x(x-4)\leq 0$

$\therefore 0\leq x\leq 4$ …… ㉠

$x^2+x\geq 6$에서

$x^2+x-6\geq 0$, $(x+3)(x-2)\geq 0$

$\therefore x\leq -3$ 또는 $x\geq 2$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$2\leq x\leq 4$

따라서 $ax^2+2bx-(a+3b)\geq 0$의 해가 $2\leq x\leq 4$이므로

$a<0$

해가 $2\leq x\leq 4$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x-2)(x-4)\leq 0$, 즉 $x^2-6x+8\leq 0$

양변에 a를 곱하면

$ax^2-6ax+8a\geq 0$ ($\because a<0$)

이 부등식이 $ax^2+2bx-(a+3b)\geq 0$과 같으므로

$-6a=2b$, $8a=-(a+3b)$ $\therefore b=-3a$

$\therefore \frac{b}{a}=-3$

답 **-3**

다른 풀이 이차부등식 $ax^2+2bx-(a+3b)\geq 0$의 해가 $2\leq x\leq 4$이므로 이차방정식 $ax^2+2bx-(a+3b)=0$의 두 근이 2, 4이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$2+4=-\frac{2b}{a}$ $\therefore \frac{b}{a}=-3$

0857 $|x+4|\leq 5$에서 $-5\leq x+4\leq 5$

$\therefore -9\leq x\leq 1$ …… ㉠

$x^2-x-2\leq 0$에서 $(x+1)(x-2)\leq 0$

$\therefore -1\leq x\leq 2$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $-1\leq x\leq 1$

따라서 $a=-1$, $b=1$이므로

$b-a=1-(-1)=2$

답 **2**

0858 $|x-2|<3$에서 $-3<x-2<3$

$\therefore -1<x<5$ …… ㉠

$x^2-3x>0$에서 $x(x-3)>0$

$\therefore x<0$ 또는 $x>3$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-1<x<0$ 또는 $3<x<5$

답 **$-1<x<0$ 또는 $3<x<5$**

0859 $x^2-3|x|<0$에서

(i) $x<0$일 때

$x^2+3x<0$, $x(x+3)<0$

$\therefore -3<x<0$

그런데 $x<0$이므로 $-3<x<0$

(ii) $x\geq 0$일 때

$x^2-3x<0$, $x(x-3)<0$

$\therefore 0<x<3$

그런데 $x\geq 0$이므로 $0<x<3$

(i), (ii)에서 $x^2-3|x|<0$의 해는

$-3<x<0$ 또는 $0<x<3$ …… ㉠

또 $x^2-x<6$에서

$x^2-x-6<0$, $(x+2)(x-3)<0$

$\therefore -2<x<3$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-2<x<0$ 또는 $0<x<3$

따라서 정수 x는 -1, 1, 2의 3개이다.

답 **3**

0860 $|x^2-4|<3x$에서

(i) $x^2-4<0$, 즉 $-2<x<2$일 때

$-(x^2-4)<3x$, $x^2+3x-4>0$

$(x+4)(x-1)>0$ $\therefore x<-4$ 또는 $x>1$

그런데 $-2<x<2$이므로 $1<x<2$

(ii) $x^2-4\geq 0$, 즉 $x\leq -2$ 또는 $x\geq 2$일 때

$x^2-4<3x$, $x^2-3x-4<0$

$(x+1)(x-4)<0$ $\therefore -1<x<4$

그런데 $x\leq -2$ 또는 $x\geq 2$이므로 $2\leq x<4$

(i), (ii)에서 $|x^2-4|<3x$의 해는

$1<x<4$ …… ㉠ … 1단계

또 $2x^2-3x-5<0$에서 $(x+1)(2x-5)<0$

$\therefore -1<x<\frac{5}{2}$ …… ㉡ … 2단계

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$1<x<\frac{5}{2}$ … 3단계

답 $1<x<\frac{5}{2}$

	채점 요소	비율
1단계	$\vert x^2-4\vert<3x$의 해 구하기	50 %
2단계	$2x^2-3x-5<0$의 해 구하기	30 %
3단계	주어진 연립부등식의 해 구하기	20 %

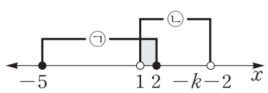
0861 $x^2+3x-10\le 0$에서 $(x+5)(x-2)\le 0$

$\therefore -5\le x\le 2$ …… ㉠

$x^2+(k+1)x-k-2<0$에서

$(x-1)(x+k+2)<0$ …… ㉡

㉠과 ㉡의 해의 공통부분이 $1<x\le 2$이므로 오른쪽 그림에서



$-k-2>2$

$\therefore k<-4$

답 $k<-4$

참고 | $k=-4$이면 ㉡의 해가 $1<x<2$이므로 ㉠과의 공통부분은

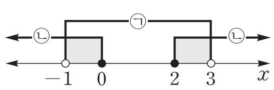
$1<x<2$

따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

0862 주어진 부등식에서

$$\begin{cases} x^2-2x-a<0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-2x+b\ge 0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠, ㉡의 해의 공통부분이 $-1<x\le 0$ 또는 $2\le x<3$이므로 ㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같아야 한다.



해가 $-1<x<3$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+1)(x-3)<0$

$\therefore x^2-2x-3<0$

이 부등식이 $x^2-2x-a<0$과 같아야 하므로

$a=3$

또 해가 $x\le 0$ 또는 $x\ge 2$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$x(x-2)\ge 0$ $\therefore x^2-2x\ge 0$

이 부등식이 $x^2-2x+b\ge 0$과 같아야 하므로

$b=0$

$\therefore a+b=3+0=3$

답 3

다른 풀이 이차부등식 $x^2-2x-a<0$의 해가 $-1<x<3$이므로 이차방정식 $x^2-2x-a=0$의 두 근이 -1, 3이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-1\times 3=-a$ $\therefore a=3$

이차부등식 $x^2-2x+b\ge 0$의 해가 $x\le 0$ 또는 $x\ge 2$이므로 이차방정식 $x^2-2x+b=0$의 두 근이 0, 2이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$0\times 2=b$ $\therefore b=0$

0863 $(x+1)^2\le x+7$에서

$x^2+x-6\le 0$, $(x+3)(x-2)\le 0$

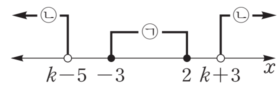
$\therefore -3\le x\le 2$ …… ㉠

$x^2-2(k-1)x+(k+3)(k-5)>0$에서

$\{x-(k+3)\}\{x-(k-5)\}>0$

$\therefore x<k-5$ 또는 $x>k+3$ …… ㉡

주어진 연립부등식이 해를 갖지 않으려면 ㉠, ㉡의 공통부분이 없어야 하므로 오른쪽 그림에서



$k-5\le -3$, $k+3\ge 2$

$\therefore -1\le k\le 2$

따라서 $M=2$, $m=-1$이므로

$M-m=2-(-1)=3$

답 3

0864 $x^2+2x-8>0$에서 $(x+4)(x-2)>0$

$\therefore x<-4$ 또는 $x>2$ …… ㉠

$x^2+2x<2ax+4a$에서 $x^2-2(a-1)x-4a<0$

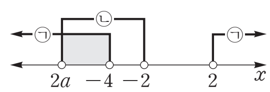
$(x+2)(x-2a)<0$ …… ㉡

주어진 연립부등식의 해가 존재하려면 ㉠과 ㉡의 해의 공통부분이 존재해야 한다.

(i) $2a<-2$, 즉 $a<-1$일 때

㉡의 해는 $2a<x<-2$

따라서 ㉠과의 공통부분이 존재하려면 오른쪽 그림에서



$2a<-4$ $\therefore a<-2$

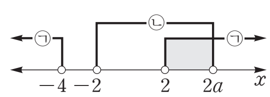
(ii) $2a=-2$, 즉 $a=-1$일 때

㉡의 해가 존재하지 않으므로 주어진 연립부등식의 해는 존재하지 않는다.

(iii) $2a>-2$, 즉 $a>-1$일 때

㉡의 해는 $-2<x<2a$

따라서 ㉠과의 공통부분이 존재하려면 오른쪽 그림에서



$2a>2$ $\therefore a>1$

이상에서 주어진 연립부등식의 해가 존재하도록 하는 a의 값의 범위는

$a<-2$ 또는 $a>1$

따라서 음의 정수 a의 최댓값은 -3, 양의 정수 a의 최솟값은 2이므로 구하는 곱은

$-3\times 2=-6$

답 -6

0865 삼각형의 세 변의 길이는 모두 양수이므로

$n-5>0$, $n>0$, $n+5>0$

$\therefore n>5$ …… ㉠

세 변 중 가장 긴 변의 길이는 $n+5$이고, 삼각형에서 가장 긴 변의 길이는 나머지 두 변의 길이의 합보다 작아야 하므로

$n+5<(n-5)+n$

$\therefore n>10$ …… ㉡

둔각삼각형이기 위해서는 가장 긴 변의 길이의 제곱이 나머지 두 변의 길이의 제곱의 합보다 커야 하므로

$(n+5)^2>n^2+(n-5)^2$

$n^2-20n<0, \qquad n(n-20)<0$

$\therefore\ 0<n<20 \qquad \cdots\cdots$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢의 공통부분을 구하면

$10<n<20$

따라서 자연수 n은 11, 12, ⋯, 19의 9개이다. **답 9**

RPM 비법 노트

삼각형의 세 변의 길이가 a, b, c $(a<b<c)$일 때

① $c^2<a^2+b^2$ ⇨ 예각삼각형

② $c^2=a^2+b^2$ ⇨ 직각삼각형

③ $c^2>a^2+b^2$ ⇨ 둔각삼각형

0866 새로운 직육면체의 밑면의 가로, 세로의 길이와 높이는 각각 $(a-2)$ cm, a cm, $(a+3)$ cm이므로

$a-2>0 \qquad \therefore\ a>2 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

새로운 직육면체의 부피가 원래의 정육면체의 부피보다 작아야 하므로

$a(a-2)(a+3)<a^3$

$a^3+a^2-6a<a^3, \qquad a^2-6a<0$

$a(a-6)<0 \qquad \therefore\ 0<a<6 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $\quad 2<a<6$

따라서 자연수 a는 3, 4, 5이므로 구하는 합은

$3+4+5=12$ **답 12**

0867 주어진 그림에서 길의 넓이는

$(2x+10)(2x+7)-10\times7=4x^2+34x\,(\mathrm{m}^2)$

길의 넓이가 60 m^2 이상 168 m^2 이하이어야 하므로

$60\le4x^2+34x\le168 \qquad \therefore\ 30\le2x^2+17x\le84$

$30\le2x^2+17x$에서 $\qquad 2x^2+17x-30\ge0$

$(x+10)(2x-3)\ge0 \qquad \therefore\ x\le-10$ 또는 $x\ge\frac{3}{2}$

그런데 $x>0$이므로 $\qquad x\ge\frac{3}{2} \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$2x^2+17x\le84$에서 $\qquad 2x^2+17x-84\le0$

$(x+12)(2x-7)\le0 \qquad \therefore\ -12\le x\le\frac{7}{2}$

그런데 $x>0$이므로 $\qquad 0<x\le\frac{7}{2} \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $\qquad \frac{3}{2}\le x\le\frac{7}{2}$

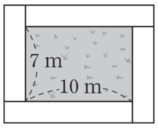
따라서 $a=\frac{3}{2}$, $b=\frac{7}{2}$이므로

$a+b=\frac{3}{2}+\frac{7}{2}=5$ **답 5**

참고 | 오른쪽 그림과 같이 길을 4개의 직사각형으로 나누어 넓이를 구하면

$2\{(7+x)\times x+(10+x)\times x\}$

$=4x^2+34x\,(\mathrm{m}^2)$



0868 이차방정식 $x^2+(k+2)x+k^2+1=0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(k+2)^2-4(k^2+1)>0$

$3k^2-4k<0, \qquad k(3k-4)<0$

$\therefore\ 0<k<\frac{4}{3}$ **답** $\mathbf{0<k<\frac{4}{3}}$

0869 이차방정식 $x^2-2kx+16=0$이 허근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=(-k)^2-16<0, \qquad k^2-16<0$

$(k+4)(k-4)<0$

$\therefore\ -4<k<4 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

이차방정식 $x^2+4kx-k+5=0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=(2k)^2-(-k+5)>0$

$4k^2+k-5>0, \qquad (4k+5)(k-1)>0$

$\therefore\ k<-\frac{5}{4}$ 또는 $k>1 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-4<k<-\frac{5}{4}$ 또는 $1<k<4$

따라서 정수 k는 -3, -2, 2, 3의 4개이다. **답 4**

0870 이차방정식 $x^2+2(a-1)x+a^2-3=0$이 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=(a-1)^2-(a^2-3)=0$

$-2a+4=0 \qquad \therefore\ a=2 \qquad \cdots$ 1단계

이차방정식 $x^2-(b+2)x+a+b=0$, 즉

$x^2-(b+2)x+2+b=0$이 허근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=(b+2)^2-4(2+b)<0, \qquad (b+2)(b-2)<0$

$\therefore\ -2<b<2 \qquad \cdots$ 2단계

따라서 정수 b의 최댓값은 1이다. $\cdots$ 3단계

답 1

채점 요소		비율
1단계	a의 값 구하기	40 %
2단계	b의 값의 범위 구하기	40 %
3단계	정수 b의 최댓값 구하기	20 %

0871 이차방정식 $x^2-ax+a=0$이 실근을 가지려면 이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 할 때

$D_1=(-a)^2-4\times1\times a\ge0$

$a^2-4a\ge0, \qquad a(a-4)\ge0$

$\therefore\ a\le0$ 또는 $a\ge4 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

이차방정식 $x^2-2x+2-a^2=0$이 실근을 가지려면 이 이차방정식의 판별식을 D_2라 할 때

$\dfrac{D_2}{4}=(-1)^2-(2-a^2)\geq 0$

$a^2-1\geq 0,\quad (a+1)(a-1)\geq 0$

$\therefore a\leq -1$ 또는 $a\geq 1$ …… ㉡

주어진 두 이차방정식 중 적어도 하나가 실근을 갖도록 하는 실수 a의 값의 범위는 ㉠, ㉡을 합친 범위이므로

$a\leq 0$ 또는 $a\geq 1$ **답** ②

다른 풀이 적어도 하나가 실근을 갖는 경우는 주어진 두 이차방정식이 모두 허근을 갖는 경우를 제외하면 된다.

이차방정식 $x^2-ax+a=0$의 판별식을 D_1이라 할 때 이 이차방정식이 허근을 가지려면

$D_1=(-a)^2-4\times 1\times a<0,\quad a^2-4a<0$

$a(a-4)<0\quad \therefore 0<a<4$ …… ㉢

이차방정식 $x^2-2x+2-a^2=0$의 판별식을 D_2라 할 때 이 이차방정식이 허근을 가지려면

$\dfrac{D_2}{4}=(-1)^2-(2-a^2)<0,\quad a^2-1<0$

$(a+1)(a-1)<0\quad \therefore -1<a<1$ …… ㉣

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면

$0<a<1$

따라서 주어진 두 이차방정식 중 적어도 하나가 실근을 갖도록 하는 실수 a의 값의 범위는

$a\leq 0$ 또는 $a\geq 1$

0872 이차방정식 $x^2-(a+4)x-\dfrac{a}{2}=0$의 판별식을 D, 두 근을 α, β라 하면 두 근이 모두 양수이므로

(i) $D=(a+4)^2-4\times 1\times\left(-\dfrac{a}{2}\right)\geq 0$

$a^2+10a+16\geq 0,\quad (a+8)(a+2)\geq 0$

$\therefore a\leq -8$ 또는 $a\geq -2$

(ii) $\alpha+\beta=a+4>0\quad \therefore a>-4$

(iii) $\alpha\beta=-\dfrac{a}{2}>0\quad \therefore a<0$

이상에서 공통부분을 구하면 $-2\leq a<0$

답 $-2\leq a<0$

0873 이차방정식 $kx^2+3kx+5=0$의 판별식을 D, 두 근을 α, β라 하면 두 근이 모두 음수이므로

(i) $D=(3k)^2-4\times k\times 5\geq 0$

$9k^2-20k\geq 0,\quad k(9k-20)\geq 0$

$\therefore k<0$ 또는 $k\geq\dfrac{20}{9}\ (\because k\neq 0)$

(ii) $\alpha+\beta=-\dfrac{3k}{k}=-3<0$

(iii) $\alpha\beta=\dfrac{5}{k}>0\quad \therefore k>0$

이상에서 공통부분을 구하면 $k\geq\dfrac{20}{9}$

따라서 실수 k의 최솟값은 $\dfrac{20}{9}$이다. **답** ②

0874 이차방정식 $-x^2+(a^2-5a+4)x-a+6=0$의 두 근을 α, β라 하면 두 근의 부호가 서로 다르므로

$\alpha\beta=\dfrac{-a+6}{-1}<0\quad \therefore a<6$ …… ㉠

또 음수인 근의 절댓값이 양수인 근보다 작으므로

$\alpha+\beta=-\dfrac{a^2-5a+4}{-1}>0,\quad a^2-5a+4>0$

$(a-1)(a-4)>0\quad \therefore a<1$ 또는 $a>4$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$a<1$ 또는 $4<a<6$ **답** $a<1$ 또는 $4<a<6$

RPM 비법 노트

이차방정식의 두 근이 서로 다른 부호일 때

① 두 근의 절댓값이 같다.

⇨ (두 근의 합)$=0$, (두 근의 곱)<0

② 음수인 근의 절댓값이 양수인 근보다 크다.

⇨ (두 근의 합)<0, (두 근의 곱)<0

③ 양수인 근이 음수인 근의 절댓값보다 크다.

⇨ (두 근의 합)>0, (두 근의 곱)<0

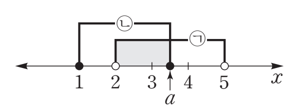
0875 $x^2-7x+10<0$에서

$(x-2)(x-5)<0\quad \therefore 2<x<5$ …… ㉠

$x^2-(a+1)x+a\leq 0$에서

$(x-1)(x-a)\leq 0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 정수 x가 한 개이므로 오른쪽 그림에서



$3\leq a<4$

답 $3\leq a<4$

참고 | $a\leq 1$이면 주어진 연립부등식의 해가 존재하지 않으므로 $a>1$이다. 즉 ㉡의 해는 $1\leq x\leq a$이다.

0876 $x^2-x>2$에서

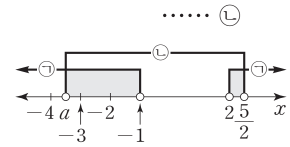
$x^2-x-2>0,\quad (x+1)(x-2)>0$

$\therefore x<-1$ 또는 $x>2$ …… ㉠

$2x^2-2ax-5x+5a<0$에서 $2x^2-(2a+5)x+5a<0$

$(2x-5)(x-a)<0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 정수 x가 -3과 -2뿐이므로 오른쪽 그림에서



$-4\leq a<-3$ **답** ②

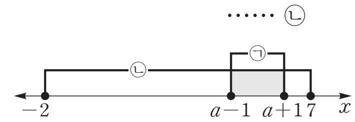
0877 $|x-a|\leq 1$에서 $-1\leq x-a\leq 1$

$\therefore a-1\leq x\leq a+1$ …… ㉠

$x^2-5x-14\leq 0$에서 $(x+2)(x-7)\leq 0$

$\therefore -2\leq x\leq 7$ …… ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 정수 x의 값의 합이 15이므로 오른쪽 그림에서



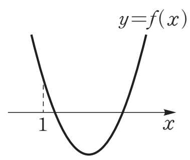
$(a-1)+a+(a+1)=15$

$\therefore a=5$ **답** 5

RPM 비법 노트

a가 정수이므로 ㉠을 만족시키는 정수 x는 $a-1$, a, $a+1$의 3개이다.
이때 합이 15이면서 연속하는 3개 이하의 정수는
　15 또는 7, 8 또는 4, 5, 6
이고, ㉡을 만족시키는 정수 x는 -2, -1, $\cdots$, 7이므로 주어진 연립부등식의 해에 포함되는 정수는 4, 5, 6이다.

0878 $f(x)=x^2-2kx+4$라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 1보다 크므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(i) $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-k)^2-4\geq 0,\qquad (k+2)(k-2)\geq 0$$

$$\therefore k\leq -2 \text{ 또는 } k\geq 2$$

(ii) $f(1)=1-2k+4>0\qquad \therefore k<\frac{5}{2}$

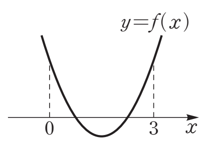
(iii) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=k$이므로

$$k>1$$

이상에서 공통부분을 구하면　$2\leq k<\frac{5}{2}$

따라서 실수 k의 최솟값은 2이다.　**답 2**

0879 $f(x)=x^2-2px+p+2$라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 0과 3 사이에 있으므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(i) 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-p)^2-(p+2)\geq 0$$

$$p^2-p-2\geq 0,\qquad (p+1)(p-2)\geq 0$$

$$\therefore p\leq -1 \text{ 또는 } p\geq 2$$

(ii) $f(0)=p+2>0$에서　$p>-2$

(iii) $f(3)=9-6p+p+2>0$에서　$p<\frac{11}{5}$

(iv) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=p$이므로

$$0<p<3$$

이상에서 공통부분을 구하면

$$2\leq p<\frac{11}{5}$$

답 $2\leq p<\frac{11}{5}$

0880 $x^2+3x-10=0$에서

$$(x+5)(x-2)=0\qquad \therefore x=-5 \text{ 또는 } x=2$$

따라서 $x^2+x-3k=0$의 두 근 중 적어도 한 근이 -5와 2 사이에 존재한다.

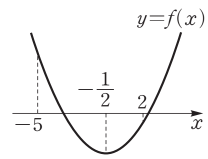
$f(x)=x^2+x-3k$라 하자.

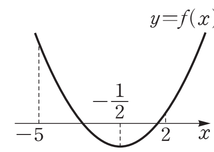
(i) 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=1^2-4\times 1\times(-3k)\geq 0$$

$$1+12k\geq 0\qquad \therefore k\geq -\frac{1}{12}$$

(ii) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=-\frac{1}{2}$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.





따라서 $f(-5)=25-5-3k>0$에서

$$k<\frac{20}{3}$$

(i), (ii)에서 공통부분을 구하면　$-\frac{1}{12}\leq k<\frac{20}{3}$

따라서 정수 k는 0, 1, $\cdots$, 6의 7개이다.　**답 7**

다른 풀이 $f(x)=x^2+x-3k$라 하면

$$f(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}-3k$$

$-5\leq x\leq 2$에서

$$f(-5)=20-3k,\ f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}-3k,\ f(2)=6-3k$$

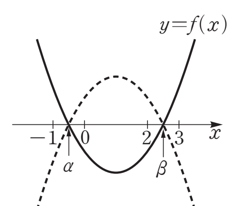
이므로 $x=-\frac{1}{2}$에서 최솟값, $x=-5$에서 최댓값을 갖는다.

따라서 $-5<x<2$에서 적어도 한 근을 가지려면

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}-3k\leq 0,\ f(-5)=20-3k>0$$

$$\therefore -\frac{1}{12}\leq k<\frac{20}{3}$$

0881 $f(x)=ax^2-2x+a-2$라 하면 주어진 조건을 만족시키는 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이차방정식 $f(x)=0$의 한 근이 -1과 0 사이에 있어야 하므로

$f(-1)f(0)<0$에서

$$(a+2+a-2)(a-2)<0,\qquad a(a-2)<0$$

$$\therefore 0<a<2\qquad \cdots\cdots ㉠ \qquad \cdots \text{1단계}$$

또 $f(x)=0$의 다른 한 근이 2와 3 사이에 있어야 하므로

$f(2)f(3)<0$에서

$$(4a-4+a-2)(9a-6+a-2)<0$$

$$(5a-6)(5a-4)<0$$

$$\therefore \frac{4}{5}<a<\frac{6}{5}\qquad \cdots\cdots ㉡ \qquad \cdots \text{2단계}$$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면　$\frac{4}{5}<a<\frac{6}{5}$　$\cdots$ 3단계

답 $\frac{4}{5}<a<\frac{6}{5}$

	채점 요소	비율
1단계	한 근이 -1과 0 사이에 있을 때 a의 값의 범위 구하기	40 %
2단계	한 근이 2와 3 사이에 있을 때 a의 값의 범위 구하기	40 %
3단계	주어진 조건을 만족시키는 a의 값의 범위 구하기	20 %

09 이차부등식과 연립이차부등식

시험에 꼭 나오는 문제

• 본책 124~127쪽

0882 ㄱ. 이차방정식 $x^2-x-3=0$의 해는 $x=\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$이므로 $x^2-x-3\le0$의 해는

$$\frac{1-\sqrt{13}}{2}\le x\le\frac{1+\sqrt{13}}{2}$$

ㄴ. $x^2-2x+5=(x-1)^2+4\ge4$

따라서 주어진 부등식의 해는 모든 실수이다.

ㄷ. $-3x^2+2x-3>0$에서 $\quad 3x^2-2x+3<0$

그런데 $3x^2-2x+3=3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{8}{3}>0$이므로 주어진 부등식의 해는 없다.

ㄹ. $-16x^2+8x-1\le0$에서 $\quad 16x^2-8x+1\ge0$

$\therefore (4x-1)^2\ge0$

따라서 주어진 부등식의 해는 모든 실수이다.

이상에서 해가 모든 실수인 이차부등식은 ㄴ, ㄹ이다. **답** ④

0883 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 두 점 $(-2, 0)$, $(1, 0)$에서 만나므로

$f(x)=a(x+2)(x-1)\,(a<0)$

이라 하자.

이 그래프가 점 $(0, 2)$를 지나므로

$2=-2a \qquad \therefore a=-1$

$\therefore f(x)=-(x+2)(x-1)$

$f(x)>-18$에서 $\quad -(x+2)(x-1)>-18$

$x^2+x-20<0, \quad (x+5)(x-4)<0$

$\therefore -5<x<4$

따라서 $\alpha=-5$, $\beta=4$이므로

$\alpha-\beta=-5-4=-9$ **답** -9

0884 $(x+1)(x-1)<|x-5|$에서

(i) $x<5$일 때, $x-5<0$이므로

$(x+1)(x-1)<-(x-5), \quad x^2+x-6<0$

$(x+3)(x-2)<0$

$\therefore -3<x<2$

그런데 $x<5$이므로 $\quad -3<x<2$

(ii) $x\ge5$일 때, $x-5\ge0$이므로

$(x+1)(x-1)<x-5$

$\therefore x^2-x+4<0$

그런데 $x^2-x+4=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{15}{4}\ge\frac{15}{4}$이므로 해는 없다.

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$-3<x<2$

① $2x-1<3$에서 $\quad 2x<4 \quad \therefore x<2$

② $3x+5>-4$에서 $\quad 3x>-9 \quad \therefore x>-3$

③ $\left|x-\frac{1}{2}\right|>\frac{5}{2}$에서 $\quad x-\frac{1}{2}<-\frac{5}{2}$ 또는 $x-\frac{1}{2}>\frac{5}{2}$

$\therefore x<-2$ 또는 $x>3$

④ $\left|x+\frac{1}{2}\right|<\frac{5}{2}$에서 $\quad -\frac{5}{2}<x+\frac{1}{2}<\frac{5}{2}$

$\therefore -3<x<2$

⑤ $|x+2|<4$에서 $\quad -4<x+2<4$

$\therefore -6<x<2$

따라서 $(x+1)(x-1)<|x-5|$와 해가 같은 것은 ④이다.

답 ④

0885 $ax^2+bx+c<0$의 해가 $x<-1$ 또는 $x>5$이므로

$a<0$

해가 $x<-1$ 또는 $x>5$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+1)(x-5)>0 \qquad \therefore x^2-4x-5>0$

양변에 a를 곱하면

$ax^2-4ax-5a<0$ ($\because a<0$)

이 부등식이 $ax^2+bx+c<0$과 같으므로

$b=-4a$, $c=-5a$

이것을 $a(x-2)^2-b(x-2)+c>0$에 대입하면

$a(x-2)^2+4a(x-2)-5a>0$

양변을 a로 나누면

$(x-2)^2+4(x-2)-5<0$ ($\because a<0$)

$x^2-9<0, \quad (x+3)(x-3)<0$

$\therefore -3<x<3$ **답** ①

0886 $f(x)<0$의 해가 $x<-2$ 또는 $x>1$이므로

$f(x)=a(x+2)(x-1)\ (a<0)$

이라 하면

$f(1-2x)=a(1-2x+2)(1-2x-1)$

$=2ax(2x-3)$

이때 $f(-1)=-2a$이므로 $f(1-2x)<f(-1)$에서

$2ax(2x-3)<-2a, \quad 4ax^2-6ax+2a<0$

$2x^2-3x+1>0$ ($\because 2a<0$)

$(2x-1)(x-1)>0$

$\therefore x<\frac{1}{2}$ 또는 $x>1$ **답** $x<\frac{1}{2}$ 또는 $x>1$

0887 이차부등식 $(k-2)x^2-(k+1)x+2k-2\le0$이 오직 하나의 해를 가지므로

$k-2>0 \qquad \therefore k>2$

이차방정식 $(k-2)x^2-(k+1)x+2k-2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(k+1)^2-4(k-2)(2k-2)=0$

$7k^2-26k+15=0, \quad (7k-5)(k-3)=0$

$\therefore k=\frac{5}{7}$ 또는 $k=3$

그런데 $k>2$이므로 $\quad k=3$

이것을 주어진 부등식에 대입하면

$x^2-4x+4\le0, \quad (x-2)^2\le0 \quad \therefore x=2$

따라서 $\alpha=3$, $\beta=2$이므로

$\alpha+\beta=3+2=5$ **답** 5

0888 $ax^2+2ax-5>0$에서

(i) $a>0$일 때

이차함수 $y=ax^2+2ax-5$의 그래프는 아래로 볼록하므로 주어진 이차부등식은 항상 해를 갖는다.

(ii) $a<0$일 때

주어진 이차부등식이 해를 가지려면 이차방정식 $ax^2+2ax-5=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=a^2+5a>0, \qquad a(a+5)>0$$

$\therefore\ a<-5$ 또는 $a>0$

그런데 $a<0$이므로 $\qquad a<-5$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 a의 값의 범위는

$a<-5$ 또는 $a>0$ 답 ③

참고 | $a=0$이면 주어진 부등식은 이차부등식이 아니므로 $a\neq0$

0889 모든 실수 x에 대하여 $\sqrt{-x^2-2kx+2k}$가 허수가 되려면 모든 실수 x에 대하여 $-x^2-2kx+2k<0$이 성립해야 한다.

이차방정식 $-x^2-2kx+2k=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-k)^2-(-1)\times2k<0, \qquad k(k+2)<0$$

$\therefore\ -2<k<0$ 답 ②

0890 $mx^2+2mx+4>(x+1)^2$에서

$(m-1)x^2+2(m-1)x+3>0$ …… ㉠

(i) $m=1$일 때

㉠에서 $0\times x^2+0\times x+3=3>0$이므로 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

(ii) $m\neq1$일 때

㉠이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면

$m-1>0 \qquad \therefore\ m>1$

이차방정식 $(m-1)x^2+2(m-1)x+3=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(m-1)^2-3(m-1)<0$$

$(m-1)(m-4)<0$

$\therefore\ 1<m<4$

그런데 $m>1$이므로 $\qquad 1<m<4$

(i), (ii)에서 주어진 조건을 만족시키는 m의 값의 범위는

$1\le m<4$ 답 **$1\le m<4$**

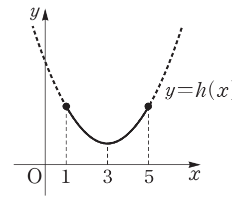
0891 $f(x)\ge g(x)$에서

$f(x)-g(x)\ge0$

$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면

$$\begin{aligned}h(x)&=x^2-5x+6-(-x^2+7x+k-9)\\&=2x^2-12x-k+15\\&=2(x-3)^2-k-3\end{aligned}$$

$1\le x\le5$에서 $h(x)\ge0$이 항상 성립하려면 $y=h(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



$h(3)\ge0$에서

$-k-3\ge0 \qquad \therefore\ k\le-3$

따라서 실수 k의 최댓값은 -3이다.

답 **-3**

0892 이차함수 $y=x^2-ax+b$의 그래프가 직선 $y=3x-2$보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위는 부등식

$x^2-ax+b<3x-2$, 즉

$x^2-(a+3)x+b+2<0$ …… ㉠

의 해이다.

해가 $-2<x<3$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+2)(x-3)<0$

$\therefore\ x^2-x-6<0$ …… ㉡

㉠, ㉡이 같아야 하므로

$a+3=1,\ b+2=-6$

$\therefore\ a=-2,\ b=-8$

$\therefore\ a+b=-2+(-8)=-10$ 답 **-10**

0893 도로의 폭을 x m라 하면 도로를 제외한 땅을 직사각형 모양으로 이어 붙였을 때 가로, 세로의 길이는 각각

$(25-x)$ m, $(15-x)$ m

따라서 도로를 제외한 땅의 넓이가 200 m^2 이상이 되려면

$(25-x)(15-x)\ge200, \qquad x^2-40x+175\ge0$

$(x-5)(x-35)\ge0$

$\therefore\ x\le5$ 또는 $x\ge35$

이때 $0<x<15$이므로 $\qquad 0<x\le5$

따라서 도로의 최대 폭은 5 m이다. 답 **5 m**

0894 주어진 부등식은

$$\begin{cases}5x+1\le2x^2+3 & \cdots\cdots ㉠\\ 2x^2+3<2x+27 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$$

㉠에서 $\qquad 2x^2-5x+2\ge0, \qquad (2x-1)(x-2)\ge0$

$\therefore\ x\le\frac{1}{2}$ 또는 $x\ge2$ …… ㉢

㉡에서 $\qquad 2x^2-2x-24<0, \qquad x^2-x-12<0$

$(x+3)(x-4)<0$

$\therefore\ -3<x<4$ …… ㉣

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면

$-3<x\le\frac{1}{2}$ 또는 $2\le x<4$

따라서 정수 x는 $-2,\ -1,\ 0,\ 2,\ 3$이므로 구하는 합은

$-2+(-1)+0+2+3=2$ 답 **2**

0895 $a>0$이므로 $|x+2|\le a$에서 $\qquad -a\le x+2\le a$

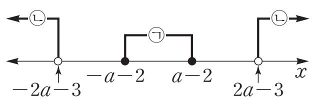
$\therefore\ -a-2\le x\le a-2$ …… ㉠

$x^2+6x-(2a+3)(2a-3)>0$에서

$\{x+(2a+3)\}\{x-(2a-3)\}>0$

$\therefore x<-2a-3$ 또는 $x>2a-3$ …… ㉡

주어진 연립부등식의 해가 없으려면 ㉠, ㉡의 공통부분이 없어야 하므로 다음 그림과 같아야 한다.



즉 $-2a-3\le -a-2$에서

$a\ge -1$ …… ㉢

$a-2\le 2a-3$에서

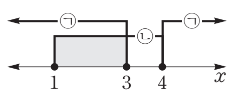
$a\ge 1$ …… ㉣

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면 $a\ge 1$

따라서 양수 a의 최솟값은 1이다. 답 1

0896 $\begin{cases} x^2+ax+b\ge 0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+cx+d\le 0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠, ㉡의 해의 공통부분이 $1\le x\le 3$ 또는 $x=4$이므로 ㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같아야 한다.



해가 $x\le 3$ 또는 $x\ge 4$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x-3)(x-4)\ge 0$ $\therefore x^2-7x+12\ge 0$

이 부등식이 $x^2+ax+b\ge 0$과 같아야 하므로

$a=-7,\ b=12$

해가 $1\le x\le 4$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x-1)(x-4)\le 0$ $\therefore x^2-5x+4\le 0$

이 부등식이 $x^2+cx+d\le 0$과 같아야 하므로

$c=-5,\ d=4$

$\therefore a+b-c+d=-7+12-(-5)+4=14$ 답 14

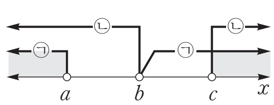
0897 $a<b$이므로 $(x-a)(x-b)>0$의 해는

$x<a$ 또는 $x>b$ …… ㉠

$b<c$이므로 $(x-b)(x-c)>0$의 해는

$x<b$ 또는 $x>c$ …… ㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는



$x<a$ 또는 $x>c$

$\therefore a=-2,\ c=8$

이것을 $x^2+ax-c<0$에 대입하면

$x^2-2x-8<0,$ $(x+2)(x-4)<0$

$\therefore -2<x<4$

따라서 정수 x는 -1, 0, 1, 2, 3의 5개이다. 답 5

0898 $y=-x^2+2kx+k^2+4$에 $x=0$을 대입하면

$y=k^2+4$ $\therefore \mathrm{A}(0,\ k^2+4)$

따라서 점 B의 y좌표가 k^2+4이므로

$k^2+4=-x^2+2kx+k^2+4$에서

$x^2-2kx=0,$ $x(x-2k)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2k$

$\therefore \mathrm{B}(2k,\ k^2+4)$

즉 $g(k)=2(\overline{\mathrm{OA}}+\overline{\mathrm{AB}})=2\{(k^2+4)+2k\}=2k^2+4k+8$이므로 $14\le g(k)\le 78$에서

$14\le 2k^2+4k+8\le 78$

$\therefore 7\le k^2+2k+4\le 39$

$7\le k^2+2k+4$에서 $k^2+2k-3\ge 0$

$(k+3)(k-1)\ge 0$

$\therefore k\le -3$ 또는 $k\ge 1$

그런데 $k>0$이므로 $k\ge 1$ …… ㉠

$k^2+2k+4\le 39$에서 $k^2+2k-35\le 0$

$(k+7)(k-5)\le 0$

$\therefore -7\le k\le 5$

그런데 $k>0$이므로

$0<k\le 5$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $1\le k\le 5$

따라서 자연수 k는 1, 2, 3, 4, 5이므로 구하는 합은

$1+2+3+4+5=15$ 답 15

0899 이차방정식 $x^2+3kx+1=0$이 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=(3k)^2-4\times 1\times 1\ge 0,$ $(3k+2)(3k-2)\ge 0$

$\therefore k\le -\frac{2}{3}$ 또는 $k\ge \frac{2}{3}$ …… ㉠

이차방정식 $x^2+kx+k=0$이 허근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=k^2-4\times 1\times k<0,$ $k(k-4)<0$

$\therefore 0<k<4$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$\frac{2}{3}\le k<4$

따라서 정수 k는 1, 2, 3이므로 구하는 합은

$1+2+3=6$ 답 6

0900 이차방정식 $x^2-2kx-k+20=0$의 판별식을 D라 하면 서로 다른 두 실근 α, β에 대하여 $\alpha\beta>0$이므로

(i) $\frac{D}{4}=(-k)^2-(-k+20)>0$

$k^2+k-20>0,$ $(k+5)(k-4)>0$

$\therefore k<-5$ 또는 $k>4$

(ii) $\alpha\beta=-k+20>0$ $\therefore k<20$

(i), (ii)에서 공통부분을 구하면

$k<-5$ 또는 $4<k<20$

따라서 자연수 k는 5, 6, …, 19의 15개이다. 답 ②

0901 $|x-k|\leq 5$에서 $\quad -5\leq x-k\leq 5$

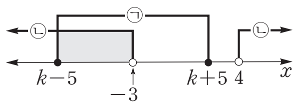
$\therefore\ k-5\leq x\leq k+5$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$x^2-x-12>0$에서 $\quad (x+3)(x-4)>0$

$\therefore\ x<-3$ 또는 $x>4$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

(i) $k+5\leq 4$, 즉 $k\leq -1$일 때

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

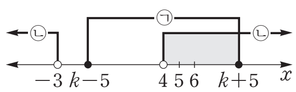


이때 ㉠, ㉡의 공통부분에 포함되는 정수는 모두 -3보다 작으므로 그 합은 7보다 작다.

따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $k-5\geq -3$, 즉 $k\geq 2$일 때

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

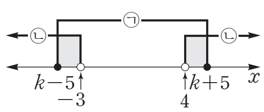


이때 ㉠, ㉡의 공통부분에 포함되는 정수는 모두 4보다 크고, 2개 이상의 정수가 반드시 포함되므로 그 합은 7보다 크다.

따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $k-5<-3$이고 $k+5>4$, 즉 $-1<k<2$일 때

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



이때 k는 정수이므로

$-1<k<2$에서 $\quad k=0$ 또는 $k=1$

ⓐ $k=0$일 때,

㉠에서 $\quad -5\leq x\leq 5$

따라서 주어진 연립부등식의 해는

$-5\leq x<-3$ 또는 $4<x\leq 5$

즉 정수 x는 -5, -4, 5이므로 그 합은

$-5+(-4)+5=-4$

따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

ⓑ $k=1$일 때,

㉠에서 $\quad -4\leq x\leq 6$

따라서 주어진 연립부등식의 해는

$-4\leq x<-3$ 또는 $4<x\leq 6$

즉 정수 x는 -4, 5, 6이므로 그 합은

$-4+5+6=7$

이상에서 $\quad k=1$

답 ④

0902 $x^2-5x+6=0$에서

$(x-2)(x-3)=0$

$\therefore\ x=2$ 또는 $x=3$

$f(x)=x^2-(a-1)x+a+4$라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 한 근만이 2와 3 사이에 있으므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 할 때

$D=\{-(a-1)\}^2-4\times 1\times(a+4)>0$

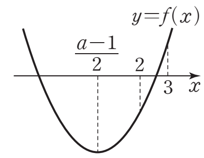
$a^2-6a-15>0$

$\therefore\ a<3-2\sqrt{6}$ 또는 $a>3+2\sqrt{6}$

(i) $a<3-2\sqrt{6}$일 때

$y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이

$x=\dfrac{a-1}{2}<1-\sqrt{6}<2$



이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.

$f(2)=4-2(a-1)+a+4<0$에서

$a>10$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$f(3)=9-3(a-1)+a+4>0$에서

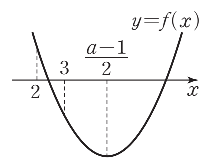
$a<8$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분이 없으므로 주어진 조건을 만족시키는 a의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $a>3+2\sqrt{6}$일 때

$y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이

$x=\dfrac{a-1}{2}>1+\sqrt{6}>3$



이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.

$f(2)=4-2(a-1)+a+4>0$에서

$a<10$ $\quad\cdots\cdots$ ㉢

$f(3)=9-3(a-1)+a+4<0$에서

$a>8$ $\quad\cdots\cdots$ ㉣

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면

$8<a<10$

(i), (ii)에서 $\quad 8<a<10$

따라서 실수 a의 값이 될 수 있는 것은 ③이다.

답 ③

0903 이차방정식 $x^2-10x+2a+9=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(-5)^2-(2a+9)=0,\quad 2a=16$

$\therefore\ a=8$ $\quad\cdots$ 1단계

이것을 $2x^2-(a+3)x+15<0$에 대입하면

$2x^2-11x+15<0,\quad (2x-5)(x-3)<0$

$\therefore\ \dfrac{5}{2}<x<3$ $\quad\cdots$ 2단계

답 $\dfrac{5}{2}<x<3$

채점 요소		비율
1단계	a의 값 구하기	40 %
2단계	이차부등식의 해 구하기	60 %

0904 $x^2-2x-3>3|x-1|$에서

(i) $x<1$일 때, $x-1<0$이므로

$x^2-2x-3>-3(x-1)$

$x^2+x-6>0,\quad (x+3)(x-2)>0$

$\therefore\ x<-3$ 또는 $x>2$

그런데 $x<1$이므로 $\quad x<-3$

(ii) $x\geq 1$일 때, $x-1\geq 0$이므로

$x^2-2x-3>3(x-1)$

$x^2-5x>0, \quad x(x-5)>0$

$\therefore x<0$ 또는 $x>5$

그런데 $x\geq1$이므로 $\quad x>5$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $x^2-2x-3>3|x-1|$의 해는

$x<-3$ 또는 $x>5$ ⋯ 1단계

따라서 $ax^2+2x+b<0$의 해가 $x<-3$ 또는 $x>5$이므로

$a<0$

해가 $x<-3$ 또는 $x>5$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+3)(x-5)>0$, 즉 $x^2-2x-15>0$

양변에 a를 곱하면

$ax^2-2ax-15a<0$ ($\because a<0$)

이 부등식이 $ax^2+2x+b<0$과 같으므로

$-2a=2, \ -15a=b$

$\therefore a=-1, \ b=15$ ⋯ 2단계

$\therefore a+b=-1+15=14$ ⋯ 3단계

답 **14**

	채점 요소	비율
1단계	$x^2-2x-3>3\|x-1\|$의 해 구하기	50 %
2단계	a, b의 값 구하기	40 %
3단계	$a+b$의 값 구하기	10 %

0905 $(k+1)x^2+2x+3k+1\geq0$이 해를 갖지 않으려면 모든 실수 x에 대하여 $(k+1)x^2+2x+3k+1<0$이 성립해야 한다. ⋯ 1단계

따라서 $k+1<0$이어야 하므로

$k<-1$

이차방정식 $(k+1)x^2+2x+3k+1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1^2-(k+1)(3k+1)<0$

$3k^2+4k>0, \quad k(3k+4)>0$

$\therefore k<-\frac{4}{3}$ 또는 $k>0$

그런데 $k<-1$이므로 $\quad k<-\frac{4}{3}$ ⋯ 2단계

따라서 정수 k의 최댓값은 -2이다. ⋯ 3단계

답 **−2**

	채점 요소	비율
1단계	주어진 이차부등식이 해를 갖지 않을 조건 구하기	20 %
2단계	주어진 이차부등식이 해를 갖지 않도록 하는 k의 값의 범위 구하기	60 %
3단계	정수 k의 최댓값 구하기	20 %

0906 $x^2-6x+8>0$에서

$(x-2)(x-4)>0$

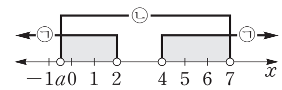
$\therefore x<2$ 또는 $x>4$ ⋯⋯ ㉠ ⋯ 1단계

$x^2-(a+7)x+7a<0$에서

$(x-a)(x-7)<0$

$\therefore a<x<7$ ($\because a<7$) ⋯⋯ ㉡ ⋯ 2단계

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 정수 x의 개수가 4이므로 오른쪽 그림에서



$-1\leq a<0$ ⋯ 3단계

답 **$-1\leq a<0$**

	채점 요소	비율
1단계	$x^2-6x+8>0$의 해 구하기	30 %
2단계	$x^2-(a+7)x+7a<0$의 해 구하기	30 %
3단계	a의 값의 범위 구하기	40 %

0907 전략 정수 n에 대하여 $n\leq x<n+1$이면 $[x]=n$임을 이용한다.

$n\leq x<n+1$ (n은 정수)일 때,

$n+1\leq x+1<n+2, \ n+6\leq x+6<n+7$

이므로

$[x+1]=n+1, \ [x+6]=n+6$

따라서 $[x+1]^2-[x+6]-15\leq0$에서

$(n+1)^2-(n+6)-15\leq0, \quad n^2+n-20\leq0$

$(n+5)(n-4)\leq0$

$\therefore -5\leq n\leq4$

이때 n은 정수이므로

$n=-5$일 때, $\quad -5\leq x<-4$

$n=-4$일 때, $\quad -4\leq x<-3$

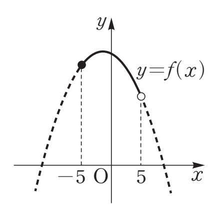
⋮

$n=4$일 때, $\quad 4\leq x<5$

$\therefore -5\leq x<5$

$f(x)=-x^2+2ax+a^2+1$이라 하자.

$-5\leq x<5$에서 $f(x)>0$이 항상 성립하려면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



$f(-5)>0$에서

$-25-10a+a^2+1>0$

$a^2-10a-24>0, \quad (a+2)(a-12)>0$

$\therefore a<-2$ 또는 $a>12$ ⋯⋯ ㉠

$f(5)\geq0$에서 $\quad -25+10a+a^2+1\geq0$

$a^2+10a-24\geq0, \quad (a+12)(a-2)\geq0$

$\therefore a\leq-12$ 또는 $a\geq2$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$a\leq-12$ 또는 $a>12$

답 **$a\leq-12$ 또는 $a>12$**

0908 전략 실수 A를 소수점 아래 첫째 자리에서 반올림한 값이 k이면 $k-\frac{1}{2}\leq A<k+\frac{1}{2}$임을 이용한다.

$(x-2)(x-5)$를 소수점 아래 첫째 자리에서 반올림한 값이 $2x+6$이므로

$(2x+6)-\frac{1}{2}\leq(x-2)(x-5)<(2x+6)+\frac{1}{2}$

이때 $2x+6$은 정수이므로 $x=\frac{n}{2}$ (n은 정수)으로 놓으면

$$(n+6)-\frac{1}{2}\le\left(\frac{n}{2}-2\right)\left(\frac{n}{2}-5\right)<(n+6)+\frac{1}{2}$$

$$4(n+6)-2\le(n-4)(n-10)<4(n+6)+2$$

$$\therefore\ 4n+22\le n^2-14n+40<4n+26$$

(i) $4n+22\le n^2-14n+40$에서

$$n^2-18n+18\ge0$$

$n^2-18n+18=0$의 해가 $n=9\pm3\sqrt{7}$이므로

$n^2-18n+18\ge0$의 해는

$$n\le9-3\sqrt{7}\text{ 또는 }n\ge9+3\sqrt{7}$$

(ii) $n^2-14n+40<4n+26$에서

$$n^2-18n+14<0$$

$n^2-18n+14=0$의 해가 $n=9\pm\sqrt{67}$이므로

$n^2-18n+14<0$의 해는

$$9-\sqrt{67}<n<9+\sqrt{67}$$

(i), (ii)에서

$$9-\sqrt{67}<n\le9-3\sqrt{7}\text{ 또는 }9+3\sqrt{7}\le n<9+\sqrt{67}$$

그런데 n은 정수이므로

$$n=1\text{ 또는 }n=17$$

따라서 $x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{17}{2}$이므로 모든 실수 x의 값의 합은

$$\frac{1}{2}+\frac{17}{2}=9$$

답 **9**

0909 전략 부등식 $A\le B<C$가 항상 성립하려면 부등식 $A\le B$, $B<C$가 각각 항상 성립해야 한다.

주어진 부등식은

$$\begin{cases}-x^2+2ax\le x^2+4x+a & \cdots\cdots ㉠\\ x^2+4x+a<2x^2+5 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$$

모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면 ㉠, ㉡의 해가 각각 모든 실수이어야 한다.

㉠에서 $2x^2-2(a-2)x+a\ge0$

이 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립해야 하므로 이차방정식 $2x^2-2(a-2)x+a=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$$\frac{D_1}{4}=(a-2)^2-2a\le0$$

$$a^2-6a+4\le0$$

$a^2-6a+4=0$의 해가 $a=3\pm\sqrt{5}$이므로 $a^2-6a+4\le0$의 해는

$$3-\sqrt{5}\le a\le3+\sqrt{5}\qquad\cdots\cdots ㉢$$

㉡에서 $x^2-4x-a+5>0$

이 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2-4x-a+5=0$의 판별식을 D_2라 하면

$$\frac{D_2}{4}=(-2)^2-(-a+5)<0$$

$$a-1<0\qquad\therefore\ a<1\qquad\cdots\cdots ㉣$$

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면

$$3-\sqrt{5}\le a<1$$

답 $\mathbf{3-\sqrt{5}\le a<1}$

0910 전략 두 부등식 $f(x_1)<g(x_1)$, $f(x_1)\le g(x_2)$의 해의 의미를 파악한다.

$f(x_1)<g(x_1)$의 해가 존재하지 않으므로 부등식

$x^2+6x+10<-x^2+2ax-3$, 즉

$$2x^2-2(a-3)x+13<0$$

의 해는 존재하지 않는다.

따라서 모든 실수 x에 대하여

$$2x^2-2(a-3)x+13\ge0$$

이 성립해야 하므로 이차방정식 $2x^2-2(a-3)x+13=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(a-3)^2-2\times13\le0$$

$$(a-3)^2\le26,\qquad -\sqrt{26}\le a-3\le\sqrt{26}$$

$$\therefore\ 3-\sqrt{26}\le a\le3+\sqrt{26}\qquad\cdots\cdots ㉠$$

또 $f(x_1)\le g(x_2)$의 해가 존재하므로

($f(x)$의 최솟값)$\le$($g(x)$의 최댓값)이다.

이때 $f(x)=x^2+6x+10=(x+3)^2+1$,

$g(x)=-x^2+2ax-3=-(x-a)^2+a^2-3$이므로 $f(x)$의 최솟값은 1이고, $g(x)$의 최댓값은 a^2-3이다.

즉 $1\le a^2-3$이므로

$$a^2-4\ge0,\qquad(a+2)(a-2)\ge0$$

$$\therefore\ a\le-2\text{ 또는 }a\ge2\qquad\cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$$3-\sqrt{26}\le a\le-2\text{ 또는 }2\le a\le3+\sqrt{26}$$

따라서 정수 a는 $-2, 2, 3, \cdots, 8$이므로 구하는 합은

$$-2+2+3+\cdots+8=33$$

답 **33**

10 경우의 수와 순열

교과서 문제 정복하기

본책 131쪽

0911 두 주사위에서 나오는 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면
(i) 눈의 수의 합이 3인 경우는
$(1, 2), (2, 1)$의 2가지
(ii) 눈의 수의 합이 9인 경우는
$(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)$의 4가지
(i), (ii)는 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는
$2+4=6$ **답 6**

0912 두 주사위에서 나오는 눈의 수의 합이 11 이상인 경우는 눈의 수의 합이 11 또는 12인 경우이다.
두 주사위에서 나오는 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면
(i) 눈의 수의 합이 11인 경우는
$(5, 6), (6, 5)$의 2가지
(ii) 눈의 수의 합이 12인 경우는
$(6, 6)$의 1가지
(i), (ii)는 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는
$2+1=3$ **답 3**

0913 7의 배수가 적힌 카드가 나오는 경우는
7, 14, 21, 28, 35, 42, 49의 7가지
9의 배수가 적힌 카드가 나오는 경우는
9, 18, 27, 36, 45의 5가지
두 사건은 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는
$7+5=12$ **답 12**

0914 2의 배수가 적힌 카드가 나오는 경우는
2, 4, 6, ⋯, 50의 25가지
3의 배수가 적힌 카드가 나오는 경우는
3, 6, 9, ⋯, 48의 16가지
2와 3의 공배수, 즉 6의 배수가 적힌 카드가 나오는 경우는
6, 12, 18, ⋯, 48의 8가지
따라서 구하는 경우의 수는
$25+16-8=33$ **답 33**

0915 첫 번째에 짝수의 눈이 나오는 경우는
2, 4, 6의 3가지
두 번째에 6의 약수의 눈이 나오는 경우는
1, 2, 3, 6의 4가지
따라서 구하는 경우의 수는
$3\times4=12$ **답 12**

0916 A 지점에서 B 지점으로 가는 방법은 3가지이고, 그 각각에 대하여 B 지점에서 C 지점으로 가는 방법은 2가지이므로 구하는 경우의 수는
$3\times2=6$ **답 6**

0917 $(a+b)(x+y+z+w)$를 전개할 때, a, b에 x, y, z, w를 각각 곱하여 항이 만들어지므로 구하는 항의 개수는
$2\times4=8$ **답 8**

> **RPM 비법 노트**
> 두 다항식 A, B의 각 항의 문자가 모두 다를 때, 다항식 A, B의 항의 개수가 각각 m, n이면
> (AB의 전개식에서의 항의 개수)$=m\times n$

0918 ${}_5P_2=5\times4=20$ **답 20**

0919 ${}_4P_3=4\times3\times2=24$ **답 24**

0920 **답 1**

0921 ${}_6P_6=6\times5\times4\times3\times2\times1=720$ **답 720**

0922 $120=6\times5\times4$이므로 ${}_nP_3=120$에서
$n(n-1)(n-2)=6\times5\times4$
$\therefore n=6$ **답 6**

0923 $210=7\times6\times5$이므로 ${}_7P_r=210=7\times6\times5$에서
$r=3$ **답 3**

0924 ${}_8P_r=\dfrac{8!}{(8-r)!}=\dfrac{8!}{3!}$이므로
$8-r=3 \qquad \therefore r=5$ **답 5**

0925 $120=5\times4\times3\times2\times1=5!$이므로 ${}_nP_n=120$에서
$n!=5!$
$\therefore n=5$ **답 5**

0926 5개 중에서 3개를 택하는 순열의 수와 같으므로
${}_5P_3=5\times4\times3=60$ **답 60**

0927 4명 중에서 4명을 택하는 순열의 수와 같으므로
${}_4P_4=4!=4\times3\times2\times1=24$ **답 24**

0928 6개 중에서 2개를 택하는 순열의 수와 같으므로
${}_6P_2=6\times5=30$ **답 30**

0929 10명 중에서 3명을 택하는 순열의 수와 같으므로
${}_{10}P_3=10\times9\times8=720$ **답 720**

유형 익히기

• 본책 132~138쪽

0930 두 주사위에서 나오는 눈의 수의 합이 4의 배수가 되는 경우는 눈의 수의 합이 4 또는 8 또는 12인 경우이다.
두 주사위에서 나오는 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면
(i) 눈의 수의 합이 4인 경우는
$(1, 3)$, $(2, 2)$, $(3, 1)$의 3가지
(ii) 눈의 수의 합이 8인 경우는
$(2, 6)$, $(3, 5)$, $(4, 4)$, $(5, 3)$, $(6, 2)$의 5가지
(iii) 눈의 수의 합이 12인 경우는
$(6, 6)$의 1가지
(i), (ii), (iii)은 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는
$3+5+1=9$ 답 **9**

0931 십의 자리의 숫자가 짝수인 경우는 십의 자리의 숫자가 2 또는 4인 경우이다.
(i) 십의 자리의 숫자가 2인 경우는
21, 23, 24의 3가지
(ii) 십의 자리의 숫자가 4인 경우는
41, 42, 43의 3가지
(i), (ii)는 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 자연수의 개수는
$3+3=6$ 답 **6**

0932 뽑힌 카드에 적힌 세 수를 순서쌍으로 나타내면
(i) 세 수의 합이 6이 되는 경우는
$(1, 2, 3)$의 1가지
(ii) 세 수의 합이 9가 되는 경우는
$(1, 2, 6)$, $(1, 3, 5)$, $(2, 3, 4)$의 3가지
(i), (ii)는 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는
$1+3=4$ 답 **4**

0933 1부터 100까지의 자연수 중에서
(i) 4로 나누어떨어지는 수는
4, 8, 12, ⋯, 100의 25개
(ii) 7로 나누어떨어지는 수는
7, 14, 21, ⋯, 98의 14개
(iii) 4와 7로 모두 나누어떨어지는 수는
28, 56, 84의 3개
이상에서 4 또는 7로 나누어떨어지는 자연수의 개수는
$25+14-3=36$
따라서 4와 7로 모두 나누어떨어지지 않는 자연수의 개수는
$100-36=64$ 답 **64**

0934 (i) $y=0$일 때, $2x+3z=16$이므로 순서쌍 (x, z)는
$(2, 4)$, $(5, 2)$, $(8, 0)$의 3개
(ii) $y=1$일 때, $2x+3z=11$이므로 순서쌍 (x, z)는
$(1, 3)$, $(4, 1)$의 2개
(iii) $y=2$일 때, $2x+3z=6$이므로 순서쌍 (x, z)는
$(0, 2)$, $(3, 0)$의 2개
이상에서 구하는 순서쌍의 개수는
$3+2+2=7$ 답 **7**

0935 (i) $y=1$일 때, $x\le5$이므로 순서쌍 (x, y)는
$(1, 1)$, $(2, 1)$, $(3, 1)$, $(4, 1)$, $(5, 1)$의 5개
(ii) $y=2$일 때, $x\le1$이므로 순서쌍 (x, y)는
$(1, 2)$의 1개
(i), (ii)에서 구하는 순서쌍의 개수는
$5+1=6$ 답 ④

다른 풀이 x, y가 자연수이므로 $x+4y\le9$를 만족시키는 경우는
$x+4y=5$, $x+4y=6$, $x+4y=7$,
$x+4y=8$, $x+4y=9$
(i) $x+4y=5$일 때, 순서쌍 (x, y)는
$(1, 1)$의 1개
(ii) $x+4y=6$일 때, 순서쌍 (x, y)는
$(2, 1)$의 1개
(iii) $x+4y=7$일 때, 순서쌍 (x, y)는
$(3, 1)$의 1개
(iv) $x+4y=8$일 때, 순서쌍 (x, y)는
$(4, 1)$의 1개
(v) $x+4y=9$일 때, 순서쌍 (x, y)는
$(5, 1)$, $(1, 2)$의 2개
이상에서 구하는 순서쌍의 개수는
$1+1+1+1+2=6$

0936 500원, 1000원, 2000원짜리 우표를 각각 x장, y장, z장 산다고 하면
$500x+1000y+2000z=7000$
$\therefore x+2y+4z=14$
이때 세 종류의 우표가 적어도 한 장씩은 포함되어야 하므로 x, y, z는 자연수이다.
(i) $z=1$일 때, $x+2y=10$이므로 순서쌍 (x, y)는
$(8, 1)$, $(6, 2)$, $(4, 3)$, $(2, 4)$의 4개
(ii) $z=2$일 때, $x+2y=6$이므로 순서쌍 (x, y)는
$(4, 1)$, $(2, 2)$의 2개
(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는
$4+2=6$ 답 ③

0937 백의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은
2, 3, 5, 7의 4개
십의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은
3, 6, 9의 3개

일의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은

$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9$의 5개

따라서 구하는 홀수의 개수는

$4\times3\times5=60$ 답 **60**

0938 $(x+y+z)(p+q+r+s)$를 전개할 때, x, y, z에 p, q, r, s를 각각 곱하여 항이 만들어지므로 항의 개수는

$3\times4=12$ …… ㉠

이때 $(x+y+z)(p+q+r+s)(a+b)$를 전개하면 $(x+y+z)(p+q+r+s)$를 전개하여 만들어지는 항들에 a, b를 각각 곱하여 항이 만들어지므로 ㉠에서 구하는 항의 개수는

$12\times2=24$ 답 **24**

0939 십의 자리의 숫자를 x, 일의 자리의 숫자를 y라 할 때, $x+y$의 값이 홀수이려면 x는 홀수, y는 0 또는 짝수이거나 x는 짝수, y는 홀수이어야 한다.

(i) x는 홀수, y는 0 또는 짝수인 경우

x가 될 수 있는 숫자는 $1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9$의 5개

y가 될 수 있는 숫자는 $0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8$의 5개

따라서 두 자리 자연수의 개수는 $5\times5=25$

(ii) x는 짝수, y는 홀수인 경우

x가 될 수 있는 숫자는 $2,\ 4,\ 6,\ 8$의 4개

y가 될 수 있는 숫자는 $1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9$의 5개

따라서 두 자리 자연수의 개수는 $4\times5=20$

(i), (ii)에서 구하는 두 자리 자연수의 개수는

$25+20=45$ 답 ④

0940 세 주사위 A, B, C를 동시에 던질 때, 나오는 수의 곱이 짝수인 경우의 수는 전체 경우의 수에서 수의 곱이 홀수인 경우의 수를 뺀 것과 같다.

이때 전체 경우의 수는

$4\times4\times4=64$

세 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 수의 곱이 홀수이려면 세 수가 모두 홀수이어야 한다.

정사면체 모양의 주사위에서 홀수는 1, 3이므로 수의 곱이 홀수인 경우의 수는

$2\times2\times2=8$

따라서 구하는 경우의 수는

$64-8=56$ 답 **56**

0941 240과 600의 양의 공약수의 개수는 240과 600의 최대공약수의 양의 약수의 개수와 같다.

240을 소인수분해하면 $240=2^4\times3\times5$

600을 소인수분해하면 $600=2^3\times3\times5^2$

즉 240과 600의 최대공약수는

$2^3\times3\times5$

2^3의 양의 약수는 $1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3$의 4개

3의 양의 약수는 $1,\ 3$의 2개

5의 양의 약수는 $1,\ 5$의 2개

따라서 구하는 양의 공약수의 개수는

$4\times2\times2=16$ 답 **16**

0942 $10^n=(2\times5)^n=2^n\times5^n$

2^n의 양의 약수는 $1,\ 2,\ 2^2,\ \cdots,\ 2^n$의 $(n+1)$개

5^n의 양의 약수는 $1,\ 5,\ 5^2,\ \cdots,\ 5^n$의 $(n+1)$개

따라서 10^n의 양의 약수의 개수는

$(n+1)(n+1)=(n+1)^2$

이때 $(n+1)^2=100$이므로

$n+1=\pm10$ $\quad\therefore n=9$ ($\because$ n은 자연수)

답 **9**

0943 48을 소인수분해하면

$48=2^4\times3$

2^4의 양의 약수는 $1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3,\ 2^4$의 5개

3의 양의 약수는 $1,\ 3$의 2개

따라서 48의 양의 약수의 개수는

$5\times2=10$ $\quad\therefore x=10$

48의 양의 약수의 총합은

$(1+2+2^2+2^3+2^4)\times(1+3)=31\times4=124$

이므로 $y=124$

$\therefore x+y=10+124=134$

답 **134**

0944 360을 소인수분해하면

$360=2^3\times3^2\times5$ … 1단계

360의 양의 약수 중 짝수는 $2^2\times3^2\times5$의 양의 약수에 2를 곱한 것과 같다.

2^2의 양의 약수는 $1,\ 2,\ 2^2$의 3개

3^2의 양의 약수는 $1,\ 3,\ 3^2$의 3개

5의 양의 약수는 $1,\ 5$의 2개

$\therefore a=3\times3\times2=18$ … 2단계

360의 양의 약수 중 5의 배수는 $2^3\times3^2$의 양의 약수에 5를 곱한 것과 같다.

2^3의 양의 약수는 $1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3$의 4개

3^2의 양의 약수는 $1,\ 3,\ 3^2$의 3개

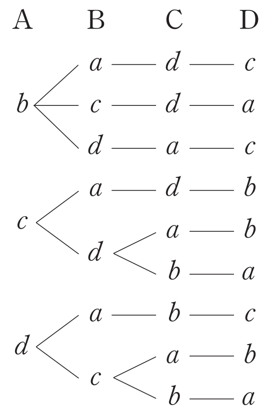
$\therefore b=4\times3=12$ … 3단계

$\therefore a-b=18-12=6$ … 4단계

답 **6**

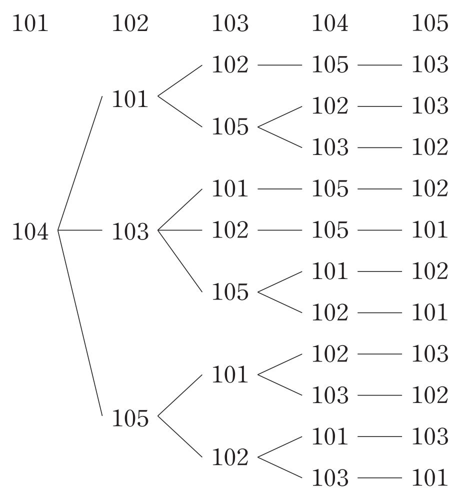
채점 요소		비율
1단계	360을 소인수분해하기	10 %
2단계	a의 값 구하기	40 %
3단계	b의 값 구하기	40 %
4단계	$a-b$의 값 구하기	10 %

0945 A, B, C, D가 가지고 온 책을 각각 a, b, c, d라 할 때, 자신이 가져온 책은 자신이 읽지 않도록 책을 바꾸어 읽는 경우를 수형도로 나타내면 다음과 같다.



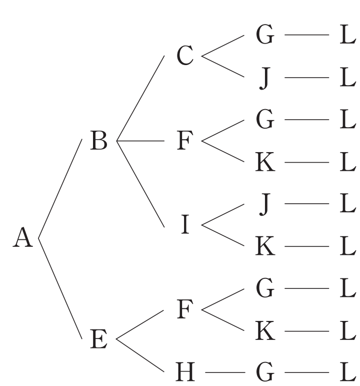
따라서 구하는 경우의 수는 9이다. 답 **9**

0946 101호에는 104호의 번호표가 붙고 나머지 방에는 원래 방의 번호표가 아닌 다른 방의 번호표가 붙는 경우를 수형도로 나타내면 다음과 같다.



따라서 구하는 경우의 수는 11이다. 답 **11**

0947 꼭짓점 A에서 출발하여 꼭짓점 D를 통과하지 않고 꼭짓점 L에 도착하는 최단 경로를 수형도로 나타내면 다음과 같다.



따라서 구하는 경로의 수는 9이다. 답 **9**

0948 100원짜리 동전을 지불하는 방법은

0개, 1개, 2개의 3가지

50원짜리 동전을 지불하는 방법은

0개, 1개, 2개, 3개의 4가지

10원짜리 동전을 지불하는 방법은

0개, 1개, 2개, 3개, 4개의 5가지

이때 0원을 지불하는 경우는 제외해야 하므로 지불하는 방법의 수는

$3\times4\times5-1=59$ 답 **59**

0949 500원짜리 동전 2개로 지불하는 금액과 1000원짜리 지폐 1장으로 지불하는 금액이 같으므로 1000원짜리 지폐 2장을 500원짜리 동전 4개로 바꾸어 생각하면 지불할 수 있는 금액의 수는 500원짜리 동전 6개와 100원짜리 동전 4개로 지불할 수 있는 금액의 수와 같다.

500원짜리 동전 6개로 지불할 수 있는 금액은

0원, 500원, 1000원, ⋯, 3000원의 7가지

100원짜리 동전 4개로 지불할 수 있는 금액은

0원, 100원, 200원, 300원, 400원의 5가지

이때 0원을 지불하는 경우는 제외해야 하므로 지불할 수 있는 금액의 수는

$7\times5-1=34$ 답 ⑤

0950 (i) 지불하는 방법의 수

10000원짜리 지폐를 지불하는 방법은

0장, 1장, 2장, 3장의 4가지

5000원짜리 지폐를 지불하는 방법은

0장, 1장, 2장의 3가지

1000원짜리 지폐를 지불하는 방법은

0장, 1장, 2장, 3장, 4장, 5장, 6장의 7가지

이때 0원을 지불하는 경우는 제외해야 하므로 지불하는 방법의 수는

$4\times3\times7-1=83$ $\quad\therefore a=83$ ⋯ 1단계

(ii) 지불할 수 있는 금액의 수

5000원짜리 지폐 2장으로 지불하는 금액과 10000원짜리 지폐 1장으로 지불하는 금액이 같고, 1000원짜리 지폐 5장으로 지불하는 금액과 5000원짜리 지폐 1장으로 지불하는 금액이 같으므로 10000원짜리 지폐 3장과 5000원짜리 지폐 2장을 모두 1000원짜리 지폐 40장으로 바꾸어 생각하면 지불할 수 있는 금액의 수는 1000원짜리 지폐 46장으로 지불할 수 있는 금액의 수와 같다.

1000원짜리 지폐 46장으로 지불할 수 있는 금액은

0원, 1000원, 2000원, ⋯, 46000원의 47가지

이때 0원을 지불하는 경우는 제외해야 하므로 지불할 수 있는 금액의 수는

$47-1=46$ $\quad\therefore b=46$ ⋯ 2단계

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a-b=83-46=37$ ··· 3단계

답 37

채점 요소		비율
1단계	a의 값 구하기	40 %
2단계	b의 값 구하기	50 %
3단계	$a-b$의 값 구하기	10 %

0951 (ⅰ) A→B→C→D로 가는 경우의 수는

$2\times3\times2=12$

(ⅱ) A→C→B→D로 가는 경우의 수는

$1\times3\times1=3$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는

$12+3=15$

답 15

0952 (ⅰ) A→C→B→D→A로 가는 경우의 수는

$1\times2\times2\times3=12$

(ⅱ) A→D→B→C→A로 가는 경우의 수는

$3\times2\times2\times1=12$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는

$12+12=24$

답 24

0953 (ⅰ) A→B→C로 가는 경우의 수는

$4\times3=12$

(ⅱ) A→B→D→C로 가는 경우의 수는

$4\times2\times2=16$

(ⅲ) A→D→B→C로 가는 경우의 수는

$1\times2\times3=6$

(ⅳ) A→D→C로 가는 경우의 수는

$1\times2=2$

이상에서 구하는 경우의 수는

$12+16+6+2=36$

답 ③

0954 A에 칠할 수 있는 색은 4가지

B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지

C에 칠할 수 있는 색은 A와 B에 칠한 색을 제외한 2가지

D에 칠할 수 있는 색은 A와 C에 칠한 색을 제외한 2가지

따라서 구하는 방법의 수는

$4\times3\times2\times2=48$

답 48

0955 C에 칠할 수 있는 색은 5가지

B에 칠할 수 있는 색은 C에 칠한 색을 제외한 4가지

A에 칠할 수 있는 색은 C에 칠한 색을 제외한 4가지

D에 칠할 수 있는 색은 A와 C에 칠한 색을 제외한 3가지

E에 칠할 수 있는 색은 D에 칠한 색을 제외한 4가지

따라서 구하는 방법의 수는

$5\times4\times4\times3\times4=960$

답 960

0956 (ⅰ) B와 D에 같은 색을 칠하는 경우

A에 칠할 수 있는 색은 5가지

B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 4가지

C에 칠할 수 있는 색은 A와 B에 칠한 색을 제외한 3가지

D에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색과 같은 색이므로 1가지

E에 칠할 수 있는 색은 A와 B에 칠한 색을 제외한 3가지

따라서 이 경우의 칠하는 방법의 수는

$5\times4\times3\times1\times3=180$

(ⅱ) B와 D에 다른 색을 칠하는 경우

A에 칠할 수 있는 색은 5가지

B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 4가지

C에 칠할 수 있는 색은 A와 B에 칠한 색을 제외한 3가지

D에 칠할 수 있는 색은 A, B, C에 칠한 색을 제외한 2가지

E에 칠할 수 있는 색은 A, B, D에 칠한 색을 제외한 2가지

따라서 이 경우의 칠하는 방법의 수는

$5\times4\times3\times2\times2=240$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 방법의 수는

$180+240=420$

답 420

다른 풀이 (ⅰ) 모두 다른 색을 칠하는 방법의 수는

$5\times4\times3\times2\times1=120$

(ⅱ) B와 D에만 같은 색을 칠하는 방법의 수는

$5\times4\times3\times1\times2=120$

(ⅲ) C와 E에만 같은 색을 칠하는 방법의 수는

$5\times4\times3\times2\times1=120$

(ⅳ) B와 D, C와 E에 각각 같은 색을 칠하는 방법의 수는

$5\times4\times3\times1\times1=60$

이상에서 구하는 경우의 수는

$120+120+120+60=420$

0957 a와 f를 한 문자로 생각하여 5개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$5!=120$

a와 f가 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$120\times2=240$

답 240

0958 여학생 4명을 한 사람으로 생각하여 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$4!=24$

여학생 4명이 자리를 바꾸는 경우의 수는 $4!=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$24\times24=576$

답 576

0959 고등학생 3명을 한 사람으로 생각하여 $(n+1)$명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$(n+1)!$

고등학생 3명이 자리를 바꾸는 경우의 수는 $3!=6$
따라서 $(n+1)!\times 6=720$이므로
$(n+1)!=120=5!$, $n+1=5$
$\therefore n=4$

답 ③

0960 (i) a와 b가 이웃하도록 나열하는 경우
a와 b를 한 문자로 생각하여 4개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $4!=24$
a와 b가 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$
따라서 a와 b가 이웃하도록 나열하는 경우의 수는
$24\times 2=48$
(ii) b와 c가 이웃하도록 나열하는 경우
(i)과 같은 방법으로 구하면 b와 c가 이웃하도록 나열하는 경우의 수는
$24\times 2=48$
(iii) a와 b, b와 c가 모두 이웃하도록 나열하는 경우
a, b, c를 한 문자로 생각하여 3개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $3!=6$
이때 a와 b, b와 c가 모두 이웃하는 경우는 abc, cba의 2가지이므로 a와 b, b와 c가 모두 이웃하도록 나열하는 경우의 수는
$6\times 2=12$
이상에서 구하는 경우의 수는
$48+48-12=84$

답 84

0961 축구 선수 3명을 일렬로 세우는 경우의 수는
$3!=6$
축구 선수의 사이사이와 양 끝의 4개의 자리 중 2개의 자리에 야구 선수 2명을 세우는 경우의 수는
${}_4P_2=12$
따라서 구하는 경우의 수는
$6\times 12=72$

답 72

다른 풀이 5명의 선수를 일렬로 세우는 경우의 수는
$5!=120$
야구 선수끼리 이웃하도록 세우는 경우의 수는
$4!\times 2!=24\times 2=48$
따라서 구하는 경우의 수는
$120-48=72$

0962 5개의 자음 d, s, c, v, r를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $5!=120$ … 1단계
자음의 사이사이와 양 끝의 6개의 자리 중 3개의 자리에 모음 i, o, e를 나열하는 경우의 수는
${}_6P_3=120$ … 2단계
따라서 구하는 경우의 수는
$120\times 120=14400$ … 3단계

답 14400

채점 요소		비율
1단계	자음을 나열하는 경우의 수 구하기	30 %
2단계	모음을 나열하는 경우의 수 구하기	50 %
3단계	모음끼리 이웃하지 않도록 나열하는 경우의 수 구하기	20 %

0963 A와 B를 한 사람으로 생각하여 C, D를 제외한 3명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $3!=6$
A와 B가 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$
일렬로 세운 3명의 사이사이와 양 끝의 4개의 자리 중 2개의 자리에 C와 D를 세우는 경우의 수는 ${}_4P_2=12$
따라서 구하는 경우의 수는
$6\times 2\times 12=144$

답 ③

0964 어른 3명 중 2명을 택하여 양 끝에 세우는 경우의 수는
${}_3P_2=6$
양 끝에 세운 어른 2명을 제외한 나머지 3명을 일렬로 세우는 경우의 수는
$3!=6$
따라서 구하는 경우의 수는
$6\times 6=36$

답 36

0965 1반 학생이 4명, 2반 학생이 3명이므로 1반 학생 4명을 일렬로 세우고 그 사이사이에 2반 학생 3명을 세우면 된다.
1반 학생 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는
$4!=24$
1반 학생 4명의 사이사이에 2반 학생 3명을 세우는 경우의 수는
$3!=6$
따라서 구하는 경우의 수는
$24\times 6=144$

답 ④

0966 s와 e를 제외한 6개의 문자 중 2개의 문자를 택하여 s와 e 사이에 나열하는 경우의 수는
${}_6P_2=30$
s, e와 그 사이의 2개의 문자를 한 문자로 생각하여 5개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$5!=120$
s와 e가 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$
따라서 구하는 경우의 수는
$30\times 120\times 2=7200$

답 7200

0967 4개의 홀수 번째 자리 중 2개의 자리에 모음 o, i를 나열하는 경우의 수는
${}_4P_2=12$
나머지 5개의 자리에 자음 c, n, f, r, m을 나열하는 경우의 수는
$5!=120$
따라서 구하는 경우의 수는
$12\times 120=1440$

답 1440

0968 7개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$7!=5040$

자음은 p, c, t, r의 4개이므로 양 끝에 모두 자음이 오도록 나열하는 경우의 수는

${}_4P_2\times5!=1440$

따라서 구하는 경우의 수는

$5040-1440=3600$ 답 ②

0969 9명의 학생 중에서 반장 1명, 부반장 1명을 뽑는 경우의 수는 9명 중에서 2명을 뽑는 순열의 수와 같으므로

${}_9P_2=72$

반장, 부반장으로 모두 여학생이 뽑히는 경우의 수는 여학생 4명 중에서 2명을 뽑는 순열의 수와 같으므로

${}_4P_2=12$

따라서 구하는 경우의 수는

$72-12=60$ 답 **60**

0970 7개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$7!=5040$ … 1단계

모음 a, i, o 중 어느 것도 이웃하지 않도록 나열하는 경우의 수는 4개의 자음 m, l, b, x를 일렬로 나열한 다음 자음의 사이사이와 양 끝의 5개의 자리에 모음 a, i, o를 나열하는 경우의 수와 같으므로

$4!\times{}_5P_3=24\times60=1440$ … 2단계

따라서 구하는 경우의 수는

$5040-1440=3600$ … 3단계

답 **3600**

채점 요소	비율
1단계 7개의 문자를 나열하는 경우의 수 구하기	20 %
2단계 모음끼리 이웃하지 않는 경우의 수 구하기	50 %
3단계 적어도 두 개의 모음이 이웃하도록 나열하는 경우의 수 구하기	30 %

0971 6개의 자연수를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$6!=720$

홀수의 개수를 n $(n\geq2)$이라 하면 양 끝에 홀수가 오도록 나열하는 경우의 수는

${}_nP_2\times4!=24n(n-1)$

따라서 적어도 한쪽 끝에 짝수가 오도록 나열하는 경우의 수는

$720-24n(n-1)$

즉 $720-24n(n-1)=432$이므로

$24n(n-1)=288,\qquad n(n-1)=12=4\times3$

$\therefore n=4$

따라서 짝수의 개수는

$6-4=2$ 답 **2**

0972 세 자리 자연수가 짝수이려면 일의 자리의 숫자가 0 또는 짝수이어야 한다.

(i) 일의 자리의 숫자가 0인 경우

백의 자리, 십의 자리에는 1, 2, 3, 4, 5의 5개의 숫자 중 2개를 택하여 나열하면 되므로

${}_5P_2=20$

(ii) 일의 자리의 숫자가 2 또는 4인 경우

백의 자리에 올 수 있는 숫자는 0과 일의 자리의 숫자를 제외한 4개이고, 십의 자리에 올 수 있는 숫자는 백의 자리와 일의 자리의 숫자를 제외한 4개이므로

$2\times4\times4=32$

(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는

$20+32=52$ 답 **52**

0973 홀수는 1, 3이므로 천의 자리와 일의 자리에 홀수가 오는 경우의 수는

$2!=2$

백의 자리와 십의 자리에는 0, 2, 4 중 2개를 택하여 나열하면 되므로 그 경우의 수는

${}_3P_2=6$

따라서 구하는 자연수의 개수는 $2\times6=12$ 답 **12**

0974 3의 배수는 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수이다.

6개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6 중에서 서로 다른 3개를 택했을 때, 그 합이 3의 배수가 되는 경우는

(1, 2, 3), (1, 2, 6), (1, 3, 5), (1, 5, 6),

(2, 3, 4), (2, 4, 6), (3, 4, 5), (4, 5, 6)의 8가지

이때 택한 3개의 숫자로 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는

$3!=6$

따라서 구하는 3의 배수의 개수는

$8\times6=48$ 답 **48**

0975 4의 배수는 끝의 두 자리의 수가 4의 배수이다.

(i) □□04, □□20, □□40의 꼴인 경우

천의 자리, 백의 자리에는 끝의 두 자리에 온 숫자를 제외한 3개의 숫자 중 2개를 택하여 나열하면 되므로

$3\times{}_3P_2=3\times6=18$ … 1단계

(ii) □□12, □□24, □□32의 꼴인 경우

천의 자리에 올 수 있는 숫자는 0과 끝의 두 자리에 온 숫자를 제외한 2개이고, 백의 자리에 올 수 있는 숫자는 천의 자리와 끝의 두 자리에 온 숫자를 제외한 2개이므로

$3\times(2\times2)=12$ … 2단계

(i), (ii)에서 구하는 4의 배수의 개수는

$18+12=30$ … 3단계

답 **30**

채점 요소	비율
1단계 □□04, □□20, □□40의 꼴인 자연수의 개수 구하기	40 %
2단계 □□12, □□24, □□32의 꼴인 자연수의 개수 구하기	40 %
3단계 4의 배수의 개수 구하기	20 %

0976 4500보다 큰 자연수는

45□□, 46□□, 5□□□, 6□□□

의 꼴이다.

45□□의 꼴의 자연수의 개수는 $_5P_2=20$

46□□의 꼴의 자연수의 개수는 $_5P_2=20$

5□□□의 꼴의 자연수의 개수는 $_6P_3=120$

6□□□의 꼴의 자연수의 개수는 $_6P_3=120$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$20+20+120+120=280$

답 **280**

0977 a□□□□의 꼴의 문자열의 개수는 $4!=24$

b□□□□의 꼴의 문자열의 개수는 $4!=24$

ca□□□의 꼴의 문자열의 개수는 $3!=6$

cb□□□의 꼴의 문자열의 개수는 $3!=6$

a로 시작하는 문자열부터 cb로 시작하는 문자열까지의 총개수는

$24+24+6+6=60$

따라서 61번째에 오는 문자열은 $cdabe$이다.

답 ②

0978 1□□□□의 꼴의 자연수의 개수는 $4!=24$

20□□□의 꼴의 자연수의 개수는 $3!=6$

21□□□의 꼴의 자연수의 개수는 $3!=6$

10234부터 21430까지의 자연수의 개수는

$24+6+6=36$

따라서 40번째에 오는 수는 23□□□의 꼴의 네 번째 수이므로

23014, 23041, 23104, 23140, ⋯

에서 23140이다.

답 **23140**

0979 C□□□□□의 꼴의 문자열의 개수는 $5!=120$

E□□□□□의 꼴의 문자열의 개수는 $5!=120$

ICE□□□의 꼴의 문자열의 개수는 $3!=6$

ICNE□□의 꼴의 문자열은 순서대로

ICNEPR, ICNERP의 2개

따라서 ICNERP는

$120+120+6+2=248$(번째)

에 온다.

답 **248번째**

시험에 꼭 나오는 문제

● 본책 139~141쪽

0980 두 주사위에서 나오는 눈의 수의 차가 홀수가 되는 경우는 눈의 수의 차가 1 또는 3 또는 5인 경우이다.

두 주사위에서 나오는 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면

(i) 눈의 수의 차가 1인 경우는

(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6),
(6, 5), (5, 4), (4, 3), (3, 2), (2, 1)의 10가지

(ii) 눈의 수의 차가 3인 경우는

(1, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 1), (5, 2), (6, 3)의 6가지

(iii) 눈의 수의 차가 5인 경우는

(1, 6), (6, 1)의 2가지

이상에서 구하는 경우의 수는

$10+6+2=18$

답 ④

0981 x, y가 음이 아닌 정수이므로 $2\le x+y\le 5$를 만족시키는 경우는

$x+y=2$, $x+y=3$, $x+y=4$, $x+y=5$

(i) $x+y=2$일 때, 순서쌍 (x, y)는

(0, 2), (1, 1), (2, 0)의 3개

(ii) $x+y=3$일 때, 순서쌍 (x, y)는

(0, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 0)의 4개

(iii) $x+y=4$일 때, 순서쌍 (x, y)는

(0, 4), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (4, 0)의 5개

(iv) $x+y=5$일 때, 순서쌍 (x, y)는

(0, 5), (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1), (5, 0)의 6개

이상에서 구하는 순서쌍의 개수는

$3+4+5+6=18$

답 **18**

다른 풀이 (i) $x=0$일 때, $2\le y\le 5$이므로 순서쌍 (x, y)는

(0, 2), (0, 3), (0, 4), (0, 5)의 4개

(ii) $x=1$일 때, $1\le y\le 4$이므로 순서쌍 (x, y)는

(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)의 4개

(iii) $x=2$일 때, $0\le y\le 3$이므로 순서쌍 (x, y)는

(2, 0), (2, 1), (2, 2), (2, 3)의 4개

(iv) $x=3$일 때, $0\le y\le 2$이므로 순서쌍 (x, y)는

(3, 0), (3, 1), (3, 2)의 3개

(v) $x=4$일 때, $0\le y\le 1$이므로 순서쌍 (x, y)는

(4, 0), (4, 1)의 2개

(vi) $x=5$일 때, $y=0$이므로 순서쌍 (x, y)는

(5, 0)의 1개

이상에서 구하는 순서쌍의 개수는

$4+4+4+3+2+1=18$

0982 $(x+y+z)(p+q)$의 전개식에서 항의 개수는

$3\times 2=6$

$(x+y)^2(a+b+c)=(x^2+2xy+y^2)(a+b+c)$의 전개식에서 항의 개수는

$3\times 3=9$

이때 $(x+y+z)(p+q)$의 전개식과 $(x+y)^2(a+b+c)$의 전개식에서 동류항이 없으므로 구하는 항의 개수는

$6+9=15$

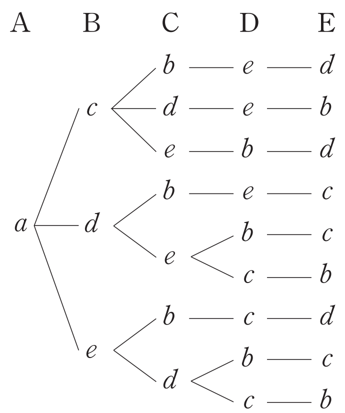
답 **15**

0983 300을 소인수분해하면 $300=2^2\times 3\times 5^2$

이때 300의 양의 약수 중 홀수는 3×5^2의 양의 약수와 같다.

3의 양의 약수는 　1, 3의 2개
5^2의 양의 약수는 　1, 5, 5^2의 3개
따라서 구하는 약수의 개수는 　$2\times3=6$ 　답 ③

0984 다섯 명의 학생을 각각 A, B, C, D, E라 하고 각각의 가방을 a, b, c, d, e라 할 때, A만 자신의 가방을 가져가는 경우를 수형도로 나타내면 다음과 같다.



같은 방법으로 구해 보면 B, C, D, E만 자신의 가방을 가져가는 경우도 각각 9가지씩이다.
따라서 구하는 경우의 수는
$9\times5=45$ 　답 45

0985 (i) 지불하는 방법의 수
100원짜리 동전을 지불하는 방법은
0개, 1개, 2개, 3개, 4개의 5가지
500원짜리 동전을 지불하는 방법은
0개, 1개, 2개의 3가지
1000원짜리 지폐를 지불하는 방법은
0장, 1장의 2가지
이때 0원을 지불하는 경우는 제외해야 하므로 지불하는 방법의 수는
$5\times3\times2-1=29$ 　$\therefore x=29$
(ii) 지불할 수 있는 금액의 수
500원짜리 동전 2개로 지불하는 금액과 1000원짜리 지폐 1장으로 지불하는 금액이 같으므로 1000원짜리 지폐 1장을 500원짜리 동전 2개로 바꾸어 생각하면 지불할 수 있는 금액의 수는 100원짜리 동전 4개와 500원짜리 동전 4개로 지불할 수 있는 금액의 수와 같다.
100원짜리 동전 4개로 지불할 수 있는 금액은
0원, 100원, 200원, 300원, 400원의 5가지
500원짜리 동전 4개로 지불할 수 있는 금액은
0원, 500원, 1000원, 1500원, 2000원의 5가지
이때 0원을 지불하는 경우는 제외해야 하므로 지불할 수 있는 금액의 수는
$5\times5-1=24$ 　$\therefore y=24$
(i), (ii)에서 　$x+y=29+24=53$ 　답 53

0986 (i) A와 C에 같은 색을 칠하는 경우
A에 칠할 수 있는 색은 4가지
B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지
C에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색과 같은 색이므로 1가지
D에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지
따라서 이 경우의 칠하는 방법의 수는
$4\times3\times1\times3=36$
(ii) A와 C에 다른 색을 칠하는 경우
A에 칠할 수 있는 색은 4가지
B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지
C에 칠할 수 있는 색은 A와 B에 칠한 색을 제외한 2가지
D에 칠할 수 있는 색은 A와 C에 칠한 색을 제외한 2가지
따라서 이 경우의 칠하는 방법의 수는
$4\times3\times2\times2=48$
(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는
$36+48=84$ 　답 ③

0987 중학생 2명을 한 사람, 고등학생 3명을 한 사람으로 생각하여 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는
$4!=24$
중학생 2명이 자리를 바꾸는 경우의 수는 　$2!=2$
고등학생 3명이 자리를 바꾸는 경우의 수는 　$3!=6$
따라서 구하는 경우의 수는
$24\times2\times6=288$ 　답 288

0988 의자 3개에만 학생이 앉으므로 빈 의자는 4개이다.
빈 의자의 사이사이와 양 끝의 5개의 자리 중 3개의 자리에 학생이 앉은 의자 3개를 놓으면 되므로 구하는 경우의 수는
${}_5P_3=60$ 　답 60

0989 2학년 학생 4명이 일렬로 앉는 경우의 수는
$4!=24$
이때 조건 ㈎, ㈏를 만족시키려면 2학년 학생이 앉은 의자의 사이사이의 3개의 자리 중 2개의 자리에 1학년 학생이 앉아야 하므로 이 경우의 수는
${}_3P_2=6$
따라서 구하는 경우의 수는
$24\times6=144$ 　답 ③

다른 풀이 조건 ㈏에서 2학년 학생 4명 중 2명이 양 끝에 있는 의자에 앉는 경우의 수는
${}_4P_2=12$
각각의 경우에 1학년 학생이 앉을 수 있는 의자를 ●, 2학년 학생이 앉을 수 있는 의자를 ○라 하면 조건 ㈎에서 나머지 4명의 학생이 4개의 의자에 앉는 경우는
●○○● 또는 ●○●○ 또는 ○●○●
의 3가지이다.

따라서 구하는 경우의 수는

$12\times3\times2!\times2!=144$

0990 (i) 남학생, 여학생의 순서로 교대로 서는 경우

남학생 3명이 한 줄로 서는 경우의 수는

$3!=6$

남학생의 사이사이와 맨 뒤에 여학생 3명이 서는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 남학생, 여학생의 순서로 교대로 서는 경우의 수는

$6\times6=36$

(ii) 여학생, 남학생의 순서로 교대로 서는 경우

(i)과 같은 방법으로 하면 이 경우의 수는

$3!\times3!=6\times6=36$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$36+36=72$

답 72

0991 (i) w와 i 사이에 3개의 문자를 나열하는 경우

w와 i를 제외한 4개의 문자 중 3개의 문자를 택하여 w와 i 사이에 나열하는 경우의 수는 $_4P_3=24$

w, i와 그 사이의 3개의 문자를 한 문자로 생각하여 2개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $2!=2$

w와 i가 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$

따라서 이 경우의 수는

$24\times2\times2=96$

(ii) w와 i 사이에 4개의 문자를 나열하는 경우

w와 i를 제외한 4개의 문자를 w와 i 사이에 나열하는 경우의 수는

$4!=24$

w와 i가 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$

따라서 이 경우의 수는

$24\times2=48$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$96+48=144$

답 ④

0992 5의 배수는 일의 자리의 숫자가 0 또는 5이어야 한다.

(i) 일의 자리의 숫자가 0인 경우

나머지 자리에는 0을 제외한 5개의 숫자 중 3개를 택하여 일렬로 나열하면 되므로

$_5P_3=60$

(ii) 일의 자리의 숫자가 5인 경우

천의 자리에 올 수 있는 숫자는 0과 5를 제외한 4개이고, 백의 자리와 십의 자리에는 천의 자리의 숫자와 5를 제외한 4개의 숫자 중 2개를 택하여 일렬로 나열하면 되므로

$4\times{}_4P_2=4\times12=48$

(i), (ii)에서 구하는 5의 배수의 개수는

$60+48=108$

답 108

0993 a□□□□의 꼴의 문자열의 개수는 $4!=24$

b□□□□의 꼴의 문자열의 개수는 $4!=24$

c□□□□의 꼴의 문자열의 개수는 $4!=24$

da□□□의 꼴의 문자열의 개수는 $3!=6$

db□□□의 꼴의 문자열의 개수는 $3!=6$

a로 시작하는 문자열부터 db로 시작하는 문자열까지의 총개수는

$24+24+24+6+6=84$

따라서 85번째에 오는 문자열은 $dcabe$이므로 마지막 문자는 e이다.

답 e

0994 (i) $z=1$일 때, $x+3y=11$이므로 순서쌍 (x, y)는

$(2, 3), (5, 2), (8, 1)$의 3개

(ii) $z=2$일 때, $x+3y=7$이므로 순서쌍 (x, y)는

$(1, 2), (4, 1)$의 2개 … 1단계

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍의 개수는

$3+2=5$ … 2단계

답 5

채점 요소		비율
1단계	z의 값에 따른 순서쌍 (x, y)의 개수 구하기	70 %
2단계	순서쌍 (x, y, z)의 개수 구하기	30 %

0995 $_nP_4=6{}_nP_2$에서

$n(n-1)(n-2)(n-3)=6n(n-1)$ … 1단계

$_nP_4$에서 $n\geq4$이므로 등식의 양변을 $n(n-1)$로 나누면

$(n-2)(n-3)=6,\quad n^2-5n=0$

$n(n-5)=0\quad\therefore n=5\ (\because n\geq4)$ … 2단계

$\therefore {}_nP_{n-3}={}_5P_2=20$ … 3단계

답 20

채점 요소		비율
1단계	n에 대한 방정식 세우기	30 %
2단계	n의 값 구하기	40 %
3단계	$_nP_{n-3}$의 값 구하기	30 %

0996 $1+2+3+4+5+6=21$이므로 각 세로줄에 적힌 두 수의 합은 $21\div3=7$이어야 한다.

두 수의 합이 7이 되도록 1부터 6까지의 자연수를 나누면

$(1, 6), (2, 5), (3, 4)$ … 1단계

$(1, 6), (2, 5), (3, 4)$를 적을 세로줄을 각각 택하는 경우의 수는

$3!=6$

이때 각 세로줄에서 두 수끼리는 자리를 바꿀 수 있으므로 각 세로줄에 정해진 두 수를 적는 경우의 수는

$2!\times2!\times2!=8$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times8=48$ … 2단계

답 48

채점 요소		비율
1단계	합이 모두 같아지도록 자연수를 나누기	40 %
2단계	조건을 만족시키는 경우의 수 구하기	60 %

0997 5개의 알파벳을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$5!=120$ ··· 1단계

A와 B 사이에 문자가 없도록 나열하는 경우의 수는 A와 B를 이웃하게 나열하는 경우의 수와 같다.

A와 B를 하나의 문자로 생각하여 4개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$4!=24$

A와 B가 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$

즉 A와 B를 이웃하게 나열하는 경우의 수는

$24\times2=48$ ··· 2단계

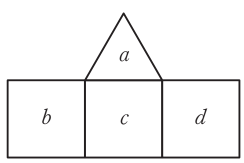
따라서 구하는 경우의 수는

$120-48=72$ ··· 3단계

답 **72**

채점 요소		비율
1단계	5개의 알파벳을 나열하는 경우의 수 구하기	20 %
2단계	A와 B를 이웃하게 나열하는 경우의 수 구하기	50 %
3단계	A와 B 사이에 적어도 하나의 문자가 오도록 나열하는 경우의 수 구하기	30 %

0998 전략 정삼각형에 적힌 수를 기준으로 경우를 나누어 조건을 만족시키는 경우의 수를 구한다.



오른쪽 그림과 같이 정삼각형과 정사각형에 적힌 수를 각각 a, b, c, d라 하자.

조건 (나)에서 b, c, d 중 서로 다른 수는 적어도 2개이어야 하므로 조건 (가)에서 $a\geq3$

(i) $a=3$인 경우

c는 1, 2 중 하나이고, 그 각각에 대하여 b, d는 1, 2 중 c가 아닌 수이어야 한다.

따라서 이 경우의 수는 $2\times1\times1=2$

(ii) $a=4$인 경우

c는 1, 2, 3 중 하나이고, 그 각각에 대하여 b, d는 1, 2, 3 중 c가 아닌 수이어야 한다.

따라서 이 경우의 수는 $3\times2\times2=12$

(iii) $a=5$인 경우

c는 1, 2, 3, 4 중 하나이고, 그 각각에 대하여 b, d는 1, 2, 3, 4 중 c가 아닌 수이어야 한다.

따라서 이 경우의 수는 $4\times3\times3=36$

(iv) $a=6$인 경우

c는 1, 2, 3, 4, 5 중 하나이고, 그 각각에 대하여 b, d는 1, 2, 3, 4, 5 중 c가 아닌 수이어야 한다.

따라서 이 경우의 수는 $5\times4\times4=80$

이상에서 구하는 경우의 수는

$2+12+36+80=130$

답 **130**

0999 전략 B 도시와 C 도시를 잇는 도로를 x개 건설한다고 하고 A 도시에서 D 도시로 가는 경우의 수를 구한다.

B 도시와 C 도시를 잇는 도로를 x개 건설한다고 하면

(i) A → B → D로 가는 경우의 수는

$2\times2=4$

(ii) A → C → D로 가는 경우의 수는

$3\times3=9$

(iii) A → B → C → D로 가는 경우의 수는

$2\times x\times3=6x$

(iv) A → C → B → D로 가는 경우의 수는

$3\times x\times2=6x$

이상에서 A 도시에서 D 도시로 가는 경우의 수는

$4+9+6x+6x=12x+13$

이때 $12x+13\geq100$에서 $12x\geq87$

$\therefore x\geq7.25$

따라서 B 도시와 C 도시를 잇는 도로를 최소 8개 건설해야 한다.

답 **8개**

1000 전략 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리에 각각 1, 2, 3, 4, 5가 몇 번씩 올 수 있는지 구한다.

5개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5 중 서로 다른 3개를 사용하여 만들 수 있는 모든 세 자리 자연수의 백의 자리의 숫자의 합을 S_1, 십의 자리의 숫자의 합을 S_2, 일의 자리의 숫자의 합을 S_3이라 하자.

이때 구하는 모든 자연수의 합은

$100\times S_1+10\times S_2+S_3$ ······ ㉠

한편 1□□, 2□□, 3□□, 4□□, 5□□의 꼴인 자연수의 개수는 각각

${}_4P_2=12$

따라서 S_1은 1부터 5까지의 자연수를 12개씩 더한 값과 같으므로

$S_1=(1+2+3+4+5)\times12=180$

같은 방법으로 하면 $S_2=180$, $S_3=180$

따라서 구하는 합은 ㉠에서

$100\times180+10\times180+180=19980$

답 **19980**

11 조합

교과서 문제 정복하기

본책 143쪽

1001 ${}_8C_3=\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56$ 답 **56**

1002 답 **1**

1003 답 **1**

1004 ${}_{15}C_{14}={}_{15}C_{15-14}={}_{15}C_1=15$ 답 **15**

참고ㅣ ${}_nC_r$의 값을 구할 때 $r>n-r$인 경우에는 ${}_nC_r={}_nC_{n-r}$임을 이용하면 계산을 간단히 할 수 있다.

1005 ${}_nC_3=10$에서 $\frac{n(n-1)(n-2)}{3\times2\times1}=10$

$n(n-1)(n-2)=5\times4\times3 \qquad \therefore n=5$ 답 **5**

1006 ${}_{n+2}C_2=36$에서 $\frac{(n+2)(n+1)}{2\times1}=36$

$(n+2)(n+1)=9\times8 \qquad \therefore n=7$ 답 **7**

1007 ${}_8C_r=70$에서 $\frac{8!}{r!(8-r)!}=70$

$8!=70\times r!(8-r)!$

$8\times6\times4\times3=r!(8-r)!$

$4!\times4!=r!(8-r)! \qquad \therefore r=4$ 답 **4**

1008 ${}_nC_2={}_nC_{n-2}$이므로 ${}_nC_2={}_nC_7$에서

$n-2=7 \qquad \therefore n=9$ 답 **9**

1009 ${}_{10}C_r={}_{10}C_{10-r}$이므로 ${}_{10}C_r={}_{10}C_{r+4}$에서

$r=r+4$ 또는 $10-r=r+4$

이때 $r\neq r+4$이므로 $10-r=r+4$

$-2r=-6 \qquad \therefore r=3$ 답 **3**

1010 ${}_5C_3+{}_5C_2={}_6C_3$이므로 $r=3$ 답 **3**

1011 7명 중에서 2명을 택하는 조합의 수와 같으므로

${}_7C_2=\frac{7\times6}{2\times1}=21$ 답 **21**

1012 10명 중에서 4명을 택하는 조합의 수와 같으므로

${}_{10}C_4=\frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}=210$ 답 **210**

1013 8명 중에서 2명을 택하는 조합의 수와 같으므로

${}_8C_2=\frac{8\times7}{2\times1}=28$ 답 **28**

1014 9명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

${}_9C_3=\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}=84$ 답 **84**

1015 남자 5명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는

${}_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$

여자 4명 중에서 1명을 뽑는 경우의 수는

${}_4C_1=4$

따라서 구하는 경우의 수는

$10\times4=40$ 답 **40**

1016 지호를 제외한 9명의 학생 중에서 2명의 발표자를 뽑고 각각의 경우에 지호를 포함하면 되므로 구하는 경우의 수는

${}_9C_2=\frac{9\times8}{2\times1}=36$ 답 **36**

1017 현진이를 제외한 9명의 학생 중에서 3명의 발표자를 뽑으면 되므로 구하는 경우의 수는

${}_9C_3=\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}=84$ 답 **84**

1018 지호와 현진이를 제외한 8명의 학생 중에서 2명의 발표자를 뽑고 각각의 경우에 지호를 포함하면 되므로 구하는 경우의 수는

${}_8C_2=\frac{8\times7}{2\times1}=28$ 답 **28**

1019 서로 다른 책 9권을 4권, 3권, 2권의 세 묶음으로 나누는 경우의 수는

${}_9C_4\times{}_5C_3\times{}_2C_2=126\times10\times1=1260$

답 **1260**

1020 서로 다른 책 9권을 5권, 2권, 2권의 세 묶음으로 나누는 경우의 수는

${}_9C_5\times{}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{2!}=126\times6\times1\times\frac{1}{2}=378$

답 **378**

1021 서로 다른 책 9권을 3권, 3권, 3권의 세 묶음으로 나누는 경우의 수는

${}_9C_3\times{}_6C_3\times{}_3C_3\times\frac{1}{3!}=84\times20\times1\times\frac{1}{6}=280$

답 **280**

1022 서로 다른 빵 5개를 2개, 2개, 1개의 세 묶음으로 나누는 경우의 수는

${}_5C_2\times{}_3C_2\times{}_1C_1\times\frac{1}{2!}=10\times3\times1\times\frac{1}{2}=15$

세 묶음을 3명에게 나누어 주는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$15\times6=90$ **답 90**

유형 익히기

• 본책 144~150쪽

1023 ${}_{n}P_{3}=120$에서

$n(n-1)(n-2)=6\times5\times4 \qquad \therefore n=6$

$\therefore {}_{n}C_{3}+{}_{n}P_{2}={}_{6}C_{3}+{}_{6}P_{2}=20+30=50$ **답 ⑤**

1024 ${}_{13}C_{r+2}={}_{13}C_{3r-1}$에서

$r+2=3r-1$ 또는 $13-(r+2)=3r-1$

(i) $r+2=3r-1$에서 $\qquad -2r=-3$

$\therefore r=\dfrac{3}{2}$

이때 r는 자연수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $13-(r+2)=3r-1$에서 $\qquad -4r=-12$

$\therefore r=3$

(i), (ii)에서 $\qquad r=3$ **답 3**

1025 ${}_{2n}P_{5}=10k\times{}_{2n}C_{5}$에서

${}_{2n}P_{5}=10k\times\dfrac{{}_{2n}P_{5}}{5!}, \qquad 10k=5!=120$

$\therefore k=12$ **답 ②**

1026 이차방정식 ${}_{n}C_{3}x^{2}-{}_{n}C_{5}x+{}_{n}C_{7}=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=\dfrac{{}_{n}C_{5}}{{}_{n}C_{3}},\ \alpha\beta=\dfrac{{}_{n}C_{7}}{{}_{n}C_{3}}$

이때 $\alpha+\beta=1$이므로 $\qquad \dfrac{{}_{n}C_{5}}{{}_{n}C_{3}}=1$

${}_{n}C_{5}={}_{n}C_{3}, \qquad n-5=3 \qquad \therefore n=8$

$\therefore \alpha\beta=\dfrac{{}_{8}C_{7}}{{}_{8}C_{3}}=\dfrac{8}{56}=\dfrac{1}{7}$ **답 $\dfrac{1}{7}$**

1027 $n\times{}_{n-1}C_{r-1}=n\times\dfrac{(n-1)!}{(r-1)!\{n-1-(r-1)\}!}$

$=\dfrac{n\times(n-1)!}{(r-1)!\boxed{(n-r)!}}$

$=\dfrac{\boxed{n!}}{(r-1)!(n-r)!}$

$=r\times\dfrac{n!}{\boxed{r!}(n-r)!}=r\times{}_{n}C_{r}$

$\therefore$ (가) $(n-r)!$ (나) $n!$ (다) $r!$

답 (가) $(n-r)!$ (나) $n!$ (다) $r!$

1028 ${}_{n-1}C_{r}+{}_{n-1}C_{r-1}$

$=\dfrac{(n-1)!}{r!\{(n-1)-r\}!}+\dfrac{(n-1)!}{(r-1)!\{n-1-(r-1)\}!}$

$=\dfrac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!}+\dfrac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}$

$=\dfrac{(\boxed{n-r})\times(n-1)!}{r!(n-r)!}+\dfrac{\boxed{r}\times(n-1)!}{r!(n-r)!}$

$=\dfrac{\{(n-r)+r\}(n-1)!}{r!(n-r)!}$

$=\dfrac{\boxed{n}\times(n-1)!}{r!(n-r)!}$

$=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}={}_{n}C_{r}$

$\therefore$ (가) $n-r$ (나) r (다) n

답 (가) $n-r$ (나) r (다) n

RPM 비법노트

${}_{n}C_{r}$는 서로 다른 n개에서 순서를 생각하지 않고 r개를 택하는 경우의 수이므로 r개 중에 특정한 대상 A를 포함하지 않는 경우와 포함하는 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(i) r개 중에 A가 포함되지 않는 경우

A를 제외한 $(n-1)$개에서 r개를 택하면 되므로 이 경우의 수는

${}_{n-1}C_{r}$

(ii) r개 중에 A가 포함되는 경우

A를 먼저 택한 후 A를 제외한 $(n-1)$개에서 $(r-1)$개를 택하면 되므로 이 경우의 수는

${}_{n-1}C_{r-1}$

(i), (ii)에서 $\qquad {}_{n}C_{r}={}_{n-1}C_{r}+{}_{n-1}C_{r-1}$

1029 남자 5명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

${}_{5}C_{3}={}_{5}C_{2}=10$

여자 5명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

${}_{5}C_{3}={}_{5}C_{2}=10$

따라서 구하는 경우의 수는

$10+10=20$ **답 20**

1030 두 수의 합이 짝수가 되려면 두 수가 모두 짝수이거나 두 수가 모두 홀수이어야 한다.

(i) 두 수가 모두 홀수인 경우

홀수 1, 3, 5, 7, 9가 적힌 5장의 카드 중에서 2장의 카드를 뽑는 경우의 수는

${}_{5}C_{2}=10$

(ii) 두 수가 모두 짝수인 경우

짝수 2, 4, 6, 8이 적힌 4장의 카드 중에서 2장의 카드를 뽑는 경우의 수는

${}_{4}C_{2}=6$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$10+6=16$ **답 16**

1031 n개의 팀이 참가했다고 하면 모든 팀이 다른 팀과 각각 1번씩 경기를 하는 경우의 수는

$${}_{n}C_{2}$$

이때 모든 팀이 다른 팀과 각각 5번씩 경기를 했으므로

$$5\times{}_{n}C_{2}=140,\qquad {}_{n}C_{2}=28$$

$$\frac{n(n-1)}{2\times1}=28,\qquad n(n-1)=8\times7$$

$$\therefore n=8$$

답 ③

1032 빨간색 꽃 n송이 중에서 3송이를 택하는 경우의 수는

$${}_{n}C_{3}$$

노란색 꽃 5송이 중에서 2송이를 택하는 경우의 수는

$${}_{5}C_{2}=10$$

주황색 꽃 3송이 중에서 1송이를 택하는 경우의 수는

$${}_{3}C_{1}=3$$

이때 꽃다발을 만드는 경우의 수가 120이므로

$${}_{n}C_{3}\times10\times3=120,\qquad {}_{n}C_{3}=4$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{3\times2\times1}=4$$

$$n(n-1)(n-2)=4\times3\times2$$

$$\therefore n=4$$

답 4

1033 6장의 카드 중에서 2장의 카드를 뽑는 경우의 수는

$${}_{6}C_{2}=15$$

홀수 1, 3, 5가 적힌 3장의 카드 중에서 2장의 카드를 뽑는 경우의 수는

$${}_{3}C_{2}={}_{3}C_{1}=3$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$15-3=12$$

답 12

1034 7개의 공 중에서 3개의 공을 꺼내는 경우의 수는

$${}_{7}C_{3}=35$$

노란색 공 4개 중에서 3개를 꺼내는 경우의 수는

$${}_{4}C_{3}={}_{4}C_{1}=4$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$35-4=31$$

답 ②

1035 14명의 사원 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

${}_{14}C_{3}=364$ … 1단계

남자 사원 9명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

${}_{9}C_{3}=84$ … 2단계

여자 사원 5명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

${}_{5}C_{3}={}_{5}C_{2}=10$ … 3단계

따라서 구하는 경우의 수는

$364-(84+10)=270$ … 4단계

답 270

채점 요소	비율
1단계 전체 사원 중에서 3명을 뽑는 경우의 수 구하기	25 %
2단계 남자 사원 중에서 3명을 뽑는 경우의 수 구하기	25 %
3단계 여자 사원 중에서 3명을 뽑는 경우의 수 구하기	25 %
4단계 남자 사원과 여자 사원을 적어도 1명씩 뽑는 경우의 수 구하기	25 %

1036 10명의 회원 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는

$${}_{10}C_{2}=45$$

여자 회원 수를 $x\ (x\geq2)$라 하면 여자 회원만 2명을 뽑는 경우의 수는 ${}_{x}C_{2}$

이때 남자 회원이 적어도 한 명 포함되도록 뽑는 경우의 수가 30이므로

$$45-{}_{x}C_{2}=30,\qquad {}_{x}C_{2}=15$$

$$\frac{x(x-1)}{2\times1}=15,\qquad x(x-1)=6\times5$$

$$\therefore x=6$$

따라서 여자 회원이 6명이므로 남자 회원 수는

$$10-6=4$$

답 4

1037 태우는 뽑히고 재희는 뽑히지 않는 경우의 수는 태우와 재희를 제외한 8명의 지원자 중에서 4명을 뽑는 경우의 수와 같으므로

$${}_{8}C_{4}=70$$

재희는 뽑히고 태우는 뽑히지 않는 경우의 수는 태우와 재희를 제외한 8명의 지원자 중에서 4명을 뽑는 경우의 수와 같으므로

$${}_{8}C_{4}=70$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$70+70=140$$

답 ④

다른 풀이 태우와 재희 중에서 1명을 뽑고, 태우와 재희를 제외한 8명의 지원자 중에서 4명을 뽑으면 되므로 구하는 경우의 수는

$${}_{2}C_{1}\times{}_{8}C_{4}=2\times70=140$$

1038 구하는 경우의 수는 1학년 선수 5명을 제외한 8명의 선수 중에서 6명을 뽑는 경우의 수와 같으므로

$${}_{8}C_{6}={}_{8}C_{2}=28$$

답 ④

1039 구하는 경우의 수는 A, B를 제외한 8명의 학생 중에서 4명을 뽑는 경우의 수와 같으므로

$${}_{8}C_{4}=70$$

답 70

1040 3의 배수인 3, 6, 9가 적힌 3장의 카드는 전부 포함하고, 4의 배수인 4, 8이 적힌 2장의 카드는 포함하지 않도록 뽑는 경우의 수는 3의 배수와 4의 배수가 적힌 카드를 제외한 5장의 카드 중에서 3장을 뽑는 경우의 수와 같으므로

$${}_{5}C_{3}={}_{5}C_{2}=10$$

답 10

1041 (i) 가장 큰 수가 6인 경우

6이 적힌 공은 꺼내고 7이 적힌 공은 꺼내지 않아야 한다.

따라서 이 경우의 수는 6, 7이 적힌 공을 제외한 5개의 공 중에서 2개를 꺼내는 경우의 수와 같으므로

$_5C_2=10$

(ii) 가장 큰 수가 7인 경우

7이 적힌 공은 반드시 꺼내야 한다.

따라서 이 경우의 수는 7이 적힌 공을 제외한 6개의 공 중에서 2개를 꺼내는 경우의 수와 같으므로

$_6C_2=15$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$10+15=25$ 답 25

다른 풀이 7개의 공 중에서 3개를 꺼내는 경우의 수는

$_7C_3=35$

6, 7이 적힌 공을 제외한 5개의 공 중에서 3개를 꺼내는 경우의 수는

$_5C_3={}_5C_2=10$

따라서 구하는 경우의 수는

$35-10=25$

1042 (i) 공통으로 가입하는 동아리가 없는 경우

유리가 5개의 동아리 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$_5C_2=10$

지수가 유리가 택하지 않은 3개의 동아리 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$_3C_2={}_3C_1=3$

따라서 이 경우의 수는 $10\times3=30$

(ii) 공통으로 가입하는 동아리가 1개인 경우

유리가 5개의 동아리 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$_5C_2=10$

지수가 유리가 택한 2개의 동아리 중에서 하나를 택하고, 유리가 택하지 않은 3개의 동아리 중에서 하나를 택하는 경우의 수는

$_2C_1\times{}_3C_1=2\times3=6$

따라서 이 경우의 수는 $10\times6=60$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$30+60=90$

답 ⑤

다른 풀이 (ii) 공통으로 가입하는 동아리가 1개인 경우

5개의 동아리 중에서 유리와 지수가 공통으로 가입할 동아리를 택하는 경우의 수는

$_5C_1=5$

남은 4개의 동아리 중에서 유리와 지수가 각각 하나씩 택하는 경우의 수는

$_4P_2=12$

따라서 이 경우의 수는 $5\times12=60$

1043 (i) A, B가 모두 지하철을 타는 경우

A, B를 제외한 5명 중에서 1명이 지하철을 타고 나머지 4명이 택시를 타면 된다.

따라서 이 경우의 수는 A, B를 제외한 5명 중에서 1명을 택하는 경우의 수와 같으므로

$_5C_1=5 \quad \therefore l=5$ … 1단계

(ii) A, B가 모두 택시를 타는 경우

A, B를 제외한 5명 중에서 2명이 택시를 타고 나머지 3명이 지하철을 타면 된다.

따라서 이 경우의 수는 A, B를 제외한 5명 중에서 2명을 택하는 경우의 수와 같으므로

$_5C_2=10 \quad \therefore m=10$ … 2단계

(iii) A, B 중 한 사람만 지하철을 타는 경우

A, B 중 지하철을 탈 사람을 정하는 경우의 수는

$_2C_1=2$

이때 A, B를 제외한 5명 중에서 2명이 지하철을 타고 나머지 3명이 택시를 타면 된다.

A, B를 제외한 5명 중에서 2명을 택하는 경우의 수는

$_5C_2=10$

따라서 이 경우의 수는

$2\times10=20 \quad \therefore n=20$ … 3단계

이상에서 $l+m-n=5+10-20=-5$ … 4단계

답 -5

채점 요소		비율
1단계	l의 값 구하기	30 %
2단계	m의 값 구하기	30 %
3단계	n의 값 구하기	30 %
4단계	$l+m-n$의 값 구하기	10 %

1044 혜진이와 승헌이를 제외한 6명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

$_6C_3=20$

혜진이와 승헌이를 한 사람으로 생각하여 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$4!=24$

혜진이와 승헌이가 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$20\times24\times2=960$ 답 960

1045 5개의 과일 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$_5C_3={}_5C_2=10$

3개의 야채 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$_3C_2={}_3C_1=3$

택한 3개의 과일과 2개의 야채를 일렬로 진열하는 경우의 수는

$5!=120$

따라서 구하는 경우의 수는

$10\times3\times120=3600$ 답 ③

1046 1부터 9까지의 자연수 중에서 홀수는 1, 3, 5, 7, 9의 5개, 짝수는 2, 4, 6, 8의 4개이다.

5개의 홀수 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_5C_2=10$

4개의 짝수 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_4C_2=6$

택한 4개의 자연수를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$4!=24$

따라서 구하는 네 자리 자연수의 개수는

$10\times6\times24=1440$ 답 **1440**

1047 동아리의 회원 수를 $n\,(n\geq3)$이라 하면 특정한 한 명을 포함하여 3명을 뽑는 경우의 수는 특정한 한 명을 제외한 나머지 $(n-1)$명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수와 같으므로

${}_{n-1}C_2=\dfrac{(n-1)(n-2)}{2\times1}$

뽑은 3명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$3!=6$

이때 특정한 한 명을 포함하여 3명을 뽑아 일렬로 세우는 경우의 수가 90이므로

$\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}\times6=90$

$(n-1)(n-2)=6\times5$

$\therefore\ n=7$

따라서 동아리의 회원 수는 7이다. 답 **7**

1048 원 위에 있는 8개의 점 중에서 어느 세 점도 일직선 위에 있지 않으므로 만들 수 있는 서로 다른 직선의 개수는

${}_8C_2=28$ 답 **28**

1049 6개의 점 중에서 어느 세 점도 일직선 위에 있지 않으므로 만들 수 있는 서로 다른 직선의 개수는

${}_6C_2=15$ 답 ⑤

1050 8개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_8C_2=28$

일직선 위에 있는 5개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_5C_2=10$

일직선 위에 있는 3개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_3C_2={}_3C_1=3$

이때 주어진 두 직선을 포함하면 구하는 직선의 개수는

$28-10-3+2=17$ 답 **17**

다른 풀이 두 직선 위의 점을 각각 하나씩 택하여 연결한 직선의 개수는

${}_5C_1\times{}_3C_1=5\times3=15$

한 직선 위에 있는 점 중에서 2개를 택하여 연결한 직선의 개수는

주어진 두 직선

2

따라서 구하는 직선의 개수는

$15+2=17$

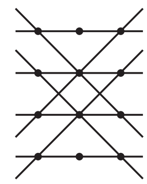
1051 12개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_{12}C_2=66$

(ⅰ) 일직선 위에 있는 3개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_3C_2={}_3C_1=3$

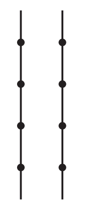
3개의 점을 지나는 직선은 오른쪽 그림과 같이 8개이다.



(ⅱ) 일직선 위에 있는 4개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_4C_2=6$

4개의 점을 지나는 직선은 오른쪽 그림과 같이 3개이다.



(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 직선의 개수는

$66-3\times8-6\times3+8+3=35$ 답 **35**

1052 구하는 대각선의 개수는 7개의 꼭짓점 중 2개를 택하는 경우의 수에서 변의 개수인 7을 뺀 것과 같으므로

${}_7C_2-7=21-7=14$ 답 ③

1053 팔각형의 대각선의 개수는 8개의 꼭짓점 중 2개를 택하는 경우의 수에서 변의 개수인 8을 뺀 것과 같으므로

${}_8C_2-8=28-8=20$

십일각형의 대각선의 개수는 11개의 꼭짓점 중 2개를 택하는 경우의 수에서 변의 개수인 11을 뺀 것과 같으므로

${}_{11}C_2-11=55-11=44$

따라서 구하는 합은

$20+44=64$ 답 ②

1054 구하는 다각형의 꼭짓점의 개수를 $n\,(n\geq3)$이라 하면 n각형의 대각선의 개수는 n개의 꼭짓점 중 2개를 택하는 경우의 수에서 변의 개수인 n을 뺀 것과 같으므로

${}_nC_2-n=27,\quad \dfrac{n(n-1)}{2\times1}-n=27$

$n^2-3n-54=0,\quad (n+6)(n-9)=0$

$\therefore\ n=9\ (\because\ n\geq3)$

따라서 구하는 다각형의 꼭짓점의 개수는 9이다. 답 **9**

1055 8개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

${}_8C_3=56$

일직선 위에 있는 4개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

${}_4C_3={}_4C_1=4$

그런데 일직선 위에 있는 3개의 점으로는 삼각형을 만들 수 없으므로 구하는 삼각형의 개수는

$56-4=52$

답 52

1056 7개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

${}_7C_3=35$

일직선 위에 있는 3개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

${}_3C_3=1$

이고, 3개의 점을 지나는 직선은 2개이다.

일직선 위에 있는 4개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

${}_4C_3={}_4C_1=4$

이고, 4개의 점을 지나는 직선은 1개이다.

일직선 위에 있는 3개의 점으로는 삼각형을 만들 수 없으므로 구하는 삼각형의 개수는

$35-1\times2-4=29$

답 29

1057 직선 l 위의 4개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_4C_2=6$

직선 m 위의 3개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_3C_2={}_3C_1=3$

따라서 구하는 사각형의 개수는

$6\times3=18$

답 18

다른 풀이 7개의 점 중에서 4개를 택하는 경우의 수는

${}_7C_4={}_7C_3=35$

직선 l 위의 점 중에서 3개를 택하고, 직선 m 위의 점 중에서 1개를 택하는 경우의 수는

${}_4C_3\times{}_3C_1={}_4C_1\times{}_3C_1=4\times3=12$

직선 m 위의 점 중에서 3개를 택하고, 직선 l 위의 점 중에서 1개를 택하는 경우의 수는

${}_3C_3\times{}_4C_1=1\times4=4$

직선 l 위의 점 중에서 4개를 택하는 경우의 수는

${}_4C_4=1$

따라서 구하는 사각형의 개수는

$35-(12+4+1)=18$

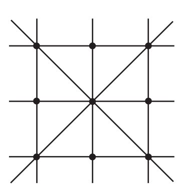
1058 9개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

${}_9C_3=84$

일직선 위에 있는 3개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

${}_3C_3=1$

이고, 3개의 점을 지나는 직선은 오른쪽 그림과 같이 8개이다.



그런데 일직선 위에 있는 3개의 점으로는 삼각형을 만들 수 없으므로 구하는 삼각형의 개수는

$84-1\times8=76$

답 76

1059 가로 방향의 4개의 평행선 중에서 2개, 세로 방향의 6개의 평행선 중에서 2개를 택하면 한 개의 평행사변형을 만들 수 있으므로 구하는 평행사변형의 개수는

${}_4C_2\times{}_6C_2=6\times15=90$

답 ③

1060 가로선 4개 중에서 2개, 세로선 4개 중에서 2개를 택하면 한 개의 직사각형을 만들 수 있으므로 직사각형의 개수는

${}_4C_2\times{}_4C_2=6\times6=36$

한 변의 길이가 1, 2, 3인 정사각형의 개수는 각각 9, 4, 1이므로 정사각형의 개수는

$9+4+1=14$

따라서 정사각형이 아닌 직사각형의 개수는

$36-14=22$

답 22

1061 n개의 평행선 중에서 2개, $(n-1)$개의 평행선 중에서 2개를 택하면 한 개의 평행사변형을 만들 수 있으므로 평행사변형의 개수는

${}_nC_2\times{}_{n-1}C_2$

이때 평행사변형의 개수가 150이므로

${}_nC_2\times{}_{n-1}C_2=150$

$\dfrac{n(n-1)}{2\times1}\times\dfrac{(n-1)(n-2)}{2\times1}=150$

$n(n-1)^2(n-2)=6\times5^2\times4$

$\therefore n=6$

답 6

1062 서로 다른 8개의 구슬을 4개, 4개로 나누는 경우의 수는

${}_8C_4\times{}_4C_4\times\dfrac{1}{2!}=70\times1\times\dfrac{1}{2}=35 \quad \therefore a=35$

서로 다른 8개의 구슬을 5개, 3개로 나누는 경우의 수는

${}_8C_5\times{}_3C_3=56\times1=56 \quad \therefore b=56$

$\therefore b-a=56-35=21$

답 21

1063 12명의 학생을 6명, 6명으로 나누는 경우의 수는

${}_{12}C_6\times{}_6C_6\times\dfrac{1}{2!}=924\times1\times\dfrac{1}{2}=462$ … 1단계

이때 여학생 4명이 모두 같은 조가 되는 경우의 수는 남학생 8명을 2명, 6명으로 나누는 경우의 수와 같으므로

${}_8C_2\times{}_6C_6=28\times1=28$ … 2단계

따라서 구하는 경우의 수는

$462-28=434$ … 3단계

답 434

채점 요소	비율
1단계 6명, 6명으로 나누는 경우의 수 구하기	40 %
2단계 여학생 4명이 모두 같은 조가 되는 경우의 수 구하기	40 %
3단계 각 조에 적어도 한 명의 여학생이 포함되는 경우의 수 구하기	20 %

1064 볼펜 6자루를 세 묶음으로 나누는 경우는
(1자루, 1자루, 4자루) 또는 (1자루, 2자루, 3자루)
또는 (2자루, 2자루, 2자루)
(i) 1자루, 1자루, 4자루로 나누는 경우의 수는
$${}_6C_1\times{}_5C_1\times{}_4C_4\times\frac{1}{2!}=6\times5\times1\times\frac{1}{2}=15$$
(ii) 1자루, 2자루, 3자루로 나누는 경우의 수는
$${}_6C_1\times{}_5C_2\times{}_3C_3=6\times10\times1=60$$
(iii) 2자루, 2자루, 2자루로 나누는 경우의 수는
$${}_6C_2\times{}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{3!}=15\times6\times1\times\frac{1}{6}=15$$
이상에서 구하는 경우의 수는
$$15+60+15=90$$
답 ④

1065 5개의 체험 활동을 2개, 2개, 1개로 나누는 경우의 수는
$${}_5C_2\times{}_3C_2\times{}_1C_1\times\frac{1}{2!}=10\times3\times1\times\frac{1}{2}=15$$
이 세 묶음을 세 사람에게 배정하는 경우의 수는
$$3!=6$$
따라서 구하는 경우의 수는
$$15\times6=90$$
답 **90**

1066 어른 7명 중 1명이 어린이 2명과 한 조를 이루면 되므로 어른 7명을 1명, 3명, 3명으로 나누는 경우의 수는
$${}_7C_1\times{}_6C_3\times{}_3C_3\times\frac{1}{2!}=7\times20\times1\times\frac{1}{2}=70$$
이 세 조를 A, B, C 3개의 방에 배정하는 경우의 수는
$$3!=6$$
따라서 구하는 경우의 수는
$$70\times6=420$$
답 **420**

1067 5개의 상품을 조건에 맞게 세 묶음으로 나누는 경우는
(1개, 1개, 3개) 또는 (1개, 2개, 2개)
(i) 1개, 1개, 3개로 나누는 경우의 수
$${}_5C_1\times{}_4C_1\times{}_3C_3\times\frac{1}{2!}=5\times4\times1\times\frac{1}{2}=10$$
(ii) 1개, 2개, 2개로 나누는 경우의 수
$${}_5C_1\times{}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{2!}=5\times6\times1\times\frac{1}{2}=15$$
(i), (ii)에서 세 묶음으로 나누는 경우의 수는
$$10+15=25$$
이 세 묶음을 3명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는
$$3!=6$$
따라서 구하는 경우의 수는
$$25\times6=150$$
답 ⑤

1068 2층부터 6층까지 5개의 층 중에서 사람들이 내리는 3개의 층을 택하는 경우의 수는
$${}_5C_3={}_5C_2=10$$
7명을 2명, 2명, 3명의 3개의 조로 나누는 경우의 수는
$${}_7C_2\times{}_5C_2\times{}_3C_3\times\frac{1}{2!}=21\times10\times1\times\frac{1}{2}=105$$
3개의 조를 3개의 층에 배정하는 경우의 수는
$$3!=6$$
따라서 구하는 경우의 수는
$$10\times105\times6=6300$$
답 **6300**

1069 7명을 3명, 4명으로 나누는 경우의 수는
$${}_7C_3\times{}_4C_4=35\times1=35$$
나누어진 3명을 1명, 2명으로 나누는 경우의 수는
$${}_3C_1\times{}_2C_2=3\times1=3$$
나누어진 4명을 2명, 2명으로 나누는 경우의 수는
$${}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{2!}=6\times1\times\frac{1}{2}=3$$
따라서 구하는 경우의 수는
$$35\times3\times3=315$$
답 **315**

1070 6명을 3명, 3명의 2개의 조로 나누는 경우의 수는
$${}_6C_3\times{}_3C_3\times\frac{1}{2!}=20\times1\times\frac{1}{2}=10$$
각 조에서 부전승으로 올라가는 1명을 택하는 경우의 수는
$${}_3C_1\times{}_3C_1=3\times3=9$$
따라서 구하는 경우의 수는
$$10\times9=90$$
답 **90**

1071 희종이네 반과 시합을 하는 반을 택하는 경우의 수는
$${}_5C_1=5$$
나머지 4개의 반을 2반씩 2개의 조로 나누는 경우의 수는
$${}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{2!}=6\times1\times\frac{1}{2}=3$$
따라서 구하는 경우의 수는
$$5\times3=15$$
답 ②

시험에 꼭 나오는 문제

1072 ${}_nP_4=30\times{}_{n-1}C_3$에서
$$n(n-1)(n-2)(n-3)=30\times\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3\times2\times1}$$
$n\geq4$이므로 등식의 양변을 $(n-1)(n-2)(n-3)$으로 나누면
$$n=5$$
답 ②

1073 다음과 같이 6개의 1을 일렬로 나열하면 ∨가 표시된 자리에만 0이 올 수 있다.
1∨1∨1∨1∨1∨1∨
따라서 구하는 자연수의 개수는 1의 사이사이와 맨 끝의 6개의 자리에 3개의 0을 나열하는 경우의 수와 같으므로
$${}_6C_3=20$$
답 ⑤

1074 6켤레의 양말 중에서 짝이 맞는 한 켤레의 양말을 택하는 경우의 수는 $_6C_1=6$
나머지 5켤레의 양말 10짝 중에서 2짝을 택하는 경우의 수는
$_{10}C_2=45$
이때 양말 5켤레 중에서 짝이 맞는 한 켤레의 양말을 택하는 경우의 수는
$_5C_1=5$
이므로 짝이 맞지 않는 2짝을 택하는 경우의 수는
$45-5=40$
따라서 구하는 경우의 수는
$6\times40=240$ 답 **240**

1075 10명 중에서 4명을 뽑는 경우의 수는
$_{10}C_4=210$
남학생 4명 중에서 4명을 뽑는 경우의 수는
$_4C_4=1$
남학생 4명 중에서 3명을 뽑고, 여학생 6명 중에서 1명을 뽑는 경우의 수는
$_4C_3\times{}_6C_1={}_4C_1\times{}_6C_1=4\times6=24$
따라서 구하는 경우의 수는
$210-(1+24)=185$ 답 **185**

다른 풀이 여학생 6명 중에서 2명을 뽑고, 남학생 4명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는
$_6C_2\times{}_4C_2=15\times6=90$
여학생 6명 중에서 3명을 뽑고, 남학생 4명 중에서 1명을 뽑는 경우의 수는
$_6C_3\times{}_4C_1=20\times4=80$
여학생 6명 중에서 4명을 뽑는 경우의 수는
$_6C_4={}_6C_2=15$
따라서 구하는 경우의 수는 $90+80+15=185$

1076 양상추는 포함하고 오이는 포함하지 않는 경우의 수는 양상추와 오이를 제외한 5종류의 야채 중에서 3종류를 택하는 경우의 수와 같으므로 $_5C_3={}_5C_2=10$
오이는 포함하고 양상추는 포함하지 않는 경우의 수는 양상추와 오이를 제외한 5종류의 야채 중에서 3종류를 택하는 경우의 수와 같으므로 $_5C_3={}_5C_2=10$
따라서 구하는 경우의 수는
$10+10=20$ 답 ③

1077 (i) 남자 5명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는
$_5C_2=10$
여자 4명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는
$_4C_2=6$
따라서 남자 2명, 여자 2명을 뽑는 경우의 수는
$10\times6=60$ $\therefore A=60$

(ii) 9명 중에서 4명을 뽑는 경우의 수는
$_9C_4=126$
남자 5명 중에서 4명을 뽑는 경우의 수는
$_5C_4={}_5C_1=5$
따라서 여자를 적어도 1명 뽑는 경우의 수는
$126-5=121$ $\therefore B=121$

(iii) 9명 중에서 4명을 뽑는 경우의 수는
$_9C_4=126$
남자 5명 중에서 4명을 뽑는 경우의 수는
$_5C_4={}_5C_1=5$
여자 4명 중에서 4명을 뽑는 경우의 수는
$_4C_4=1$
따라서 여자 1명, 남자 1명을 반드시 포함하여 뽑는 경우의 수는
$126-(5+1)=120$ $\therefore C=120$
이상에서 $A<C<B$ 답 ②

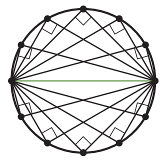
1078 2, 6을 제외한 5개의 자연수 중에서 4개를 택하는 경우의 수는
$_5C_4={}_5C_1=5$
택한 5개의 숫자를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$5!=120$
따라서 구하는 자연수의 개수는
$5\times120=600$ 답 **600**

1079 어른 5명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는
$_5C_3={}_5C_2=10$
어린이 4명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는
$_4C_2=6$
어른 3명을 일렬로 세우는 경우의 수는
$3!=6$
어른의 사이사이와 양 끝의 4개의 자리 중 2개의 자리에 어린이 2명을 세우는 경우의 수는
$_4P_2=12$
따라서 구하는 경우의 수는
$10\times6\times6\times12=4320$ 답 **4320**

1080 10개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는
$_{10}C_2=45$
일직선 위에 있는 4개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는
$_4C_2=6$
이때 4개의 점을 지나는 직선은 5개이므로 구하는 직선의 개수는
$45-6\times5+5=20$ 답 ③

1081 만들 수 있는 삼각형의 개수는 12개의 점 중에서 3개의 점을 택하는 경우의 수와 같으므로
$_{12}C_3=220$

오른쪽 그림과 같이 1개의 지름을 기준으로 10개의 직각삼각형을 만들 수 있고, 두 점을 이어 만들 수 있는 지름은 6개이므로 직각삼각형의 개수는 $\quad 10\times6=60$



따라서 구하는 삼각형의 개수는

$\quad 220-60=160$ **답 160**

참고 | 반원에 대한 원주각의 크기는 90°이므로 원의 지름의 양 끝 점과 원 위의 다른 1개의 점을 택하면 직각삼각형을 만들 수 있다.

1082 (ⅰ) ─ 방향의 직선 중에서 2개를 택하고, ╲ 방향의 직선 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$\quad {}_4C_2\times{}_3C_2=6\times3=18$

(ⅱ) ─ 방향의 직선 중에서 2개를 택하고, ╱ 방향의 직선 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$\quad {}_4C_2\times{}_2C_2=6\times1=6$

(ⅲ) ╲ 방향의 직선 중에서 2개를 택하고, ╱ 방향의 직선 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$\quad {}_3C_2\times{}_2C_2=3\times1=3$

이상에서 구하는 평행사변형의 개수는

$\quad 18+6+3=27$ **답 27**

1083 8개의 과자를 두 묶음으로 나누는 경우는

(1개, 7개) 또는 (2개, 6개)

또는 (3개, 5개) 또는 (4개, 4개)

(ⅰ) 1개, 7개로 나누는 경우의 수는

$\quad {}_8C_1\times{}_7C_7=8\times1=8$

(ⅱ) 2개, 6개로 나누는 경우의 수는

$\quad {}_8C_2\times{}_6C_6=28\times1=28$

(ⅲ) 3개, 5개로 나누는 경우의 수는

$\quad {}_8C_3\times{}_5C_5=56\times1=56$

(ⅳ) 4개, 4개로 나누는 경우의 수는

$$ {}_8C_4\times{}_4C_4\times\frac{1}{2!}=70\times1\times\frac{1}{2}=35$$

이상에서 구하는 경우의 수는

$\quad 8+28+56+35=127$ **답 ⑤**

1084 어른은 지정된 차량에 탑승하므로 어른을 제외한 어린이 7명을 3개의 조로 나누는 경우는

(1명, 3명, 3명) 또는 (2명, 2명, 3명)

(ⅰ) 1명, 3명, 3명으로 나누는 경우의 수는

$$ {}_7C_1\times{}_6C_3\times{}_3C_3\times\frac{1}{2!}=7\times20\times1\times\frac{1}{2}=70$$

(ⅱ) 2명, 2명, 3명으로 나누는 경우의 수는

$$ {}_7C_2\times{}_5C_2\times{}_3C_3\times\frac{1}{2!}=21\times10\times1\times\frac{1}{2}=105$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 3개의 조로 나누는 경우의 수는

$\quad 70+105=175$

3개의 조를 3대의 차량에 배정하는 경우의 수는 $\quad 3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$\quad 175\times6=1050$ **답 1050**

1085 5개의 팀을 2팀, 3팀으로 나누는 경우의 수는

$\quad {}_5C_2\times{}_3C_3=10\times1=10$

나누어진 3팀 중 부전승으로 올라가는 1팀을 택하는 경우의 수는

$\quad {}_3C_1=3$

따라서 구하는 경우의 수는 $\quad 10\times3=30$ **답 ④**

1086 ${}_nC_r={}_nC_6$에서

$\quad r=6$ 또는 $n-r=6$ …… ㉠

${}_{12}C_r={}_{12}C_{r-2}$에서 $\quad r=r-2$ 또는 $12-r=r-2$

그런데 $r\neq r-2$이므로

$\quad 12-r=r-2,\quad -2r=-14$

$\quad \therefore r=7$ … 1단계

따라서 ㉠에서 $\quad n-7=6\quad \therefore n=13$ … 2단계

$\quad \therefore n+r=13+7=20$ … 3단계

답 20

채점 요소		비율
1단계	r의 값 구하기	50 %
2단계	n의 값 구하기	30 %
3단계	$n+r$의 값 구하기	20 %

1087 $(n+6)$명 중 특정한 2명이 포함되도록 5명을 뽑는 경우의 수는 특정한 2명을 제외한 $(n+4)$명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수와 같으므로

$\quad {}_{n+4}C_3=56$ … 1단계

$$\frac{(n+4)(n+3)(n+2)}{3\times2\times1}=56$$

$\quad (n+4)(n+3)(n+2)=8\times7\times6$

$\quad \therefore n=4$ … 2단계

답 4

채점 요소		비율
1단계	주어진 조건을 이용하여 식 세우기	50 %
2단계	n의 값 구하기	50 %

1088 n개의 점으로 만들 수 있는 직선이 55개이므로

$$ {}_nC_2=55,\quad \frac{n(n-1)}{2\times1}=55,\quad n(n-1)=11\times10$$

$\quad \therefore n=11$ … 1단계

따라서 원 위에 서로 다른 11개의 점이 있으므로 이 중에서 네 개의 점을 꼭짓점으로 하는 사각형의 개수는

$\quad {}_{11}C_4=330$ … 2단계

답 330

채점 요소		비율
1단계	n의 값 구하기	50 %
2단계	사각형의 개수 구하기	50 %

1089 각 티셔츠를 선택하는 학생 수가 모두 달라야 하므로 각 티셔츠를 선택하는 학생은 1명, 2명, 4명이어야 한다.

7명을 1명, 2명, 4명으로 나누는 경우의 수는

$_7C_1\times{}_6C_2\times{}_4C_4=7\times15\times1=105$ … 1단계

1명, 2명, 4명으로 나누어진 학생들이 서로 다른 3개의 티셔츠를 선택하는 경우의 수는

$3!=6$ … 2단계

따라서 구하는 경우의 수는

$105\times6=630$ … 3단계

답 **630**

채점 요소	비율
1단계 7명을 1명, 2명, 4명으로 나누는 경우의 수 구하기	50 %
2단계 나누어진 학생들이 티셔츠를 선택하는 경우의 수 구하기	30 %
3단계 각 티셔츠를 선택하는 학생 수가 모두 다른 경우의 수 구하기	20 %

1090 전략 서로 다른 색의 공의 개수를 기준으로 경우를 나누어 생각한다.

주머니에서 꺼낸 5개의 공의 색이 3종류이려면 서로 다른 색의 공을 각각

3개, 1개, 1개 또는 2개, 2개, 1개

꺼내야 한다.

(i) 서로 다른 색의 공을 각각 3개, 1개, 1개 꺼내는 경우

흰 공을 3개 꺼내고, 검은 공, 파란 공, 빨간 공, 노란 공 중 2종류를 택하여 각각 1개씩 꺼내야 한다.

따라서 이 경우의 수는

$_4C_2=6$

(ii) 서로 다른 색의 공을 각각 2개, 2개, 1개 꺼내는 경우

흰 공, 검은 공, 파란 공 중 2종류를 택하여 각각 2개씩 꺼내고, 남은 3종류의 공 중 1가지를 택하여 1개를 꺼내야 한다.

따라서 이 경우의 수는

$_3C_2\times{}_3C_1=3\times3=9$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$6+9=15$

답 **15**

다른 풀이 (i) 흰 공, 검은 공, 파란 공을 꺼내는 경우

흰 공, 검은 공, 파란 공을 각각

1개, 2개, 2개 또는 2개, 1개, 2개 또는

2개, 2개, 1개 또는 3개, 1개, 1개

꺼내야 하므로 이 경우의 수는 4이다.

(ii) 흰 공, 빨간 공, 노란 공을 꺼내는 경우

흰 공, 빨간 공, 노란 공을 각각 3개, 1개, 1개 꺼내야 하므로 이 경우의 수는 1이다.

(iii) 흰 공과 검은 공, 파란 공 중 1가지, 빨간 공, 노란 공 중 1가지를 꺼내는 경우

공의 색을 정하는 경우의 수는

$2\times2=4$

이때 흰 공, 검은 공, 빨간 공을 꺼낸다고 하면 각각

2개, 2개, 1개 또는 3개, 1개, 1개

꺼내야 하므로 이 경우의 수는

$4\times2=8$

(iv) 검은 공, 파란 공과 빨간 공, 노란 공 중 1가지를 꺼내는 경우

공의 색을 정하는 경우의 수는 2

이때 검은 공, 파란 공, 빨간 공을 꺼낸다고 하면 각각 2개, 2개, 1개 꺼내야 하므로 이 경우의 수는

$2\times1=2$

이상에서 구하는 경우의 수는

$4+1+8+2=15$

참고 | 검은 공, 파란 공 중 1가지와 빨간 공, 노란 공을 꺼내는 경우에는 5개의 공을 꺼낼 수 없다.

1091 전략 과일 바구니를 만들 때, 멜론과 망고를 모두 포함하는 경우와 모두 포함하지 않는 경우로 나누어 생각한다.

(i) 멜론과 망고를 포함하는 과일 바구니를 만드는 경우

과일 바구니에는 바나나를 넣을 수 없다.

따라서 만들 수 있는 과일 바구니의 개수는 멜론, 망고, 바나나를 제외한 7종류의 과일 중에서 3종류를 택하는 경우의 수와 같으므로 $_7C_3=35$

(ii) 멜론과 망고를 포함하지 않는 과일 바구니를 만드는 경우

만들 수 있는 과일 바구니의 개수는 멜론, 망고를 제외한 8종류의 과일 중에서 5종류를 택하는 경우의 수와 같으므로

$_8C_5={}_8C_3=56$

(i), (ii)에서 구하는 과일 바구니의 개수는

$35+56=91$

답 **91**

1092 전략 학생들을 2개의 조로 나누어 산, 바다, 수족관 중에서 2개의 장소에 배정하는 경우의 수를 구한다.

6명의 학생을 2개의 조로 나누는 경우는

(1명, 5명) 또는 (2명, 4명) 또는 (3명, 3명)

(i) 1명, 5명으로 나누는 경우의 수는

$_6C_1\times{}_5C_5=6\times1=6$

(ii) 2명, 4명으로 나누는 경우의 수는

$_6C_2\times{}_4C_4=15\times1=15$

(iii) 3명, 3명으로 나누는 경우의 수는

$_6C_3\times{}_3C_3\times\frac{1}{2!}=20\times1\times\frac{1}{2}=10$

이상에서 6명의 학생을 2개의 조로 나누는 경우의 수는

$6+15+10=31$

이때 산, 바다, 수족관 중에서 2개의 장소를 택하는 경우의 수는

$_3C_2={}_3C_1=3$

2개의 조를 택한 2개의 장소에 배정하는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$31\times3\times2=186$

답 **186**

12 행렬

교과서 문제 정복하기

본책 157쪽

1093 답 2×1 행렬

1094 답 1×3 행렬

1095 답 2×2 행렬

1096 답 2×3 행렬

1097 (2) $-3+0=-3$

(3) $2+(-3)+5=4$

답 (1) **1** (2) $\mathbf{-3}$ (3) **4**

1098 두 행렬의 대응하는 성분이 서로 같아야 하므로

$a-1=-4,\ 2=b-2,\ -1=c-5$

$\therefore a=-3,\ b=4,\ c=4$ 답 $\boldsymbol{a=-3,\ b=4,\ c=4}$

1099 두 행렬의 대응하는 성분이 서로 같아야 하므로

$1=a+b,\ 3=a-b,\ 3c=-6$

$\therefore a=2,\ b=-1,\ c=-2$

답 $\boldsymbol{a=2,\ b=-1,\ c=-2}$

1100 답 $\begin{pmatrix}-1 & 5\end{pmatrix}$

1101 답 $\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 1 & 4\end{pmatrix}$

1102 답 $\begin{pmatrix}6 & -5\\ -1 & 1\end{pmatrix}$

1103 답 $\begin{pmatrix}4 & 2 & -1\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}$

1104 $5A-3B=5\begin{pmatrix}1 & 3\\ -2 & 0\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}5 & 15\\ -10 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 6\\ 3 & -3\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}2 & 9\\ -13 & 3\end{pmatrix}$ 답 $\begin{pmatrix}2 & 9\\ -13 & 3\end{pmatrix}$

1105 $-A+4B=-\begin{pmatrix}1 & 3\\ -2 & 0\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-1 & -3\\ 2 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 8\\ 4 & -4\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 6 & -4\end{pmatrix}$ 답 $\begin{pmatrix}3 & 5\\ 6 & -4\end{pmatrix}$

1106 $A+X=B$에서

$X=B-A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ 답 $\begin{pmatrix}2 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$

1107 $X-A=3B$에서

$X=A+3B=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 0\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6 & 3\\ 9 & 0\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}6 & 5\\ 10 & -1\end{pmatrix}$ 답 $\begin{pmatrix}6 & 5\\ 10 & -1\end{pmatrix}$

1108 $\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -3\\ -4 & 5\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1\times3+2\times(-4) & 1\times(-3)+2\times5\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-5 & 7\end{pmatrix}$ 답 $\begin{pmatrix}-5 & 7\end{pmatrix}$

1109 $\begin{pmatrix}1 & 4\\ -2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times2+4\times3\\ -2\times2+5\times3\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}14\\ 11\end{pmatrix}$ 답 $\begin{pmatrix}14\\ 11\end{pmatrix}$

1110 $\begin{pmatrix}0 & -6\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 5\\ 4 & -2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}0\times1+(-6)\times4 & 0\times5+(-6)\times(-2)\\ 1\times1+1\times4 & 1\times5+1\times(-2)\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-24 & 12\\ 5 & 3\end{pmatrix}$ 답 $\begin{pmatrix}-24 & 12\\ 5 & 3\end{pmatrix}$

1111 $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1\times(-1)+2\times3 & 1\times2+2\times4\\ 1\times(-1)+(-2)\times3 & 1\times2+(-2)\times4\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}5 & 10\\ -7 & -6\end{pmatrix}$ 답 $\begin{pmatrix}5 & 10\\ -7 & -6\end{pmatrix}$

1112 (1) $A^2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

(2) $A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

(3) 자연수 n에 대하여 $A^n=\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}$이므로

$A^{10}=\begin{pmatrix}1 & 10\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

답 (1) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix}1 & 10\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

1113 (1) $-E=-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

(2) $E^9=E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

(3) $(-E)^{1001}=-E^{1001}=-E=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

답 (1) $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

유형 익히기

• 본책 158~163쪽

1114 $a_{11}=1^2+1-1=1$, $a_{12}=1^2+2-1=2$, $a_{21}=2^2+1-1=4$, $a_{22}=2^2+2-1=5$이므로

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

답 $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{4} & \mathbf{5} \end{pmatrix}$

1115 도시 1에서 도시 1로 가는 도로의 수는 1이므로

$a_{11}=1$

도시 1에서 도시 2로 가는 도로의 수는 1이므로

$a_{12}=1$

도시 1에서 도시 3으로 가는 도로의 수는 1이므로

$a_{13}=1$

도시 2에서 도시 1로 가는 도로의 수는 1이므로

$a_{21}=1$

도시 2에서 도시 3으로 가는 도로의 수는 2이므로

$a_{23}=2$

도시 3에서 도시 2로 가는 도로의 수는 1이므로

$a_{32}=1$

그 외의 다른 도로는 없으므로 나머지 성분은 모두 0이다.

$$\therefore A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

답 $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$

1116 $i>j$일 때, $a_{ij}=2i+j$이므로

$a_{21}=2\times2+1=5$

$i=j$일 때, $a_{ij}=i-j$이므로

$a_{11}=1-1=0$,

$a_{22}=2-2=0$

$i<j$일 때, $a_{ij}=3i$이므로

$a_{12}=3\times1=3$

$$\therefore A=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

따라서 행렬 A의 모든 성분의 합은

$0+3+5+0=8$

답 **8**

1117 $a_{11}=2\times1-1+k=1+k$이므로

$1+k=2 \qquad \therefore k=1$

따라서 $a_{ij}=2i-j+1$이므로 … 1단계

$x=a_{12}=2\times1-2+1=1$,

$y=a_{21}=2\times2-1+1=4$,

$z=a_{32}=2\times3-2+1=5$

$\therefore x+y+z=1+4+5=10$ … 2단계

답 **10**

채점 요소	비율
1단계 a_{ij}를 나타내는 식 구하기	40 %
2단계 $x+y+z$의 값 구하기	60 %

1118 두 행렬의 대응하는 성분이 서로 같아야 하므로

$x^2=a$, $4=x-y$, $2=xy$, $y^2=b$

$\therefore a+b=x^2+y^2=(x-y)^2+2xy$

$=4^2+2\times2=20$

답 ④

1119 두 행렬의 대응하는 성분이 서로 같아야 하므로

$1=3+y$, $3x-5=-2$, $-4=y-2$, $2x=2$

$\therefore x=1$, $y=-2$

$\therefore x+y=1+(-2)=-1$

답 **−1**

1120 두 행렬의 대응하는 성분이 서로 같아야 하므로

$a+2b=1$ …… ㉠

$-5=a-b$ …… ㉡

$2c-d=6$ …… ㉢

$0=c+d$ …… ㉣

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=2$

㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $c=2$, $d=-2$

$\therefore abcd=-3\times2\times2\times(-2)=24$

답 ⑤

1121 두 행렬의 대응하는 성분이 서로 같아야 하므로

$5=z^2-xz$ …… ㉠

$2x=8$ …… ㉡

$4z=2z^2+3y$ …… ㉢

$0=y+2$ …… ㉣

㉡에서 $x=4$

㉣에서 $y=-2$

(i) $x=4$를 ㉠에 대입하면

$5=z^2-4z$, $\quad z^2-4z-5=0$

$(z+1)(z-5)=0$

$\therefore z=-1$ 또는 $z=5$

(ii) $y=-2$를 ㉢에 대입하면

$4z=2z^2-6$, $\quad z^2-2z-3=0$

$(z+1)(z-3)=0$

$\therefore z=-1$ 또는 $z=3$

(i), (ii)에서 $z=-1$

$\therefore x^2+y^2+z^2=4^2+(-2)^2+(-1)^2=21$

답 **21**

1122 $2(X-B)=A-X$에서

$2X-2B=A-X$, $\quad 3X=A+2B$

$$\therefore X=\frac{1}{3}(A+2B)$$

$$=\frac{1}{3}\left\{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\left\{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{5}{3} & 2 \end{pmatrix}$$

따라서 행렬 X의 모든 성분의 합은

$$\frac{4}{3}+\frac{1}{3}+\left(-\frac{5}{3}\right)+2=2$$

답 2

1123 $2(A+B)-3(A-B)$

$=2A+2B-3A+3B$

$=-A+5B$

$=-\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}+5\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & -10 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -10 \end{pmatrix}$

따라서 구하는 모든 성분의 합은

$-2+2+1+(-10)=-9$

답 ②

1124 $A+3B+2X=X+5B$에서

$X=-A+2B$

$=-\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & -6 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 X의 $(1, 2)$ 성분은 -1이다.

답 -1

1125 삼각형 PQR에서

P$(-2, 3)$, Q$(-1, -2)$, R$(2, 0)$

이므로

$A=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ … 1단계

$3X-2A=2(A-B)+X$에서

$3X-2A=2A-2B+X$

$2X=4A-2B$

$\therefore X=2A-B$

$=2\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -3 & 8 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$ … 2단계

따라서 행렬 X의 모든 성분의 합은

$-3+8+(-4)+(-4)=-3$ … 3단계

답 -3

채점 요소	비율
1단계 행렬 A, B 구하기	30 %
2단계 행렬 X 구하기	50 %
3단계 행렬 X의 모든 성분의 합 구하기	20 %

1126 $2A-B=\begin{pmatrix} 11 & 3 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$ …… ㉠

$A-3B=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 14 \end{pmatrix}$ …… ㉡

㉠$\times 3-$㉡을 하면

$5A=3\begin{pmatrix} 11 & 3 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 14 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 33 & 9 \\ -6 & 24 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 14 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 30 & 5 \\ -5 & 10 \end{pmatrix}$

$\therefore A=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 30 & 5 \\ -5 & 10 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

㉠$-$㉡$\times 2$를 하면

$5B=\begin{pmatrix} 11 & 3 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 14 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 11 & 3 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ -2 & 28 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 0 & -20 \end{pmatrix}$

$\therefore B=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 0 & -20 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$

$\therefore A-B=\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 $A-B$의 모든 성분의 합은

$5+2+(-1)+6=12$

답 12

1127 $A+B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ …… ㉠

$A-B=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ …… ㉡

㉠$+$㉡을 하면

$2A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$

$\therefore A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 A의 모든 성분의 곱은

$2\times 1\times 1\times 3=6$

답 6

1128 $xA+yB=C$에서

$x\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} 2x+3y & x+4y \\ 2y & x-y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$2x+3y=-1$, $x+4y=2$, $2y=2$, $x-y=-3$

$\therefore x=-2$, $y=1$

$\therefore x+y=-2+1=-1$

답 -1

1129 $pA+qB=C$에서

$$p\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}+q\begin{pmatrix}4 & a\\ 4 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix}-p+4q & p+aq\\ 2p+4q & 6q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$-p+4q=2,\ p+aq=1,\ 2p+4q=0,\ 6q=2$$

$6q=2$에서 $\quad q=\frac{1}{3}$

$2p+4q=0$에서 $\quad 2p+\frac{4}{3}=0$

$$\therefore p=-\frac{2}{3}$$

따라서 $p=-\frac{2}{3}$, $q=\frac{1}{3}$을 $p+aq=1$에 대입하면

$$-\frac{2}{3}+\frac{a}{3}=1$$

$$\therefore a=5$$

답 5

1130 이차방정식 $x^2-5x-2=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=5,\ \alpha\beta=-2$$

한편 $\begin{pmatrix}-\alpha & 0\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta & 0\\ \alpha & -\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\alpha\beta & 0\\ \alpha^2+\beta^2 & -\alpha\beta\end{pmatrix}$이므로 구하는 모든 성분의 합은

$$-\alpha\beta+0+(\alpha^2+\beta^2)+(-\alpha\beta)$$
$$=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$$
$$=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$$
$$=5^2-4\times(-2)$$
$$=33$$

답 ③

1131 A는 2×3 행렬, B는 2×2 행렬, C는 3×2 행렬이다.

AB ⇨ $(2\times3$ 행렬$)\times(2\times2$ 행렬$)$은 정의되지 않는다.

BA ⇨ $(2\times2$ 행렬$)\times(2\times3$ 행렬$)=(2\times3$ 행렬$)$

BC ⇨ $(2\times2$ 행렬$)\times(3\times2$ 행렬$)$은 정의되지 않는다.

CA ⇨ $(3\times2$ 행렬$)\times(2\times3$ 행렬$)=(3\times3$ 행렬$)$

CB ⇨ $(3\times2$ 행렬$)\times(2\times2$ 행렬$)=(3\times2$ 행렬$)$

따라서 그 곱이 정의되는 것은 BA, CA, CB의 3개이다.

답 ③

1132 $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\ b & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 2c\\ 12 & 0\end{pmatrix}$에서

$$\begin{pmatrix}2+b & -4\\ ab & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 2c\\ 12 & 0\end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$2+b=-4,\ -4=2c,\ ab=12$$

$$\therefore a=-2,\ b=-6,\ c=-2$$

$$\therefore a+b+c=-2+(-6)+(-2)$$
$$=-10$$

답 -10

1133 $XY=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2a-6 & a-2\end{pmatrix}$

$$YX=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & a-3\\ 0 & a-2\end{pmatrix}$$

이때 $XY=YX$이므로

$$0=a-3,\ 2a-6=0$$

$$\therefore a=3$$

답 3

1134 $X+Y=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 4 & -3\end{pmatrix}$ …… ㉠

$X-Y=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ -2 & 1\end{pmatrix}$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면

$$2X=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 4 & -3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3 & 4\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 2 & -2\end{pmatrix}$$

$$\therefore X=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 2 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

㉠−㉡을 하면

$$2Y=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 4 & -3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-3 & 4\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -6\\ 6 & -4\end{pmatrix}$$

$$\therefore Y=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4 & -6\\ 6 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 3 & -2\end{pmatrix}$$

$$\therefore XY-YX$$
$$=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -3\\ 3 & -2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & -3\\ 3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-5 & 5\\ -5 & 5\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}6 & -4\\ 4 & -6\end{pmatrix}$$

답 ④

1135 $BAC=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}a_1+a_2 & b_1+b_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{2}(b_1+b_2)=\left(\frac{b_1+b_2}{2}\right)$$

따라서 행렬 BAC가 의미하는 것은 지윤이와 서진이의 2차 수학 시험의 평균 점수이다.

답 ④

1136 $\begin{pmatrix}3a+2c\\ 3b+2d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3a\\ 3b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2c\\ 2d\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}c\\ d\end{pmatrix}$

$$\therefore A\begin{pmatrix}3a+2c\\ 3b+2d\end{pmatrix}=A\left\{3\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}c\\ d\end{pmatrix}\right\}$$
$$=3A\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}+2A\begin{pmatrix}c\\ d\end{pmatrix}$$
$$=3\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}4\\ -2\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}3\\ 9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}8\\ -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11\\ 5\end{pmatrix}$$

답 ②

1137 $\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}=-3\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

이므로

$$\begin{aligned}A\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}&=A\left\{-3\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}\\&=-3A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+4A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\\&=-3\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}-6\\-15\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4\\8\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}-10\\-7\end{pmatrix}\end{aligned}$$

답 $\begin{pmatrix}\mathbf{-10}\\\mathbf{-7}\end{pmatrix}$

다른 풀이 $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$라 하면 $A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$에서

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}\qquad\therefore\ a=2,\ c=5$$

또 $A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$에서

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}\qquad\therefore\ b=-1,\ d=2$$

따라서 $A=\begin{pmatrix}2&-1\\5&2\end{pmatrix}$이므로

$$A\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1\\5&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10\\-7\end{pmatrix}$$

1138 실수 x, y에 대하여

$$\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x+y\\3x-y\end{pmatrix}$$

가 성립한다고 하면 두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$2x+y=6,\ 3x-y=4$

두 식을 연립하여 풀면 $x=2,\ y=2$

즉 $\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$이므로

$$\begin{aligned}A\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}&=A\left\{2\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\}\\&=2A\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}+2A\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\\&=2\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}8\\6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\8\end{pmatrix}\end{aligned}$$

따라서 $p=12,\ q=8$이므로

$p-q=12-8=4$

답 **4**

다른 풀이 $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$라 하면

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

$$\therefore\ \begin{pmatrix}2a+3b\\2c+3d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}a-b\\c-d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$2a+3b=4,\ 2c+3d=3,\ a-b=2,\ c-d=1$

$\therefore\ a=2,\ b=0,\ c=\frac{6}{5},\ d=\frac{1}{5}$

따라서 $A=\begin{pmatrix}2&0\\\frac{6}{5}&\frac{1}{5}\end{pmatrix}$이므로

$$A\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\\frac{6}{5}&\frac{1}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\8\end{pmatrix}$$

1139 실수 x, y에 대하여

$$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}-2a\\3b\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}4a\\-b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2ax+4ay\\3bx-by\end{pmatrix}$$

가 성립한다고 하면 두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$a=-2ax+4ay,\ b=3bx-by$

$\therefore\ -2x+4y=1,\ 3x-y=1\ (\because\ a\neq0,\ b\neq0)$

두 식을 연립하여 풀면 $x=\frac{1}{2},\ y=\frac{1}{2}$

즉 $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2a\\3b\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4a\\-b\end{pmatrix}$이므로

$$\begin{aligned}A\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}&=A\left\{\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2a\\3b\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4a\\-b\end{pmatrix}\right\}\\&=\frac{1}{2}A\begin{pmatrix}-2a\\3b\end{pmatrix}+\frac{1}{2}A\begin{pmatrix}4a\\-b\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3\\8\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\4\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

따라서 구하는 모든 성분의 합은

$2+2=4$

답 **4**

1140 $A^2=E$에서

$$\begin{pmatrix}a&2\\-3&b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&2\\-3&b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\therefore\ \begin{pmatrix}a^2-6&2a+2b\\-3a-3b&b^2-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$a^2-6=1,\ 2a+2b=0,\ -3a-3b=0,\ b^2-6=1$

$\therefore\ a^2=7,\ b^2=7,\ b=-a$

$\therefore\ ab=-a^2=-7$

답 **-7**

12 행렬

1141 $A^2=\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+b & a+2 \\ ab+2b & b+4 \end{pmatrix}$이므로 … 1단계

$A^2-A-4E=O$에서

$$\begin{pmatrix} a^2+b & a+2 \\ ab+2b & b+4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 2 \end{pmatrix}-4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} a^2-a+b-4 & a+1 \\ ab+b & b-2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$a^2-a+b-4=0,\ a+1=0,\ ab+b=0,\ b-2=0$ … 2단계

$\therefore a=-1,\ b=2$

$\therefore a+b=-1+2=1$ … 3단계

답 1

	채점 요소	비율
1단계	A^2 구하기	50 %
2단계	a, b에 대한 식 세우기	30 %
3단계	$a+b$의 값 구하기	20 %

1142 $X=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$에서

$$X^2=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=-E$$

$$X^3=X^2X=-EX=-X=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X^4=(X^2)^2=(-E)^2=E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

따라서 X^n은

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

이 이 순서대로 반복되므로 X^n이 될 수 없는 것은 ③이다.

답 ③

1143 $A+2B=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ …… ㉠

$A-2B=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면

$$2A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

㉠−㉡을 하면

$$4B=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore 2B=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\therefore A^2-4B^2 &=A^2-(2B)^2\\ &=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix} 11 & 3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12 & 7 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

따라서 행렬 A^2-4B^2의 $(2,\ 2)$ 성분은 3이다. 답 ②

1144 $(A+B)^2=(A+B)(A+B)$
$\qquad\qquad=A^2+AB+BA+B^2$

이므로 $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$에서

$A^2+AB+BA+B^2=A^2+2AB+B^2$

$\therefore AB=BA$

즉 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ x & y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$이므로

$$\begin{pmatrix} 1+x & 2+y \\ 1+2x & 2+2y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ x+y & x+2y \end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$1+x=3,\ 2+y=5,\ 1+2x=x+y,\ 2+2y=x+2y$

$\therefore x=2,\ y=3$

$\therefore xy=2\times3=6$ 답 6

1145 $AB-AC+C(B-C)=A(B-C)+C(B-C)$

$$\begin{aligned}&=(A+C)(B-C)\\ &=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix} -6 & 6 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

따라서 구하는 모든 성분의 합은

$-6+6+7+(-3)=4$ 답 4

1146 $(A-B)^2=(A-B)(A-B)$
$\qquad\qquad=A^2-AB-BA+B^2$

이므로

$$\begin{aligned}AB+BA&=A^2+B^2-(A-B)^2\\ &=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

따라서 구하는 모든 성분의 합은

$-1+(-4)+0+(-4)=-9$ 답 −9

1147 $(A+B)(A-B)=A^2-AB+BA-B^2$이므로

$(A+B)(A-B)=A^2-B^2$에서

$A^2-AB+BA-B^2=A^2-B^2$

$\therefore AB=BA$

즉 $\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -3y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -3y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$이므로

$$\begin{pmatrix} x-1 & -x-3y \\ 2 & -1+3y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x-1 & 2 \\ -x-3y & -1+3y \end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$-x-3y=2 \qquad \therefore\ y=-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$$

따라서 구하는 y절편은 $-\frac{2}{3}$이다. 답 $-\frac{2}{3}$

1148 $(A+E)(A^2-A+E)=A^3+E^3=A^3+E$

이때 $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$에서

$$A^2=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ A^3+E=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

따라서 구하는 모든 성분의 합은

$0+3+0+9=12$ 답 ③

1149 $(E+3A)^2=E^2+6AE+9A^2$

$=E+6A+9A^2$

이때 $A^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=E$이므로

$(E+3A)^2=E+6A+9E$

$=10E+6A$

따라서 $x=10$, $y=6$이므로

$x-y=10-6=4$ 답 4

1150 $A+B=O$에서 $\quad B=-A$

$AB=E$에서 $\quad A(-A)=E$

$\therefore\ A^2=-E$

$\therefore\ A^4=(A^2)^2=(-E)^2=E$

같은 방법으로 하면 $\quad B^4=E$

$\therefore\ A^{2025}+B^{2024}=(A^4)^{506}A+(B^4)^{506}$

$=EA+E=A+E$ 답 ⑤

1151 $A+B=5E$에서 $\quad A=5E-B$

$AB=E$에서 $\quad (5E-B)B=E$

$5B-B^2=E \qquad \therefore\ B^2=5B-E$

같은 방법으로 하면 $\quad A^2=5A-E$

$\therefore\ A^2+B^2=(5A-E)+(5B-E)$

$=5(A+B)-2E$

$=5\times5E-2E=23E$

$\therefore\ k=23$ 답 23

다른 풀이 $A+B=5E$에서 $\quad A=5E-B$

$\therefore\ AB=(5E-B)B=5B-B^2$

$=B(5E-B)=BA$

따라서 $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$이므로

$A^2+B^2=(A+B)^2-2AB$

$=(5E)^2-2E$

$=25E-2E=23E$

1152 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$에서

$$A^2=AA=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=E$$

$\therefore\ A+A^2+A^3+\cdots+A^{10}$

$=A+A^2+E+A+A^2+E+\cdots+A$

$=3(A+A^2+E)+A$

이때

$$A+A^2+E=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=O$$

이므로

$A+A^2+A^3+\cdots+A^{10}=3\times O+A$

$=A$ 답 ③

다른 풀이 케일리-해밀턴의 정리에 의하여

$A^2-\{1+(-2)\}A+\{1\times(-2)-(-1)\times3\}E=O$

$\therefore\ A^2+A+E=O$

양변에 $A-E$를 곱하면

$(A-E)(A^2+A+E)=O$

$A^3-E=O$

$\therefore\ A^3=E$

$\therefore\ A+A^2+A^3+\cdots+A^{10}$

$=A+A^2+E+A+A^2+E+\cdots+A$

$=O+O+O+A$

$=A$

1153 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$에서

$$A^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=-E$$

$A^3=A^2A=-EA=-A$

$A^4=(A^2)^2=(-E)^2=E$

$A^5=A^4A=EA=A$

$\vdots$

따라서 $A^n=E$가 되는 경우는 $n=4k$ (k는 자연수)일 때이므로 세 자리 자연수 중 가장 작은 수는 100이다. 답 100

RPM 비법 노트

$A^4=E$이므로 자연수 k에 대하여
$n=4k-3$일 때, $A^n=A$
$n=4k-2$일 때, $A^n=-E$
$n=4k-1$일 때, $A^n=-A$
$n=4k$일 때, $A^n=E$

1154 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$에서

$$A^2=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$A^n=\begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ & A-A^2+A^3-A^4+\cdots+A^{2023}-A^{2024}\\ &=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\\ &\quad+\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\cdots\\ &\quad+\begin{pmatrix} 1 & -2023 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & -2024 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix} 1-1+\cdots+1-1 & -1+2-\cdots-2023+2024 \\ 0 & 1-1+\cdots+1-1 \end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix} 0 & 1012 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

따라서 구하는 모든 성분의 합은

$0+1012+0+0=1012$

답 **1012**

1155 $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$에 대하여

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A^2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=A\times A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$A^3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=A\times A^2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$A^n\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2^n \\ 2^n \end{pmatrix}$$

따라서 $x_n=2^n$, $y_n=2^n$이므로 $2x_n-y_n<1000$에서

$2\times2^n-2^n<1000$

$\therefore\ 2^n<1000$

이때 $2^9=512$, $2^{10}=1024$이므로 구하는 자연수 n의 최댓값은 9이다.

답 **9**

1156 ㄱ. $(AB)^2=ABAB$
$=AABB=A^2B^2$ (참)

ㄴ. $A-B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$이면

$$(A-B)^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=O$$

이지만 $A-B\neq O$, 즉 $A\neq B$이다. (거짓)

ㄷ. $A^5=A^2A^3=EA^3=A^3=A^2A=EA=A$
$\therefore\ A=E$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

1157 ㄱ. $A=2B^2$이면
$AB=2B^2B=2B^3$, $BA=B\times2B^2=2B^3$
$\therefore\ AB=BA$

ㄴ. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$이면

$$AB=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=O,$$

$$BA=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

이므로 $AB=O$이지만 $AB\neq BA$이다.

ㄷ. $A-B=E$이면 $A=B+E$
따라서 $AB=(B+E)B=B^2+B$,
$BA=B(B+E)=B^2+B$이므로
$AB=BA$

이상에서 $AB=BA$가 성립하도록 하는 조건인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄷ

1158 ㄱ. $AE=A$이므로 $AE=O$에서
$A=O$ (참)

ㄴ. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$이면

$$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=E$$

이지만 $A\neq E$, $A\neq -E$ (거짓)

ㄷ. $A^2+B^2=AB+BA$에서
$A^2+B^2-AB-BA=O$
$\therefore\ (A-B)^2=O$

이때 $A-B=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$이면

$$(A-B)^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=O$$

즉 $A^2+B^2=AB+BA$이지만 $A-B\neq O$이다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ①

시험에 꼭 나오는 문제

• 본책 164~167쪽

1159 P_1 회사에서 P_1 회사로의 선로의 수는 2이므로

$a_{11}=2$

P_1 회사에서 P_2 회사로의 선로의 수는 1이므로 $a_{12}=1$

P_2 회사에서 P_1 회사로의 선로의 수는 2이므로 $a_{21}=2$

P_2 회사에서 P_2 회사로의 선로의 수는 1이므로 $a_{22}=1$

$\therefore A=\begin{pmatrix}2&1\\2&1\end{pmatrix}$ 답 ③

1160 $a_{11}=(-2)^{1+1}+k=4+k$

$a_{12}=(-2)^{1+2}+2k=-8+2k$

$a_{21}=(-2)^{2+1}+k=-8+k$

$a_{22}=(-2)^{2+2}+2k=16+2k$

행렬 A의 모든 성분의 합이 34이므로

$(4+k)+(-8+2k)+(-8+k)+(16+2k)=34$

$4+6k=34 \quad \therefore k=5$ 답 ⑤

1161 두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$\alpha=6-\beta,\ \beta=\dfrac{4}{\alpha}$

$\therefore \alpha+\beta=6,\ \alpha\beta=4$

$$\therefore \frac{\alpha^2}{\beta}+\frac{\beta^2}{\alpha}=\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}=\frac{6^3-3\times4\times6}{4}=\frac{144}{4}=36$$

답 36

1162 $\alpha\begin{pmatrix}1&\alpha\\0&\beta\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1&\beta\\0&\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&10\\0&2\alpha\beta\end{pmatrix}$에서

$\begin{pmatrix}\alpha&\alpha^2\\0&\alpha\beta\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\beta&\beta^2\\0&\alpha\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&10\\0&2\alpha\beta\end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix}\alpha+\beta&\alpha^2+\beta^2\\0&2\alpha\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&10\\0&2\alpha\beta\end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$\alpha+\beta=4,\ \alpha^2+\beta^2=10$

한편 α, β는 이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=a,\ \alpha\beta=b$

따라서 $a=4$이고, $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$에서

$10=4^2-2b \quad \therefore b=3$

$\therefore a+b=4+3=7$ 답 7

1163 $A-5X=3(B-X)$에서

$A-5X=3B-3X, \quad -2X=-A+3B$

$\therefore X=\dfrac{1}{2}(A-3B)$

$=\dfrac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix}2&0\\-1&3\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}4&2\\5&-3\end{pmatrix}\right\}$

$=\dfrac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix}2&0\\-1&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}12&6\\15&-9\end{pmatrix}\right\}$

$=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}-10&-6\\-16&12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&-3\\-8&6\end{pmatrix}$ 답 ②

1164 $X-2Y=A$ …… ㉠

$2X+Y=B$ …… ㉡

㉠+㉡×2를 하면 $5X=A+2B$

$\therefore X=\dfrac{1}{5}(A+2B)$

㉠×2−㉡을 하면 $-5Y=2A-B$

$\therefore Y=-\dfrac{1}{5}(2A-B)$

$\therefore X+Y=\dfrac{1}{5}(A+2B)+\left\{-\dfrac{1}{5}(2A-B)\right\}$

$=\dfrac{1}{5}(A+2B-2A+B)$

$=-\dfrac{1}{5}(A-3B)$

$=-\dfrac{1}{5}\left\{\begin{pmatrix}1&-6\\-8&3\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}7&-2\\4&1\end{pmatrix}\right\}$

$=-\dfrac{1}{5}\left\{\begin{pmatrix}1&-6\\-8&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}21&-6\\12&3\end{pmatrix}\right\}$

$=-\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}-20&0\\-20&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0\\4&0\end{pmatrix}$

따라서 행렬 $X+Y$의 모든 성분의 합은

$4+0+4+0=8$ 답 ③

1165 $xA+yB=4C$에서

$x\begin{pmatrix}-1&-2\\1&1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}1&2\\0&-1\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}-1&-2\\2&1\end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix}-x+y&-2x+2y\\x&x-y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&-8\\8&4\end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$-x+y=-4,\ -2x+2y=-8,\ x=8,\ x-y=4$

$\therefore x=8,\ y=4$

$\therefore x+y=8+4=12$ 답 12

1166 $\begin{pmatrix}x&1\\y&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3&1\\6&-2\end{pmatrix}=O$에서

$\begin{pmatrix}-3x+6&x-2\\-3y+12&y-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$-3x+6=0,\ x-2=0,\ -3y+12=0,\ y-4=0$

$\therefore x=2,\ y=4$

$\therefore xy=2\times4=8$ 답 8

1167 $A^2=A$에서

$$\begin{pmatrix} a & -1 \\ b & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & -1 \\ b & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & -1 \\ b & 2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} a^2-b & -a-2 \\ ab+2b & -b+4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & -1 \\ b & 2 \end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$a^2-b=a$, $-a-2=-1$, $ab+2b=b$, $-b+4=2$

$\therefore a=-1$, $b=2$

$\therefore a+b=-1+2=1$ 답 **1**

1168 $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$에서

$$A\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}=A^2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x \\ -y \end{pmatrix}$$

이때 $\begin{pmatrix} x-p \\ y-q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$이므로

$$A\begin{pmatrix} x-p \\ y-q \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}-A\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2x \\ -y \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} p-2x \\ q+y \end{pmatrix}$$ 답 ③

1169 $(A-B)^2=A^2-AB-BA+B^2$이므로

$(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$에서

$A^2-AB-BA+B^2=A^2-2AB+B^2$

$\therefore AB=BA$

즉 $\begin{pmatrix} 3 & x \\ 6 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & y \\ -6 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & y \\ -6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & x \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$이므로

$$\begin{pmatrix} -6-6x & 3x+3y \\ 0 & 6y-6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -6+6y & -2x-2y \\ 0 & -6x-6 \end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$-6-6x=-6+6y$, $3x+3y=-2x-2y$,

$6y-6=-6x-6$

$\therefore y=-x$

따라서 구하는 그래프의 개형은 ②이다. 답 ②

1170 $[X, Y]=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}$에서

$$XY-YX=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}$$

$\therefore [X+Y, X-Y]$

$=(X+Y)(X-Y)-(X-Y)(X+Y)$

$=(X^2-XY+YX-Y^2)-(X^2+XY-YX-Y^2)$

$=-2XY+2YX$

$=-2(XY-YX)$

$=-2\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -6 & -4 \\ 16 & -10 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 $[X+Y, X-Y]$의 모든 성분의 합은

$-6+(-4)+16+(-10)=-4$ 답 **−4**

1171 $(A^2-A+E)(A^2+A+E)=A^4+A^2E^2+E^4$

$=A^4+A^2+E$

$A^2=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$에서

$$A^4=A^2A^2=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A^4+A^2+E=\begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$ 답 ⑤

1172 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$에서

$$A^2=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 10 & -5 \\ -30 & 15 \end{pmatrix}=5\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}=5A$$

$A^3=A^2A=5A^2=25A$

⋮

따라서 2 이상의 자연수 n에 대하여 $A^n=5^{n-1}A$이므로

$A^{10}=5^9A$ 답 ④

다른 풀이 케일리-해밀턴의 정리에 의하여

$A^2-(2+3)A+\{2\times3-(-1)\times(-6)\}E=O$

$A^2-5A=O$

$\therefore A^2=5A$

1173 $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$에서

$$A^2=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=-E$$

따라서 $A^6=(A^3)^2=(-E)^2=E$이므로

$A^{1000}=(A^6)^{166}A^4=E^{166}A^4=A^4=A^3A=-EA$

$=-A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ 답 ④

다른 풀이 케일리-해밀턴의 정리에 의하여

$A^2-(0+1)A+\{0\times1-(-1)\times1\}E=O$

$\therefore A^2-A+E=O$

양변에 $A+E$를 곱하면

$(A+E)(A^2-A+E)=O$

$A^3+E=O$

$\therefore A^3=-E$

$\therefore A^{1000}=(A^3)^{333}A=(-E)^{333}A$

$=-A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

1174 $A=\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$에서

$$A^2=\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=-E$$

$$\begin{aligned}\therefore\ & A^{22}+A^{14}+A^6 \\ &=(A^3)^7\times A+(A^3)^4\times A^2+(A^3)^2 \\ &=(-E)^7\times A+(-E)^4\times A^2+(-E)^2 \\ &=-E^7A+E^4A^2+E^2 \\ &=-A+A^2+E \\ &=-\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=O\end{aligned}$$

답 ③

다른 풀이 케일리-해밀턴의 정리에 의하여

$$A^2-(-2+3)A+\{-2\times3-(-1)\times7\}E=O$$
$$\therefore A^2-A+E=O$$

양변에 $A+E$를 곱하면

$$(A+E)(A^2-A+E)=O,\qquad A^3+E=O$$
$$\therefore A^3=-E$$
$$\begin{aligned}\therefore A^{22}+A^{14}+A^6&=(A^3)^7A+(A^3)^4A^2+(A^3)^2 \\ &=(-E)^7A+(-E)^4A^2+(-E)^2 \\ &=A^2-A+E=O\end{aligned}$$

1175 $A=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$에서

$$A^2=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=-E$$

$$A^4=A^3A=-EA=-A$$
$$A^5=A^4A=-A^2$$
$$A^6=A^5A=-A^3=-(-E)=E$$
$$\therefore A+A^2+A^3+A^4+A^5+A^6$$
$$=A+A^2-E-A-A^2+E=O$$

$$\begin{aligned}\therefore\ & A+A^2+A^3+\cdots+A^{20} \\ &=(A+A^2+A^3+A^4+A^5+A^6) \\ &\quad+A^6(A+A^2+A^3+A^4+A^5+A^6)+\cdots \\ &\quad+A^{18}(A+A^2) \\ &=A+A^2 \\ &=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

따라서 $a=-3$, $b=-2$, $c=6$, $d=3$이므로

$$\begin{aligned}a-b+c+d&=-3-(-2)+6+3 \\ &=8\end{aligned}$$

답 ④

1176 ㄱ. $A+B=E$에서 $\quad B=E-A$

따라서 $AB=A(E-A)=A-A^2$,

$BA=(E-A)A=A-A^2$이므로

$AB=BA$ (참)

ㄴ. $A=-E$이면

$A^2=(-E)^2=E^2=E$

이지만 $A\neq E$이다. (거짓)

ㄷ. $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$이면

$$AB=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=O$$

이지만

$$BA=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\neq O \text{ (거짓)}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ①

1177 ㄱ. $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$이면

$$A^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=O$$

이지만 $A\neq O$이다. (거짓)

ㄴ. $A^5=A^4A=EA=A=E$이므로

$A^2=E^2=E$ (참)

ㄷ. $A^2-AB-BA+B^2=O$에서

$(A-B)^2=O$

$\therefore (A-B)^3=(A-B)^2(A-B)=O$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

1178 두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$a+b=4$, $x=a^2+b^2$, $y=a^3+b^3$, $ab=-1$ ··· 1단계

$$\begin{aligned}\therefore x&=a^2+b^2 \\ &=(a+b)^2-2ab \\ &=4^2-2\times(-1) \\ &=18\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y&=a^3+b^3 \\ &=(a+b)^3-3ab(a+b) \\ &=4^3-3\times(-1)\times4 \\ &=76\end{aligned}$$ ··· 2단계

$\therefore y-x=76-18=58$ ··· 3단계

답 58

채점 요소		비율
1단계	두 행렬이 서로 같을 조건을 이용하여 식 세우기	20 %
2단계	x, y의 값 구하기	60 %
3단계	$y-x$의 값 구하기	20 %

12 행렬

1179 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$에서

$$A^2=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2+b^2 \end{pmatrix}$$

$A^2-4A+3E=O$에서

$$\begin{pmatrix} a^2+b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2+b^2 \end{pmatrix}-4\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} a^2+b^2-4a+3 & 2ab-4b \\ 2ab-4b & a^2+b^2-4a+3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$a^2+b^2-4a+3=0$, $2ab-4b=0$ … 1단계

$2ab-4b=0$에서 $2b(a-2)=0$

$\therefore a=2$ 또는 $b=0$

(i) $a=2$일 때,

$a^2+b^2-4a+3=0$에서

$4+b^2-8+3=0$

$b^2=1$ $\therefore b=\pm1$

(ii) $b=0$일 때,

$a^2+b^2-4a+3=0$에서

$a^2-4a+3=0$, $(a-1)(a-3)=0$

$\therefore a=1$ 또는 $a=3$

(i), (ii)에서 순서쌍 (a, b)는

$(2, 1)$, $(2, -1)$, $(1, 0)$, $(3, 0)$

의 4개이다. … 2단계

답 4

	채점 요소	비율
1단계	a, b 사이의 관계식 세우기	50 %
2단계	순서쌍 (a, b)의 개수 구하기	50 %

1180 $A=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$에서

$$A^2=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=E$$

$\therefore A^{100}=(A^3)^{33}A=E^{33}A=A$ … 1단계

따라서 $A^{100}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix}$이므로

$x=-3$, $y=-5$

$\therefore x-y=-3-(-5)=2$ … 2단계

답 2

	채점 요소	비율
1단계	$A^{100}=A$임을 알기	70 %
2단계	$x-y$의 값 구하기	30 %

1181 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$에서

$$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^3 \end{pmatrix}$$

$\vdots$

$A^n=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$ … 1단계

$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$에서

$$B^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix}$$

$$B^3=B^2B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^3 \end{pmatrix}$$

$\vdots$

$B^n=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$ … 2단계

$$\therefore B^n-A^n=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3^n-2^n \end{pmatrix}$$

따라서 B^n-A^n의 모든 성분의 합은

3^n-2^n

즉 $3^n-2^n=65$에서 $n=4$일 때

$3^4-2^4=81-16=65$

$\therefore n=4$ … 3단계

답 4

	채점 요소	비율
1단계	행렬 A^n 구하기	35 %
2단계	행렬 B^n 구하기	35 %
3단계	n의 값 구하기	30 %

1182 전략 행렬 AB와 행렬 BA의 각 성분의 의미를 파악한다.

$$AB=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} ax+bz & ay+bw \\ cx+dz & cy+dw \end{pmatrix}$$

윤주가 P 마트에서 사과와 배를 사고 지불해야 하는 금액은

$ax+bz$ (원)

이므로 행렬 AB의 $(1, 1)$ 성분과 같다.

세희가 Q 마트에서 사과와 배를 사고 지불해야 하는 금액은

$cy+dw$ (원)

이므로 행렬 AB의 $(2, 2)$ 성분과 같다.

따라서 구하는 금액의 합은 AB의 $(1, 1)$ 성분과 $(2, 2)$ 성분의 합이다.

답 ④

1183 전략 주어진 식을 이용하여 행렬 AB를 B에 대한 식으로 나타낸다.

$A+B=E$에서 $A=E-B$

$\therefore AB=(E-B)B=B-B^2$ ⋯⋯ ㉠

한편

$$\begin{aligned}A^3+B^3&=(E-B)^3+B^3\\&=(E-3B+3B^2-B^3)+B^3\\&=E-3B+3B^2\end{aligned}$$

즉 $E-3B+3B^2=\begin{pmatrix}4&6\\9&1\end{pmatrix}$이므로

$$-3B+3B^2=\begin{pmatrix}4&6\\9&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&6\\9&0\end{pmatrix}$$

$$\therefore B-B^2=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3&6\\9&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-2\\-3&0\end{pmatrix}$$

따라서 ㉠에서 $AB=\begin{pmatrix}-1&-2\\-3&0\end{pmatrix}$이므로 행렬 AB의 모든 성분의 합은

$-1+(-2)+(-3)+0=-6$ 답 **−6**

다른 풀이 $A+B=E$에서 $A=E-B$

$$\begin{aligned}\therefore AB&=(E-B)B=B-B^2\\&=B(E-B)=BA\end{aligned}$$

따라서 $A^3+B^3=(A+B)^3-3AB(A+B)$이므로

$A^3+B^3=E^3-3ABE$, $3AB=E-(A^3+B^3)$

$$\begin{aligned}\therefore AB&=\frac{1}{3}\{E-(A^3+B^3)\}\\&=\frac{1}{3}\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4&6\\9&1\end{pmatrix}\right\}\\&=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-3&-6\\-9&0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}-1&-2\\-3&0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

1184 전략 $\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$임을 이용하여 A^n의 규칙을 파악한다.

ω가 $x^3-1=0$, 즉 $(x-1)(x^2+x+1)=0$의 한 허근이므로

$\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$

한편 $A=\begin{pmatrix}-1&\omega\\\omega&-\omega^2\end{pmatrix}$에서

$$\begin{aligned}A^2&=\begin{pmatrix}-1&\omega\\\omega&-\omega^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&\omega\\\omega&-\omega^2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1+\omega^2&-\omega-\omega^3\\-\omega-\omega^3&\omega^2+\omega^4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+\omega^2&-\omega-1\\-\omega-1&\omega^2+\omega\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}-\omega&\omega^2\\\omega^2&-1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A^3=A^2A&=\begin{pmatrix}-\omega&\omega^2\\\omega^2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&\omega\\\omega&-\omega^2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\omega+\omega^3&-\omega^2-\omega^4\\-\omega^2-\omega&\omega^3+\omega^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\omega+1&-\omega^2-\omega\\-\omega^2-\omega&1+\omega^2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}-\omega^2&1\\1&-\omega\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A^4=A^3A&=\begin{pmatrix}-\omega^2&1\\1&-\omega\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&\omega\\\omega&-\omega^2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\omega^2+\omega&-\omega^3-\omega^2\\-1-\omega^2&\omega+\omega^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\omega^2+\omega&-1-\omega^2\\-1-\omega^2&\omega+1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}-1&\omega\\\omega&-\omega^2\end{pmatrix}=A\end{aligned}$$

$A^5=A^4A=AA=A^2$

$A^6=A^5A=A^2A=A^3$

⋮

따라서 자연수 k에 대하여

$$A^n=\begin{cases}A&(n=3k-2)\\A^2&(n=3k-1)\\A^3&(n=3k)\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\therefore A+A^2+A^3+\cdots+A^{100}&=A+A^2+A^3+A+A^2+A^3+\cdots+A\\&=33(A+A^2+A^3)+A\\&=33\left\{\begin{pmatrix}-1&\omega\\\omega&-\omega^2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\omega&\omega^2\\\omega^2&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\omega^2&1\\1&-\omega\end{pmatrix}\right\}\\&\quad+\begin{pmatrix}-1&\omega\\\omega&-\omega^2\end{pmatrix}\\&=33\begin{pmatrix}-1-\omega-\omega^2&\omega+\omega^2+1\\\omega+\omega^2+1&-\omega^2-1-\omega\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&\omega\\\omega&-\omega^2\end{pmatrix}\\&=33\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&\omega\\\omega&-\omega^2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}-1&\omega\\\omega&-\omega^2\end{pmatrix}=A\end{aligned}$$

답 ②

다른 풀이 ω가 $x^3-1=0$, 즉 $(x-1)(x^2+x+1)=0$의 한 허근이므로

$\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$

$A=\begin{pmatrix}-1&\omega\\\omega&-\omega^2\end{pmatrix}$에서 케일리-해밀턴의 정리에 의하여

$A^2-(-1-\omega^2)A+\{-1\times(-\omega^2)-\omega\times\omega\}E=O$

$A^2-\omega A=O$ $\therefore A^2=\omega A$

$A^3=A^2A=(\omega A)A=\omega A^2=\omega(\omega A)=\omega^2A$

$A^4=A^3A=(\omega^2A)A=\omega^2A^2=\omega^2(\omega A)=\omega^3A=A$

$A^5=A^4A=A^2$

$A^6=A^5A=A^3$

⋮

$A^{n+3}=A^n$ (단, n은 자연수)

$$\begin{aligned}\therefore A+A^2+A^3+\cdots+A^{100}&=A+A^2+A^3+A+A^2+A^3+\cdots+A\\&=33(A+A^2+A^3)+A\\&=33(A+\omega A+\omega^2A)+A\\&=33(1+\omega+\omega^2)A+A\\&=A\end{aligned}$$

MEMO