기출 분석 문제집

1등급 만들기

공통수학1
686제

바른답·알찬풀이

MiraeN 에듀

I 다항식

01 다항식의 연산

유형 분석 기출

● 9쪽 ~ 13쪽

001 ③	**002** 3	**003** $3x^2-2xy+y^2$		
004 $7x^2-14x+12$		**005** ③	**006** ②	**007** 3
008 ②	**009** ⑤	**010** ③	**011** -15	**012** ①
013 ①	**014** 9	**015** ⑤	**016** ①	**017** 243
018 ①	**019** ④	**020** 240	**021** ②	**022** ③
023 ⑤	**024** ②	**025** ①	**026** -2	**027** ②
028 ④				

001

$2(2A-B)+(B-A)$

$=3A-B$

$=3(x^2-2xy+2y^2)-(2x^2-xy+3y^2)$

$=3x^2-6xy+6y^2-2x^2+xy-3y^2$

$=x^2-5xy+3y^2$

002

$A-\{B-(A-C)\}$

$=A-(B-A+C)$

$=A-B+A-C$

$=2A-B-C$

$=2(x^3+ax^2+bx+1)-(2x^3-3x^2-4x)-(x^3+2x^2-3)$

$=2x^3+2ax^2+2bx+2-2x^3+3x^2+4x-x^3-2x^2+3$

$=-x^3+(2a+1)x^2+(2b+4)x+5$

이때 x^2의 계수는 5, x의 계수는 6이므로

$2a+1=5,\ 2b+4=6$

$\therefore\ a=2,\ b=1$

$\therefore\ a+b=2+1=3$

003

$2X+A=2B-X$에서 $3X=-A+2B$

$\therefore\ X=\frac{1}{3}(-A+2B)$

$=\frac{1}{3}\{-(-x^2+6xy-y^2)+2(4x^2+y^2)\}$

$=\frac{1}{3}(x^2-6xy+y^2+8x^2+2y^2)$

$=\frac{1}{3}(9x^2-6xy+3y^2)$

$=3x^2-2xy+y^2$

004

$A+B=4x^2-9x+7$ ······ ㉠

$A-2B=x^2+3x+1$ ······ ㉡

㉠−㉡을 하면 $3B=3x^2-12x+6$

$\therefore\ B=x^2-4x+2$ ······ ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$A+(x^2-4x+2)=4x^2-9x+7$

$\therefore\ A=4x^2-9x+7-(x^2-4x+2)$

$=4x^2-9x+7-x^2+4x-2$

$=3x^2-5x+5$

$\therefore\ 2A+B=2(3x^2-5x+5)+(x^2-4x+2)$

$=6x^2-10x+10+x^2-4x+2$

$=7x^2-14x+12$

005

$X+A=B$에서

$X=B-A$

$=(10x^{10}+9x^9+8x^8+\cdots+2x^2+x)$
$-(x^{10}+2x^9+3x^8+\cdots+9x^2+10x)$

$=9x^{10}+7x^9+5x^8+3x^7+x^6-x^5-3x^4-5x^3-7x^2-9x$

따라서 다항식 X의 모든 계수의 합은

$9+7+5+3+1-1-3-5-7-9=0$

1등급 비법

각 항의 계수에 규칙성이 있는 경우 그 규칙성을 이용하여 구할 수 있다.

006

$(x^2+1)(2x^3-4x^2+3)$의 전개식에서 x^2항은

$x^2\times3+1\times(-4x^2)=3x^2-4x^2=-x^2$

따라서 x^2의 계수는 -1이다.

다른 풀이 주어진 식을 전개하면

$(x^2+1)(2x^3-4x^2+3)=2x^5-4x^4+2x^3-x^2+3$

따라서 x^2의 계수는 -1이다.

1등급 비법

다항식의 전개식에서 특정한 항의 계수를 구할 때는 구하는 항이 나오는 경우만 전개하면 편리하다.

007

$(x+a)^3+x(x-4)$의 전개식에서 x^2항은

$3ax^2+x^2=(3a+1)x^2$

이때 x^2의 계수가 10이므로

$3a+1=10\qquad\therefore\ a=3$

다른 풀이 주어진 식을 전개하면

$(x+a)^3+x(x-4)=x^3+3ax^2+3a^2x+a^3+x^2-4x$

$=x^3+(3a+1)x^2+(3a^2-4)x+a^3$

이때 x^2의 계수가 10이므로

$3a+1=10\qquad\therefore\ a=3$

008

$x^2-3x=X$로 놓으면

$(x^2-3x+2)(x^2-3x-5)+8$

$=(X+2)(X-5)+8$

$=X^2-3X-2$

$=(x^2-3x)^2-3(x^2-3x)-2$

$=x^4-6x^3+9x^2-3x^2+9x-2$

$=x^4-6x^3+6x^2+9x-2$

개념 보충

다항식의 곱셈에서 공통부분이 있는 식은 다음과 같은 순서로 전개한다.

(i) 공통부분을 한 문자로 치환하여 전개한다.

(ii) (i)의 식의 문자에 원래의 식을 대입하여 전개한다.

009

$(2x-y+1)^2=4x^2+y^2+1-4xy-2y+4x$

$=4x^2+y^2+1-2(2xy-2x+y)$

$=6-2\times(-5)=16$

010

$(a+2)(a-2)(a^2+2a+4)(a^2-2a+4)$

$=\{(a+2)(a^2-2a+4)\}\{(a-2)(a^2+2a+4)\}$

$=(a^3+2^3)(a^3-2^3)$

$=(9+8)\times(9-8)$

$=17\times1=17$

011

$(a+2)^2=6$에서

$a^2+4a+4=6$

$\therefore a^2+4a=2$

$\therefore (a+1)(a-1)(a+3)(a+5)$

$=\{(a+1)(a+3)\}\{(a-1)(a+5)\}$

$=(a^2+4a+3)(a^2+4a-5)$

$=(2+3)\times(2-5)$

$=5\times(-3)=-15$

1등급 비법

주어진 조건을 이용할 수 있도록 곱셈의 순서를 바꿔서 두 일차식끼리 짝 지어 전개한 후 식의 값을 대입하여 구한다.

012

$a-b=(2-\sqrt{3})-(2+\sqrt{3})=-2\sqrt{3}$

$ab=(2-\sqrt{3})\times(2+\sqrt{3})=4-3=1$

$a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$에

$a-b=-2\sqrt{3}$, $ab=1$을 대입하면

$a^3-b^3=(-2\sqrt{3})^3+3\times1\times(-2\sqrt{3})$

$=-24\sqrt{3}-6\sqrt{3}$

$=-30\sqrt{3}$

013

$x-y=2$, $xy=2$이므로

$x^2+y^2=(x-y)^2+2xy$

$=2^2+2\times2=8$

$\therefore x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2$

$=8^2-2\times2^2$

$=64-8=56$

014

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$에

$a+b+c=0$, $a^2+b^2+c^2=6$을 대입하면

$0=6+2(ab+bc+ca)$

$\therefore ab+bc+ca=-3$

$(ab+bc+ca)^2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)$에

$a+b+c=0$, $ab+bc+ca=-3$을 대입하면

$(-3)^2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc\times0$

$\therefore a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=9$

015

$x^3-x^2-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}$

$=\left(x^3-\frac{1}{x^3}\right)-\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)$

$=\left\{\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\frac{1}{x}\right)\right\}-\left\{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2\right\}$

$=(2^3+3\times2)-(2^2+2)=8$

016

$a+b+c=3$이므로

$(a+b)(b+c)(c+a)$

$=(3-c)(3-a)(3-b)$

$=3^3-(a+b+c)\times3^2+(ab+bc+ca)\times3-abc$

$=27-3\times3^2-6\times3+8=-10$

017

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$의 양변에 xyz를 곱하여 정리하면

$xy+yz+zx=0$

$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$에

$x^2+y^2+z^2=3$, $xy+yz+zx=0$을 대입하면

$(x+y+z)^2=3+2\times0=3$

$\therefore (x+y+z)^{10}=\{(x+y+z)^2\}^5$

$=3^5=243$

018

$a=100$이라 하면

$A=101^3-99^3$

$=(a+1)^3-(a-1)^3$

$=6a^2+2=60002$

따라서 자연수 A의 모든 자리의 숫자의 합은

$6+0+0+0+2=8$

019

$(7+1)(7^2+1)(7^4+1)(7^8+1)$

$=\frac{1}{6}\times(7-1)(7+1)(7^2+1)(7^4+1)(7^8+1)$

$=\frac{1}{6}\times(7^2-1)(7^2+1)(7^4+1)(7^8+1)$

$=\frac{1}{6}\times(7^4-1)(7^4+1)(7^8+1)$

$=\frac{1}{6}\times(7^8-1)(7^8+1)$

$=\frac{7^{16}-1}{6}$

따라서 $m=6$, $n=16$이므로

$m+n=6+16=22$

020

$\overline{AC}=a$, $\overline{CB}=b$라 하면

$a+b=8$, $a^3+b^3=224$

$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$에

$a+b=8$, $a^3+b^3=224$를 대입하면

$224=8^3-3ab\times8$, $3ab=36$

$\therefore ab=12$

이때 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=8^2-2\times12=40$이므로

두 정육면체의 겉넓이의 합은

$6(a^2+b^2)=6\times40=240$

021

상자의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이를 각각 a, b, c라 하면 겉넓이가 24이므로

$2(ab+bc+ca)=24 \qquad \therefore ab+bc+ca=12$

또, 모든 모서리의 길이의 합이 28이므로

$4(a+b+c)=28 \qquad \therefore a+b+c=7$

$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$에

$a+b+c=7$, $ab+bc+ca=12$를 대입하면

$a^2+b^2+c^2=7^2-2\times12=25$

따라서 이 상자의 대각선의 길이는

$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{25}=5$

1등급 비법

직육면체의 겉넓이와 부피가 주어지고 대각선의 길이를 구하는 문제는 곱셈 공식의 활용 문제로 자주 출제되므로 곱셈 공식의 변형과 피타고라스 정리를 잘 알아두도록 한다.

개념 보충

대각선의 길이

① 가로의 길이가 a, 세로의 길이가 b인 직사각형의 대각선의 길이 ⇨ $\sqrt{a^2+b^2}$

② 가로의 길이가 a, 세로의 길이가 b, 높이가 c인 직육면체의 대각선의 길이 ⇨ $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

022

삼각형 ABC가 $\angle A=90^\circ$인 직각삼각형이므로

$x^2+y^2=10$ …… ㉠

사각형 PQRS는 정사각형이므로 $\overline{PQ}=\overline{PS}$

삼각형 ABC와 삼각형 APS가 서로 닮음이므로

두 삼각형의 닮음비는

$\overline{BC}:\overline{PS}=\sqrt{10}:\frac{2\sqrt{10}}{7}=7:2$

즉, $\overline{AP}=\frac{2}{7}x$이고,

$\overline{AS}=\frac{2}{7}y$이므로 $\overline{SC}=\frac{5}{7}y$

또, 삼각형 APS와 삼각형 RSC가 서로 닮음이므로

$\overline{PS}:\overline{AP}=\overline{SC}:\overline{RS}$에서

$\frac{2\sqrt{10}}{7}:\frac{2}{7}x=\frac{5}{7}y:\frac{2\sqrt{10}}{7}$

$10xy=40 \qquad \therefore xy=4$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$(x-y)^2=x^2+y^2-2xy=10-2\times4=2$

이때 $x>y$이므로 $x-y=\sqrt{2}$

$\therefore x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$

$=(\sqrt{2})^3+3\times4\times\sqrt{2}=14\sqrt{2}$

다른 풀이 $\overline{BC}=\sqrt{10}$이고, $\overline{PQ}=\frac{2\sqrt{10}}{7}$이므로

$\overline{BQ}=\frac{\sqrt{10}}{7}a\ (0<a<5)$라 하면

$\overline{CR}=\overline{BC}-\overline{BQ}-\overline{QR}$

$=\sqrt{10}-\frac{\sqrt{10}}{7}a-\frac{2\sqrt{10}}{7}=\frac{\sqrt{10}}{7}(5-a)$

삼각형 QBP와 삼각형 RSC는 서로 닮음이므로

$\overline{PQ}:\overline{BQ}=\overline{CR}:\overline{SR}$에서

$\frac{2\sqrt{10}}{7}:\frac{\sqrt{10}}{7}a=\frac{\sqrt{10}}{7}(5-a):\frac{2\sqrt{10}}{7}$

$\frac{10}{49}a(5-a)=\frac{40}{49}$, $a^2-5a+4=0$

$(a-1)(a-4)=0 \qquad \therefore a=1$ 또는 $a=4$

$\therefore \overline{BQ}=\frac{\sqrt{10}}{7}$ 또는 $\overline{BQ}=\frac{4\sqrt{10}}{7}$

삼각형 ABC가 $\angle A=90^\circ$인 직각삼각형이므로

$x^2+y^2=10$ …… ㉠

(i) $a=1$일 때,

삼각형 ABC와 삼각형 QBP는 서로 닮음이므로

$\overline{CA}:\overline{BA}=\overline{PQ}:\overline{BQ}$에서 $y:x=\frac{2\sqrt{10}}{7}:\frac{\sqrt{10}}{7}$

$\frac{2\sqrt{10}}{7}x=\frac{\sqrt{10}}{7}y \qquad \therefore y=2x$

그런데 $x>0$, $y>0$이므로 $x<y$가 되어 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=4$일 때,

삼각형 ABC와 삼각형 QBP는 서로 닮음이므로

$\overline{CA}:\overline{BA}=\overline{PQ}:\overline{BQ}$에서 $y:x=\frac{2\sqrt{10}}{7}:\frac{4\sqrt{10}}{7}$

$\frac{2\sqrt{10}}{7}x=\frac{4\sqrt{10}}{7}y \quad \therefore x=2y$ ⋯⋯ ㉡

㉠에 대입하면

$(2y)^2+y^2=10$, $y^2=2 \quad \therefore y=-\sqrt{2}$ 또는 $y=\sqrt{2}$

$y>0$이므로 $y=\sqrt{2}$

㉡에 대입하면 $x=2\sqrt{2}$

$\therefore x^3-y^3=(2\sqrt{2})^3-(\sqrt{2})^3=16\sqrt{2}-2\sqrt{2}=14\sqrt{2}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $x^3-y^3=14\sqrt{2}$

023

$$\begin{array}{r|l} & 2x-2 \\ \hline x^2+x+1 & 2x^3 \qquad\quad +6x+4 \\ & 2x^3+2x^2+2x \\ \hline & \quad -2x^2+4x+4 \\ & \quad -2x^2-2x-2 \\ \hline & \qquad\qquad 6x+6 \end{array}$$

이때 나머지가 $6x+k$이므로 $k=6$

024

$$\begin{array}{r|l} & x-6 \\ \hline x^2+2x-1 & x^3-4x^2+2x+1 \\ & x^3+2x^2-x \\ \hline & \quad -6x^2+3x+1 \\ & \quad -6x^2-12x+6 \\ \hline & \qquad\qquad 15x-5 \end{array}$$

즉, 다항식 x^3-4x^2+2x+1을 x^2+2x-1로 나누었을 때의 몫은 $x-6$, 나머지는 $15x-5$이다.

따라서 $Q(x)=x-6$, $R(x)=15x-5$이므로

$Q(3)+R(1)=3-6+(15\times1-5)$

$=-3+10=7$

025

$6x^2-5x+1=A(6x+1)+2$

$A(6x+1)=6x^2-5x-1$

$=(x-1)(6x+1)$

$\therefore A=x-1$

026

다항식 $P(x)$를 x^2-1로 나누었을 때의 몫이 $x+1$, 나머지가 $2x$이므로

$P(x)=(x^2-1)(x+1)+2x=x^3+x^2+x-1$

x^3+x^2+x-1을 x^2+1로 나누면

$$\begin{array}{r|l} & x+1 \\ \hline x^2+1 & x^3+x^2+x-1 \\ & x^3 \qquad +x \\ \hline & \quad\ x^2 \qquad -1 \\ & \quad\ x^2 \qquad +1 \\ \hline & \qquad\qquad -2 \end{array}$$

따라서 다항식 $P(x)$를 x^2+1로 나누었을 때의 나머지는 -2이다.

027

x^4+x^3+7x-2를 x^2+2x-1로 나누면

$$\begin{array}{r|l} & x^2-x+3 \\ \hline x^2+2x-1 & x^4+x^3 \qquad +7x-2 \\ & x^4+2x^3-x^2 \\ \hline & \quad -x^3+x^2+7x \\ & \quad -x^3-2x^2+x \\ \hline & \qquad\quad 3x^2+6x-2 \\ & \qquad\quad 3x^2+6x-3 \\ \hline & \qquad\qquad\qquad 1 \end{array}$$

$\therefore x^4+x^3+7x-2=(x^2+2x-1)(x^2-x+3)+1$

이때 $x^2+2x-1=0$이므로 구하는 식의 값은 1이다.

028

다항식 $f(x)$를 $2x-1$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 -2이므로

$f(x)=(2x-1)Q(x)-2$

위의 식의 양변에 x를 곱하면

$xf(x)=x(2x-1)Q(x)-2x$

$=2x\left(x-\frac{1}{2}\right)Q(x)-2\left(x-\frac{1}{2}\right)-1$

$=\left(x-\frac{1}{2}\right)\{2xQ(x)-2\}-1$

따라서 $xf(x)$를 $x-\frac{1}{2}$로 나누었을 때의 몫은 $2xQ(x)-2$이고, 나머지는 -1이다.

내신 적중 서술형

● 14쪽

029 2 **030** (1) 7 (2) 3 (3) 0 **031** 6

032 $2x+4$

029

$(2x^3+x-1)(x+k)^3$

$=(2x^3+x-1)(x^3+3kx^2+3k^2x+k^3)$ ⋯⋯ ㉮

위의 전개식에서 x^2항은

$x\times3k^2x-1\times3kx^2=3k^2x^2-3kx^2$

$=(3k^2-3k)x^2$ ⋯⋯ ㉯

이때 x^2의 계수가 6이므로

$3k^2-3k=6$, $k^2-k=2$

$k^2-k-2=0$, $(k-2)(k+1)=0$

$k>0$이므로 $k=2$ ⋯⋯ ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ $(x+k)^3$ 전개하기	30 %
㉯ x^2의 계수 구하기	40 %
㉰ k의 값 구하기	30 %

030

(1) $\left(x+\frac{2}{x}\right)^2+\left(2x-\frac{1}{x}\right)^2=35$에서

$x^2+\frac{4}{x^2}+4+4x^2+\frac{1}{x^2}-4=35$

$5\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=35$

$\therefore\ x^2+\frac{1}{x^2}=7$ ...... ㉠ ...... ㉮

(2) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2$에 ㉠을 대입하면

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=7+2=9$

이때 $x>0$에서 $x+\frac{1}{x}>0$이므로

$x+\frac{1}{x}=3$ ...... ㉡ ...... ㉯

(3) ㉠의 양변에 x^2을 곱하면

$x^4+1=7x^2$

또, ㉡의 양변에 x를 곱하면

$x^2+1=3x$

$\therefore\ x^4+2x^3-13x^2+2x+1$

$=(x^4+1)+2x(x^2+1)-13x^2$

$=7x^2+2x\times3x-13x^2=0$ ...... ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ $x^2+\frac{1}{x^2}$의 값 구하기	40 %
㉯ $x+\frac{1}{x}$의 값 구하기	30 %
㉰ $x^4+2x^3-13x^2+2x+1$의 값 구하기	30 %

다른 풀이 (3) ㉡에서 $x+\frac{1}{x}=3$이므로 양변에 x를 곱하면

$x^2-3x+1=0$

$x^4+2x^3-13x^2+2x+1$을 x^2-3x+1로 나누면

$$\begin{array}{r}
x^2+5x+1 \\
x^2-3x+1\,\overline{)\,x^4+2x^3-13x^2+2x+1} \\
\underline{x^4-3x^3+x^2} \\
5x^3-14x^2+2x \\
\underline{5x^3-15x^2+5x} \\
x^2-3x+1 \\
\underline{x^2-3x+1} \\
0
\end{array}$$

$\therefore\ x^4+2x^3-13x^2+2x+1=(x^2-3x+1)(x^2+5x+1)$

따라서 $x^4+2x^3-13x^2+2x+1$의 값은 0이다.

031

삼각형 PIH에서 $\overline{\mathrm{PI}}=x$, $\overline{\mathrm{PH}}=y$라 하면 $\overline{\mathrm{IH}}=\overline{\mathrm{OP}}=5$이므로

$x^2+y^2=25$ ...... ㉮

사각형 PIOH는 직사각형이므로

$\overline{\mathrm{IO}}=\overline{\mathrm{PH}}=y$, $\overline{\mathrm{OH}}=\overline{\mathrm{IP}}=x$

$\therefore\ \overline{\mathrm{BI}}=\overline{\mathrm{BO}}-\overline{\mathrm{IO}}=5-y$, $\overline{\mathrm{HA}}=\overline{\mathrm{AO}}-\overline{\mathrm{HO}}=5-x$

조건에서 $\overline{\mathrm{BI}}+\overline{\mathrm{IH}}+\overline{\mathrm{HA}}=8$이므로

$(5-y)+5+(5-x)=8$

$\therefore\ x+y=7$ ...... ㉯

따라서 삼각형 PIH의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PI}}\times\overline{\mathrm{PH}}=\frac{1}{2}xy=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\{(x+y)^2-(x^2+y^2)\}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times(7^2-25)$

$=\frac{1}{2}\times12=6$ ...... ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ x^2+y^2의 값 구하기	20 %
㉯ $x+y$의 값 구하기	40 %
㉰ 삼각형 PIH의 넓이 구하기	40 %

032

$f(x)$를 x^2+2로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라 하면

$f(x)=(x^2+2)Q_1(x)+2x+4$ ...... ㉠ ...... ㉮

$2f(x)-g(x)$를 x^2+2로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$라 하면

$2f(x)-g(x)=(x^2+2)Q_2(x)+2x+4$ ...... ㉡ ...... ㉯

㉠$\times2-$㉡을 하면

$g(x)=2(x^2+2)Q_1(x)-(x^2+2)Q_2(x)+4x+8-(2x+4)$

$=(x^2+2)\{2Q_1(x)-Q_2(x)\}+2x+4$

따라서 $g(x)$를 x^2+2로 나누었을 때의 나머지는 $2x+4$이다.

...... ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ $f(x)$의 나눗셈에 대한 식 세우기	30 %
㉯ $2f(x)-g(x)$의 나눗셈에 대한 식 세우기	30 %
㉰ $g(x)$를 x^2+2로 나누었을 때의 나머지 구하기	40 %

1등급 실력 완성

● 15쪽~16쪽

033 $-5x^2+26x-9$		034 ⑤	035 ①	036 ②
037 ④	038 27	039 10	040 ③	041 ④

033

다항식의 덧셈과 뺄셈

전략 연산 ∘, ∗의 정의를 이용하여 주어진 식을 간단히 한 후 P, Q를 각각 대입하여 정리한다.

풀이 $(P*Q)\circ(Q*P)=(P+2Q)\circ(Q+2P)$

$=3(P+2Q)-(Q+2P)$

$=P+5Q$

$P=5x^2+x+11$, $Q=-2x^2+5x-4$를 대입하면

(주어진 식)$=P+5Q$

$=(5x^2+x+11)+5(-2x^2+5x-4)$

$=5x^2+x+11-10x^2+25x-20$

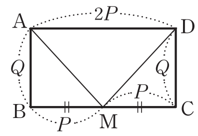
$=-5x^2+26x-9$

034

다항식의 덧셈과 뺄셈

전략 $\overline{MC}=P$, $\overline{CD}=Q$라 하고, 조건 (가), (나)를 이용하여 P, Q를 구한 후 문제를 해결한다.

풀이 $\overline{MC}=P$, $\overline{CD}=Q$라 하면



$\overline{DA}=2P$, $\overline{AB}=Q$, $\overline{BM}=P$

조건 (가)에서

$\overline{MC}-\overline{CD}=x-y+5$

이므로

$P-Q=x-y+5$ …… ㉠

조건 (나)에서

$\overline{DA}+\overline{AB}+\overline{BM}=3x+y+7$

이므로

$3P+Q=3x+y+7$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면 $4P=4x+12$

$\therefore P=x+3$ …… ㉢

㉢을 ㉠에 대입하여 정리하면

$Q=P-(x-y+5)=y-2$

따라서 직사각형 ABCD의 둘레의 길이는

$$\begin{aligned}\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DA}&=Q+2P+Q+2P=4P+2Q\\&=4(x+3)+2(y-2)\\&=4x+2y+8\end{aligned}$$

035

다항식의 곱셈과 곱셈 공식

전략 x^4항이 나오는 경우만 전개한다.

풀이 $(x+2x^2+3x^3+\cdots+100x^{100})^2$

$=(x+2x^2+3x^3+\cdots+100x^{100})$

$\times(x+2x^2+3x^3+\cdots+100x^{100})$ …… ㉠

㉠의 전개식에서 x^4항은

$x\times3x^3+2x^2\times2x^2+3x^3\times x=10x^4$

따라서 x^4의 계수는 10이다.

036

다항식의 곱셈과 곱셈 공식 ⊕ 곱셈 공식의 변형

전략 식을 전개한 후 주어진 값을 이용할 수 있도록 변형한다.

풀이 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

$=(-2)^2-2\times(-2)=8$

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=5^2-2\times5=15$

$$\begin{aligned}\therefore (ax+by)(bx+ay)&=abx^2+a^2xy+b^2xy+aby^2\\&=ab(x^2+y^2)+xy(a^2+b^2)\\&=-2\times15+5\times8=10\end{aligned}$$

037

곱셈 공식의 변형

전략 주어진 조건을 이용하여 $x^2+\dfrac{1}{x^2}$의 값을 구한다.

풀이 $x-\dfrac{1}{x}=3$의 양변을 제곱하면

$x^2+\dfrac{1}{x^2}-2=9$ $\therefore x^2+\dfrac{1}{x^2}=11$

이때 $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=x^2+\dfrac{1}{x^2}+2=11+2=13$이므로

$\left|x+\dfrac{1}{x}\right|=\sqrt{13}$

$$\begin{aligned}\therefore \left|x^4-\frac{1}{x^4}\right|&=\left|x^2-\frac{1}{x^2}\right|\times\left|x^2+\frac{1}{x^2}\right|\\&=\left|x-\frac{1}{x}\right|\times\left|x+\frac{1}{x}\right|\times\left|x^2+\frac{1}{x^2}\right|\\&=3\times\sqrt{13}\times11=33\sqrt{13}\end{aligned}$$

참고 실수 a, b에 대하여 $|ab|=|a||b|$임을 확인해 보자.

(i) $a\ge0$, $b\ge0$일 때, $ab\ge0$이므로

$|ab|=ab=|a||b|$

(ii) $a\ge0$, $b<0$일 때, $ab\le0$이므로

$|ab|=-ab=a\times(-b)=|a||b|$

(iii) $a<0$, $b\ge0$일 때, $ab\le0$이므로

$|ab|=-ab=(-a)\times b=|a||b|$

(iv) $a<0$, $b<0$일 때, $ab>0$이므로

$|ab|=ab=(-a)\times(-b)=|a||b|$

이상에서 $|ab|=|a||b|$

038

곱셈 공식의 변형

전략 x, y, z 중 적어도 하나는 3이므로 $(x-3)(y-3)(z-3)=0$이 성립함을 이용한다.

풀이 조건 (가)에서 x, y, z 중 적어도 하나는 3이므로

$(x-3)(y-3)(z-3)=0$ → $x-3$, $y-3$, $z-3$ 중 적어도 하나는 0이다.

$xyz-3xy-3yz-3zx+9x+9y+9z-27=0$

$xyz-3(xy+yz+zx)+9(x+y+z)-27=0$

조건 (나)에서 $3(x+y+z)=xy+yz+zx$이므로

$xyz-3(xy+yz+zx)+3(xy+yz+zx)-27=0$

$xyz-27=0$ $\therefore xyz=27$

039

곱셈 공식의 활용

전략 주어진 조건을 a, b, c에 대한 식으로 나타내고 곱셈 공식을 이용하여 문제를 해결한다.

풀이 직육면체의 옆면의 넓이는

$2ac+2bc=44$ $\therefore c(a+b)=22$ …… ㉠

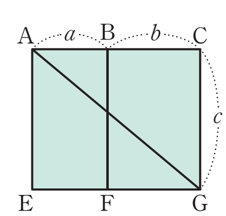
직육면체의 모든 모서리의 길이의 합은

$4(a+b+c)=48$ $\therefore a+b+c=12$ …… ㉡

점 A에서 직육면체의 겉면을 따라 점 G에 도달하는 최단 거리는 다음과 같이 생각해 볼 수 있다.

(i) [그림 1]과 같이 $\overline{BF}$를 지날 때,

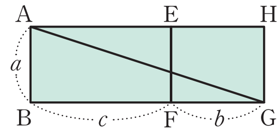
$\overline{AG}=\sqrt{(a+b)^2+c^2}$



[그림 1]

(ii) [그림 2]와 같이 $\overline{EF}$를 지날 때,

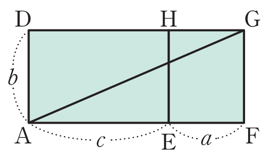
$\overline{AG}=\sqrt{a^2+(b+c)^2}$



[그림 2]

(iii) [그림 3]과 같이 $\overline{EH}$를 지날 때,

$\overline{AG}=\sqrt{(a+c)^2+b^2}$



[그림 3]

$A=\sqrt{(a+b)^2+c^2}$, $B=\sqrt{a^2+(b+c)^2}$, $C=\sqrt{(a+c)^2+b^2}$이라 하고, 그 크기를 비교하면

(i) $A^2-B^2=(a+b)^2+c^2-\{a^2+(b+c)^2\}$

$=2ab-2bc=2b(a-c)<0$

$\therefore A^2<B^2$

이때 $A>0$, $B>0$이므로 $A<B$

(ii) $B^2-C^2=a^2+(b+c)^2-\{(a+c)^2+b^2\}$

$=2bc-2ac=2c(b-a)<0$

$\therefore B^2<C^2$

이때 $B>0$, $C>0$이므로 $B<C$

(i), (ii)에서 $A<B<C$

따라서 점 A에서 직육면체의 겉면을 따라 점 G에 도달하는 최단 거리는 $\sqrt{(a+b)^2+c^2}$의 값과 같으므로

$\sqrt{(a+b)^2+c^2}=\sqrt{(a+b+c)^2-2c(a+b)}$

$=\sqrt{12^2-2\times 22}=\sqrt{100}=10$ ($\because$ ㉠, ㉡)

개념 보충

제곱근의 대소 관계

$A>0$, $B>0$일 때,

① $A<B$이면 $\sqrt{A}<\sqrt{B}$

② $\sqrt{A}<\sqrt{B}$이면 $A<B$

040

다항식의 나눗셈

전략 주어진 조건을 이용하여 $f(x)$의 나눗셈에 대한 식을 세운 후 $\{f(x)\}^2$의 나눗셈에 대한 식으로 변형한다.

풀이 $f(x)$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$f(x)=(x-1)^2Q(x)+x$

양변을 제곱하면

$\{f(x)\}^2=(x-1)^4\{Q(x)\}^2+2x(x-1)^2Q(x)+x^2$

$=(x-1)^4\{Q(x)\}^2+2x(x-1)^2Q(x)+(x-1)^2+2x-1$

$=(x-1)^2[(x-1)^2\{Q(x)\}^2+2xQ(x)+1]+2x-1$

따라서 다항식 $\{f(x)\}^2$을 $(x-1)^2$으로 나눈 나머지는

$R(x)=2x-1$ $\quad\therefore R(2)=2\times 2-1=3$

041

다항식의 나눗셈

전략 삼각형의 닮음을 이용하여 x에 대한 이차방정식을 세우고, 다항식의 나눗셈을 이용하여 문제를 해결한다.

풀이 삼각형 ABC의 넓이가 $\frac{4}{3}$이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times 1=\frac{4}{3}$ $\quad\therefore \overline{AB}=\frac{8}{3}$

또, 직각삼각형 AHC와 직각삼각형 CHB는 닮음이므로

$\overline{AH}:\overline{CH}=\overline{CH}:\overline{BH}$에서

$\left(\frac{8}{3}-x\right):1=1:x$, $x\left(\frac{8}{3}-x\right)=1$

$3x^2-8x+3=0$ $\quad\therefore x=\frac{4\pm\sqrt{7}}{3}$

$0<x<1$이므로 $x=\frac{4-\sqrt{7}}{3}$

한편, $3x^3-5x^2+4x+7$을 $3x^2-8x+3$으로 나누면

$$\begin{array}{r}
x+1 \\
3x^2-8x+3\overline{)\,3x^3-5x^2+4x+7} \\
\underline{3x^3-8x^2+3x} \\
3x^2+x+7 \\
\underline{3x^2-8x+3} \\
9x+4
\end{array}$$

$\therefore 3x^3-5x^2+4x+7=(3x^2-8x+3)(x+1)+9x+4$

이때 $3x^2-8x+3=0$이므로

(구하는 식의 값)$=9x+4$

$=9\times\frac{4-\sqrt{7}}{3}+4=16-3\sqrt{7}$

도전 1등급 최고난도

17쪽

042 3 **043** 126 **044** ②

042

곱셈 공식의 변형

1단계 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$, $xy+yz+zx$의 값을 이용하여 xyz의 값을 구한다.

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{xy+yz+zx}{xyz}=3$

$xy+yz+zx=3$이므로

$\frac{3}{xyz}=3$ $\quad\therefore xyz=1$

2단계 $(x+y)(y+z)(z+x)$의 값을 이용하여 $x+y+z$의 값을 구한다.

$x+y+z=k$ (k는 상수)라 하면

$(x+y)(y+z)(z+x)$

$=(k-x)(k-y)(k-z)$

$=k^3-(x+y+z)k^2+(xy+yz+zx)k-xyz$

$=k^3-k\times k^2+3\times k-1=3k-1$

이때 $(x+y)(y+z)(z+x)=8$이므로

$3k-1=8$ $\quad\therefore k=3$

$\therefore x+y+z=3$

3단계 $xy+yz+zx$, xyz, $x+y+z$의 값과 곱셈 공식의 변형을 이용하여 $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2$의 값을 구한다.

$\therefore x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=(xy+yz+zx)^2-2xyz(x+y+z)$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad=3^2-2\times1\times3=3$

043

곱셈 공식의 활용 - 수, 도형

(1단계) 두 정사각뿔의 부피의 합을 이용하여 a^3+b^3의 값을 구한다.

정사각뿔 O$-$ABCD의 부피는

$$\frac{1}{3}\times a^2\times\sqrt{a^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{6}a^3$$

정사각뿔 O$-$EFGH의 부피는

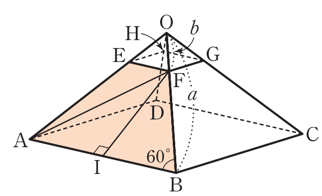
$$\frac{1}{3}\times b^2\times\sqrt{b^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}b\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{6}b^3$$

두 정사각뿔 O$-$ABCD, O$-$EFGH의 부피의 합이 $2\sqrt{2}$이므로

$$\frac{\sqrt{2}}{6}(a^3+b^3)=2\sqrt{2}\quad\quad\therefore a^3+b^3=12\quad\quad\cdots\cdots ㉠$$

(2단계) 선분 AF의 길이를 이용하여 a^2-ab+b^2의 값을 구한다.

오른쪽 그림과 같이 점 F에서 $\overline{\text{AB}}$에 내린 수선의 발을 I라 하면 삼각형 BFI는 $\angle\text{FBI}=60^\circ$인 직각삼각형이므로



$$\overline{\text{FI}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{\text{FB}}=\frac{\sqrt{3}}{2}(a-b),$$

$$\overline{\text{BI}}=\frac{1}{2}\overline{\text{FB}}=\frac{1}{2}(a-b)$$

$$\therefore \overline{\text{AI}}=a-\frac{1}{2}(a-b)=\frac{1}{2}(a+b)$$

삼각형 FAI는 직각삼각형이므로

$$\overline{\text{AF}}^2=\overline{\text{FI}}^2+\overline{\text{AI}}^2$$

$$=\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}(a-b)\right\}^2+\left\{\frac{1}{2}(a+b)\right\}^2$$

$$=\frac{3}{4}(a^2-2ab+b^2)+\frac{1}{4}(a^2+2ab+b^2)$$

$$=a^2-ab+b^2=4\quad\quad\cdots\cdots ㉡$$

(3단계) a^3+b^3, a^2-ab+b^2의 값을 이용하여 사각형 ABFE의 넓이 S의 값을 구한다.

㉠, ㉡에서

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)=(a+b)\times4=12$

$\therefore a+b=3$

㉡에서

$a^2-ab+b^2=(a+b)^2-3ab=3^2-3ab=4$

$\therefore ab=\frac{5}{3}$

따라서 $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab=3^2-4\times\frac{5}{3}=\frac{7}{3}$이므로

$a-b=\frac{\sqrt{21}}{3}$

사각형 ABFE의 넓이는 정삼각형 OAB의 넓이에서 정삼각형 OEF의 넓이를 뺀 것과 같으므로

$$S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2-\frac{\sqrt{3}}{4}b^2=\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2-b^2)$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}(a+b)(a-b)$$

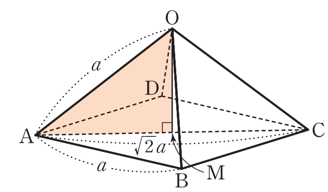
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\times3\times\frac{\sqrt{21}}{3}=\frac{3\sqrt{7}}{4}$$

$$\therefore 32S^2=32\times\left(\frac{3\sqrt{7}}{4}\right)^2=126$$

개념 보충

모든 모서리의 길이가 a인 정사각뿔 O$-$ABCD의 부피 V

밑면 ABCD는 한 변의 길이가 a인 정사각형이므로 밑면의 넓이는 a^2이고, 밑면 ABCD의 두 대각선의 교점을 M이라 하면 삼각형 OAM은 $\overline{\text{OA}}$가 빗변인 직각삼각형이므로



$$\overline{\text{OM}}=\sqrt{\overline{\text{OA}}^2-\overline{\text{AM}}^2}$$

$$=\sqrt{a^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$$

즉, 정사각뿔 O$-$ABCD의 밑면의 넓이는 a^2, 높이는 $\frac{\sqrt{2}}{2}a$이므로

부피 V는

$$V=\frac{1}{3}\times a^2\times\frac{\sqrt{2}}{2}a=\frac{\sqrt{2}}{6}a^3$$

044

다항식의 나눗셈

(1단계) $(x+2)^{10}=(x^2+4x+4)^5$임을 이용하여 x^2+4를 인수로 갖지 않는 항을 구한다.

$(x+2)^{10}=\{(x+2)^2\}^5$

$\quad\quad=(x^2+4x+4)^5=\{(x^2+4)+4x\}^5$

$\quad\quad=\{(x^2+4)+4x\}\{(x^2+4)+4x\}\{(x^2+4)+4x\}$

$\quad\quad\quad\quad\times\{(x^2+4)+4x\}\{(x^2+4)+4x\}$

이므로 $(x+2)^{10}$의 전개식에서 x^2+4를 인수로 갖지 않는 항은

$(4x)^5=4^5x^5=2^{10}x^5$

(2단계) 다항식의 나눗셈을 이용하여 $2^{10}x^5$을 x^2+4로 나누었을 때의 나머지를 구한다.

$$\begin{array}{r}
2^{10}x^3-2^{12}x \\
x^2+4\overline{\smash{)}\,2^{10}x^5\phantom{+2^{12}x^3-2^{14}x}} \\
\underline{2^{10}x^5+2^{12}x^3\phantom{-2^{14}x}} \\
-2^{12}x^3\phantom{-2^{14}x} \\
\underline{-2^{12}x^3-2^{14}x} \\
2^{14}x
\end{array}$$

(3단계) $(x+2)^{10}$과 $2^{10}x^5$을 x^2+4로 나누었을 때의 나머지가 같음을 이용하여 $(x+2)^{10}$을 x^2+4로 나누었을 때의 나머지를 구한다.

$(x+2)^{10}=\{(x^2+4)+4x\}^5$

$\quad\quad=(x^2+4)Q(x)+(4x)^5$

$\quad\quad=(x^2+4)Q(x)+(x^2+4)(2^{10}x^3-2^{12}x)+2^{14}x$

$\quad\quad=(x^2+4)\{Q(x)+2^{10}x^3-2^{12}x\}+2^{14}x$

즉, $(x+2)^{10}$을 x^2+4로 나누었을 때의 몫은 $Q(x)+2^{10}x^3-2^{12}x$이고, 나머지는 $2^{14}x$이다.

따라서 $R(x)=2^{14}x$이므로

$R(2)=2^{14}\times2=2^{15}$

02 나머지정리

유형 분석 기출

● 19쪽 ~ 25쪽

045 ②	046 ⑤	047 ①	048 ⑤	049 54
050 ⑤	051 -5	052 ①	053 ⑤	054 -4
055 ①	056 ④	057 10	058 2	059 ①
060 ②	061 ③	062 $4x-5$	063 ①	064 ①
065 ⑤	066 ①	067 ③	068 41	069 -2
070 ②	071 ⑤	072 ③	073 ②	074 ①
075 ①	076 $-4x+5$		077 ⑤	078 1
079 ③	080 -4	081 $\frac{3}{4}$	082 ④	083 ①
084 ②	085 40			

045

$(x+1)^2+2(x+1)-1=a(x-1)^2+b(x-1)+c$에서

$x^2+4x+2=ax^2+(b-2a)x+a-b+c$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a=1$

$4=b-2a$에서 $b=6$

$2=a-b+c$에서 $c=7$

$\therefore abc=1\times6\times7=42$

다른 풀이 $(x+1)^2+2(x+1)-1=a(x-1)^2+b(x-1)+c$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$4+4-1=c \qquad \therefore c=7$

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$-1=4a-2b+7 \qquad \therefore 2a-b=-4$ …… ㉡

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$1+2-1=a-b+7 \qquad \therefore a-b=-5$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=6$

$\therefore abc=1\times6\times7=42$

1등급 비법

항등식에서 미정계수를 구할 때, 문제의 형태에 따라 계수비교법과 수치대입법 중에서 편리한 방법을 선택하여 풀도록 한다.
보통 문자에 적당한 값을 대입했을 때 식이 간단해지면 수치대입법을 이용하고, 그렇지 않으면 계수비교법을 이용한다.

046

$x^2+3x-4=(x-1)^2+a(x-1)+b$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$1+3-4=b \qquad \therefore b=0$

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$-4=1-a+b \qquad \therefore a=5$

$\therefore a^2+b^2=5^2+0^2=25$

다른 풀이 주어진 식의 우변을 전개하여 x에 대한 내림차순으로 정리하면

$x^2+3x-4=x^2+(a-2)x+1-a+b$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a-2=3 \qquad \therefore a=5$

$1-a+b=-4 \qquad \therefore b=0$

$\therefore a^2+b^2=5^2+0^2=25$

047

$x^3-ax^2+(a-1)x-12=(x-2)(x^2+bx+6)$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$8-4a+2(a-1)-12=0$

$-2a=6 \qquad \therefore a=-3$

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$1-a+a-1-12=-(1+b+6)$

$12=b+7 \qquad \therefore b=5$

$\therefore a-b=-3-5=-8$

다른 풀이 주어진 식의 우변을 전개하여 x에 대한 내림차순으로 정리하면

$x^3-ax^2+(a-1)x-12=x^3+(b-2)x^2+(6-2b)x-12$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$-a=b-2$, $a-1=6-2b$

$\therefore a+b=2$, $a+2b=7$

두 식을 연립하여 풀면

$a=-3$, $b=5$

$\therefore a-b=-3-5=-8$

048

$2x^2-2x+2=ax(x+1)+bx(x-2)+c(x+1)(x-2)$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$2=-2c \qquad \therefore c=-1$

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$2+2+2=3b \qquad \therefore b=2$

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$8-4+2=6a \qquad \therefore a=1$

$\therefore a^2+b^2+c^2=1+4+1=6$

다른 풀이 주어진 식의 우변을 전개하여 x에 대한 내림차순으로 정리하면

$2x^2-2x+2=(a+b+c)x^2+(a-2b-c)x-2c$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a+b+c=2$, $a-2b-c=-2$, $-2c=2$

$-2c=2$에서 $c=-1$

$c=-1$을 나머지 두 식에 대입하면

$a+b=3$, $a-2b=-3$

두 식을 연립하여 풀면

$a=1$, $b=2$

$\therefore a^2+b^2+c^2=1+4+1=6$

049

$\dfrac{6x^2+2ax+b}{3x^2+2bx+9}=k$ ($k\neq 0$인 상수)라 하면

$6x^2+2ax+b=k(3x^2+2bx+9)$

$\therefore$ $6x^2+2ax+b=3kx^2+2bkx+9k$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$6=3k$, $a=bk$, $b=9k$

따라서 $k=2$, $a=36$, $b=18$이므로

$a+b=36+18=54$

050

주어진 이차방정식의 근이 $x=1$이므로

$x^2+(k-2)x+(k+3)p-q+2=0$에 $x=1$을 대입하면

$1+k-2+kp+3p-q+2=0$ …… ㉠

㉠을 k에 대하여 정리하면

$(p+1)k+3p-q+1=0$

이 등식이 k에 대한 항등식이므로

$p+1=0$, $3p-q+1=0$

두 식을 연립하여 풀면 $p=-1$, $q=-2$

$\therefore$ $pq=(-1)\times(-2)=2$

051

$x+y=1$에서 $y=1-x$ …… ㉠

㉠을 $(2a-b)x+(b-a)y+1=0$에 대입하면

$(2a-b)x+(b-a)(1-x)+1=0$

$\therefore$ $(3a-2b)x-a+b+1=0$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$3a-2b=0$, $-a+b+1=0$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=-3$

$\therefore$ $a+b=-2+(-3)=-5$

052

$(x-1)^{10}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{10}x^{10}$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면 $1=a_0$

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{10}$

$\therefore$ $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=-1$

㉠의 최고차항의 계수를 비교하면 $a_{10}=1$

$\therefore$ $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_9=-1-1=-2$

053

다항식 x^3+ax^2-2x+b를 x^2+x-2로 나누었을 때의 몫을 $x+k$ (k는 상수)라 하면

$x^3+ax^2-2x+b=(x^2+x-2)(x+k)-3x+4$

우변을 전개하여 정리하면

$x^3+ax^2-2x+b=x^3+(k+1)x^2+(k-5)x-2k+4$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a=k+1$, $-2=k-5$, $b=-2k+4$

$k=3$이므로 $a=4$, $b=-2$

$\therefore$ $a-b=4-(-2)=6$

참고 x^3+ax^2-2x+b와 x^2+x-2의 최고차항의 계수가 모두 1이므로 몫은 $x+k$ (k는 상수) 꼴이다.

다른 풀이 다항식 x^3+ax^2-2x+b를 x^2+x-2로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$x^3+ax^2-2x+b=(x^2+x-2)Q(x)-3x+4$

$\qquad=(x-1)(x+2)Q(x)-3x+4$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$1+a-2+b=1$ $\quad\therefore$ $a+b=2$ …… ㉡

㉠의 양변에 $x=-2$를 대입하면

$-8+4a+4+b=10$ $\quad\therefore$ $4a+b=14$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=4$, $b=-2$

$\therefore$ $a-b=4-(-2)=6$

054

$2x^3-5x^2+4=(x-1)f(x)+a$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$2-5+4=a$ $\quad\therefore$ $a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면

$2x^3-5x^2+4=(x-1)f(x)+1$

$\therefore$ $2x^3-5x^2+3=(x-1)f(x)$

$2x^3-5x^2+3$을 $x-1$로 나누면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r l}
 & \;\;2x^2-3x-3 \\
x-1 & \overline{)\,2x^3-5x^2\qquad+3} \\
 & \;\;\underline{2x^3-2x^2\qquad\quad} \\
 & \qquad\;\; -3x^2 \\
 & \qquad\;\; \underline{-3x^2+3x\quad} \\
 & \qquad\qquad\quad -3x+3 \\
 & \qquad\qquad\quad \underline{-3x+3} \\
 & \qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

즉, $2x^3-5x^2+3=(x-1)(2x^2-3x-3)$이므로

$f(x)=2x^2-3x-3$

$\therefore$ $f(a)=f(1)=2-3-3=-4$

055

$x^3+ax^2-2x+1=(x-2)Q(x)+9$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$8+4a-4+1=9$ $\quad\therefore$ $a=1$

즉, $x^3+x^2-2x+1=(x-2)Q(x)+9$ …… ㉡

㉡의 양변에 $x=1$을 대입하면

$1+1-2+1=-Q(1)+9$

$\therefore$ $Q(1)=8$

056

$P(x^2+1)$를 x^2-x로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$P(x^2+1)=(x^2-x)Q(x)+7$

$\qquad=x(x-1)Q(x)+7$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면 $P(1)=7$
㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면 $P(2)=7$
이때 $P(x)=(x^2+1)(ax+b)+2$이므로 …… ㉡
㉡의 양변에 $x=1$을 대입하면
$P(1)=2(a+b)+2=7$
$\therefore 2a+2b=5$ …… ㉢
㉡의 양변에 $x=2$를 대입하면
$P(2)=5(2a+b)+2=7$
$\therefore 2a+b=1$ …… ㉣
㉢, ㉣을 연립하여 풀면
$a=-\frac{3}{2}$, $b=4$
따라서 $P(x)=(x^2+1)\left(-\frac{3}{2}x+4\right)+2$이므로
$P(-2)=5\times7+2=37$

057
$P(x)$를 $x-5$로 나누었을 때의 나머지가 -2이므로 나머지정리에 의하여 $P(5)=-2$
$Q(x)$를 $x-5$로 나누었을 때의 나머지가 4이므로 나머지정리에 의하여 $Q(5)=4$
따라서 다항식 $3P(x)+4Q(x)$를 $x-5$로 나누었을 때의 나머지는
$3P(5)+4Q(5)=3\times(-2)+4\times4=10$

058
$f(x)=x^3+3x^2-ax+2$라 하면 나머지정리에 의하여
$f(-1)=2$이므로
$-1+3+a+2=2$ $\quad\therefore a=-2$
따라서 $f(x)=x^3+3x^2+2x+2$이므로 $f(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지는
$f(-2)=-8+12-4+2=2$

059
$f(x)=x^3-6x^2+ax+b$라 하면 나머지정리에 의하여
$f(1)=5$, $f(2)=7$
$f(1)=5$에서 $1-6+a+b=5$
$\therefore a+b=10$ …… ㉠
$f(2)=7$에서 $8-24+2a+b=7$
$\therefore 2a+b=23$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=13$, $b=-3$
$\therefore ab=13\times(-3)=-39$

060
$P(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면
조건 (가)에서 나머지정리에 의하여
$P(1)=1$
즉, $1+a+b=1$
$\therefore a+b=0$ …… ㉠
조건 (나)에서 나머지정리에 의하여
$2P(2)=2$에서 $P(2)=1$
즉, $4+2a+b=1$ $\quad\therefore 2a+b=-3$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a=-3$, $b=3$
따라서 $P(x)=x^2-3x+3$이므로
$P(4)=4^2-3\times4+3=7$

061
$f(x)+g(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지가 2이므로 나머지정리에 의하여
$f(3)+g(3)=2$ …… ㉠
또, $f(x)-g(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지가 -1이므로 나머지정리에 의하여
$f(3)-g(3)=-1$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$f(3)=\frac{1}{2}$, $g(3)=\frac{3}{2}$
다항식 $2f(x)-(x+1)g(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지는
$2f(3)-4g(3)=2\times\frac{1}{2}-4\times\frac{3}{2}=-5$

062
$f(x)$를 x^2-5x+6으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면
$f(x)=(x^2-5x+6)Q(x)+ax+b$
$\quad=(x-2)(x-3)Q(x)+ax+b$
이때 나머지정리에 의하여 $f(2)=3$, $f(3)=7$이므로
$2a+b=3$, $3a+b=7$
두 식을 연립하여 풀면
$a=4$, $b=-5$
따라서 $f(x)$를 x^2-5x+6으로 나누었을 때의 나머지는 $4x-5$이다.

1등급 비법
다항식을 이차식으로 나누었을 때의 나머지는 일차 이하의 다항식이므로 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하고, 나눗셈에 대한 항등식을 세운 후 나머지정리를 이용한다.

063
$f(x)$를 x^2+2x-3으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면
$f(x)=(x^2+2x-3)Q(x)+3x+1$
$\quad=(x+3)(x-1)Q(x)+3x+1$ …… ㉠
이때 $f(2x-5)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는
$f(2\times1-5)=f(-3)$
㉠의 양변에 $x=-3$을 대입하면
$f(-3)=3\times(-3)+1=-8$

다른 풀이 $f(x)=(x+3)(x-1)Q(x)+3x+1$에서 x 대신 $2x-5$를 대입하면
$f(2x-5)=(2x-5+3)(2x-5-1)Q(2x-5)+3(2x-5)+1$
$\quad=4(x-1)(x-3)Q(2x-5)+6x-14$

$f(2x-5)=g(x)$라 하면 $g(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는
$g(1)=6\times1-14=-8$

064

$f(x)+2$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지가 5이므로 나머지정리에 의하여

$f(-1)+2=5 \qquad \therefore f(-1)=3$

$3f(x)-2$를 $2x-1$로 나누었을 때의 나머지가 1이므로 나머지정리에 의하여

$3f\left(\frac{1}{2}\right)-2=1 \qquad \therefore f\left(\frac{1}{2}\right)=1$

$f(x)$를 $(x+1)(2x-1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 $ax+b$이므로

$f(x)=(x+1)(2x-1)Q(x)+ax+b$

$f(-1)=3$에서 $-a+b=3$ …… ㉠

$f\left(\frac{1}{2}\right)=1$에서 $\frac{1}{2}a+b=1 \qquad \therefore a+2b=2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-\frac{4}{3}$, $b=\frac{5}{3}$

$\therefore a+b=-\frac{4}{3}+\frac{5}{3}=\frac{1}{3}$

065

$2x^4-x$를 $x(x-1)(x+2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$2x^4-x=x(x-1)(x+2)Q(x)+ax^2+bx$

이때 $f(x)=2x^4-x$라 하면 나머지정리에 의하여

$f(1)=1$, $f(-2)=32+2=34$

$f(1)=1$에서 $a+b=1$

$f(-2)=34$에서 $4a-2b=34$, 즉 $2a-b=17$

두 식을 연립하여 풀면

$a=6$, $b=-5$

$\therefore a-b=6-(-5)=11$

066

$f(x)$를 $(x-1)(x+1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라 하면

$f(x)=(x-1)(x+1)Q_1(x)+3x+1$ …… ㉠

$f(x)$를 $x(x-1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$라 하면

$f(x)=x(x-1)Q_2(x)+4$ …… ㉡

또, $f(x)$를 $x(x-1)(x+1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 ax^2+bx+c (a, b, c는 상수)라 하면

$f(x)=x(x-1)(x+1)Q(x)+ax^2+bx+c$ …… ㉢

㉠의 양변에 $x=1$, $x=-1$을 각각 대입하면

$f(1)=4$, $f(-1)=-2$

㉡의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f(0)=4$

㉢의 양변에 $x=0$, $x=-1$, $x=1$을 각각 대입하면

$f(0)=c$, $f(1)=a+b+c$, $f(-1)=a-b+c$이므로

$4=c$, $4=a+b+c$, $-2=a-b+c$

에서 $a+b=0$, $a-b=-6$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=-3$, $b=3$

따라서 $R(x)=-3x^2+3x+4$이므로

$R(2)=-3\times4+3\times2+4=-2$

다른 풀이 $f(x)$를 $x(x-1)(x+1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 ax^2+bx+c (a, b, c는 상수)라 하면

$f(x)=x(x-1)(x+1)Q(x)+ax^2+bx+c$ …… ㉠

$f(x)$를 $(x-1)(x+1)$로 나누었을 때의 나머지가 $3x+1$이므로 ㉠에서 ax^2+bx+c를 $(x-1)(x+1)$로 나누었을 때의 나머지가 $3x+1$이다.

즉, $ax^2+bx+c=a(x-1)(x+1)+3x+1$이므로

$f(x)=x(x-1)(x+1)Q(x)+a(x-1)(x+1)+3x+1$

또, $f(x)$를 $x(x-1)$로 나누었을 때의 나머지가 4이므로 나머지정리에 의하여

$f(0)=-a+1=4 \qquad \therefore a=-3$

따라서 $R(x)=-3(x-1)(x+1)+3x+1$이므로

$R(2)=-3\times3+3\times2+1=-2$

067

$f(x)$를 $(x-2)(x+1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 ax^2+bx+c (a, b, c는 상수)라 하면

$f(x)=(x-2)(x+1)^2Q(x)+ax^2+bx+c$ …… ㉠

이때 $f(x)$를 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $2x+5$이므로 ㉠에서 ax^2+bx+c를 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $2x+5$이다.

즉, $ax^2+bx+c=a(x+1)^2+2x+5$이므로

$f(x)=(x-2)(x+1)^2Q(x)+a(x+1)^2+2x+5$

또, $f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 -9이므로

$f(2)=9a+4+5=-9 \qquad \therefore a=-2$

따라서 $R(x)=-2(x+1)^2+2x+5$이므로

$R(0)=-2+5=3$

068

$f(x)=x^3+ax^2-2bx-4$라 하면 $x-1$, $x-2$가 모두 $f(x)$의 인수이므로 인수정리에 의하여

$f(1)=0$, $f(2)=0$

$f(1)=0$에서 $1+a-2b-4=0$

$\therefore a-2b=3$ …… ㉠

$f(2)=0$에서 $8+4a-4b-4=0$

$\therefore a-b=-1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-5$, $b=-4$

$\therefore a^2+b^2=25+16=41$

069

$f(x)=x^3+2(k-1)x^2+k^2$이라 하면 $x+1$이 $f(x)$의 인수이므로 인수정리에 의하여

$f(-1)=0$

$-1+2(k-1)+k^2=0$, $k^2+2k-3=0$

$(k+3)(k-1)=0$ $\quad\therefore k=-3$ 또는 $k=1$

따라서 모든 상수 k의 값의 합은

$-3+1=-2$

070

$f(x)+2$가 $x-a$로 나누어떨어지므로 인수정리에 의하여

$f(a)+2=0$ $\quad\therefore f(a)=-2$ …… ㉠

$xf(x)+2$가 $x-a$로 나누어떨어지므로 인수정리에 의하여

$af(a)+2=0$ $\quad\therefore af(a)=-2$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$a\times(-2)=-2$ $\quad\therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면

$f(1)=-2$

071

$f(x)$가 $x-1$로 나누어떨어지므로 인수정리에 의하여

$f(1)=0$

$f(x+3)$이 $x-2$로 나누어떨어지므로 인수정리에 의하여

$f(5)=0$

따라서 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차식이므로

$f(x)=(x-1)(x-5)$

$\therefore f(0)=-1\times(-5)=5$

072

$f(x)=x^3+ax^2-bx+2$라 하면 $f(x)$는 x^2-4, 즉 $(x+2)(x-2)$로 나누어떨어지므로 인수정리에 의하여

$f(-2)=0$, $f(2)=0$

$f(-2)$에서

$-8+4a+2b+2=0$ $\quad\therefore 2a+b=3$ …… ㉠

$f(2)=0$에서

$8+4a-2b+2=0$ $\quad\therefore 2a-b=-5$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-\frac{1}{2}$, $b=4$

$\therefore ab=\left(-\frac{1}{2}\right)\times4=-2$

073

$f(x)+x$가 $x+1$, $x-2$로 각각 나누어떨어지므로 인수정리에 의하여

$f(-1)-1=0$, $f(2)+2=0$

$\therefore f(-1)=1$, $f(2)=-2$

$f(x)$를 $(x+1)(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)=(x+1)(x-2)Q(x)+ax+b$

$f(-1)=1$에서

$-a+b=1$ …… ㉠

$f(2)=-2$에서

$2a+b=-2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=0$

따라서 $f(x)$를 $(x+1)(x-2)$로 나누었을 때의 나머지는 $-x$이다.

074

$f(x)=k(kx^2+1)(x-1)+6k^2-2$라 하면 $f(x)$가 $x(x+1)$로 나누어떨어지므로 인수정리에 의하여

$f(0)=0$, $f(-1)=0$

$f(0)=0$에서

$6k^2-k-2=0$, $(2k+1)(3k-2)=0$

$\therefore k=-\frac{1}{2}$ 또는 $k=\frac{2}{3}$ …… ㉠

$f(-1)=0$에서

$-2k(k+1)+6k^2-2=0$

$4k^2-2k-2=0$, $2k^2-k-1=0$

$(2k+1)(k-1)=0$

$\therefore k=-\frac{1}{2}$ 또는 $k=1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 모두 만족시켜야 하므로 $k=-\frac{1}{2}$

075

$f(x)$는 x^2-2x-3, 즉 $(x+1)(x-3)$으로 나누어떨어지므로 인수정리에 의하여

$f(-1)=0$, $f(3)=0$

$f(x)-2$는 $x-1$로 나누어떨어지므로 인수정리에 의하여

$f(1)-2=0$ $\quad\therefore f(1)=2$

$f(x)+1$을 x^2-1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)+1=(x^2-1)Q(x)+ax+b$

$\quad=(x+1)(x-1)Q(x)+ax+b$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$f(-1)+1=-a+b$

$f(-1)=0$이므로 $1=-a+b$

$\therefore a-b=-1$ …… ㉡

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)+1=a+b$

$f(1)=2$이므로 $2+1=a+b$

$\therefore a+b=3$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=1$, $b=2$

따라서 $f(x)+1$을 x^2-1로 나누었을 때의 나머지는 $x+2$이다.

076

조건 (나)에서 두 다항식 $f(x)$와 $g(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 같으므로

$f(2)=g(2)$

즉, $f(2)-g(2)=0$이므로 이차다항식 $f(x)-g(x)$는 $x-2$를 인수로 갖는다.

조건 (가)에서 방정식 $f(x)=g(x)$, 즉 $f(x)-g(x)=0$이 중근을 갖고, 이차식 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$f(x)-g(x)=(x-2)^2$

$f(x)-g(x)$를 x^2-1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)-g(x)=(x^2-1)Q(x)+ax+b$

$\therefore\ (x-2)^2=(x-1)(x+1)Q(x)+ax+b$ ...... ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$1=a+b$

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$9=-a+b$

두 식을 연립하여 풀면

$a=-4$, $b=5$

따라서 다항식 $f(x)-g(x)$를 x^2-1로 나누었을 때의 나머지는 $-4x+5$이다.

1등급 비법

최고차항의 계수가 1인 이차식 $P(x)$에 대하여 이차방정식 $P(x)=0$이 중근 α를 가질 경우 $P(x)=(x-\alpha)^2$임을 이용한다.

077

조립제법을 완성하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{c|cccc} \boxed{\frac{1}{2}} & 2 & -1 & -2 & 3 \\ & & \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{-1} \\ \hline & 2 & 0 & \boxed{-2} & \boxed{2} \end{array}$$

따라서 $a=\frac{1}{2}$, $b=-2$, $c=2$이므로

$a-b+c=\frac{1}{2}-(-2)+2=\frac{9}{2}$

078

$2x+1=2\left(x+\frac{1}{2}\right)$이므로 조립제법을 이용하여 $2x^3-3x^2-2x+1$을 $x+\frac{1}{2}$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구하면 오른쪽과 같다.

$$\begin{array}{c|cccc} -\frac{1}{2} & 2 & -3 & -2 & 1 \\ & & -1 & 2 & 0 \\ \hline & 2 & -4 & 0 & 1 \end{array}$$

즉, 몫은 $2x^2-4x$, 나머지는 1이므로

$2x^3-3x^2-2x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)(2x^2-4x)+1$

$=(2x+1)(x^2-2x)+1$

따라서 $2x^3-3x^2-2x+1$을 $2x+1$로 나누었을 때의 몫은 $Q(x)=x^2-2x$, 나머지는 $R=1$이므로

$Q(2)+R=(2^2-2\times 2)+1=1$

1등급 비법

다항식 $f(x)$를 $x+\frac{b}{a}$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R이라 하면

$f(x)=\left(x+\frac{b}{a}\right)Q(x)+R$

$=\frac{1}{a}(ax+b)Q(x)+R$

$=(ax+b)\times\frac{1}{a}Q(x)+R$

따라서 $f(x)$를 $ax+b$로 나누었을 때의 몫은 $\frac{1}{a}Q(x)$, 나머지는 R이다.

← 몫은 $\frac{1}{a}$배, 나머지는 같다.

079

조립제법을 이용하여 x^3+ax+2를 $x+1$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{c|cccc} -1 & 1 & 0 & a & 2 \\ & & -1 & 1 & -a-1 \\ \hline & 1 & -1 & a+1 & -a+1 \end{array}$$

$\therefore\ Q(x)=x^2-x+a+1$

이때 $Q(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 1이므로 나머지정리에 의하여 $Q(2)=1$에서

$4-2+a+1=1$, $a+3=1$

$\therefore\ a=-2$

080

조립제법을 이용하여 x^3-2x^2+3x-4를 $x-1$로 나누는 과정을 반복하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -2 & 3 & -4 \\ & & 1 & -1 & 2 \\ \hline 1 & 1 & -1 & 2 & -2 \\ & & 1 & 0 & \\ \hline 1 & 1 & 0 & 2 & \\ & & 1 & & \\ \hline & 1 & 1 & & \end{array}$$

이때 x^3-2x^2+3x-4를 $x-1$에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^3-2x^2+3x-4=(x-1)(x^2-x+2)-2$

$=(x-1)\{(x-1)x+2\}-2$

$=(x-1)[(x-1)\{(x-1)+1\}+2]-2$

$=(x-1)^3+(x-1)^2+2(x-1)-2$

따라서 $a=1$, $b=1$, $c=2$, $d=-2$이므로

$abcd=1\times 1\times 2\times(-2)=-4$

081

$f(x)=x^3+2ax^2-5x+2b$라 하면 $f(x)$가 $(x+1)^2$으로 나누어떨어지므로 인수정리에 의하여

$f(-1)=0$

즉, $-1+2a+5+2b=0$이므로 $2b=-2a-4$

$\therefore\ b=-a-2$ ...... ㉠

$$\begin{aligned}\therefore f(x)&=x^3+2ax^2-5x+2b\\&=x^3+2ax^2-5x+2(-a-2)\\&=x^3+2ax^2-5x-2a-4\end{aligned}$$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|rrrr}
-1 & 1 & 2a & -5 & -2a-4\\
 & & -1 & -2a+1 & 2a+4\\ \hline
-1 & 1 & 2a-1 & -2a-4 & \boxed{0}\\
 & & -1 & -2a+2 & \\ \hline
 & 1 & 2a-2 & \boxed{-4a-2} &
\end{array}$$

이때 나머지가 0이므로

$-4a-2=0,\ 4a=-2\qquad \therefore a=-\dfrac{1}{2}$

$a=-\dfrac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면 $b=\dfrac{1}{2}-2=-\dfrac{3}{2}$

$\therefore ab=\left(-\dfrac{1}{2}\right)\times\left(-\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{3}{4}$

다른 풀이 조립제법을 이용하여 $x^3+2ax^2-5x+2b$를 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|rrrr}
-1 & 1 & 2a & -5 & 2b\\
 & & -1 & -2a+1 & 2a+4\\ \hline
-1 & 1 & 2a-1 & -2a-4 & \boxed{2a+2b+4}\\
 & & -1 & -2a+2 & \\ \hline
 & 1 & 2a-2 & \boxed{-4a-2} &
\end{array}$$

이때 나머지가 0이므로

$2a+2b+4=0,\ -4a-2=0$

$a+b=-2,\ a=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore b=-2-a=-\dfrac{3}{2}$

$\therefore ab=\left(-\dfrac{1}{2}\right)\times\left(-\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{3}{4}$

082

$f(x)=x^3+x^2+ax+b$라 하면 $f(x)$가 $(x-1)^2$으로 나누어떨어지므로 인수정리에 의하여

$f(1)=0$

즉, $1+1+a+b=0$이므로

$b=-a-2$ …… ㉠

$$\begin{aligned}\therefore f(x)&=x^3+x^2+ax+b\\&=x^3+x^2+ax-a-2\end{aligned}$$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|rrrr}
1 & 1 & 1 & a & -a-2\\
 & & 1 & 2 & a+2\\ \hline
1 & 1 & 2 & a+2 & \boxed{0}\\
 & & 1 & 3 & \\ \hline
 & 1 & 3 & \boxed{a+5} &
\end{array}$$

이때 나머지가 0이므로

$a+5=0\qquad \therefore a=-5$

$a=-5$를 ㉠에 대입하면 $b=3$

따라서 $Q(x)=x+3$이므로

$Q(ab)=Q(-15)=-15+3=-12$

083

$2025=x$로 놓으면 $2024=x-1$

x^4-x^2+1을 $x-1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R이라 하면

$x^4-x^2+1=(x-1)Q(x)+R$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면 $R=1$

$\therefore x^4-x^2+1=(x-1)Q(x)+1$

이때 $x=2025$이므로

$2025^4-2025^2+1=2024\times Q(2025)+1$

따라서 구하는 나머지는 1이다.

개념 보충

자연수의 나눗셈

두 자연수 A, B에 대하여 A를 B $(B\neq 0)$로 나누었을 때의 몫을 Q, 나머지를 R이라 하면

$A=BQ+R$

이 성립한다. 이때 R은 $0\le R<B$를 만족시킨다.

084

$1000=x$로 놓으면 $998=x-2$

x^{10}을 $x-2$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R이라 하면

$x^{10}=(x-2)Q(x)+R$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면 $R=2^{10}$

이때 $x=1000$이므로

$$\begin{aligned}1000^{10}&=998\times Q(1000)+2^{10}\\&=998\times\{Q(1000)+1\}+2^{10}-998\\&=998\times\{Q(1000)+1\}+26\end{aligned}$$

따라서 구하는 나머지는 26이다.

085

$123=x$로 놓으면

$1234=123\times10+4=10x+4$

$(10x+4)^5$을 x로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R이라 하면

$(10x+4)^5=xQ(x)+R$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면 $R=4^5=2^{10}$

$\therefore (10x+4)^5=xQ(x)+2^{10}$

이때 $x=123$이므로

$$\begin{aligned}1234^5&=123\times Q(123)+2^{10}\\&=123\times\{Q(123)+8\}+2^{10}-123\times8\\&=123\times\{Q(123)+8\}+40\end{aligned}$$

따라서 구하는 나머지는 40이다.

1등급 비법

나머지정리를 이용한 수의 나눗셈

1234를 x로 놓고 123을 $\frac{x-4}{10}$로 표현하는 것보다 $123=x$로 놓고 1234를 x에 대한 일차식 $10x+4$로 표현하는 것이 계산하기에 더 편리하다.

내신 적중 서술형

● 26쪽

086 (1) 1 (2) $2^{30}-1$ **087** 2 **088** 13 **089** 7

086

(1) $(x+1)^{30}$을 x로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 R이므로

$(x+1)^{30}=xQ(x)+R$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$R=1$ …… ㉮

(2) $(x+1)^{30}=xQ(x)+1$ …… ㉡

㉡은 x에 대한 항등식이므로

$Q(x)=a_{29}x^{29}+a_{28}x^{28}+\cdots+a_1x+a_0$

(단, a_0, a_1, $\cdots$, a_{28}, a_{29}는 상수이다.)

위의 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$Q(1)=a_{29}+a_{28}+\cdots+a_1+a_0$

이므로 $Q(x)$의 상수항을 포함한 모든 계수의 합은 $Q(x)$에 $x=1$을 대입한 $Q(1)$의 값과 같다. …… ㉯

따라서 ㉡의 양변에 $x=1$을 대입하면

$2^{30}=Q(1)+1$

$\therefore Q(1)=2^{30}-1$ …… ㉰

	채점 기준	배점 비율
(1)	㉮ $(x+1)^{30}$을 x로 나누었을 때의 나머지 구하기	40 %
(2)	㉯ $Q(x)$의 상수항을 포함한 모든 계수의 합과 $Q(1)$ 사이의 관계 이해하기	40 %
	㉰ $Q(x)$의 모든 계수의 합 구하기	20 %

개념 보충

다항식 $P(x)$의 상수항을 포함한 모든 계수의 합

다항식 $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$($n$은 자연수, a_0, a_1, a_2, $\cdots$, a_n은 상수)에 대하여 양변에 $x=1$을 대입하면 $P(1)=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n$이므로 $P(x)$의 상수항을 포함한 모든 계수의 합은 $P(1)$의 값과 같다.

087

$f(x)$를 x^4+1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 x^3+1이므로

$f(x)=(x^4+1)Q(x)+x^3+1$ …… ㉮

양변을 제곱하면

$\{f(x)\}^2$

$=\{(x^4+1)Q(x)\}^2+2(x^4+1)Q(x)(x^3+1)+(x^3+1)^2$

$=(x^4+1)[(x^4+1)\{Q(x)\}^2+2Q(x)(x^3+1)]+x^6+2x^3+1$

이때 $f(x)$를 x^4+1로 나누었을 때의 나머지 $R(x)$는 x^6+2x^3+1을 x^4+1로 나누었을 때의 나머지와 같으므로

$x^6+2x^3+1=x^2(x^4+1)+2x^3-x^2+1$

따라서 $R(x)=2x^3-x^2+1$이므로 …… ㉯

$R(1)=2-1+1=2$ …… ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ $f(x)$를 x^4+1로 나누었을 때의 식 세우기	40 %
㉯ 나머지 $R(x)$ 구하기	40 %
㉰ $R(1)$의 값 구하기	20 %

088

$f(x)+g(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 5이므로 나머지정리에 의하여

$f(2)+g(2)=5$ …… ㉮

$f(x)g(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 6이므로 나머지정리에 의하여

$f(2)g(2)=6$ …… ㉯

$\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2=\{f(x)+g(x)\}^2-2f(x)g(x)$이므로

$\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2$을 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는

$\{f(2)\}^2+\{g(2)\}^2=\{f(2)+g(2)\}^2-2f(2)g(2)$

$=5^2-2\times6=13$ …… ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ $f(2)+g(2)$의 값 구하기	30 %
㉯ $f(2)g(2)$의 값 구하기	30 %
㉰ $\{f(x)^2\}+\{g(2)\}^2$을 $x-2$로 나누었을 때의 나머지 구하기	40 %

089

$f(x)=x^3-2x^2+3x+a$, $g(x)=x^2-x-2$라 하면

$g(x)$가 $x+b$로 나누어떨어지므로 인수정리에 의하여

$g(-b)=0$

즉, $b^2+b-2=0$에서 $(b-1)(b+2)=0$

$\therefore b=-2$ 또는 $b=1$ …… ㉮

(i) $b=-2$일 때,

$f(x)$가 $x-2$로 나누어떨어지므로 인수정리에 의하여

$f(2)=0$

즉, $8-8+6+a=0$이므로 $a=-6$

$\therefore a+b=-6-2=-8$ …… ㉯

(ii) $b=1$일 때,

$f(x)$가 $x+1$로 나누어떨어지므로 인수정리에 의하여

$f(-1)=0$

즉, $-1-2-3+a=0$이므로 $a=6$

$\therefore a+b=6+1=7$ …… ㉰

따라서 $a+b$의 최댓값은 7이다. …… ㉱

채점 기준	배점 비율
㉮ b의 값 구하기	30 %
㉯ $b=-2$일 때, a의 값과 $a+b$의 값 구하기	30 %
㉰ $b=1$일 때, a의 값과 $a+b$의 값 구하기	30 %
㉱ $a+b$의 최댓값 구하기	10 %

1등급 실력 완성

● 27쪽 ~ 28쪽

090 ③ **091** 9 **092** -1 **093** x^2+2 **094** 26
095 ③ **096** ③ **097** ⑤ **098** ②
099 3.541

090

미정계수법

전략 주어진 등식의 양변에 $x=1$, $x=-1$을 각각 대입한다.

풀이 주어진 등식이 x에 대한 항등식이므로
등식의 양변에 $x=1$을 대입하면
$(1+3-2)^6=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{18}$
$\therefore a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{18}=2^6$ …… ㉠
또, 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면
$(1-3+2)^6=a_0-a_1+a_2-\cdots+a_{18}$
$\therefore a_0-a_1+a_2-\cdots+a_{18}=0$ …… ㉡
㉠+㉡을 하면
$2(a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{18})=2^6$
$\therefore a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{18}=2^5=32$

1등급 비법

항등식 $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$에서
$a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1+a_0$ 또는 $a_n-a_{n-1}+\cdots-a_1+a_0$의 값을 구할 때는 구하는 식의 모양이 생기도록 등식의 양변에 $x=1$ 또는 $x=-1$을 대입해 본다.

091

미정계수법 + 조건을 만족시키는 항등식

전략 $P_n(x)$에 $n=1, 2, 3$을 각각 대입하여 $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$를 구한 후 주어진 등식에 대입한다.

풀이 $P_1(x)=x-1$,
$P_2(x)=(x-1)(x-2)$,
$P_3(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$
이므로
x^3-2x^2+3x-2
$=a+b(x-1)+c(x-1)(x-2)+d(x-1)(x-2)(x-3)$
…… ㉠
이 등식이 x에 대한 항등식이므로
㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면
$1-2+3-2=a \quad \therefore a=0$
㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면
$8-8+6-2=a+b \quad \therefore b=4$
㉠의 양변에 $x=3$을 대입하면
$27-18+9-2=a+2b+2c \quad \therefore c=4$
㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면
$-2=a-b+2c-6d \quad \therefore d=1$
$\therefore a+b+c+d=0+4+4+1=9$

092

나머지정리; 이차식으로 나누는 경우

전략 주어진 조건을 이용하여 $f(x)$의 나눗셈에 대한 식을 세운 후 항등식의 성질과 몫 $Q(x)$에 대한 나머지정리를 이용한다.

풀이 $f(x)$를 x^2-2x-3으로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 $3x+2$이므로
$f(x)=(x^2-2x-3)Q(x)+3x+2$
$=(x+1)(x-3)Q(x)+3x+2$ …… ㉠
㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면
$f(-1)=-1$
$Q(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 3이므로 나머지정리에 의하여
$Q(2)=3$
㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면
$f(2)=-3Q(2)+8$
$=(-3)\times3+8=-1$
$f(x)$를 x^2-x-2로 나누었을 때의 몫을 $Q'(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면
$f(x)=(x^2-x-2)Q'(x)+ax+b$
$=(x+1)(x-2)Q'(x)+ax+b$
$f(-1)=-1$이므로 $-a+b=-1$
$f(2)=-1$이므로 $2a+b=-1$
두 식을 연립하여 풀면
$a=0$, $b=-1$
따라서 $f(x)$를 x^2-x-2로 나누었을 때의 나머지는 -1이다.

093

나머지정리; 삼차식으로 나누는 경우

전략 다항식 $f(x)$를 $(x-1)^2(x-2)$로 나누었을 때의 나머지는 이차 이하의 다항식임을 이용한다.

풀이 $f(x)$를 $(x-1)^2(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 ax^2+bx+c (a, b, c는 상수)라 하면
$f(x)=(x-1)^2(x-2)Q(x)+ax^2+bx+c$
이때 $f(x)$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $2x+1$이므로
ax^2+bx+c를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 나머지도 $2x+1$이다.
즉, $ax^2+bx+c=a(x-1)^2+2x+1$이므로
$f(x)=(x-1)^2(x-2)Q(x)+a(x-1)^2+2x+1$ …… ㉠
또, $f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 6이므로 나머지정리에 의하여
$f(2)=a+5=6 \quad \therefore a=1$
따라서 구하는 나머지는 ㉠에서
$(x-1)^2+2x+1=x^2+2$

094

나머지정리; 삼차식으로 나누는 경우

전략 삼차다항식 $f(x)$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫과 나머지는 모두 일차식이므로 몫을 $ax+b$라 하면 나머지도 $ax+b$임을 이용한다.

풀이 $f(x)$는 삼차다항식이므로 조건 (나)에서 $f(x)$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면 나머지도 $ax+b$이다.

$\therefore f(x)=(x-1)^2(ax+b)+ax+b$ ...... ㉠

조건 (가)에서 $f(1)=2$이므로

㉠에서 $a+b=2$

$\therefore b=2-a$ ...... ㉡

㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면

$$\begin{aligned} f(x)&=(x-1)^2\{ax+(2-a)\}+ax+(2-a)\\ &=(x-1)^2\{a(x-1)+2\}+a(x-1)+2\\ &=a(x-1)^3+2(x-1)^2+a(x-1)+2 \end{aligned}$$

따라서 $f(x)$를 $(x-1)^3$으로 나누었을 때의 나머지는

$R(x)=2(x-1)^2+a(x-1)+2$

이때 $R(0)=R(3)$이므로

$2-a+2=8+2a+2$, $-3a=6$

$\therefore a=-2$

즉, $R(x)=2(x-1)^2-2(x-1)+2$이므로

$R(5)=2\times4^2-2\times4+2=26$

095

나머지정리 ⊕ 인수정리; 일차식으로 나누는 경우

전략 주어진 조건을 이용하여 $f(1)$, $g(1)$의 값을 구한다.

풀이 $2f(x)-g(x)$가 $x-1$로 나누어떨어지므로 인수정리에 의하여

$2f(1)-g(1)=0$ ...... ㉠

$f(x)+2g(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 5이므로 나머지정리에 의하여

$f(1)+2g(1)=5$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$f(1)=1$, $g(1)=2$

ㄱ. $f(x)-2x^2+2x-1$에 $x=1$을 대입하면
  $f(1)-2+2-1=1-1=0$
  따라서 $f(x)-2x^2+2x-1$은 $x-1$로 나누어떨어진다.

ㄴ. $g(x)-4x^2$에 $x=1$을 대입하면
  $g(1)-4=2-4=-2$
  따라서 $g(x)-4x^2$은 $x-1$로 나누어떨어지지 않는다.

ㄷ. $4x^2-2f(x)g(x)$에 $x=1$을 대입하면
  $4-2f(1)g(1)=4-2\times1\times2=0$
  따라서 $4x^2-2f(x)g(x)$는 $x-1$로 나누어떨어진다.

이상에서 $x-1$로 나누어떨어지는 것은 ㄱ, ㄷ이다.

096

나머지정리 ⊕ 인수정리; 일차식으로 나누는 경우

전략 x^3+ax^2+bx-4를 $x+1$로 나누었을 때의 식을 표현하고, 인수정리를 이용하여 $Q(1)$의 값을 구한다.

풀이 x^3+ax^2+bx-4를 $x+1$로 나누었을 때의 몫은 $Q(x)$이고 나머지는 3이므로

$x^3+ax^2+bx-4=(x+1)Q(x)+3$ ...... ㉠

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$-1+a-b-4=3$ $\therefore a-b=8$ ...... ㉡

또, $(x^2+a)Q(x-2)$가 $x-2$로 나누어떨어지므로 인수정리에 의하여

$(4+a)Q(0)=0$ ...... ㉢

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$-4=Q(0)+3$ $\therefore Q(0)=-7$

즉, ㉢에서 $4+a=0$ $\therefore a=-4$

이때 $a=-4$를 ㉡에 대입하면 $b=-12$

$\therefore x^3-4x^2-12x-4=(x+1)Q(x)+3$

위의 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$1-4-12-4=2Q(1)+3$

$\therefore Q(1)=-11$

097

나머지정리 ⊕ 인수정리; 이차식으로 나누는 경우

전략 두 조건 (가), (나)를 이용하여 두 다항식 $f(x)$, $g(x)$의 인수를 찾은 후, $f(x)$, $g(x)$를 구한다.

풀이 조건 (나)에서 $f(x)g(x)$는 x^2-9, 즉 $(x-3)(x+3)$으로 나누어떨어지므로 인수정리에 의하여

$f(3)g(3)=0$, $f(-3)g(-3)=0$ ...... ㉠

조건 (가)에서 $f(x)-2g(x)=0$, 즉 $f(x)=2g(x)$이므로

$f(3)=2g(3)$, $f(-3)=2g(-3)$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $f(3)=0$이면 $g(3)=0$이고,

$g(3)=0$이면 $f(3)=0$이므로

$f(x)$와 $g(x)$는 모두 $x-3$을 인수로 갖는다.

같은 방법으로 $f(x)$와 $g(x)$는 모두 $x+3$을 인수로 갖는다.

$f(x)$, $g(x)$는 이차다항식이므로

$g(x)=a(x-3)(x+3)$ (a는 상수)라 하면 ㉡에서

$f(x)=2a(x-3)(x+3)$

이때 $f(0)=18$이므로

$2a\times(-3)\times3=18$, $-18a=18$

$\therefore a=-1$

$\therefore f(x)=-2(x-3)(x+3)$, $g(x)=-(x-3)(x+3)$

따라서 $g(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지는 나머지정리에 의하여

$g(2)=-(-1)\times5=5$

098

나머지정리 ⊕ 조립제법

전략 조립제법의 원리를 이용하여 ⓐ, ⓑ의 순서로 값을 구한 후 나머지정리를 이용한다.

풀이

1	$\square$	$\square$	-2	$\square$
		$\square$	6	$\square$
	1	ⓐ	ⓑ	8

$1\times$ⓐ$=6$에서 ⓐ$=6$

$-2+6=$ⓑ에서 ⓑ$=4$

$\therefore g(x)=x^2+6x+4$

따라서 $g(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지는 나머지정리에 의하여

$g(-2)=4-12+4=-4$

099

조립제법의 활용

(전략) $x=2+0.1$에서 $x-2=0.1$ 즉, $f(x)$를 $x-2$로 나눈 식을 구하여 2.1을 대입하여 구한다.

(풀이) $f(x)=x^3-2x^2+x+1$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 $x-2$로 나누는 과정을 반복하면 다음과 같다.

$$
\begin{array}{c|cccc}
2 & 1 & -2 & 1 & 1 \\
 & & 2 & 0 & 2 \\
\hline
2 & 1 & 0 & 1 & \boxed{3} \\
 & & 2 & 4 & \\
\hline
2 & 1 & 2 & \boxed{5} & \\
 & & 2 & & \\
\hline
 & 1 & \boxed{4} & &
\end{array}
$$

이때 $f(x)$를 $x-2$에 대한 내림차순으로 정리하면

$f(x)=(x-2)(x^2+1)+3$

$\quad=(x-2)\{(x-2)(x+2)+5\}+3$

$\quad=(x-2)[(x-2)\{(x-2)+4\}+5]+3$

$\quad=(x-2)^3+4(x-2)^2+5(x-2)+3$

$\therefore f(2.1)=(2.1-2)^3+4\times(2.1-2)^2+5\times(2.1-2)+3$

$\quad=0.1^3+4\times0.1^2+5\times0.1+3$

$\quad=3.541$

도전 1등급 최고난도 ● 29쪽

100 ④ **101** ④ **102** 33

100

조건을 만족시키는 항등식

(1단계) $P(x)$의 차수를 구한다.

$P(x)$의 차수를 n이라 하면 등식의 좌변인 $P(x^2-1)$의 차수는 $2n$이고 우변인 $x^2\{P(x)-3x-1\}$의 차수는 $n+2$이므로

$2n=n+2 \qquad \therefore n=2$

(2단계) $P(x)$를 구한다.

$P(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$P(x^2-1)=x^2\{P(x)-3x-1\}$에서

$(x^2-1)^2+a(x^2-1)+b=x^2\{(x^2+ax+b)-3x-1\}$

$x^4+(-2+a)x^2+(-a+b+1)=x^4+(a-3)x^3+(b-1)x^2$

이 등식은 x에 대한 항등식이므로

$a-3=0$, $-2+a=b-1$, $-a+b+1=0$

$\therefore a=3$, $b=2$

$\therefore P(x)=x^2+3x+2$

(3단계) $P(4)$의 값을 구한다.

$\therefore P(4)=4^2+3\times4+2=30$

1등급 비법

항등식이 되도록 하는 다항식 구하기

주어진 항등식을 만족시키는 다항식 $P(x)$의 차수가 주어지지 않았을 경우 차수를 먼저 구한 후 항등식의 성질을 이용하여 다항식 $P(x)$를 구한다.

101

다항식의 나눗셈 ⊕ 나머지정리

(1단계) $Q(x)$를 구한다.

조건 (가)에서

$f(x)=(x-1)(x-4)^2Q(x)+(x-1)(x+1)$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=0$

조건 (나)에서

$f(x^2)$을 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q'(x)$라 하면

$f(x^2)=(x-1)^2Q'(x)+Q(x)$ …… ㉡

㉡의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=Q(1)=0$

한편, $Q(x)$의 차수는 $(x-1)^2$의 차수보다 낮으므로 $Q(x)$는 일차식 또는 상수이다.

$\therefore Q(x)=a(x-1)$ (a는 상수) 또는 $Q(x)=0$

그런데 $Q(x)=0$인 경우 ㉠에서

$f(x)=(x-1)(x+1)$

$f(x^2)=(x^2-1)(x^2+1)$

이때 $f(x^2)$은 $(x-1)^2$으로 나누어떨어지지 않으므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

$\therefore Q(x)=a(x-1)$

(2단계) $Q(x)$의 최고차항의 계수를 구한다.

㉠, ㉡에 $Q(x)=a(x-1)$을 각각 대입하면

$f(x)=(x-1)(x-4)^2\times a(x-1)+(x-1)(x+1)$,

$f(x^2)=(x^2-1)(x^2-4)^2\times a(x^2-1)+(x^2-1)(x^2+1)$

$\quad=(x-1)^2\{a(x+1)^2(x^2-4)^2\}+x^4-1$

이때 $f(x^2)$을 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 나머지 $Q(x)$는 x^4-1을 $(x-1)^2$, 즉 x^2-2x+1로 나누었을 때의 나머지와 같으므로

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2+2x+3 \\
\cline{2-2}
x^2-2x+1 & x^4 \qquad\qquad\qquad -1 \\
 & x^4-2x^3+x^2 \\
\cline{2-2}
 & \quad 2x^3-x^2 \\
 & \quad 2x^3-4x^2+2x \\
\cline{2-2}
 & \qquad 3x^2-2x-1 \\
 & \qquad 3x^2-6x+3 \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad 4x-4
\end{array}
$$

$x^4-1=(x^2-2x+1)(x^2+2x+3)+4x-4$
$\quad=(x-1)^2(x^2+2x+3)+4x-4$
$\therefore Q(x)=4(x-1)$
㉠에 대입하면
$f(x)=(x-1)(x-4)^2\times\{4(x-1)\}+(x-1)(x+1)$
(3단계) $f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지를 구한다.
따라서 $f(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지는 나머지정리에 의하여
$f(2)=1\times4\times4+3=19$

1등급 비법

다항식의 나눗셈
다항식 A를 다항식 $B(B\neq0)$로 나누었을 때의 몫을 Q, 나머지를 R이라 하면
$A=BQ+R$
이 성립한다. 이때 R의 차수는 B의 차수보다 낮음을 이용하여 나머지의 차수를 구한다.

102

다항식의 나눗셈 ⊕ 인수정리

(1단계) $f(x)$를 $x^2+g(x)$로 나누었을 때의 나머지 $\{g(x)\}^2-x^2$의 차수가 $x^2+g(x)$의 차수보다 낮음을 이용하여 $g(x)$의 차수와 최고차항의 계수를 구한다.
조건 (가)에서 $f(x)$를 $x^2+g(x)$로 나누었을 때의 몫은 $x+2$이고 나머지는 $\{g(x)\}^2-x^2$이므로
$f(x)=\{x^2+g(x)\}(x+2)+\{g(x)\}^2-x^2$ …… ㉠
이때 나머지 $\{g(x)\}^2-x^2$의 차수는 $x^2+g(x)$의 차수보다 낮다.
(i) $g(x)$의 차수가 n $(n\geq2)$일 때,
$\{g(x)\}^2-x^2$의 차수가 $2n$으로 $x^2+g(x)$의 차수인 n보다 높게 되어 조건을 만족시키지 않는다.
(ii) $g(x)$가 상수일 때,
$\{g(x)\}^2-x^2$의 차수와 $x^2+g(x)$의 차수가 2로 같게 되어 조건을 만족시키지 않는다.
(i), (ii)에서 $g(x)$의 차수는 1이다.
따라서 $x^2+g(x)$는 이차식이므로 $\{g(x)\}^2-x^2$은 일차식 또는 상수이어야 하고, $g(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로
$g(x)=x+a$ (a는 상수) …… ㉡
로 놓을 수 있다.
(2단계) $f(x)$가 $g(x)$로 나누어떨어짐을 이용하여 $g(x)$를 구한다.
㉡을 ㉠에 대입하면
$f(x)=(x^2+x+a)(x+2)+(x+a)^2-x^2$
$\quad=(x^2+x+a)(x+2)+2ax+a^2$
조건 (나)에서 $f(x)$가 $g(x)=x+a$로 나누어떨어지므로
$f(-a)=0$
즉, $(a^2-a+a)(-a+2)-2a^2+a^2=0$에서 $-a^3+a^2=0$
이므로
$a^2(a-1)=0$
$\therefore a=0$ 또는 $a=1$
이때 $a=0$이면 $f(x)=(x^2+x)(x+2)$에서 $f(0)=0$이 되어 조건을 만족시키지 않고,
$a=1$이면 $f(x)=(x^2+x+1)(x+2)+2x+1$
에서 $f(0)\neq0$이므로 조건을 만족시킨다.
(3단계) $f(2)$의 값을 구한다.
따라서 $f(x)=(x^2+x+1)(x+2)+2x+1$이므로
$f(2)=7\times4+4+1=33$

다른 풀이 (1단계) $f(x)$가 $g(x)$로 나누어떨어짐을 이용하여 $g(x)$의 차수를 구한다.
조건 (가)에서 $f(x)$를 $x^2+g(x)$로 나눈 몫이 $x+2$이고 나머지가 $\{g(x)\}^2-x^2$이므로
$f(x)=\{x^2+g(x)\}(x+2)+\{g(x)\}^2-x^2$
$\quad=x^2(x+2)+(x+2)g(x)+\{g(x)\}^2-x^2$
$\quad=g(x)\{x+2+g(x)\}+x^3+x^2$
$\quad=g(x)\{x+2+g(x)\}+x^2(x+1)$ …… ㉠
조건 (나)에서 $f(x)$는 $g(x)$로 나누어떨어지므로 $x^2(x+1)$도 $g(x)$로 나누어떨어져야 한다. …… ㉡
㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면
$f(0)=g(0)\{2+g(0)\}\neq0$이므로
$g(0)\neq0$이고 $g(0)\neq-2$ …… ㉢
$g(x)$의 최고차항의 계수가 양수이고 ㉡, ㉢에 의하여
$g(x)=k(x+1)$(단, $k>0$)
(2단계) $f(x)$를 $x^2+g(x)$로 나누었을 때의 나머지 $\{g(x)\}^2-x^2$의 차수가 $x^2+g(x)$의 차수보다 낮음을 이용하여 $g(x)$의 최고차항의 계수를 구한다.
$f(x)$를 $x^2+g(x)$로 나눈 나머지가 $\{g(x)\}^2-x^2$이므로
$\{g(x)\}^2-x^2$의 차수가 $x^2+g(x)$의 차수보다 낮아야 한다.
이때
$x^2+g(x)=x^2+k(x+1)$
$\quad=x^2+kx+k$
$\{g(x)\}^2-x^2=\{k(x+1)\}^2-x^2$
$\quad=(k^2-1)x^2+2k^2x+k^2$
즉, $\{g(x)\}^2-x^2$의 차수가 $x^2+g(x)$의 차수보다 낮아야 하므로
$k^2-1=0,\ (k-1)(k+1)=0$
$\therefore k=-1$ 또는 $k=1$
$k>0$이므로 $k=1$
$\therefore g(x)=x+1$
(3단계) $f(2)$의 값을 구한다.
㉠에 $g(x)=x+1$을 대입하면
$f(x)=(x+1)\{x+2+(x+1)\}+x^2(x+1)$
$\quad=(x+1)(2x+3)+x^2(x+1)$
이므로
$f(2)=(2+1)\times(2\times2+3)+2^2\times(2+1)$
$\quad=3\times7+4\times3$
$\quad=33$

03 인수분해

유형 분석 기출

31쪽~36쪽

103 ⑤ **104** -2 **105** ④
106 $x^2(x-1)(x^3+x^2+2)$ **107** ③ **108** ③
109 ⑤ **110** ① **111** $(ab-a+1)(ab-b+1)$
112 ③ **113** ⑤ **114** $2x^2-8x-2$ **115** ②
116 ④ **117** 12 **118** ③ **119** 2 **120** ①
121 ③ **122** ③ **123** ⑤ **124** ② **125** ⑤
126 $(x+1)(x-3)(x^2+x-4)$ **127** ③
128 $(x+1)^2(x-1)^2$ **129** ② **130** ① **131** ②
132 895 **133** ① **134** 398 **135** ② **136** ⑤

103

① $a^3+9a^2+27a+27=(a+3)^3$

② $x^3+8y^3=(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)$

③ $a^2+b^2+c^2-2ab+2bc-2ca$

$=a^2+(-b)^2+(-c)^2+2\times a\times(-b)+2\times(-b)\times(-c)+2\times(-c)\times a$

$=(a-b-c)^2$

④ $ab^2-ac^2-b^2c+c^3=a(b^2-c^2)-c(b^2-c^2)$

$=(a-c)(b^2-c^2)$

$=(a-c)(b+c)(b-c)$

⑤ $a^6-b^6=(a^3+b^3)(a^3-b^3)$

$=(a+b)(a^2-ab+b^2)(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$=(a+b)(a-b)(a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2)$

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

104

$x^2+y^2+4z^2-2xy-4yz+4zx$

$=x^2+(-y)^2+(2z)^2+2\times x\times(-y)+2\times(-y)\times 2z+2\times 2z\times x$

$=(x-y+2z)^2$

따라서 $a=1$, $b=-1$, $c=2$이므로

$abc=1\times(-1)\times 2=-2$

105

$x^5y-64x^2y^4=x^2y(x^3-64y^3)$

$=x^2y(x-4y)(x^2+4xy+16y^2)$

따라서 인수가 아닌 것은 ④ $x^2-4xy+16y^2$이다.

106

$x^6-x^4+2x^3-2x^2=x^4(x^2-1)+2x^2(x-1)$

$=x^4(x+1)(x-1)+2x^2(x-1)$

$=x^2(x-1)\{x^2(x+1)+2\}$

$=x^2(x-1)(x^3+x^2+2)$

다른 풀이 $x^6+2x^3-x^4-2x^2$

$=(x^6+2x^3+1)-(x^4+2x^2+1)$

$=(x^3+1)^2-(x^2+1)^2$

$=(x^3+1+x^2+1)(x^3+1-x^2-1)$

$=(x^3+x^2+2)(x^3-x^2)$

$=x^2(x-1)(x^3+x^2+2)$

1등급 비법

항이 네 개일 때, 인수분해 하는 방법은 다음과 같다.
[방법 1] 두 개씩 짝 지어 공통인수를 찾는다.
[방법 2] 적당한 항을 더하거나 빼서 A^2-B^2 꼴로 변형한 후 인수분해 한다.

107

$x^4+9x^2y^2+81y^4=x^4+18x^2y^2+81y^4-9x^2y^2$

$=(x^2+9y^2)^2-(3xy)^2$

$=(x^2+3xy+9y^2)(x^2-3xy+9y^2)$

따라서 $a=\pm3$, $b=9$이므로

$a^2+b^2=9+81=90$

108

$a^3-b^3+c^3+3abc=(a-b+c)(a^2+b^2+c^2+ab+bc-ca)$ …… ㉠

$a=x-3$, $b=2x-5$, $c=x-2$로 놓으면

$a-b+c=(x-3)-(2x-5)+(x-2)=0$

이므로 ㉠에서

$(x-3)^3-(2x-5)^3+(x-2)^3+3(x-3)(2x-5)(x-2)=0$

$\therefore (x-3)^3-(2x-5)^3+(x-2)^3=-3(x-2)(x-3)(2x-5)$

다른 풀이 인수분해 공식을 이용하면

$(x-3)^3-(2x-5)^3+(x-2)^3$

$=\{(x-3)-(2x-5)\}\{(x-3)^2+(x-3)(2x-5)+(2x-5)^2\}+(x-2)^3$

$=(-x+2)(x^2-6x+9+2x^2-11x+15+4x^2-20x+25)+(x-2)^3$

$=-(x-2)(7x^2-37x+49)+(x-2)^3$

$=(x-2)\{-(7x^2-37x+49)+(x-2)^2\}$

$=(x-2)(-6x^2+33x-45)$

$=-3(x-2)(2x^2-11x+15)$

$=-3(x-2)(x-3)(2x-5)$

참고 인수분해 공식

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

에서 b 대신 $-b$를 대입하면 다음이 성립한다.

$a^3-b^3+c^3+3abc=(a-b+c)(a^2+b^2+c^2+ab+bc-ca)$

109

다항식에서 공통부분을 찾아 $\boxed{x^2+3x}=X$로 놓으면

$(x^2+3x+3)(x^2+3x+4)-2$

$=(X+3)(X+4)-2=X^2+7X+10$

$=(X+2)(X+5)$

$=(x^2+3x+2)(x^2+3x+5)$

$=(\boxed{x+1})(x+2)(x^2+3x+5)$

따라서 $f(x)=x^2+3x$, $g(x)=x+1$이므로

$\frac{f(2)}{g(1)}=\frac{2^2+3\times2}{1+1}=\frac{10}{2}=5$

110

$x^2-3=X$로 놓으면

$(x^2-3)^2+3(x^2-3)-4=X^2+3X-4$
$=(X-1)(X+4)$
$=(x^2-4)(x^2+1)$
$=(x-2)(x+2)(x^2+1)$

이때 $b<c$이므로 $a=1$, $b=-2$, $c=2$

$a+b-c=1-2-2=-3$

111

$ab+1=X$로 놓으면

$(ab-a-b+1)(ab+1)+ab=(X-a-b)X+ab$
$=X^2-(a+b)X+ab$
$=(X-a)(X-b)$
$=(ab-a+1)(ab-b+1)$

112

$x+2y+1=X$로 놓으면

$(x+2y+1)^2+x+2y-1=X^2+X-2=(X-1)(X+2)$
$=(x+2y)(x+2y+3)$

따라서 $a=2$, $b=2$, $c=3$이므로

$a^2+b^2+c^2=2^2+2^2+3^2=17$

다른 풀이 $x+2y=X$로 놓으면

$(x+2y+1)^2+x+2y-1=(X+1)^2+X-1$
$=X^2+3X=X(X+3)$
$=(x+2y)(x+2y+3)$

따라서 $a=2$, $b=2$, $c=3$이므로

$a^2+b^2+c^2=2^2+2^2+3^2=17$

113

$(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)+k$
$=\{(x+2)(x+5)\}\{(x+3)(x+4)\}+k$
$=(x^2+7x+10)(x^2+7x+12)+k$

$x^2+7x=X$로 놓으면

(주어진 식)$=(X+10)(X+12)+k$
$=X^2+22X+120+k$

이 식이 완전제곱식이 되어야 하므로

$120+k=11^2$ $\quad\therefore k=1$

$\therefore$ (주어진 식)$=X^2+22X+121=(X+11)^2$
$=(x^2+7x+11)^2$

따라서 $a=7$, $b=11$이므로

$a+b+k=7+11+1=19$

다른 풀이 $x^2+7x+10=X$로 놓으면

(주어진 식)$=X(X+2)+k$
$=X^2+2X+k$

$\therefore k=1$

$\therefore$ (주어진 식)$=X^2+2X+1=(X+1)^2$
$=(x^2+7x+11)^2$

따라서 $a=7$, $b=11$이므로

$a+b+k=7+11+1=19$

114

$(x^2-6x+5)(x^2-2x-3)+12$
$=(x-1)(x-5)(x+1)(x-3)+12$
$=\{(x-1)(x-3)\}\{(x-5)(x+1)\}+12$
$=(x^2-4x+3)(x^2-4x-5)+12$

$x^2-4x=X$로 놓으면

(주어진 식)$=(X+3)(X-5)+12$
$=X^2-2X-3$
$=(X+1)(X-3)$
$=(x^2-4x+1)(x^2-4x-3)$

따라서 $f(x)=x^2-4x+1$, $g(x)=x^2-4x-3$ 또는

$f(x)=x^2-4x-3$, $g(x)=x^2-4x+1$이므로

$f(x)+g(x)=2x^2-8x-2$

115

$x^2=X$로 놓으면

$x^4-x^2-12=X^2-X-12$
$=(X-4)(X+3)$
$=(x^2-4)(x^2+3)$
$=(x-2)(x+2)(x^2+3)$

이때 a가 양수이므로 $a=2$, $b=3$

$\therefore a+b=2+3=5$

116

$x^2=X$, $y^2=Y$로 놓으면

$x^4-13x^2y^2+36y^4=X^2-13XY+36Y^2$
$=(X-4Y)(X-9Y)$
$=(x^2-4y^2)(x^2-9y^2)$
$=(x+2y)(x-2y)(x+3y)(x-3y)$

따라서 $x^4-13x^2y^2+36y^4$의 인수인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

117

$x^4+2x^2+9=x^4+6x^2+9-4x^2$
$=(x^2+3)^2-(2x)^2$
$=(x^2+2x+3)(x^2-2x+3)$

따라서 $a=2$, $b=3$, $c=-2$, $d=3$ 또는 $a=-2$, $b=3$, $c=2$, $d=3$ 이므로

$|ab-cd|=12$

118

주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^4-3y^2-2x^2y-4x^2+4y+4$

$=x^4-2x^2y-4x^2-3y^2+4y+4$

$=x^4-(2y+4)x^2-(3y^2-4y-4)$

$=x^4-(2y+4)x^2-(y-2)(3y+2)$

$=(x^2+y-2)(x^2-3y-2)$

따라서 인수인 것은 ③ x^2+y-2이다.

다른 풀이 주어진 식을 y에 대하여 내림차순으로 정리하면

$-3y^2-2x^2y+4y+x^4-4x^2+4$

$=-3y^2-(2x^2-4)y+(x^2-2)^2$

$=\{y+(x^2-2)\}\{-3y+(x^2-2)\}$

$=(x^2+y-2)(x^2-3y-2)$

오답 피하기 특정한 문자에 대하여 내림차순이나 오름차순으로 정리할 때, 다른 문자는 상수로 생각한다.

개념 보충

다항식의 정리

① 내림차순: 한 문자에 대하여 차수가 높은 항부터 낮은 항의 순서대로 나타내는 것

② 오름차순: 한 문자에 대하여 차수가 낮은 항부터 높은 항의 순서대로 나타내는 것

119

주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^2-3xy+2y^2-ax+7y-15$

$=x^2-(3y+a)x+(2y^2+7y-15)$

$=x^2-(3y+a)x+(y+5)(2y-3)$

주어진 식이 x, y에 대한 두 일차식의 곱으로 인수분해 되므로

$-(y+5)+\{-(2y-3)\}=-(3y+a)$

$3y+2=3y+a \qquad \therefore a=2$

1등급 비법

여러 개의 문자를 포함한 식을 인수분해 할 때는 먼저 차수가 가장 낮은 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리한다.

식에 포함된 문자의 차수가 모두 같을 때는 어느 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리한다. 이때 상수항이 인수분해 되면 상수항만 따로 인수분해 한 후, 전체를 인수분해 한다.

120

주어진 식을 전개한 후, a에 대하여 내림차순으로 정리하면

$ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)+2abc$

$=a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2+2abc$

$=(b+c)a^2+(b^2+2bc+c^2)a+bc(b+c)$

$=(b+c)a^2+(b+c)^2a+bc(b+c)$

$=(b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\}$

$=(b+c)(a+b)(a+c)$

$=(a+b)(b+c)(c+a)$

참고 전개한 식을 b 또는 c에 대하여 내림차순으로 정리한 후 인수분해 해도 그 결과는 같다.

121

$f(x)=x^3+3x^2-6x-8$이라 하면

$f(-1)=-1+3+6-8=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해 하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 3 & -6 & -8 \\ & & -1 & -2 & 8 \\ \hline & 1 & 2 & -8 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x+1)(x^2+2x-8)$

$\quad\;\;=(x+1)(x+4)(x-2)$

$\therefore a^2+b^2+c^2=1^2+4^2+(-2)^2=21$

122

$f\left(\frac{1}{2}\right)=0$에서 $4\times\frac{1}{8}-a\times\frac{1}{4}-2\times\frac{1}{2}+1=0$

$\frac{1}{2}-\frac{a}{4}=0 \qquad \therefore a=2$

따라서 $f(x)=4x^3-2x^2-2x+1$이고 $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$이므로

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해 하면

$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{1}{2} & 4 & -2 & -2 & 1 \\ & & 2 & 0 & -1 \\ \hline & 4 & 0 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)(4x^2-2)$

$\quad\;\;=(2x-1)(2x^2-1)$

123

$f(x)=x^3-2x^2-x+a$라 하면

$f(1)=1-2-1+a=0$이므로 $a=2$

따라서 $f(x)=x^3-2x^2-x+2$이고, $f(1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해 하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -2 & -1 & 2 \\ & & 1 & -1 & -2 \\ \hline -1 & 1 & -1 & -2 & \boxed{0} \\ & & -1 & 2 & \\ \hline & 1 & -2 & \boxed{0} & \end{array}$$

$f(x)=(x-1)(x+1)(x-2)$

이때 $b<c$이므로 $a=2$, $b=-2$, $c=1$

$\therefore a-b+c=2-(-2)+1=5$

다른 풀이 $f(x)=x^3-2x^2-x+a$라 하면

$f(1)=1-2-1+a=0$이므로 $a=2$

$\therefore f(x)=x^3-2x^2-x+2$

$\qquad\quad=x(x^2-1)-2(x^2-1)$

$\qquad\quad=(x^2-1)(x-2)$

$\qquad\quad=(x-1)(x+1)(x-2)$

이때 $b<c$이므로 $a=2$, $b=-2$, $c=1$

$\therefore a-b+c=2-(-2)+1=5$

124

$f(x)=x^3-(k^2+k+1)x+k^2+k$라 하면

$f(1)=1-(k^2+k+1)+k^2+k=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해 하면

$$\begin{array}{r|rrrr}
1 & 1 & 0 & -k^2-k-1 & k^2+k \\
 & & 1 & 1 & -k^2-k \\ \hline
 & 1 & 1 & -k^2-k & \boxed{0}
\end{array}$$

$f(x)=(x-1)\{x^2+x-k(k+1)\}$

$\quad=(x-1)(x-k)(x+k+1)$

$\therefore a+b+c=-1-k+k+1=0$

125

$f(x)=x^4+5x^3+11x^2+13x+6$이라 하면

$f(-1)=1-5+11-13+6=0$,

$f(-2)=16-40+44-26+6=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해 하면

$$\begin{array}{r|rrrrr}
-1 & 1 & 5 & 11 & 13 & 6 \\
 & & -1 & -4 & -7 & -6 \\ \hline
-2 & 1 & 4 & 7 & 6 & \boxed{0} \\
 & & -2 & -4 & -6 & \\ \hline
 & 1 & 2 & 3 & \boxed{0} &
\end{array}$$

$f(x)=(x+1)(x+2)(x^2+2x+3)$

$\quad=(x^2+3x+2)(x^2+2x+3)$

이때 a, b는 정수이므로

$a=3$, $b=2$ 또는 $a=2$, $b=3$

$\therefore a+b=5$

126

$f(x)=x^4-x^3+ax^2+bx+12$라 하면

$f(-1)=0, f(2)=-6$

$f(-1)=0$에서

$1-(-1)+a-b+12=0$

$\therefore a-b=-14$ …… ㉠

$f(2)=-6$에서

$16-8+4a+2b+12=-6$

$\therefore 2a+b=-13$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-9$, $b=5$

$\therefore f(x)=x^4-x^3-9x^2+5x+12$

$f(-1)=0$, $f(3)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해 하면

$$\begin{array}{r|rrrrr}
-1 & 1 & -1 & -9 & 5 & 12 \\
 & & -1 & 2 & 7 & -12 \\ \hline
3 & 1 & -2 & -7 & 12 & \boxed{0} \\
 & & 3 & 3 & -12 & \\ \hline
 & 1 & 1 & -4 & \boxed{0} &
\end{array}$$

$f(x)=(x+1)(x-3)(x^2+x-4)$

$\therefore x^4-x^3-9x^2+5x+12=(x+1)(x-3)(x^2+x-4)$

127

$x^3+1-f(x)=(x+1)(x+a)^2$ …… ㉠

에서 $x^3+1-f(x)$가 $x+1$로 나누어떨어지므로 인수정리에 의하여

$(-1)^3+1-f(-1)=0 \qquad \therefore f(-1)=0$

따라서 $f(x)=k(x+1)$(k는 0이 아닌 상수)이므로

$x^3+1-f(x)=x^3+1-k(x+1)$

$\qquad=(x+1)(x^2-x+1-k)$

이것을 ㉠의 우변과 비교하면

$x^2-x+1-k=(x+a)^2$, $x^2-x+1-k=x^2+2ax+a^2$

양변의 계수를 비교하면

$-1=2a$, $1-k=a^2 \qquad \therefore a=-\frac{1}{2}$, $k=\frac{3}{4}$

따라서 $f(x)=\frac{3}{4}(x+1)$이므로

$f(7)=\frac{3}{4}\times 8=6$

128

x^4+ax^2+b가 $(x+1)^2$을 인수로 가지므로 조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{r|rrrrr}
-1 & 1 & 0 & a & 0 & b \\
 & & -1 & 1 & -a-1 & a+1 \\ \hline
-1 & 1 & -1 & a+1 & -a-1 & \boxed{a+b+1} \\
 & & -1 & 2 & -a-3 & \\ \hline
 & 1 & -2 & a+3 & \boxed{-2a-4} &
\end{array}$$

이때 나머지가 0이므로 $a+b+1=0$, $-2a-4=0$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=1$

$\therefore x^4-2x^2+1=(x+1)^2(x^2-2x+1)$

$\qquad=(x+1)^2(x-1)^2$

129

$x^3-x^2y+xy^2-y^3=x^2(x-y)+y^2(x-y)$

$\qquad=(x-y)(x^2+y^2)$

$\qquad=(x-y)\{(x-y)^2+2xy\}$

$\qquad=3\times(3^2+2\times 2)=39$

130

$a^3+3a^2(b+c)+2a(b^2+c^2)+5abc$

$=a^3+3a^2b+3a^2c+2ab^2+2ac^2+5abc$

$=a(a^2+3ab+3ac+2b^2+2c^2+5bc)$

$=a\{a^2+3(b+c)a+(2b^2+5bc+2c^2)\}$

$=a\{a^2+3(b+c)a+(2b+c)(b+2c)\}$

$=a(a+2b+c)(a+b+2c)$

$=a\{(a+b+c)+b\}\{(a+b+c)+c\}$

$=abc=-2$

다른 풀이 $a^3+3a^2(b+c)+2a(b^2+c^2)+5abc$

$=a^3+3a^2(b+c)+2a(b^2+2bc+c^2)-4abc+5abc$

$=a^3+3a^2(b+c)+2a(b+c)^2+abc$ …… ㉠

이때 $a+b+c=0$에서 $b+c=-a$이고, $abc=-2$

이므로 이를 ㉠에 대입하면

(주어진 식)$=a^3+3a^2\times(-a)+2a\times(-a)^2-2$

$=a^3-3a^3+2a^3-2=-2$

1등급 비법

여러 문자를 포함한 식의 인수분해는 모든 항의 공통인수로 묶거나 차수가 가장 낮은 문자에 대하여 내림차순으로 정리하여 인수분해 한다.

131

$(x+y)^3=X$, $(x-y)^3=Y$로 놓으면

$\{(x+y)^3+(x-y)^3\}^2-\{(x+y)^3-(x-y)^3\}^2$

$=(X+Y)^2-(X-Y)^2$

$=\{(X+Y)+(X-Y)\}\{(X+Y)-(X-Y)\}$

$=2X\times2Y=4XY$

$=4(x+y)^3(x-y)^3=4\{(x+y)(x-y)\}^3$

$=4(x^2-y^2)^3=4\times2^3=32$

132

$30=x$로 놓으면

$27\times29\times31\times33+16$

$=(x-3)(x-1)(x+1)(x+3)+16$

$=(x+1)(x-1)(x+3)(x-3)+16$

$=(x^2-1)(x^2-9)+16$

$=x^4-10x^2+25=(x^2-5)^2$

$=(30^2-5)^2=(900-5)^2=895^2$

$\therefore\ N=895$

1등급 비법

수의 계산이 복잡한 경우에는 수를 한 문자로 치환하고 인수분해 한 후 수를 다시 대입하여 계산한다.

133

$2025=X$로 놓으면

$$\frac{2025^3-1}{2025^2-1}-\frac{1}{2026}-1=\frac{X^3-1}{X^2-1}-\frac{1}{X+1}-1$$

$$=\frac{(X-1)(X^2+X+1)}{(X+1)(X-1)}-\frac{1}{X+1}-1$$

$$=\frac{(X^2+X+1)-1-(X+1)}{X+1}$$

$$=\frac{X^2-1}{X+1}=\frac{(X-1)(X+1)}{X+1}$$

$=X-1=2024$

134

$21=x$로 놓으면

$21^3+21^2-21+2=x^3+x^2-x+2$

이고, 이 다항식은 $x+2$를 인수로

가지므로 조립제법을 이용하여 인수분해 하면

-2	1	1	-1	2
		-2	2	-2
	1	-1	1	0

$\therefore\ x^3+x^2-x+2=(x+2)(x^2-x+1)$

$=(21+2)(21^2-21+1)$

$=23\times421$

따라서 $a=23$, $b=421$ 또는 $a=421$, $b=23$이므로

$|a-b|=398$

135

$b^2-ab-c^2+ac=(c-b)a+b^2-c^2$

$=(c-b)a+(b+c)(b-c)$

$=(c-b)a-(c-b)(b+c)$

$=(c-b)\{a-(b+c)\}$

$=(c-b)(a-b-c)=0$

이때 a, b, c는 삼각형의 세 변의 길이이므로 $a<b+c$

즉, $a-b-c\neq0$이므로

$c-b=0\qquad\therefore\ b=c$

따라서 이 삼각형은 $b=c$인 이등변삼각형이다.

개념 보충

삼각형의 세 변의 길이가 a, b, c일 때

① $a=b$ 또는 $b=c$ 또는 $c=a$이면 이등변삼각형

② $a=b=c$이면 정삼각형

③ $c^2=a^2+b^2$이면 빗변의 길이가 c인 직각삼각형

136

$f(x)=x^3+7x^2+16x+12$라 하면 $f(-2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해 하면

-2	1	7	16	12
		-2	-10	-12
	1	5	6	0

$f(x)=(x+2)(x^2+5x+6)$

$=(x+2)(x+2)(x+3)$

$=(x+2)^2(x+3)$

(원기둥의 부피)$=\pi\times$(밑면의 반지름의 길이)$^2\times$(높이)

이므로

$(x^3+7x^2+16x+12)\pi=(x+2)^2(x+3)\pi$

에서 원기둥의 밑면의 반지름의 길이는 $x+2$, 높이는 $x+3$이다.

$\therefore$ (겉넓이)$=$(밑넓이)$\times2+$(옆넓이)

$=\pi(x+2)^2\times2+2\pi(x+2)(x+3)$

$=2(x+2)\{(x+2)+(x+3)\}\pi$

$=2(x+2)(2x+5)\pi$

따라서 $a=2$, $b=2$이므로

$ab=2\times2=4$

개념 보충

밑면의 반지름의 길이가 r, 높이가 h인 원기둥에 대하여

① (겉넓이)$=$(밑넓이)$\times2+$(옆넓이)$=2\pi r^2+2\pi rh$

② (부피)$=$(밑넓이)$\times$(높이)$=\pi r^2h$

내신 적중 서술형

37쪽

137 3
138 (1) $(x^2-n)\{x^2-(290-n)\}$ (2) 풀이 참조 (3) 580
139 $(x+2y-1)(x+2y+3)$ **140** 4

137

$x^2+2x=X$로 놓으면

$$\begin{aligned}(x^2+2x)^2-2x^2-4x-3&=(x^2+2x)^2-2(x^2+2x)-3\\&=X^2-2X-3\\&=(X+1)(X-3) &\cdots\cdots ㉮\\&=(x^2+2x+1)(x^2+2x-3)\\&=(x+1)^2(x-1)(x+3) &\cdots\cdots ㉯\end{aligned}$$

따라서 $a=1$, $b=-1$, $c=3$ 또는 $a=1$, $b=3$, $c=-1$이므로

$a+b+c=3$ ······ ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ 공통인수를 X로 치환하여 인수분해 하기	40 %
㉯ 주어진 식을 인수분해 하기	40 %
㉰ $a+b+c$의 값 구하기	20 %

다른 풀이

$$\begin{aligned}P(x)&=(x^2+2x)^2-2x^2-4x-3\\&=x^4+4x^3+2x^2-4x-3\end{aligned}$$

이라 하면

$P(-1)=1-4+2+4-3=0$,

$P(1)=1+4+2-4-3=0$ ······ ㉮

이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해 하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & 4 & 2 & -4 & -3\\ & & -1 & -3 & 1 & 3\\ \hline 1 & 1 & 3 & -1 & -3 & \boxed{0}\\ & & 1 & 4 & 3 & \\ \hline & 1 & 4 & 3 & \boxed{0} & \end{array}$$

$$\begin{aligned}P(x)&=(x+1)(x-1)(x^2+4x+3)\\&=(x+1)^2(x-1)(x+3) &\cdots\cdots ㉯\end{aligned}$$

따라서 $a=1$, $b=-1$, $c=3$ 또는 $a=1$, $b=3$, $c=-1$이므로

$a+b+c=3$ ······ ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ 주어진 식의 인수 찾기	30 %
㉯ 조립제법과 인수정리를 이용하여 주어진 식을 인수분해 하기	50 %
㉰ $a+b+c$의 값 구하기	20 %

138

(1) $x^2=X$로 놓으면

$$\begin{aligned}x^4-290x^2-n^2+290n&=X^2-290X-n^2+290n\\&=X^2-290X-n(n-290)\\&=(X-n)\{X-(290-n)\}\\&=(x^2-n)\{x^2-(290-n)\} &\cdots\cdots ㉮\end{aligned}$$

(2) 주어진 다항식이 계수와 상수항이 모두 정수인 네 개의 일차식의 곱으로 인수분해 되려면 두 수 n, $290-n$이 제곱수이고 $290-n>0$이어야 하므로 자연수 n은 $0<n<290$인 제곱수이어야 한다. ······ ㉯

(3) 조건을 만족시키는 자연수 n의 값은 1, 121, 169, 289이므로 모든 자연수 n의 값의 합은

$1+121+169+289=580$ ······ ㉰

	채점 기준	배점 비율
(1)	㉮ 주어진 식을 두 이차식의 곱으로 인수분해 하기	40 %
(2)	㉯ 자연수 n의 조건 구하기	40 %
(3)	㉰ 조건을 만족시키는 모든 자연수 n의 값의 합 구하기	20 %

139

$x^2+4xy+4y^2+2x+4y-3$

$=x^2+(4y+2)x+(4y^2+4y-3)$ ······ ㉮

$=x^2+(4y+2)x+(2y-1)(2y+3)$

$=(x+2y-1)(x+2y+3)$ ······ ㉯

채점 기준	배점 비율
㉮ 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리하기	40 %
㉯ 주어진 식을 인수분해 하기	60 %

참고 y에 대하여 내림차순으로 정리한 후 인수분해 해도 그 결과는 같다.

다른 풀이

$x+2y=X$라 하면

$x^2+4xy+4y^2+2x+4y-3$

$=(x+2y)^2+2(x+2y)-3$

$=X^2+2X-3$ ······ ㉮

$=(X-1)(X+3)$

$=(x+2y-1)(x+2y+3)$ ······ ㉯

채점 기준	배점 비율
㉮ $x+2y=X$로 놓고 주어진 식을 치환하기	50 %
㉯ 주어진 식을 인수분해 하기	50 %

140

조건 (다)의 $b^3+a^2b+a^2c+b^2c=c^3+bc^2$에서

$b^3-c^3+a^2b+a^2c-bc^2+b^2c=0$

a에 대하여 내림차순으로 정리하면

$(b+c)a^2+b^3-c^3-bc^2+b^2c=0$

$(b+c)a^2+b^2(b+c)-c^2(b+c)=0$

$(b+c)(a^2+b^2-c^2)=0$ ······ ㉮

$b+c>0$이므로 $a^2+b^2-c^2=0$ $\quad\therefore a^2+b^2=c^2$

따라서 삼각형 ABC는 빗변의 길이가 c인 직각삼각형이다.

······ ㉯

조건 (나)에서 $c=3$이므로

$a^2+b^2=c^2=9$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}ab&=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\{(a+b)^2-(a^2+b^2)\}\\&=\frac{1}{4}\times(5^2-9)=4\ (\because \text{조건 (가)})\end{aligned}$$ ······ ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ 조건 (대)의 $b^3-c^3+a^2b+a^2c-bc^2+b^2c=0$의 좌변을 인수분해 하기	50 %
㉯ 삼각형 ABC의 모양 파악하기	20 %
㉰ 삼각형 ABC의 넓이 구하기	30 %

1등급 실력 완성

● 38쪽 ~ 39쪽

141 ④ **142** ⑤ **143** 6 **144** ② **145** ⑤
146 20 **147** 5 **148** 1000000 **149** 2
150 $\sqrt{15}$

141

공식을 이용한 인수분해

전략 $(x+a)(x-b)$를 전개하여 a, b 사이의 관계식을 구하고, 상수항 꼴을 찾는다.

풀이 $(x+a)(x-b)=x^2+(a-b)x-ab$이고, 주어진 100개의 다항식은 x의 계수가 모두 1이므로

$a-b=1 \qquad \therefore a=b+1$

$\therefore ab=b(b+1)$

이때 주어진 100개의 다항식 중에서 상수항이 $-b(b+1)$ 꼴인 경우는

$-1\times2,\ -2\times3,\ -3\times4,\ \cdots,\ -9\times10$

의 9가지이다.

따라서 $(x+a)(x-b)$ 꼴로 인수분해 되는 다항식은

$x^2+x-2,\ x^2+x-6,\ x^2+x-12,\ \cdots,\ x^2+x-90$

의 9개이다.

1등급 비법

$(x+a)(x-b)=x^2+(a-b)x-ab$와 x^2+x-k
($k=1, 2, 3, \cdots, 100$)의 계수를 비교하여 상수항이 $-b(b+1)$,
즉 $-$(연속한 두 자연수의 곱) 꼴로 나타내어지는 것을 찾는다.

142

공식을 이용한 인수분해

전략 $\{f(x)\}^3+\{g(x)\}^3$을 인수분해 하여 $h(x)$의 식을 세운 후 나머지정리를 이용한다.

풀이 좌변을 인수분해 하면

$\{f(x)\}^3+\{g(x)\}^3$

$=\{f(x)+g(x)\}[\{f(x)\}^2-f(x)g(x)+\{g(x)\}^2]$

이때

$f(x)+g(x)=(x^2+x)+(x^2-2x-1)=2x^2-x-1$

이므로

(좌변)$=(2x^2-x-1)[\{f(x)\}^2-f(x)g(x)+\{g(x)\}^2]$

$\therefore h(x)=\{f(x)\}^2-f(x)g(x)+\{g(x)\}^2$

$h(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는 $h(1)$이고,

$f(1)=2,\ g(1)=-2$이므로

$h(1)=\{f(1)\}^2-f(1)g(1)+\{g(1)\}^2$

$\quad=2^2-2\times(-2)+(-2)^2=12$

143

공통부분이 있는 식의 인수분해

전략 $x^2+kx=X$로 놓고 인수분해 하여 주어진 조건을 만족시키는 k의 값을 구한다.

풀이 $x^2+kx=X$로 놓으면

$(x^2+kx+7)(x^2+kx+10)+2$

$=(X+7)(X+10)+2$

$=X^2+17X+72$

$=(X+8)(X+9)$

$=(x^2+kx+8)(x^2+kx+9)$

이 식이 계수와 상수항이 모두 자연수인 네 개의 일차식의 곱으로 인수분해 되려면

(i) $x^2+kx+8=(x+1)(x+8)$에서 $k=9$ 또는

$\quad x^2+kx+8=(x+2)(x+4)$에서 $k=6$

(ii) $x^2+kx+9=(x+1)(x+9)$에서 $k=10$ 또는

$\quad x^2+kx+9=(x+3)^2$에서 $k=6$

(i), (ii)에서 $k=6$이다.

참고 $x^2+kx+7=X$로 치환하여 인수분해 해도 그 결과는 같다.

144

공통부분이 있는 식의 인수분해

전략 각 항을 x^2으로 묶고, $x+\frac{1}{x}$을 치환하여 문제를 해결한다.

풀이 $x^4-4x^3+5x^2-4x+1$

$=x^2\left(x^2-4x+5-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$

$=x^2\left\{\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-4\left(x+\frac{1}{x}\right)+5\right\}$

$=x^2\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4\left(x+\frac{1}{x}\right)+3\right\}$

$=x^2\left(x+\frac{1}{x}-1\right)\left(x+\frac{1}{x}-3\right)$

$=(x^2-x+1)(x^2-3x+1)$

따라서 $a=-1,\ b=1,\ c=-3,\ d=1$ 또는 $a=-3,\ b=1,\ c=-1,\ d=1$이므로

$a+b+c+d=-2$

1등급 비법

계수가 대칭인 사차식 $Ax^4+Bx^3+Cx^2+Bx+A$(A, B, C는 상수)의 인수분해

(i) 각 항을 x^2으로 묶는다.

(ii) $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2$임을 이용하여 $x+\frac{1}{x}$ 또는 $x-\frac{1}{x}$에 대한 내림차순으로 식을 정리한다.

(iii) $x+\frac{1}{x}$ 또는 $x-\frac{1}{x}$을 치환하여 인수분해 한다.

(iv) 다시 x^2을 곱하여 식을 정리한다.

145

x^4+ax^2+b 꼴의 인수분해

전략 연산 $*$의 정의를 이용하여 주어진 식을 나타낸 후 인수분해 한다.

풀이 $A*B=(A+B)^2-AB$이므로

$(x+2)^2*(x-1)^2=\{(x+2)^2+(x-1)^2\}^2-(x+2)^2(x-1)^2$

에서

$x+2=X$, $x-1=Y$로 놓으면

$\{(x+2)^2+(x-1)^2\}^2-(x+2)^2(x-1)^2$

$=(X^2+Y^2)^2-X^2Y^2$

$=(X^2+Y^2)^2-(XY)^2$

$=(X^2+XY+Y^2)(X^2-XY+Y^2)$

$=\{(x+2)^2+(x+2)(x-1)+(x-1)^2\}$
$\times\{(x+2)^2-(x+2)(x-1)+(x-1)^2\}$

$=(x^2+4x+4+x^2+x-2+x^2-2x+1)$
$\times(x^2+4x+4-x^2-x+2+x^2-2x+1)$

$=(3x^2+3x+3)(x^2+x+7)$

$=3(x^2+x+1)(x^2+x+7)$

146

여러 개의 문자를 포함한 식의 인수분해 + 인수분해의 활용; 식의 값

전략 주어진 식을 b에 대하여 내림차순으로 정리하여 인수분해 한 후 147을 소인수분해 한 식과 비교한다.

풀이 주어진 식을 b에 대하여 내림차순으로 정리하면

$a^2b+6ab+a^2+6a+9b+9=(a^2+6a+9)b+a^2+6a+9$

$=(a+3)^2b+(a+3)^2$

$=(a+3)^2(b+1)$

이때 $147=3\times7^2$이므로

$(a+3)^2(b+1)=3\times7^2$

a, b는 자연수이므로

$a+3=7$, $b+1=3$

따라서 $a=4$, $b=2$이므로

$a^2+b^2=4^2+2^2=20$

147

인수정리를 이용한 인수분해

전략 $A^3-B^3=(A-B)^3+3AB(A-B)$임을 이용한다.

풀이 $\{P(x)\}^3-\{Q(x)\}^3$

$=\{P(x)-Q(x)\}^3+3P(x)Q(x)\{P(x)-Q(x)\}$

$=1+3P(x)Q(x)$ ($\because$ 조건 (가))

조건 (나)에서

$1+3P(x)Q(x)=3x^4+6x^3-6x^2-9x+7$이므로

$3P(x)Q(x)=3x^4+6x^3-6x^2-9x+6$

$\therefore P(x)Q(x)=x^4+2x^3-2x^2-3x+2$

이때 $P(1)Q(1)=1+2-2-3+2=0$,

$P(-2)Q(-2)=16-16-8+6+2=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)Q(x)$를 인수분해 하면

1	1	2	−2	−3	2
		1	3	1	−2
−2	1	3	1	−2	0
		−2	−2	2	
	1	1	−1	0	

$P(x)Q(x)=(x-1)(x+2)(x^2+x-1)$

$=(x^2+x-2)(x^2+x-1)$

조건 (가)에서 $P(x)-Q(x)=1$이므로

$P(x)=x^2+x-1$, $Q(x)=x^2+x-2$

$\therefore P(2)+Q(1)=5+0=5$

148

인수분해의 활용; 수의 계산

전략 $103=X$로 놓고 인수분해를 이용하여 문제를 해결한다.

풀이 $103=X$라 하면

$103^3-9\times101^2-9\times102$

$=X^3-9(X-2)^2-9(X-1)$

$=X^3-9(X^2-4X+4)-9X+9$

$=X^3-9X^2+27X-27$

$=(X-3)^3=100^3=1000000$

다른 풀이 $100=X$라 하면

$103^3-9\times101^2-9\times102$

$=(X+3)^3-9(X+1)^2-9(X+2)$

$=X^3+9X^2+27X+27-9(X^2+2X+1)-9(X+2)$

$=X^3=100^3=1000000$

149

인수분해의 활용; 도형

전략 네 상자의 부피를 각각 구한 후 주어진 조건을 이용하여 식을 세운다.

풀이 상자 A의 부피는 a^3, 상자 B의 부피는 b^3, 상자 C의 부피는 2^3, 상자 D의 부피는 ab이므로

$a^3+b^3+2^3=6ab$

$\therefore a^3+b^3+2^3-6ab=0$

위의 식의 좌변을 인수분해 하면

$a^3+b^3+2^3-3\times a\times b\times2$

$=(a+b+2)(a^2+b^2+2^2-ab-2b-2a)$

$=\frac{1}{2}(a+b+2)\{(a-b)^2+(b-2)^2+(a-2)^2\}=0$

이때 $a>0$, $b>0$이므로 $a+b+2>0$

$\therefore (a-b)^2+(b-2)^2+(a-2)^2=0$

따라서 $a=2$, $b=2$이므로 상자 A의 한 모서리의 길이는 2이다.

1등급 비법

인수분해 공식

$a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$=\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)\}$

$=\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

150

인수분해의 활용; 도형

전략 $a^2=X$, $b^2=Y$, $9=Z$로 놓고 인수분해한 후 삼각형 ABC의 세 변의 길이 사이의 관계를 알아낸다.

풀이 $a^2=X$, $b^2=Y$, $9=Z$로 놓으면

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식})&=X^2+Y^2+Z^2+2XY-2ZX-2YZ\\&=(X+Y-Z)^2\\&=(a^2+b^2-9)^2=0\end{aligned}$$

이므로 $a^2+b^2-9=0$

$\therefore a^2+b^2=9$ …… ㉠

즉, 삼각형 ABC는 빗변의 길이가 3인 직각삼각형이다.

이때 삼각형 ABC의 넓이가 $\frac{3}{2}$이므로

$\frac{1}{2}ab=\frac{3}{2}$ $\quad\therefore ab=3$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=9+2\times3=15$

$\therefore a+b=\sqrt{15}$ ($\because a>0$, $b>0$)

도전 1등급 최고난도

● 40쪽

151 -3 **152** 288 **153** ①

151

인수분해 공식

(1단계) 주어진 등식의 좌변을 정리한다.

$x^2y^2z^2-2xyz+x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx+1$

$=(x^2y^2z^2-2xyz+1)+(x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx)$

$=(xyz-1)^2+(x+y+z)^2=0$

(2단계) 실수의 성질을 이용하여 xyz, $x+y+z$의 값을 구한다.

이때 $xyz-1$, $x+y+z$는 실수이므로

$xyz=1$, $x+y+z=0$ …… ㉠

(3단계) $(x+y+z)^3-(x^3+y^3+z^3)$의 값을 구한다.

㉠에서 $x+y+z=0$이므로

$x^3+y^3+z^3-3xyz$

$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=0$

$\therefore x^3+y^3+z^3=3xyz=3$ ($\because$ ㉠)

$$\begin{aligned}\therefore (x+y+z)^3-(x^3+y^3+z^3)&=0-(x^3+y^3+z^3)\\&=-3\end{aligned}$$

개념 보충

실수의 성질

실수 a, b에 대하여

① $a^2\geq0$

② $a^2=0$이면 $a=0$

③ $a^2+b^2=0$이면 $a=0$, $b=0$

152

x^4+ax^2+b 꼴의 인수분해

(1단계) a와 b 사이의 관계식을 구한다.

$x^4+(k^2-13)x^2-12$의 x^3의 계수는 0이므로

$(x+a)(x+b)(x^2+c)$

$=\{x^2+(a+b)x+ab\}(x^2+c)$

에서 $a+b=0$

$\therefore b=-a$

(2단계) a^2, c의 값을 구한다.

$$\begin{aligned}x^4+(k^2-13)x^2-12&=(x+a)(x+b)(x^2+c)\\&=(x+a)(x-a)(x^2+c)\\&=(x^2-a^2)(x^2+c)\\&=x^4+(-a^2+c)x^2-a^2c\end{aligned}$$

$k^2-13=-a^2+c$ …… ㉠

$a^2c=12$ …… ㉡

㉡에서 a, c는 정수이므로

$a^2=1$, $c=12$ 또는 $a^2=4$, $c=3$

(3단계) k의 값을 구하고, 모든 실수 k의 값의 곱을 구한다.

(i) $a^2=1$, $c=12$일 때,

$k^2=-a^2+c+13=-1+12+13=24$

$\therefore k=\pm2\sqrt{6}$

(ii) $a^2=4$, $c=3$일 때,

$k^2=-a^2+c+13=-4+3+13=12$

$\therefore k=\pm2\sqrt{3}$

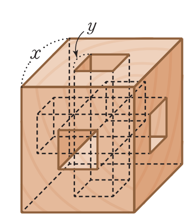
(i), (ii)에서 모든 실수 k의 값의 곱은

$2\sqrt{6}\times(-2\sqrt{6})\times2\sqrt{3}\times(-2\sqrt{3})=288$

153

인수분해의 활용; 도형

(1단계) 중복으로 계산되는 입체의 부피에 주의하여 구하는 입체의 부피를 다항식으로 나타낸다.



입체의 부피를 구하려면 한 모서리의 길이가 x인 정육면체의 부피에서 밑면이 한 변의 길이가 y인 정사각형이고 높이가 x인 세 정사각기둥의 부피를 뺀 다음 세 정사각기둥이 겹치는 부분의 부피가 세 번 계산되었으므로 중복하여 뺀 부피는 더해야 한다.

세 직육면체가 겹치는 부분의 부피는 한 모서리의 길이가 y인 정육면체의 부피와 같으므로 구하는 입체의 부피는

$x^3-3xy^2+2y^3$

(2단계) 구한 입체의 부피를 인수분해 하여 답을 구한다.

$x^3-3xy^2+2y^3$을 x에 대한 내림차순으로 정리하면 $x^3-3y^2x+2y^3$이고 조립제법을 이용하여 인수분해 하면 오른쪽과 같다.

y	1	0	$-3y^2$	$2y^3$
		y	y^2	$-2y^3$
y	1	y	$-2y^2$	0
		y	$2y^2$	
	1	$2y$	0	

$\therefore x^3-3xy^2+2y^3=(x-y)^2(x+2y)$

Ⅱ 방정식과 부등식

04 복소수

유형 분석 기출

● 43쪽 ~ 47쪽

154 ④	155 4	156 ④	157 ②	158 1
159 -5	160 ②	161 ①	162 ③	163 ③
164 ②	165 ④	166 ⑤	167 ②	
168 $\frac{1}{4}+\frac{3}{4}i$		169 $3-2i$ 또는 $3+2i$		170 ③
171 -2	172 ②	173 ④	174 ⑤	175 ③
176 -2	177 25	178 3	179 ⑤	180 ①
181 i	182 ①			

154

① 실수는 복소수이다.
② 2의 허수부분은 0이다.
③ 허수에서는 대소 관계가 존재하지 않는다.
⑤ $a\neq0$, $b=0$이면 $a+bi$는 실수이다.

155

허수인 복소수는 $1+i$, $3-2i$, $\sqrt{5}i$이고, $1+i$의 실수부분은 1, $3-2i$의 실수부분은 3, $\sqrt{5}i$의 실수부분은 0이다.
따라서 실수부분의 합은
$1+3+0=4$

156

$$\begin{aligned}1+2i+i(1-i)&=1+2i+i-i^2\\&=1+2i+i+1\\&=2+3i\end{aligned}$$

157

$$\begin{aligned}(1+2i)(3-4i)&=3-4i+6i-8i^2\\&=3-4i+6i+8\\&=11+2i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1-3i}{1+i}&=\frac{(1-3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}\\&=\frac{1-i-3i+3i^2}{1-i^2}\\&=\frac{1-4i-3}{1-(-1)}\\&=\frac{-2-4i}{2}\\&=-1-2i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore (1+2i)(3-4i)+\frac{1-3i}{1+i}&=(11+2i)+(-1-2i)\\&=10\end{aligned}$$

따라서 $a=10$, $b=0$이므로
$a+b=10+0=10$

158

z^2이 음의 실수가 되려면 z는 순허수이어야 한다.
즉, $z=a(a-1)+a(a+1)i$에 대하여
$a(a-1)=0$, $a(a+1)\neq0$
(ⅰ) $a(a-1)=0$에서 $a=0$ 또는 $a=1$
(ⅱ) $a(a+1)\neq0$에서 $a\neq0$이고 $a\neq-1$
(ⅰ), (ⅱ)에서 $a=1$

개념 보충

복소수 z에 대하여
① z^2이 양의 실수 ⇨ z는 0이 아닌 실수
② z^2이 음의 실수 ⇨ z는 순허수

오답 피하기 복소수의 허수부분을 말할 때
① 부호를 포함한다.
② 허수단위 i를 포함하지 않는다.
즉, 여기서 허수부분은 $a(a+1)i$가 아니라 $a(a+1)$이다.

159

$x=1+\sqrt{2}i$에서 $x-1=\sqrt{2}i$
이 식의 양변을 제곱하면
$x^2-2x+1=-2 \qquad \therefore x^2-2x+3=0$

$$\begin{aligned}\therefore 3x^2-6x+4&=3(x^2-2x+3)-5\\&=3\times0-5\\&=-5\end{aligned}$$

1등급 비법

$x=a+bi$ (a, b는 실수)를 $x-a=bi$로 변형한 후 양변을 제곱하면 식의 값이 0이 되는 x에 대한 이차식을 얻을 수 있다.

160

$$\begin{aligned}z_1+z_2&=(1+2i)+(-2+i)\\&=-1+3i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z_1z_2&=(1+2i)(-2+i)\\&=-2+i-4i+2i^2\\&=-2+i-4i-2\\&=-4-3i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore z_1^2z_2+z_1z_2^2&=z_1z_2(z_1+z_2)\\&=(-4-3i)(-1+3i)\\&=4-12i+3i-9i^2\\&=4-12i+3i+9\\&=13-9i\end{aligned}$$

1등급 비법

z_1+z_2, z_1z_2의 값을 구하여 주어진 식을 z_1+z_2, z_1z_2를 포함한 식으로 변형한 후 대입한다.

161

$\alpha+\beta=(1+2i)+(1-2i)=2$

$\alpha\beta=(1+2i)(1-2i)=1-4i^2=1+4=5$

$\therefore\ \alpha^3+\beta^3-2\alpha^2\beta-2\alpha\beta^2=(\alpha+\beta)^3-5\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=2^3-5\times5\times2$

$=-42$

162

$z=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 이므로

$z^2=\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2$

$=\dfrac{-2-2\sqrt{3}i}{4}$

$=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

$z^3=z^2\times z$

$=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}\times\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

$=\dfrac{1-(-3)}{4}=1$

$\therefore\ 4(z+z^2+z^3)=4\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}+\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}+1\right)$

$=4\times0=0$

다른 풀이 $z=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 에서

$2z=-1+\sqrt{3}i$, $2z+1=\sqrt{3}i$

이 식의 양변을 제곱하면

$4z^2+4z+1=-3$ $\quad\therefore\ z^2+z+1=0$

$\therefore\ 4(z+z^2+z^3)=4z(1+z+z^2)=4z\times0=0$

163

$(2a+bi)-(3b+ai)=1-i$ 에서

$(2a-3b)+(-a+b)i=1-i$

a, b는 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$2a-3b=1$ …… ㉠

$-a+b=-1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=1$

$\therefore\ a+b=2+1=3$

164

$3(x+2yi)-2(xi+y)=2x+y-5+2(y-2x)i$에서

$(3x-2y)+(6y-2x)i=2x+y-5+2(y-2x)i$

x, y는 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$3x-2y=2x+y-5$에서 $x-3y=-5$ …… ㉠

$6y-2x=2(y-2x)$에서 $6y-2x=2y-4x$

$2x+4y=0$, 즉 $x+2y=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$x=-2$, $y=1$

$\therefore\ xy=-2\times1=-2$

165

$f(3+i)=a(3+i)^2+b(3+i)+c$

$=a(8+6i)+b(3+i)+c$

$=8a+6ai+3b+bi+c$

$=(8a+3b+c)+(6a+b)i$

$=1-i$

a, b, c는 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$8a+3b+c=1$, $6a+b=-1$ …… ㉠

$\therefore\ f(3-i)=a(3-i)^2+b(3-i)+c$

$=a(8-6i)+b(3-i)+c$

$=8a-6ai+3b-bi+c$

$=(8a+3b+c)-(6a+b)i$

$=1-(-i)$ ($\because$ ㉠)

$=1+i$

166

$z=2+i$에서 $\overline{z}=2-i$

$\therefore\ z+i\overline{z}=(2+i)+i(2-i)$

$=(2+i)+(2i+1)$

$=3+3i$

167

$x(2-i)-2y(-1+3i)=\overline{2-4i}$에서

$(2x+2y)-(x+6y)i=2+4i$

x, y는 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$2x+2y=2$에서 $x+y=1$ …… ㉠

$x+6y=-4$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=2$, $y=-1$

$\therefore\ x^2+y^2=4+1=5$

168

$z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\overline{z}=a-bi$

$(1+2i)z+5(1-i\overline{z})=(1+2i)(a+bi)+5\{1-i(a-bi)\}$

$=a+bi+2ai-2b+5(1-ai-b)$

$=a+bi+2ai-2b+5-5ai-5b$

$=(a-7b+5)+(-3a+b)i=0$

a, b는 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a-7b+5=0$에서

$a-7b=-5$ …… ㉠

$-3a+b=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\dfrac{1}{4}$, $b=\dfrac{3}{4}$

따라서 구하는 복소수 z는

$z=\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}i$

1등급 비법

복소수 z에 대한 등식이 주어지면 $z=a+bi$ (a, b는 실수)로 놓고,
$\overline{z}=a-bi$ 임을 이용하여 주어진 등식에 대입한 후 a, b의 값을 구한다.

169

$z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$

$z+\bar{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a=6$

$\therefore a=3$

$z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2=13$

$a=3$을 $a^2+b^2=13$에 대입하면

$9+b^2=13$, $b^2=4$

$\therefore b=-2$ 또는 $b=2$

따라서 구하는 복소수 z는

$z=3-2i$ 또는 $z=3+2i$

170

$z_1+z_2=(4+3i)+(-1+2i)=3+5i$이므로

$\overline{z_1+z_2}=3-5i$

$$\begin{aligned}\therefore z_1\bar{z_1}+\bar{z_1}z_2+z_1\bar{z_2}+z_2\bar{z_2}&=(z_1+z_2)\bar{z_1}+(z_1+z_2)\bar{z_2}\\&=(z_1+z_2)(\bar{z_1}+\bar{z_2})\\&=(z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2})\\&=(3+5i)(3-5i)\\&=9-(-25)=34\end{aligned}$$

개념 보충

켤레복소수의 성질

두 복소수 α, β의 켤레복소수를 각각 $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$라 할 때,

① $\overline{(\bar{\alpha})}=\alpha$ ② $\overline{\alpha\pm\beta}=\bar{\alpha}\pm\bar{\beta}$ (복부호 동순)

③ $\overline{\alpha\beta}=\bar{\alpha}\times\bar{\beta}$ ④ $\overline{\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)}=\dfrac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}$ (단, $\beta\neq0$)

171

$z+\bar{z}=0$이므로 z의 실수부분은 0이고

$z\neq0$이므로 순허수이어야 한다.

즉, $z=(2x^2-8)+(x^2-3x+2)i$에 대하여

$2x^2-8=0$, $x^2-3x+2\neq0$

(i) $2x^2-8=0$에서 $2(x+2)(x-2)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=2$

(ii) $x^2-3x+2\neq0$에서 $(x-1)(x-2)\neq0$

$\therefore x\neq1$이고 $x\neq2$

(i), (ii)에서 $x=-2$

개념 보충

복소수 z의 켤레복소수를 $\bar{z}$라 할 때,

① $z=\bar{z}$이면 z의 허수부분은 0이다.

⇨ z는 실수이다.

② $z+\bar{z}=0$이면 z의 실수부분은 0이다.

⇨ z는 0 또는 순허수이다.

172

$\bar{z}=a-bi$

ㄱ. $z+\bar{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a$

이때 a는 실수이므로 $2a$도 실수이다.

따라서 $z+\bar{z}$는 실수이다. (참)

ㄴ. $b=0$이면 $z=a$, $\bar{z}=a$

$\therefore z-\bar{z}=a-a=0$

따라서 $b=0$이면 $z-\bar{z}$는 실수이다. (거짓)

ㄷ. $z=0$이면 $z\bar{z}=0$이므로 양의 실수가 아니다. (거짓)

ㄹ. $z=-\bar{z}$이면

$a+bi=-(a-bi)$에서 $a+bi=-a+bi$

a, b는 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a=-a$ $\therefore a=0$

따라서 $z=bi$이고 $b\neq0$이므로 z는 순허수이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다.

개념 보충

복소수 z의 켤레복소수를 $\bar{z}$라 할 때,

① $z+\bar{z}=$(실수) ② $z\bar{z}=$(실수)

③ $z=\bar{z}$ ⇨ z는 실수 ④ $z=-\bar{z}$ ⇨ z는 0 또는 순허수

173

$\bar{z_1}\,\bar{z_2}=\overline{z_1z_2}=\overline{1-2i}=1+2i$

$\bar{z_1}-\bar{z_2}=\overline{z_1-z_2}=\overline{4+3i}=4-3i$

$$\begin{aligned}\therefore (\bar{z_1}-1)(\bar{z_2}+1)&=\bar{z_1}\,\bar{z_2}+(\bar{z_1}-\bar{z_2})-1\\&=(1+2i)+(4-3i)-1\\&=4-i\end{aligned}$$

174

$1-2i+3i^2-4i^3+\cdots+31i^{30}-32i^{31}$

$=(1-2i+3i^2-4i^3)+(5i^4-6i^5+7i^6-8i^7)$

$+\cdots+(29i^{28}-30i^{29}+31i^{30}-32i^{31})$

$=(1-2i-3+4i)+(5-6i-7+8i)$

$+\cdots+(29-30i-31+32i)$

$=(-2+2i)+(-2+2i)+\cdots+(-2+2i)$

$=8(-2+2i)$

$=-16+16i$

따라서 $a=-16$, $b=16$이므로

$b-a=16-(-16)=32$

1등급 비법

순허수 $ai(a\neq0)$의 거듭제곱의 합을 구하는 문제는 $(ai)^n=a^n$이 되는 자연수 n에 대하여 n개씩 묶어서 계산하는 것이 일반적이다. 예를 들어 $i^4=1$이므로 i의 거듭제곱을 더하는 문제는 4개씩 묶어서 계산한다.

175

자연수 k에 대하여

$i^{4k-3}=i$, $i^{4k-2}=-1$, $i^{4k-1}=-i$, $i^{4k}=1$

$\therefore 1+\dfrac{1}{i}+\dfrac{1}{i^2}+\dfrac{1}{i^3}+\cdots+\dfrac{1}{i^{50}}$

$=\left(1+\dfrac{1}{i}-1-\dfrac{1}{i}\right)+\left(1+\dfrac{1}{i}-1-\dfrac{1}{i}\right)$

$+\cdots+\left(1+\dfrac{1}{i}-1-\dfrac{1}{i}\right)+1+\dfrac{1}{i}-1$

$=\dfrac{1}{i}=-i$

176

$\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$

$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$

$\therefore f\left(\frac{1-i}{1+i}\right)+f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$

$=f(-i)+f(i)$

$=\{(-i)^{999}-1\}+(i^{999}-1)$

$=[\{(-i)^4\}^{249}\times(-i)^3-1]+\{(i^4)^{249}\times i^3-1\}$

$=\{(-i)^3-1\}+(i^3-1)$

$=(i-1)+(-i-1)$

$=-2$

1등급 비법

다음은 복소수의 거듭제곱을 포함한 식의 값을 구하는 문제에서 자주 등장하는 꼴이다.

① $(1+i)^2=2i,\ (1-i)^2=-2i$ ② $(1+i)(1-i)=2$

③ $\frac{1+i}{1-i}=i,\ \frac{1-i}{1+i}=-i$ ④ $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2=i,\ \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2=-i$

177

$(1-i)^{2n}=\{(1-i)^2\}^n=(-2i)^n=2^n(-i)^n$

이때 $2^n(-i)^n=2^n i$이므로 $(-i)^n=i$

즉, 조건을 만족시키는 자연수 n은 $n=4k+3$(k는 음이 아닌 정수)이어야 한다.

n은 100 이하의 자연수이므로

$1\le 4k+3\le 100$

$\therefore k=0, 1, 2, \cdots, 24$

즉, $n=3, 7, 11, \cdots, 99$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 n의 개수는 25이다.

178

$z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$에서

$z^2=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$z^3=z^2\times z=\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-1$

$z^6=(z^3)^2=(-1)^2=1$

이므로

$z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6=z+z^2+z^3+z^3\times z+z^3\times z^2+z^6$

$=z+z^2+(-1)+(-z)+(-z^2)+1$

$=0$

$\therefore z+z^2+z^3+\cdots+z^{2020}$

$=(z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6)+z^6(z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6)$

$+\cdots+z^{2010}(z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6)$

$+z^{2017}+z^{2018}+z^{2019}+z^{2020}$

$=z^{2017}+z^{2018}+z^{2019}+z^{2020}$

$=(z^6)^{336}\times z+(z^6)^{336}\times z^2+(z^6)^{336}\times z^3+(z^6)^{336}\times z^4$

$=z+z^2+z^3+z^4=z+z^2+(-1)+(-z)$

$=z^2-1=\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)-1$

$=-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

따라서 $a=-\frac{3}{2}$, $b=-\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로

$a^2+b^2=\frac{9}{4}+\frac{3}{4}=3$

179

$\sqrt{-8}\sqrt{-8}+\sqrt{12}\sqrt{-12}+\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{-2}}$

$=2\sqrt{2}i\times 2\sqrt{2}i+2\sqrt{3}\times 2\sqrt{3}i+\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}i}$

$=-8+12i-4i$

$=-8+8i$

따라서 $a=-8$, $b=8$이므로

$b-a=8-(-8)=16$

180

0이 아닌 두 실수 a, b에 대하여 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$ 이므로

$a<0$, $b<0$

$\therefore \sqrt{(a+b)^2}+3|a|-\sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}$

$=|a+b|+3|a|-|a|+|b|$

$=|a+b|+2|a|+|b|$

$=-(a+b)-2a-b$

$=-3a-2b$

개념 보충

두 실수 a, b에 대하여

① $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$ ⇨ $a<0, b<0$ 또는 $a=0$ 또는 $b=0$

② $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}$ ⇨ $a>0, b<0$ 또는 $a=0, b\neq 0$

181

$0<x<1$에서 $x-1<0$, $1-x>0$

$\therefore \sqrt{\frac{1-x}{x-1}}-\sqrt{x-1}\sqrt{x-1}-\sqrt{(1-x)^2}$

$=\sqrt{-1}+\sqrt{(x-1)^2}-|1-x|$

$=i+|x-1|-(1-x)$

$=i-(x-1)+x-1$

$=i$

182

0이 아닌 두 실수 x, y에 대하여

$\frac{1}{\sqrt{xy}}=-\sqrt{\frac{1}{xy}}$이므로

$xy<0$

$(x^2+x)+(y-3)i=2+5i$에서 x, y는 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x^2+x=2$, $y-3=5$

$x^2+x=2$에서 $x^2+x-2=0$

$(x+2)(x-1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$

$y-3=5$에서 $y=8$

이때 $xy<0$이므로 $x=-2$, $y=8$

$\therefore x+y=-2+8=6$

내신 적중 서술형

● 48쪽

183 (1) $a=-2$, $b=2$ (2) $2-i$ **184** 5 **185** 3

186 6

183

(1) $z=1-i$에서 $z-1=-i$이므로

$(z-1)^2=(-i)^2$, $z^2-2z+2=0$

$\therefore a=-2$, $b=2$ …… ㉮

(2) 다항식 z^3-2z^2+3z+1을 z^2-2z+2로 나누면 몫은 z, 나머지는 $z+1$이므로

z^3-2z^2+3z+1

$=(z^2-2z+2)z+z+1$ …… ㉯

$=0\times z+z+1$

$=z+1$

$=(1-i)+1$

$=2-i$ …… ㉰

채점 기준		배점 비율
(1)	㉮ a, b의 값 구하기	40 %
(2)	㉯ 다항식의 나눗셈을 이용하여 식 정리하기	40 %
	㉰ z^3-2z^2+3z+1의 값 구하기	20 %

1등급 비법

복소수 z의 실수부분을 이항하여 허수부분만 남기고 양변을 제곱하면 z를 근으로 갖는 계수가 실수인 이차방정식을 구할 수 있다.

184

$z=(1+2i)x+(2-i)y$

$=(x+2y)+(2x-y)i$

$z^2=-25$에서 $z=5i$ 또는 $z=-5i$ …… ㉮

(i) $z=5i$일 때,

x, y는 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x+2y=0$, $2x-y=5$

두 식을 연립하여 풀면

$x=2$, $y=-1$

$\therefore x^2+y^2=4+1=5$ …… ㉯

(ii) $z=-5i$일 때,

x, y는 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x+2y=0$, $2x-y=-5$

두 식을 연립하여 풀면

$x=-2$, $y=1$

$\therefore x^2+y^2=4+1=5$ …… ㉰

(i), (ii)에서 $x^2+y^2=5$ …… ㉱

채점 기준	배점 비율
㉮ z의 실수부분과 허수부분을 구하고 z의 값 구하기	30 %
㉯ $z=5i$일 때, x^2+y^2의 값 구하기	30 %
㉰ $z=-5i$일 때, x^2+y^2의 값 구하기	30 %
㉱ x^2+y^2의 값 구하기	10 %

185

$z=\bar{z}$이고 $z\neq0$이므로 z는 0이 아닌 실수이어야 한다.

즉, $3x^2+7x-6\neq0$, $x^2-9=0$ …… ㉮

(i) $3x^2+7x-6\neq0$에서

$(x+3)(3x-2)\neq0$

$\therefore x\neq-3$이고 $x\neq\frac{2}{3}$ …… ㉯

(ii) $x^2-9=0$에서

$(x+3)(x-3)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=3$ …… ㉰

(i), (ii)에서 $x=3$ …… ㉱

채점 기준	배점 비율
㉮ z의 실수부분과 허수부분의 조건 구하기	30 %
㉯ 실수부분의 조건을 이용하여 x의 조건 구하기	30 %
㉰ 허수부분의 값을 이용하여 x의 값 구하기	30 %
㉱ x의 값 구하기	10 %

186

$z=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2i}$에서

$z^2=\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2i}\right)^2=\frac{-2-2\sqrt{3}i}{-4}=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$

$z^3=z^2\times z$

$=\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)\times\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2i}\right)$

$=\frac{-4}{4i}$

$=\frac{-4i}{-4}=i$ …… ㉮

$z^4=(z^2)^2=\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\frac{-2+2\sqrt{3}i}{4}=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

$z^5=z^3\times z^2=i\times\frac{1+\sqrt{3}i}{2}=\frac{-\sqrt{3}+i}{2}$

$z^6=(z^3)^2=i^2=-1$ …… ㉯

따라서 $z^n=-1$이 되도록 하는 가장 작은 자연수 n의 값은 6이다. …… ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ z^2, z^3의 값 구하기	40 %
㉯ z^4, z^5, z^6의 값 구하기	40 %
㉰ $z^n=-1$이 되도록 하는 가장 작은 자연수 n의 값 구하기	20 %

1등급 실력 완성

● 49쪽~50쪽

187 ④	**188** ②	**189** ③	**190** ①	**191** ⑤
192 ⑤	**193** $-2+2i$		**194** 10	**195** ④

187

복소수의 뜻과 사칙연산

전략 곱셈 공식 $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$, $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$을 이용한다.

풀이 ㄱ. $\alpha^2\beta^2=4i\times(-4i)=16$이므로

$(\alpha\beta)^2=\alpha^2\beta^2=16$

$\therefore \alpha\beta=-4$ 또는 $\alpha\beta=4$ (거짓)

ㄴ. $\alpha^2+\beta^2=4i+(-4i)=0$이므로

$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2=2\alpha\beta$

이때 ㄱ에서 $\alpha^2\beta^2=16$이므로

$(\alpha+\beta)^4=\{(\alpha+\beta)^2\}^2=(2\alpha\beta)^2=4\alpha^2\beta^2$

$=4\times16=64$ (참)

ㄷ. ㄴ에서 $(\alpha+\beta)^2=2\alpha\beta$이고

$(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=-2\alpha\beta$이므로

$\left(\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\right)^2=\dfrac{(\alpha+\beta)^2}{(\alpha-\beta)^2}=\dfrac{2\alpha\beta}{-2\alpha\beta}=-1$

제곱한 수가 음수이므로 $\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}$는 순허수이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

다른 풀이 $\alpha=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\alpha^2=4i$이므로

$(a+bi)^2=(a^2-b^2)+2abi=4i$

a, b는 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a^2-b^2=0$, $2ab=4$ $\quad\therefore a=\pm b$, $ab=2$

(i) $a=-b$일 때,

$-b^2=2$ $\quad\therefore b^2=-2$

이를 만족시키는 실수 b는 존재하지 않는다.

(ii) $a=b$일 때,

$b^2=2$ $\quad\therefore b=\pm\sqrt{2}$

(i), (ii)에서 $a=\sqrt{2}$, $b=\sqrt{2}$ 또는 $a=-\sqrt{2}$, $b=-\sqrt{2}$이므로

$\alpha=\sqrt{2}+\sqrt{2}i$ 또는 $\alpha=-\sqrt{2}-\sqrt{2}i$

같은 방법으로 $\beta=c+di$ (c, d는 실수)라 하면 $\beta^2=-4i$이므로

$\beta=\sqrt{2}-\sqrt{2}i$ 또는 $\beta=-\sqrt{2}+\sqrt{2}i$

ㄱ. $\alpha=\sqrt{2}+\sqrt{2}i$, $\beta=\sqrt{2}-\sqrt{2}i$이면

$\alpha\beta=(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)(\sqrt{2}-\sqrt{2}i)=2-(-2)=4$ (거짓)

ㄴ. $\alpha+\beta$의 값은 $2\sqrt{2}$, $-2\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}i$, $-2\sqrt{2}i$가 될 수 있으므로

$(\alpha+\beta)^4=64$ (참)

ㄷ. $\alpha+\beta=2\sqrt{2}$일 때, $\alpha-\beta=2\sqrt{2}i$

$\alpha+\beta=-2\sqrt{2}$일 때, $\alpha-\beta=-2\sqrt{2}i$

$\alpha+\beta=2\sqrt{2}i$일 때, $\alpha-\beta=2\sqrt{2}$

$\alpha+\beta=-2\sqrt{2}i$일 때, $\alpha-\beta=-2\sqrt{2}$

$\therefore \dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}=\pm i$

따라서 $\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}$는 순허수이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

188

복소수의 뜻과 사칙연산

전략 z^2이 실수가 되기 위한 조건을 구한다.

풀이 $z=(m-n)+(m+n-4)i$이므로

$z^2=\{(m-n)+(m+n-4)i\}^2$

$=(m-n)^2-(m+n-4)^2+2(m-n)(m+n-4)i$

z^2이 실수가 되려면 $2(m-n)(m+n-4)=0$이어야 하므로

$m=n$ 또는 $m+n=4$

(i) $m=n$일 때,

5 이하의 자연수 m, n에 대하여 순서쌍 (m, n)은

$(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$, $(4, 4)$, $(5, 5)$

(ii) $m+n=4$일 때,

5 이하의 자연수 m, n에 대하여 순서쌍 (m, n)은

$(1, 3)$, $(2, 2)$, $(3, 1)$

(i), (ii)에서 구하는 모든 순서쌍 (m, n)은 7개이다.

다른 풀이 z^2이 실수이므로 z는 실수 또는 순허수이다.

$z=(m-n)+(m+n-4)i$에 대하여

$m-n=0$ 또는 $m+n-4=0$

$\therefore m=n$ 또는 $m+n=4$

189

복소수가 주어졌을 때의 식의 값 ⊕ 켤레복소수와 그 계산

전략 $z=a+bi$ (a, b는 실수)에 대하여 $\overline{z}=a-bi$임을 이용하여 z_n의 규칙을 찾는다.

풀이 $\overline{z_1}=\overline{-1+i}=-1-i$이므로

$z_2=\overline{z_1}+(1-2i)=-1-i+(1-2i)=-3i$

$z_3=\overline{z_2}+(1-2i)=\overline{-3i}+(1-2i)$

$=3i+(1-2i)=1+i$

$z_4=\overline{z_3}+(1-2i)=\overline{1+i}+(1-2i)$

$=1-i+(1-2i)=2-3i$

$z_5=\overline{z_4}+(1-2i)=\overline{2-3i}+(1-2i)$

$=2+3i+(1-2i)=3+i$

⋮

실수부분은 z_1부터 -1, 0, 1, 2, 3, …으로 나타나고, 허수부분은 z_1부터 1, -3이 이 순서대로 반복하여 나타난다.

따라서 z_{2025}의 실수부분은 2023이고, z_{2026}의 허수부분은 -3이므로 그 합은

$2023+(-3)=2020$

190

복소수가 서로 같을 조건 ⊕ 켤레복소수와 그 계산

전략 $z=a+bi$ (a, b는 실수)로 놓고 z^2, $z\bar{z}$를 a, b에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면

$z^2=(a+bi)^2=(a^2-b^2)+2abi=3+4i$

a, b는 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a^2-b^2=3,\ 2ab=4 \quad \therefore\ a^2-b^2=3,\ ab=2$

$$\begin{aligned}\therefore\ z\bar{z}&=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2\\&=\sqrt{(a^2+b^2)^2}\\&=\sqrt{(a^2-b^2)^2+4a^2b^2}\\&=\sqrt{3^2+4\times2^2}=5\end{aligned}$$

다른 풀이 $(z\bar{z})^2=z^2(\bar{z})^2=z^2\overline{z^2}=(3+4i)(3-4i)$

$=9-(-16)=25$

$z\bar{z}\geq0$이므로 $z\bar{z}=5$

1등급 비법

$z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면
$z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$이므로 $z\bar{z}\geq0$

191

복소수가 서로 같을 조건 ⊕ 켤레복소수와 그 계산

전략 $z=a+bi$이면 $\bar{z}=a-bi$임을 이용하여 $iz=\bar{z}$에 대입한 후 a, b 사이의 관계식을 구한다.

풀이 $z=a+bi$에 대하여 $iz=\bar{z}$이므로

$i(a+bi)=a-bi$에서

$-b+ai=a-bi$

a, b는 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$-b=a$

즉, $b=-a$이므로 $z=a-ai$, $\bar{z}=\overline{a-ai}=a+ai$

ㄱ. $z+\bar{z}=(a-ai)+(a+ai)$

$=2a=-2b$ (참)

ㄴ. $i\bar{z}=i(a+ai)=-a+ai$

$=-(a-ai)=-z$ (참)

ㄷ. $\dfrac{\bar{z}}{z}+\dfrac{z}{\bar{z}}=\dfrac{a+ai}{a-ai}+\dfrac{a-ai}{a+ai}$

$=\dfrac{(a+ai)^2+(a-ai)^2}{(a-ai)(a+ai)}$

$=\dfrac{0}{a^2+a^2}=0$ (참)

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

192

허수단위 i와 복소수의 거듭제곱

전략 $2i$를 거듭제곱하여 자연수가 되는 n의 값의 규칙을 찾는다.

풀이 $(2i)^2=-4$, $(2i)^3=-8i$, $(2i)^4=16$, $\cdots$이므로

$n=4k$(k는 자연수)일 때, $(2i)^n=(2i)^{4k}=16^k$이므로 $(2i)^n$은 자연수가 된다.

$n=4$일 때, $m=16$

$n=8$일 때, $m=16^2=256$

⋮

따라서 $m\geq100$을 만족시키는 $m+n$의 최솟값은

$256+8=264$

193

허수단위 i와 복소수의 거듭제곱

전략 $f(k)$를 간단히 한 후, $f(k)=i^k$임을 이용하여 $H(n)$을 구한다.

풀이 $\dfrac{1+i}{1-i}=\dfrac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{2i}{2}=i$이므로

$f(k)=i^k$

$H(n)=f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(n)$

$=i+i^2+i^3+\cdots+i^n$

$$\begin{aligned}H(25)&=i+i^2+i^3+\cdots+i^{25}\\&=(i+i^2+i^3+i^4)+i^4(i+i^2+i^3+i^4)\\&\qquad+\cdots+i^{20}(i+i^2+i^3+i^4)+i^{24}\times i\\&=(i-1-i+1)+(i-1-i+1)+\cdots+(i-1-i+1)+i\\&=0+0+\cdots+0+i\\&=i\end{aligned}$$

$H(26)=H(25)+i^{26}=i+i^{24}\times i^2$

$=i-1$

$H(27)=H(26)+i^{27}=(i-1)+i^{24}\times i^3$

$=(i-1)-i=-1$

$\therefore\ H(25)+H(26)+H(27)=i+(i-1)-1$

$=-2+2i$

194

허수단위 i와 복소수의 거듭제곱

전략 $\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$를 거듭제곱하여 그 합의 허수부분이 0이 되는 규칙성을 찾는다.

풀이 $\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2=\dfrac{-2i}{2}=-i$

$\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^3=(-i)\times\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}=\dfrac{-1-i}{\sqrt{2}}$

$\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^4=(-i)^2=-1$

$\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^5=(-1)\times\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}=\dfrac{-1+i}{\sqrt{2}}$

$\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^6=(-i)^3=i$

$\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^7=i\times\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$

$\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^8=(-1)^2=1$

이므로

$z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6+z^7$

$=\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}+(-i)+\dfrac{-1-i}{\sqrt{2}}+(-1)+\dfrac{-1+i}{\sqrt{2}}+i+\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$

$=-1$

$\therefore\ z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6+z^7+z^8=-1+1=0$

즉, $n=8k-1$, $n=8k$(k는 자연수)일 때

$z+z^2+z^3+z^4+\cdots+z^n$은 실수이다.

따라서 $10\leq n\leq50$인 자연수 n은

15, 16, 23, 24, 31, 32, 39, 40, 47, 48의 10개이다.

195

음수의 제곱근의 성질

전략 $p<0$, $q<0$ 이외의 경우에는 $\sqrt{p}\sqrt{q}=\sqrt{pq}$, $p>0$, $q<0$ 이외의 경우에는 $\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}=\sqrt{\frac{p}{q}}$ $(q\neq0)$임을 이용한다.

풀이 0이 아닌 두 실수 a, b에 대하여

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}$이므로 $a>0$, $b<0$

ㄱ. $a>0$, $b<0$이므로 $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ (거짓)

ㄴ. $-a<0$, $-b>0$이므로

$\sqrt{-a}\sqrt{-b}=\sqrt{(-a)\times(-b)}=\sqrt{ab}$ (참)

ㄷ. $a>0$, $-b>0$이므로

$\frac{\sqrt{-b}}{\sqrt{a}}=\sqrt{-\frac{b}{a}}$ (거짓)

ㄹ. $b^2>0$이므로 $\sqrt{ab^2}=|b|\sqrt{a}=-b\sqrt{a}$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다.

다른 풀이 ㄱ. $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{a}\sqrt{-b}\,i=\sqrt{-ab}\,i=\sqrt{ab}$ (거짓)

ㄴ. $\sqrt{-a}\sqrt{-b}=\sqrt{a}\,i\times\sqrt{-b}=\sqrt{-ab}\,i=\sqrt{ab}$ (참)

ㄷ. $-b>0$이므로 $\frac{\sqrt{-b}}{\sqrt{a}}=\sqrt{-\frac{b}{a}}$ (거짓)

도전 1등급 최고난도

● 51쪽

196 ④ **197** 150

196

켤레복소수의 성질

1단계 $z=a+bi$ (a, b는 실수)로 놓고, 주어진 식에 대입하여 복소수 z를 구한다.

$z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\bar{z}=\overline{a+bi}=a-bi$

$z+\bar{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a$

$z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$

$\therefore \frac{z}{\bar{z}}+\frac{\bar{z}}{z}=\frac{z^2+(\bar{z})^2}{z\bar{z}}=\frac{(z+\bar{z})^2-2z\bar{z}}{z\bar{z}}$

$=\frac{4a^2-2(a^2+b^2)}{a^2+b^2}=\frac{2(a^2-b^2)}{a^2+b^2}$

$\frac{2(a^2-b^2)}{a^2+b^2}=-2$이므로

$a^2-b^2=-a^2-b^2$

$2a^2=0 \qquad \therefore a=0$

이때 $z\neq0$이므로 $z=bi$ (단, $b\neq0$)

2단계 보기의 주어진 식에 $z=bi$, $\bar{z}=-bi$를 대입하여 실수인 것을 찾는다.

$z=bi$이므로 $\bar{z}=-bi$

ㄱ. $z-\bar{z}=bi-(-bi)=2bi$

ㄴ. $\frac{\bar{z}}{z}=\frac{-bi}{bi}=-1$

ㄷ. $(z+\bar{z})(z-\bar{z})=(bi-bi)(bi+bi)=0$

이상에서 실수인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

197

허수단위 i와 복소수의 거듭제곱

1단계 $\left\{i^n+\left(\frac{1}{i}\right)^{2n}\right\}^m$을 정리하고 $f(n)=i^n+(-1)^n$으로 놓는다.

$\left\{i^n+\left(\frac{1}{i}\right)^{2n}\right\}^m=\{i^n+(-i)^{2n}\}^m=\{i^n+(-1)^n\}^m$

이때 $f(n)=i^n+(-1)^n$이라 하자.

2단계 n을 4로 나눈 나머지에 따라 경우를 나누어 $\{f(n)\}^m$의 값을 구한다.

자연수 k에 대하여

(i) $n=4k-3$일 때,

$f(n)=i-1$이고,

$(i-1)^2=-2i$, $(i-1)^4=-2^2$이므로

$\{f(n)\}^4=-2^2$

$\{f(n)\}^{12}=-2^6$

$\{f(n)\}^{20}=-2^{10}$

⋮

즉, m이 50 이하의 자연수이므로 순서쌍 (m, n)은

$(4, n)$, $(12, n)$, $(20, n)$, $(28, n)$, $(36, n)$, $(44, n)$의 6개이다.

이때 50 이하의 자연수 n은 1, 5, 9, ⋯, 49의 13개이므로 조건을 만족시키는 순서쌍 (m, n)의 개수는 $6\times13=78$

(ii) $n=4k-1$일 때,

$f(n)=-i-1$이고,

$(-i-1)^2=2i$, $(-i-1)^4=-2^2$이므로

$\{f(n)\}^4=-2^2$

$\{f(n)\}^{12}=-2^6$

$\{f(n)\}^{20}=-2^{10}$

⋮

즉, m이 50 이하의 자연수이므로 순서쌍 (m, n)은

$(4, n)$, $(12, n)$, $(20, n)$, $(28, n)$, $(36, n)$, $(44, n)$의 6개이다.

이때 50 이하의 자연수 n은 3, 7, 11, ⋯, 47의 12개이므로 조건을 만족시키는 순서쌍 (m, n)의 개수는 $6\times12=72$

(iii) $n=4k-2$, $n=4k$일 때,

$f(n)$은 0 또는 2이므로 $\{f(n)\}^m\geq0$

즉, 주어진 조건을 만족시키는 순서쌍 (m, n)은 존재하지 않는다.

3단계 (i)~(iii)의 경우를 모두 합하여 순서쌍의 개수를 구한다.

이상에서 50 이하의 자연수 m, n에 대하여 $\left\{i^n+\left(\frac{1}{i}\right)^{2n}\right\}^m$의 값이 음의 실수가 되도록 하는 순서쌍 (m, n)의 개수는

$78+72=150$

05 이차방정식

유형 분석 기출

● 54쪽 ~ 60쪽

198 ③	199 ③	200 ②	201 ④	202 22
203 $\sqrt{2}$	204 ①	205 ②	206 $-1-\sqrt{2}$	
207 12 cm	208 $12-4\sqrt{6}$		209 ①	210 ⑤
211 7	212 11	213 4	214 ⑤	215 8
216 ⑤	217 ②	218 4	219 ④	220 ②
221 ③	222 6	223 18	224 -9	225 ④
226 ④	227 $x^2-x+5=0$		228 ⑤	229 21
230 ②	231 ④	232 ⑤	233 ①	234 -16
235 ③	236 10	237 ⑤		

198

$2(x-2)^2=x^2-2x-2$에서

$2(x^2-4x+4)=x^2-2x-2$

$\therefore x^2-6x+10=0$

근의 공식에 의하여

$$x=\frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4\times1\times10}}{2}$$

$$=\frac{6\pm\sqrt{-4}}{2}=3\pm i$$

199

$x(x-2)=2(x-1)^2+3$에서

$x^2-2x=2(x^2-2x+1)+3$

$\therefore x^2-2x+5=0$

근의 공식에 의하여

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\times1\times5}}{2}$$

$$=\frac{2\pm\sqrt{-16}}{2}=1\pm2i$$

따라서 $a=1$, $b=2$이므로

$b-a=2-1=1$

200

$x^2-mx+2m+1=0$에 $x=1$을 대입하면

$1-m+2m+1=0$

$\therefore m=-2$

$m=-2$를 $x^2-mx+2m+1=0$에 대입하면

$x^2+2x-3=0$, $(x+3)(x-1)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=1$

따라서 다른 한 근은 -3이다.

1등급 비법

이차방정식에서 한 근이 주어질 경우 그 근을 방정식에 대입하여 미지수의 값을 구하여 이차방정식을 풀면 다른 한 근을 구할 수 있다.

201

$x^2+kx+7k-1=0$에 $x=-3$을 대입하면

$(-3)^2+k\times(-3)+7k-1=0$, $4k+8=0$

$\therefore k=-2$

이차방정식 $x^2+3kx-k=0$에 $k=-2$를 대입하면

$x^2-6x+2=0$

$$\therefore x=\frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4\times1\times2}}{2}$$

$$=\frac{6\pm\sqrt{28}}{2}=3\pm\sqrt{7}$$

202

$x^2+6x+7=0$에 $x=\alpha$를 대입하면

$\alpha^2+6\alpha+7=0$

이때 $\alpha\neq0$이므로 양변을 α로 나누면

$\alpha+6+\frac{7}{\alpha}=0 \qquad \therefore \alpha+\frac{7}{\alpha}=-6$

$$\therefore \alpha^2+\frac{49}{\alpha^2}=\left(\alpha+\frac{7}{\alpha}\right)^2-2\times\alpha\times\frac{7}{\alpha}$$

$$=(-6)^2-14$$

$$=36-14=22$$

203

주어진 방정식의 양변에 $\sqrt{2}+1$을 곱하면

$(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)x^2-\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)x+(\sqrt{2}+1)=0$

$x^2-(2+\sqrt{2})x+\sqrt{2}+1=0$

$(x-1)(x-1-\sqrt{2})=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=1+\sqrt{2}$

이때 $\alpha>\beta$이므로 $\alpha=1+\sqrt{2}$, $\beta=1$

$\therefore \alpha-\beta=(1+\sqrt{2})-1=\sqrt{2}$

1등급 비법

이차항의 계수가 무리수인 이차방정식은 곱셈 공식 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$을 이용하여 먼저 이차항의 계수를 유리화한 후 근을 구한다.

204

(i) $x\geq0$일 때,

$x^2-2x-3=0$에서 $(x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

그런데 $x\geq0$이므로 $x=3$

(ii) $x<0$일 때,

$x^2+2x-3=0$에서 $(x+3)(x-1)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=1$

그런데 $x<0$이므로 $x=-3$

(i), (ii)에서 모든 근의 곱은

$3\times(-3)=-9$

다른 풀이 $x^2-2|x|-3=0$에서 $x^2=|x|^2$이므로 $|x|=t$로 치환하면

$t^2-2t-3=0$, $(t+1)(t-3)=0$
$t=-1$ 또는 $t=3$
$\therefore$ $|x|=-1$ 또는 $|x|=3$
이때 $|x|\geq 0$이므로 $|x|=3$
따라서 $x=-3$ 또는 $x=3$이므로 구하는 곱은
$(-3)\times 3=-9$

1등급 비법

절댓값 기호를 포함한 방정식은 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값을 기준으로 범위를 나누어 계산한다.

205

$|x^2-x-4|=a$에 $x=3$을 대입하면
$|3^2-3-4|=a$ $\qquad\therefore$ $a=2$
$|x^2-x-4|=2$에서
$x^2-x-4=\pm 2$
(i) $x^2-x-4=2$일 때,
$x^2-x-6=0$에서 $(x+2)(x-3)=0$
$\therefore$ $x=-2$ 또는 $x=3$
(ii) $x^2-x-4=-2$일 때,
$x^2-x-2=0$에서 $(x+1)(x-2)=0$
$\therefore$ $x=-1$ 또는 $x=2$
(i), (ii)에서 모든 근의 합은
$(-2)+3+(-1)+2=2$

개념 보충

① $|a|=\begin{cases} a & (a\geq 0) \\ -a & (a<0) \end{cases}$

② $|x-a|=\begin{cases} x-a & (x\geq a) \\ -(x-a) & (x<a) \end{cases}$

③ $|f(x)|=a$이면 $f(x)=a$ 또는 $f(x)=-a$

206

$\sqrt{(x-1)^2}+|x|=x^2$에서 $|x-1|+|x|=x^2$
(i) $x<0$일 때,
$-x+1-x=x^2$에서 $x^2+2x-1=0$
$\therefore$ $x=\dfrac{-2\pm\sqrt{2^2-4\times 1\times(-1)}}{2}$
$=\dfrac{-2\pm\sqrt{8}}{2}=-1\pm\sqrt{2}$
그런데 $x<0$이므로 $x=-1-\sqrt{2}$
(ii) $0\leq x<1$일 때,
$-x+1+x=x^2$에서 $x^2=1$
$\therefore$ $x=\pm 1$
그런데 $0\leq x<1$이므로 해가 없다.
(iii) $x\geq 1$일 때,
$x-1+x=x^2$에서
$x^2-2x+1=0$, $(x-1)^2=0$
$\therefore$ $x=1$

이상에서 주어진 방정식의 근은
$x=-1-\sqrt{2}$ 또는 $x=1$
따라서 모든 근의 곱은 $-1-\sqrt{2}$

207

처음 정사각형의 한 변의 길이를 x cm라 하면 넓이가 100 cm^{2}보다 크므로
$x>10$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉠
가로의 길이를 4 cm만큼 늘이고, 세로의 길이를 2 cm만큼 줄여서 만든 직사각형의 넓이는
$(x+4)(x-2)$ cm^2
이 직사각형의 넓이가 처음 정사각형의 넓이의 $\dfrac{1}{9}$만큼 더 늘어났으므로
$(x+4)(x-2)=x^2+\dfrac{1}{9}x^2$
$9(x^2+2x-8)=10x^2$
$x^2-18x+72=0$, $(x-6)(x-12)=0$
$\therefore$ $x=12$ ($\because$ ㉠)
따라서 처음 정사각형의 한 변의 길이는 12 cm이다.

1등급 비법

이차방정식의 활용 문제는 다음과 같은 순서로 해결한다.
(i) 구하려는 것을 미지수 x로 놓는다.
(ii) 주어진 조건을 만족시키는 이차방정식을 세운다.
(iii) (ii)의 이차방정식을 푼 다음 문제의 조건에 맞는 x의 값을 구한다.
(iv) 구한 x의 값이 문제의 뜻에 맞는지 확인한다.

208

길을 제외한 꽃밭의 넓이는 $(12-x)^2$ (m^2)
길의 넓이는 $12x\times 2-x^2=24x-x^2$ (m^2)
길을 제외한 꽃밭의 넓이가 길의 넓이의 2배이므로
$(12-x)^2=2(24x-x^2)$
$x^2-24x+144=-2x^2+48x$
$3x^2-72x+144=0$, $x^2-24x+48=0$
$\therefore$ $x=\dfrac{-(-24)\pm\sqrt{(-24)^2-4\times 1\times 48}}{2}$
$=\dfrac{24\pm\sqrt{384}}{2}=12\pm 4\sqrt{6}$
이때 $0<x<12$이므로 $x=12-4\sqrt{6}$

209

작년까지의 밭의 넓이는 $10\times 10=100$(m^2)
가로의 길이를 x m만큼 늘이고, 세로의 길이를 $(x-10)$ m만큼 늘여서 만든 직사각형 모양의 밭의 넓이는 $100+500=600$(m^2)이므로
$(10+x)\{10+(x-10)\}=600$
$x^2+10x-600=0$, $(x+30)(x-20)=0$
이때 $x>10$이므로 $x=20$

210

주어진 이차방정식의 판별식을 D라 할 때,

ㄱ. $D=(-5)^2-4\times3\times(-1)=37>0$

따라서 서로 다른 두 실근을 갖는다.

ㄴ. $\frac{D}{4}=(-k)^2-1\times k^2=0$

따라서 중근(실근)을 갖는다.

ㄷ. $D=3^2-4\times1\times(-k^2)=9+4k^2>0$

따라서 서로 다른 두 실근을 갖는다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 실근을 갖는다.

1등급 비법

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ (a, b, c는 실수)의 판별식을 D라 할 때, 이 이차방정식이 실근을 갖는 경우는

(i) 오직 하나의 실근(중근)을 가질 때 ⇨ $D=0$

(ii) 서로 다른 두 실근을 가질 때 ⇨ $D>0$

(i), (ii)에서 이차방정식이 실근을 가지려면 $D\geq0$이어야 한다.

211

이차방정식 $x^2+2ax+a^2+4a-28=0$의 판별식을 D라 할 때,

$\frac{D}{4}=a^2-(a^2+4a-28)\geq0$

$-4a+28\geq0$ $\quad\therefore a\leq7$

따라서 모든 자연수 a는 1, 2, 3, $\cdots$, 7의 7개이다.

212

이차방정식 $x^2+2(k-1)x+k^2-20=0$의 판별식을 D라 할 때,

$\frac{D}{4}=(k-1)^2-(k^2-20)<0$

$k^2-2k+1-k^2+20<0$, $-2k+21<0$

$\therefore k>\frac{21}{2}$

따라서 자연수 k의 최솟값은 11이다.

213

$kx^2-2kx+3=0$이 이차방정식이므로 $k\neq0$

이차방정식 $kx^2-2kx+3=0$의 판별식을 D라 할 때, 이 이차방정식이 중근을 가지므로

$\frac{D}{4}=(-k)^2-3k=0$

$k^2-3k=0$, $k(k-3)=0$ $\quad\therefore k=3$ ($\because k\neq0$)

주어진 이차방정식에 $k=3$을 대입하면

$3x^2-6x+3=0$, $x^2-2x+1=0$

$(x-1)^2=0$ $\quad\therefore x=1$

즉, $\alpha=1$이므로

$k+\alpha=3+1=4$

214

이차방정식 $x^2-2(k+a)x+k^2-2k+b=0$의 판별식을 D라 할 때, 이 이차방정식이 중근을 가지므로

$\frac{D}{4}=\{-(k+a)\}^2-(k^2-2k+b)=0$

$k^2+2ak+a^2-k^2+2k-b=0$

$\therefore (2a+2)k+a^2-b=0$

이 등식이 k에 대한 항등식이므로

$2a+2=0$, $a^2-b=0$

$\therefore a=-1$, $b=a^2=(-1)^2=1$

$\therefore a^2+b^2=1+1=2$

개념 보충

항등식의 성질

① $ax^2+bx+c=0$이 x에 대한 항등식
⇨ $a=b=c=0$

② $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$이 x에 대한 항등식
⇨ $a=a'$, $b=b'$, $c=c'$

③ $ax+by+c=0$이 x, y에 대한 항등식
⇨ $a=b=c=0$

215

주어진 이차식이 완전제곱식이 되려면 이차방정식

$x^2-2(k-1)x+(2k^2-8k+9)=0$이 중근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D라 할 때,

$\frac{D}{4}=\{-(k-1)\}^2-(2k^2-8k+9)=0$

$k^2-2k+1-2k^2+8k-9=0$

$k^2-6k+8=0$, $(k-2)(k-4)=0$

$\therefore k=2$ 또는 $k=4$

따라서 모든 실수 k의 값의 곱은

$2\times4=8$

다른 풀이 k에 대한 이차방정식 $k^2-6k+8=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 k의 값의 곱은 8이다.

216

$c(1+x^2)+2bx+a(1-x^2)=0$에서

$(-a+c)x^2+2bx+a+c=0$

이 이차방정식이 중근을 가지므로 판별식을 D라 할 때,

$\frac{D}{4}=b^2-(-a+c)(a+c)=0$

$b^2-(-a^2+c^2)=0$, $a^2+b^2-c^2=0$

$\therefore c^2=a^2+b^2$

따라서 a, b, c를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 빗변의 길이가 c인 직각삼각형이다.

1등급 비법

삼각형의 세 변의 길이가 a, b, c ($a\leq b\leq c$)일 때,

① $a=b$ 또는 $b=c$ 또는 $c=a$ ⇨ 이등변삼각형

② $a=b=c$ ⇨ 정삼각형

③ $a^2+b^2>c^2$ ⇨ 예각삼각형

④ $a^2+b^2=c^2$ ⇨ 빗변의 길이가 c인 직각삼각형

⑤ $a^2+b^2<c^2$ ⇨ 둔각삼각형

217

주어진 이차식이 완전제곱식이 되려면 이차방정식

$x^2-2(k+a)x+bk^2+c+2=0$이 중근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D라 할 때,

$\frac{D}{4}=\{-(k+a)\}^2-(bk^2+c+2)=0$

$k^2+2ak+a^2-bk^2-c-2=0$

$\therefore (1-b)k^2+2ak+a^2-c-2=0$

이 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$1-b=0,\ 2a=0,\ a^2-c-2=0$

$\therefore a=0,\ b=1,\ c=-2$

$\therefore a+b+c=0+1+(-2)=-1$

218

이차방정식 $3x^2-4x+1=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=\frac{4}{3},\ \alpha\beta=\frac{1}{3}$

$\therefore \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{4}{3}\div\frac{1}{3}=\frac{4}{3}\times 3=4$

다른 풀이 $3x^2-4x+1=0$에서 $(3x-1)(x-1)=0$

$\therefore x=\frac{1}{3}$ 또는 $x=1$

$\therefore \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=3+1=4$

219

이차방정식 $x^2-kx+6=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=k,\ \alpha\beta=6$

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=k^2-24$

이때 $k^2-24=12$이므로

$k^2=36\qquad \therefore k=\pm 6$

이때 k는 양수이므로 $k=6$

개념 보충

곱셈 공식의 변형

① $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(a-b)^2+2ab$

② $(a+b)^2=(a-b)^2+4ab,\ (a-b)^2=(a+b)^2-4ab$

③ $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

④ $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

220

이차방정식 $x^2-2kx+k=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2k,\ \alpha\beta=k$

$\frac{\alpha^2}{\beta}+\frac{\beta^2}{\alpha}=\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}$

$=\frac{(2k)^3-3\times k\times 2k}{k}=8k^2-6k$

이때 $8k^2-6k=20$이므로

$8k^2-6k-20=0,\ 4k^2-3k-10=0$

$(4k+5)(k-2)=0\qquad \therefore k=-\frac{5}{4}$ 또는 $k=2$

이때 k는 정수이므로 $k=2$

221

이차방정식 $x^2-6x+7=0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha^2-6\alpha+7=0,\ \beta^2-6\beta+7=0$

$\therefore \alpha^2=6\alpha-7,\ \beta^2=6\beta-7$

또, 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=6,\ \alpha\beta=7$

$\therefore (\alpha^2-3\alpha+1)(\beta^2-3\beta+1)$

$=\{(6\alpha-7)-3\alpha+1\}\{(6\beta-7)-3\beta+1\}$

$=(3\alpha-6)(3\beta-6)$

$=9(\alpha-2)(\beta-2)$

$=9\{\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+4\}$

$=9(7-2\times 6+4)=-9$

222

이차방정식 $x^2-3x+k=0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha^2-3\alpha+k=0,\ \beta^2-3\beta+k=0$

$\therefore \alpha^2-\alpha+k=2\alpha,\ \beta^2-\beta+k=2\beta$

또, 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3,\ \alpha\beta=k$

$\therefore \frac{1}{\alpha^2-\alpha+k}+\frac{1}{\beta^2-\beta+k}=\frac{1}{2\alpha}+\frac{1}{2\beta}$

$=\frac{\alpha+\beta}{2\alpha\beta}=\frac{3}{2k}$

이때 $\frac{3}{2k}=\frac{1}{4}$이므로

$2k=12\qquad \therefore k=6$

223

이차방정식 $x^2-9x+a=0$의 한 근이 다른 한 근의 2배이므로 두 근을 α, 2α $(\alpha\neq 0)$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+2\alpha=9,\ 3\alpha=9\qquad \therefore \alpha=3$

$\alpha\times 2\alpha=a$에서 $2\alpha^2=a$

위의 식에 $\alpha=3$을 대입하면 $a=2\times 3^2=18$

224

이차방정식 $3x^2+6x+k=0$의 두 근의 차가 4이므로 두 근을 α, $\alpha+4$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(\alpha+4)=-\frac{6}{3}=-2$

$2\alpha+4=-2,\ 2\alpha=-6\qquad \therefore \alpha=-3$

따라서 두 근은 -3, 1이므로

(두 근의 곱)$=(-3)\times 1=\frac{k}{3}$

$\therefore k=-9$

225

이차방정식 $x^2-5(k-2)x+3k^2+2k+1=0$의 두 근의 비가 $2:3$이므로 두 근을 2α, 3α $(\alpha\neq0)$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$2\alpha+3\alpha=5(k-2)$에서 $\alpha=k-2$ …… ㉠

$2\alpha\times3\alpha=3k^2+2k+1$에서 $6\alpha^2=3k^2+2k+1$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$6(k-2)^2=3k^2+2k+1$

$3k^2-26k+23=0$, $(k-1)(3k-23)=0$

$\therefore k=1$ 또는 $k=\dfrac{23}{3}$

이때 k는 정수이므로 $k=1$

226

이차방정식 $x^2-(k+2)x+k^2-3k+4=0$의 두 근이 연속하는 짝수이므로 두 근을 $2n$, $2n+2$ (n은 자연수)라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$2n+(2n+2)=k+2$에서 $k=4n$ …… ㉠

$2n\times(2n+2)=k^2-3k+4$에서

$4n^2+4n=k^2-3k+4$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$4n^2+4n=16n^2-12n+4$

$12n^2-16n+4=0$, $3n^2-4n+1=0$

$(3n-1)(n-1)=0$

$\therefore n=\dfrac{1}{3}$ 또는 $n=1$

이때 n은 자연수이므로 $n=1$

$\therefore k=4\times1=4$

227

이차방정식 $x^2-3x+7=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=7$

$$\begin{aligned}\therefore (\alpha-1)+(\beta-1)&=(\alpha+\beta)-2\\&=3-2=1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\alpha-1)(\beta-1)&=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1\\&=7-3+1=5\end{aligned}$$

따라서 $\alpha-1$, $\beta-1$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2-x+5=0$

228

이차방정식 $x^2-4x+6=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=6$ …… ㉠

이차방정식 $6x^2-ax+b=0$의 두 근이 $\dfrac{1}{\alpha}$, $\dfrac{1}{\beta}$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{a}{6}$, $\dfrac{1}{\alpha}\times\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{b}{6}$

$\therefore \dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\dfrac{a}{6}$, $\dfrac{1}{\alpha\beta}=\dfrac{b}{6}$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$\dfrac{4}{6}=\dfrac{a}{6}$, $\dfrac{1}{6}=\dfrac{b}{6}$ $\quad\therefore a=4$, $b=1$

$\therefore a+b=4+1=5$

229

이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=a$, $\alpha\beta=b$ …… ㉠

이차방정식 $x^2-3bx+2a-3=0$의 두 근이 $\alpha+1$, $\beta+1$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$(\alpha+1)+(\beta+1)=3b$,

$(\alpha+1)(\beta+1)=2a-3$

$\therefore \alpha+\beta=3b-2$, $\alpha\beta+\alpha+\beta+1=2a-3$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$a=3b-2$, $b+a+1=2a-3$

$\therefore a-3b=-2$, $a-b=4$

두 식을 연립하여 풀면 $a=7$, $b=3$

$\therefore ab=7\times3=21$

230

이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 두 근이 2, α이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$2+\alpha=a$, $2\alpha=b$ …… ㉠

이차방정식 $x^2-(a+4)x+7b=0$의 두 근이 -2, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$-2+\beta=a+4$, $-2\beta=7b$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$-2+\beta=2+\alpha+4$, $-2\beta=7\times2\alpha$

$\therefore \alpha-\beta=-8$, $\beta=-7\alpha$

두 식을 연립하여 풀면 $\alpha=-1$, $\beta=7$

$\therefore \alpha+\beta=-1+7=6$, $\alpha\beta=-1\times7=-7$

즉, α, β를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2-6x-7=0$

이 방정식은 $x^2-mx+n=0$과 같으므로

$m=6$, $n=-7$

$\therefore m+n=6+(-7)=-1$

231

이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=a$, $\alpha\beta=b$ …… ㉠

이차방정식 $x^2-4x+5=0$의 두 근이 $\dfrac{1}{\alpha+1}$, $\dfrac{1}{\beta+1}$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{1}{\alpha+1}+\frac{1}{\beta+1}=\frac{\beta+1+\alpha+1}{(\alpha+1)(\beta+1)}$$

$$=\frac{\alpha+\beta+2}{\alpha\beta+\alpha+\beta+1}=4 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

$$\frac{1}{\alpha+1}\times\frac{1}{\beta+1}=\frac{1}{(\alpha+1)(\beta+1)}$$

$$=\frac{1}{\alpha\beta+\alpha+\beta+1}=5 \qquad \cdots\cdots ㉢$$

㉠을 ㉢에 대입하면

$\frac{1}{a+b+1}=5 \qquad \therefore a+b+1=\frac{1}{5}$ $\cdots\cdots$ ㉣

㉠을 ㉡에 대입하면 $\frac{a+2}{a+b+1}=4$

$a+2=4(a+b+1)$

위의 식에 ㉣을 대입하면

$a+2=\frac{4}{5} \qquad \therefore a=-\frac{6}{5}$

$a=-\frac{6}{5}$을 ㉣에 대입하면

$-\frac{6}{5}+b+1=\frac{1}{5} \qquad \therefore b=\frac{2}{5}$

$\therefore a-b=-\frac{6}{5}-\frac{2}{5}=-\frac{8}{5}$

232

이차방정식 $x^2+4x+6=0$에서 근의 공식에 의하여

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\times1\times6}}{2}$$

$$=\frac{-4\pm\sqrt{-8}}{2}$$

$$=-2\pm\sqrt{2}i$$

$$\therefore x^2+4x+6=\{x-(-2+\sqrt{2}i)\}\{x-(-2-\sqrt{2}i)\}$$

$$=(x+2-\sqrt{2}i)(x+2+\sqrt{2}i)$$

233

이차방정식 $x^2-2x+10=0$에서 근의 공식에 의하여

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\times1\times10}}{2}$$

$$=\frac{2\pm\sqrt{-36}}{2}$$

$$=1\pm3i$$

$$\therefore x^2-2x+10=\{x-(1+3i)\}\{x-(1-3i)\}$$

$$=(x-1-3i)(x-1+3i)$$

따라서 인수인 것은 ①이다.

234

a, b가 유리수이므로 이차방정식 $2x^2+ax+b=0$의 한 근이 $2+\sqrt{3}$이면 다른 한 근은 $2-\sqrt{3}$이다.

이때 근과 계수의 관계에 의하여

$(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=-\frac{a}{2}$에서

$4=-\frac{a}{2} \qquad \therefore a=-8$

$(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=\frac{b}{2}$에서

$1=\frac{b}{2} \qquad \therefore b=2$

$\therefore ab=(-8)\times2=-16$

235

a, b가 실수이므로 이차방정식 $x^2+4x+a=0$의 한 근이 $b-i$이면 다른 한 근은 $b+i$이다.

이때 근과 계수의 관계에 의하여

$(b-i)+(b+i)=-4$

$2b=-4 \qquad \therefore b=-2$

즉, 두 근은 $-2-i$, $-2+i$이므로

$(-2-i)(-2+i)=a \qquad \therefore a=5$

$\therefore a+b=5+(-2)=3$

236

이차방정식 $x^2-px+p+19=0$의 한 허근을 $a+2i$ (a는 실수)라 하면 다른 한 근은 $a-2i$이다.

이때 근과 계수의 관계에 의하여

$(a+2i)+(a-2i)=p$에서 $2a=p$ $\cdots\cdots$ ㉠

$(a+2i)(a-2i)=p+19$에서 $a^2+4=p+19$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$a^2+4=2a+19$

$a^2-2a-15=0$, $(a+3)(a-5)=0$

$\therefore a=-3$ 또는 $a=5$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$p=-6$ 또는 $p=10$

이때 p는 양의 실수이므로 $p=10$

237

이차방정식 $x^2-6x+n=0$의 판별식을 D라 하자.

(i) z가 실수일 때,

$\bar{z}=z$이므로 x^2-6x+n이 $(x-z)^2$ 꼴로 인수분해 되므로 이차방정식 $x^2-6x+n=0$은 중근을 갖는다.

즉, $\frac{D}{4}=(-3)^2-n=0$이므로 $n=9$

(ii) z가 허수일 때,

z가 $x^2-6x+n=0$의 해이면 $\bar{z}$는 켤레근이므로 이차방정식 $x^2-6x+n=0$은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

즉, $\frac{D}{4}=(-3)^2-n<0$이므로 $n>9$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 20 이하의 자연수 n은 9, 10, 11, $\cdots$, 20의 12개이다.

내신 적중 서술형

61쪽

238 4600원 **239** 서로 다른 두 허근
240 -11 **241** (1) $a=-2$, $b=5$ (2) -5

238

샌드위치 한 개의 가격을 100원씩 x번 내린다고 하면 샌드위치 한 개의 가격은 $(5000-100x)$원

샌드위치 한 개의 가격은 3000원 이상이므로

$5000-100x \geq 3000$ $\therefore x \leq 20$

이때 샌드위치의 판매량은 $(50+5x)$개이므로 샌드위치를 하루 동안 판매한 전체 금액은

$(5000-100x) \times (50+5x)$(원) …… ㉮

판매한 전체 금액이 322000원이므로

$(5000-100x)(50+5x)=322000$ …… ㉯

$(50-x)(10+x)=644$, $500+40x-x^2=644$

$x^2-40x+144=0$, $(x-36)(x-4)=0$

$\therefore x=4$ ($\because 0 \leq x \leq 20$)

따라서 샌드위치 한 개의 가격은

$5000-100 \times 4=4600$(원) …… ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ 샌드위치의 가격과 판매량을 이용하여 하루 동안 판매한 전체 금액에 대한 식 세우기	50 %
㉯ x에 대한 이차방정식 세우기	20 %
㉰ x에 대한 이차방정식을 풀고, 샌드위치 한 개의 가격 구하기	30 %

1등급 비법

실생활과 관련된 문제의 경우 구하고자 하는 값을 미지수로 어떻게 표현할지를 정하는 것이 중요하다. 단순히 구하고자 하는 값을 미지수로 정할 경우 계산이 복잡할 수 있다.

239

이차방정식 $x^2+(a+1)x+a+b=0$의 판별식을 D_1이라 할 때,

$D_1=(a+1)^2-4(a+b)=0$

$a^2-2a+1-4b=0$

$\therefore (a-1)^2=4b$ …… ㉠ …… ㉮

이차방정식 $x^2+(a-1)x+b^2+1=0$의 판별식을 D_2라 할 때,

$D_2=(a-1)^2-4(b^2+1)=4b-4(b^2+1)$ ($\because$ ㉠)

$=-4b^2+4b-4=-4\left(b-\frac{1}{2}\right)^2-3<0$ …… ㉯

따라서 이차방정식 $x^2+(a-1)x+b^2+1=0$은 서로 다른 두 허근을 갖는다. …… ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ 이차방정식 $x^2+(a+1)x+a+b=0$의 판별식을 이용하여 a, b 사이의 관계식 구하기	40 %
㉯ 이차방정식 $x^2+(a-1)x+b^2+1=0$의 판별식의 부호 조사하기	40 %
㉰ 이차방정식 $x^2+(a-1)x+b^2+1=0$의 근 판별하기	20 %

240

이차방정식 $x^2+7x+4=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-7$, $\alpha\beta=4$ …… ㉮

이때 $\alpha<0$, $\beta<0$이므로

$(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=(\sqrt{\alpha})^2+2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}+(\sqrt{\beta})^2$

$=\alpha-2\sqrt{\alpha\beta}+\beta$ …… ㉯

$=-7-2\sqrt{4}=-11$ …… ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값 구하기	30 %
㉯ 주어진 식 변형하기	50 %
㉰ 식의 값 구하기	20 %

개념 보충

음수의 제곱근의 성질

① $a<0$, $b<0$이면 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$

② $a>0$, $b<0$이면 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}$

241

(1) a, b가 실수이므로 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $1+2i$이면 다른 한 근은 $1-2i$이다. …… ㉮

이때 근과 계수의 관계에 의하여

$(1+2i)+(1-2i)=-a$에서 $2=-a$

$(1+2i)(1-2i)=b$에서 $5=b$

$\therefore a=-2$, $b=5$ …… ㉯

(2) 이차방정식 $5x^2-5x+10=0$, 즉 $x^2-x+2=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=2$ …… ㉰

$\therefore \alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=1^3-3\times2\times1=-5$ …… ㉱

채점 기준		배점 비율
(1)	㉮ 이차방정식의 켤레근 구하기	20 %
	㉯ a, b의 값 구하기	30 %
(2)	㉰ 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값 구하기	20 %
	㉱ 곱셈 공식을 이용하여 $\alpha^3+\beta^3$의 값 구하기	30 %

1등급 실력 완성

62쪽 ~ 64쪽

242 ① **243** ③ **244** ① **245** ① **246** ①
247 ③ **248** ④ **249** ② **250** ① **251** ③
252 ① **253** 6 **254** ⑤ **255** $\frac{13}{9}$

242

이차방정식의 풀이

전략 $x=1$을 대입한 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립함을 이용하여 a, b의 값을 구한다.

풀이 $x^2-a(k+3)x+(k+2)a^2+b=0$에 $x=1$을 대입하면

$1-a(k+3)+(k+2)a^2+b=0$

$(a^2-a)k+2a^2-3a+b+1=0$

이 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$a^2-a=0$, $2a^2-3a+b+1=0$

$a^2-a=0$에서 $a(a-1)=0$

$\therefore a=0$ 또는 $a=1$

(i) $a=0$을 $2a^2-3a+b+1=0$에 대입하면

$b+1=0 \qquad \therefore b=-1$

(ii) $a=1$을 $2a^2-3a+b+1=0$에 대입하면

$2-3+b+1=0 \qquad \therefore b=0$

(i), (ii)에서 $a=0$, $b=-1$ 또는 $a=1$, $b=0$이므로

$ab=0$

개념 보충

다음은 모두 x에 대한 항등식을 나타낸다.
① 모든 x에 대하여 성립하는 등식
② 임의의 x에 대하여 성립하는 등식
③ x의 값에 관계없이 항상 성립하는 등식
④ x가 어떤 값을 갖더라도 항상 성립하는 등식

243

이차방정식의 풀이

전략 $\alpha=2+\sqrt{3}$을 주어진 이차방정식에 대입하여 b, c를 a에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $\alpha=2+\sqrt{3}$은 이차방정식 $ax^2+\sqrt{3}bx+c=0$의 한 근이므로 이차방정식에 대입하면

$a(2+\sqrt{3})^2+\sqrt{3}b(2+\sqrt{3})+c=0$

$(7a+3b+c)+(4a+2b)\sqrt{3}=0$

이때 a, b, c는 유리수이므로

$7a+3b+c=0$, $4a+2b=0$

$\therefore b=-2a$, $c=-a$

$b=-2a$, $c=-a$를 주어진 이차방정식에 대입하면

$ax^2-2\sqrt{3}ax-a=0$

$a(x^2-2\sqrt{3}x-1)=0$

따라서 이차방정식 $a(x^2-2\sqrt{3}x-1)=0$의 근은

$$x=\frac{-(-2\sqrt{3})\pm\sqrt{(-2\sqrt{3})^2-4\times1\times(-1)}}{2}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}\pm\sqrt{16}}{2}=\sqrt{3}\pm2\ (\because a\neq0)$$

$ax^2+\sqrt{3}bx+c=0$이 x에 대한 이차방정식이므로 $a\neq0$

이므로 $\beta=-2+\sqrt{3}$

$$\therefore \alpha+\frac{1}{\beta}=(2+\sqrt{3})+\frac{1}{-2+\sqrt{3}}$$

$$=2+\sqrt{3}-(2+\sqrt{3})=0$$

다른 풀이 ① $\alpha=2+\sqrt{3}$에서 $\alpha-\sqrt{3}=2$이고 양변을 제곱하면

$(\alpha-\sqrt{3})^2=2^2$, $\alpha^2-2\sqrt{3}\alpha+3=4$

$\therefore \alpha^2-2\sqrt{3}\alpha-1=0$

따라서 α, β는 이차방정식 $a(x^2-2\sqrt{3}x-1)=0$의 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2\sqrt{3}$에서 $(2+\sqrt{3})+\beta=2\sqrt{3}$

$\therefore \beta=-2+\sqrt{3}$

$$\therefore \alpha+\frac{1}{\beta}=(2+\sqrt{3})+\frac{1}{-2+\sqrt{3}}$$

$$=2+\sqrt{3}-(2+\sqrt{3})=0$$

다른 풀이 ② $t=\sqrt{3}x$로 놓으면 $x=\frac{t}{\sqrt{3}}$이므로 주어진 이차방정식은

$\frac{a}{3}t^2+bt+c=0$, 즉 $at^2+3bt+3c=0$ …… ㉠

이고, 이차방정식의 두 근은 $\sqrt{3}\alpha$, $\sqrt{3}\beta$이다.

이때 $\sqrt{3}\alpha=\sqrt{3}\times(2+\sqrt{3})=3+2\sqrt{3}$이고, 이차방정식 ㉠의 계수가 모두 유리수이므로 다른 한 근 $\sqrt{3}\beta$는 $3-2\sqrt{3}$이다.

즉, $\sqrt{3}\beta=3-2\sqrt{3}$에서

$$\beta=\frac{3-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=-2+\sqrt{3}$$

$$\therefore \alpha+\frac{1}{\beta}=(2+\sqrt{3})+\frac{1}{-2+\sqrt{3}}$$

$$=2+\sqrt{3}-(2+\sqrt{3})=0$$

오답 피하기 a, b, c는 유리수이지만 이차방정식 $ax^2+\sqrt{3}bx+c=0$의 계수 중 $\sqrt{3}b$는 유리수가 아니므로 $\alpha=2+\sqrt{3}$의 켤레근 $2-\sqrt{3}$을 다른 한 근 β로 생각하지 않도록 주의한다.

244

이차방정식의 활용

전략 $\overline{\mathrm{AI}}=x$로 놓고 삼각형의 합동과 닮음을 이용하여 이차방정식을 세워 x의 값을 구한다.

풀이 $\overline{\mathrm{AI}}=x$라 하면

$\triangle\mathrm{ADI}\equiv\triangle\mathrm{CBH}$ (RHA 합동)이므로

$\overline{\mathrm{CH}}=\overline{\mathrm{AI}}=x$

$\therefore \overline{\mathrm{AC}}=2+2x$

직각삼각형 ACD에서 피타고라스 정리에 의하여

$(2+2x)^2=1+k^2$

$\therefore k^2=4x^2+8x+3$ …… ㉠

또, $\triangle\mathrm{ACD}\backsim\triangle\mathrm{ADI}$ (AA 닮음)이므로

$\overline{\mathrm{AC}}:\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{AD}}:\overline{\mathrm{AI}}$에서

$(2+2x):1=1:x$, $x(2+2x)=1$

$\therefore 2x^2+2x-1=0$

근의 공식에 의하여

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\times2\times(-1)}}{2\times2}$$

$$=\frac{-2\pm\sqrt{12}}{4}$$

$$=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$$

이때 $x>0$이므로 $x=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$

이때 ㉠에서

$k^2=4x^2+8x+3$

$=2(2x^2+2x-1)+4x+5=4x+5$ ($\because 2x^2+2x-1=0$)

$=4\times\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)+5=3+2\sqrt{3}$

따라서 $m=3$, $n=2$이므로

$m+n=3+2=5$

245

이차방정식의 활용

전략 주어진 비례식을 이용하여 이차방정식을 세우고, 주어진 식을 간단히 정리한다.

풀이 정오각형의 한 내각의 크기는

$\frac{180°\times(5-2)}{5}=108°$

$\triangle$ABE는 이등변삼각형이고 $\angle$BAE$=108°$이므로

$\angle\text{ABE}=\frac{1}{2}\times(180°-108°)=36°$

마찬가지로 $\angle$BAC$=36°$

따라서 $\triangle$APE에서 $\angle\text{APE}=36°+36°=72°$

이때 $\angle\text{EAP}=108°-36°=72°$이므로 $\triangle$APE는 이등변삼각형이다.

$\therefore \overline{\text{PE}}=\overline{\text{AE}}=1$

$\overline{\text{BE}}:\overline{\text{PE}}=\overline{\text{PE}}:\overline{\text{BP}}$에서

$x:1=1:(x-1)$, $x(x-1)=1$

$x^2-x-1=0$

$\therefore x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\times1\times(-1)}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

그런데 $x>0$이므로 $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$x^2-x-1=0$에서 $x^2-x=1$, $x^2=x+1$이므로

$x^3=x^2\times x=(x+1)x=x^2+x=(x+1)+x=2x+1$

$x^4=x^3\times x=(2x+1)x=2x^2+x=2(x+1)+x=3x+2$

$x^5=x^4\times x=(3x+2)x=3x^2+2x=3(x+1)+2x=5x+3$

$x^6=x^5\times x=(5x+3)x=5x^2+3x=5(x+1)+3x=8x+5$

$1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+x^6-x^7+x^8$

$=1+(-x+x^2)+x^2(-x+x^2)+x^4(-x+x^2)+x^6(-x+x^2)$

$=1+1+x^2+x^4+x^6$

$=2+x^2+x^4+x^6$

$=2+(x+1)+(3x+2)+(8x+5)$

$=12x+10$

$=12\times\frac{1+\sqrt{5}}{2}+10$

$=16+6\sqrt{5}$

따라서 $p=16$, $q=6$이므로

$p+q=16+6=22$

246

이차방정식의 판별식의 활용

전략 주어진 식을 x에 대한 이차식으로 생각하여 (이차식)$=0$의 근을 구한 후 근호 안의 식이 완전제곱식이어야 함을 이용한다.

풀이 $x^2+xy+ay^2-x+7y-2$를 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^2+(y-1)x+ay^2+7y-2$

$x^2+(y-1)x+ay^2+7y-2=0$을 x에 대한 이차방정식으로 생각하고 판별식을 D라 할 때, 근의 공식에 의하여

$x=\frac{-(y-1)\pm\sqrt{D}}{2}$

이때 주어진 식이 두 일차식의 곱으로 인수분해 되려면 D가 y에 대한 완전제곱식이어야 한다. 즉,

$D=(y-1)^2-4(ay^2+7y-2)$

$=y^2-2y+1-4ay^2-28y+8$

$=(1-4a)y^2-30y+9$

에서 이차방정식 $(1-4a)y^2-30y+9=0$의 판별식을 D'이라 할 때,

$\frac{D'}{4}=(-15)^2-9(1-4a)=0$

$225-9+36a=0$, $36a=-216$

$\therefore a=-6$

1등급 비법

x, y에 대한 이차식 A가 두 일차식의 곱으로 인수분해 될 조건은 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) 이차식 A를 x(또는 y)에 대하여 내림차순으로 정리한다.

(ii) 이차방정식 $A=0$의 판별식 D가 완전제곱식이어야 하므로 이차방정식 $D=0$의 판별식이 0이다.

247

이차방정식의 판별식의 활용

전략 x, y에 대한 이차식이 x, y에 대한 일차식의 완전제곱식이 될 조건을 이용한다.

풀이 $x^2+4xy+ay^2+bx-4y+c$를 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^2+(4y+b)x+ay^2-4y+c$

이 식이 x, y에 대한 일차식의 완전제곱식이 되므로 x에 대한 이차방정식 $x^2+(4y+b)x+ay^2-4y+c=0$은 y의 값에 관계없이 항상 중근을 갖는다. 이 이차방정식의 판별식을 D라 할 때,

$D=(4y+b)^2-4(ay^2-4y+c)=0$

즉, $(16-4a)y^2+(8b+16)y+b^2-4c=0$

이때 이 등식이 y의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$16-4a=0$, $8b+16=0$, $b^2-4c=0$

따라서 $a=4$, $b=-2$, $c=1$이므로

$a+b+c=4+(-2)+1=3$

248

이차방정식의 근과 계수의 관계

전략 주어진 식을 변형하여 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

풀이 이차방정식 $x^2+x-1=0$의 서로 다른 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-1$, $\alpha\beta=-1$

$\therefore \beta P(\alpha)+\alpha P(\beta)=\beta(2\alpha^2-3\alpha)+\alpha(2\beta^2-3\beta)$

$=\alpha\beta(2\alpha-3)+\alpha\beta(2\beta-3)$

$=\alpha\beta(2\alpha+2\beta-6)$
$=2\alpha\beta(\alpha+\beta-3)$
$=2\times(-1)\times(-1-3)$
$=8$

249

이차방정식의 근과 계수의 관계

(전략) 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 α, β에 대한 조건을 구한 후, 이를 이용하여 ㄱ, ㄴ, ㄷ의 참, 거짓을 판단한다.

(풀이) 이차방정식 $x^2-ax-1=0$의 서로 다른 두 실근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=a$, $\alpha\beta=-1$

ㄱ. $\alpha+\beta=a>0$이므로 $|\alpha+\beta|=\alpha+\beta$

이때 두 근의 곱이 음수이므로 두 근의 부호는 서로 다르다.

$\alpha>0$, $\beta<0$일 때, $|\alpha|+|\beta|=\alpha-\beta$

$\alpha<0$, $\beta>0$일 때, $|\alpha|+|\beta|=\beta-\alpha$

$\therefore |\alpha+\beta|\neq|\alpha|+|\beta|$ (거짓)

ㄴ. $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=a^2+2>2$ (참) ← $a>0$에서 $a^2>0$ $\therefore a^2+2>2$

ㄷ. $\alpha\beta=-1$이므로 $\beta=-\dfrac{1}{\alpha}$

$\alpha>3$이면 $-\dfrac{1}{3}<\beta<0$ (거짓) ← 두 근의 부호는 서로 다르므로 $\alpha>3$이면 $\beta<0$

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

250

이차방정식의 근과 계수의 관계

(전략) $|\alpha|+|\beta|=6$의 양변을 제곱한 후, 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

(풀이) 이차방정식 $x^2-4x+k=0$의 두 실근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=k$ ······ ㉠

$|\alpha|+|\beta|=6$의 양변을 제곱하면

$\alpha^2+2|\alpha\beta|+\beta^2=36$

$(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+2|\alpha\beta|=36$

이 식에 ㉠을 대입하면

$4^2-2k+2|k|=36$

$\therefore k-|k|=-10$

(i) $k\geq0$일 때,

$k-k=-10$

그런데 위의 식을 만족시키는 실수 k는 존재하지 않는다.

(ii) $k<0$일 때,

$k-(-k)=-10$

즉, $2k=-10$에서 $k=-5$

(i), (ii)에서 $k=-5$

251

이차방정식의 근의 판별 ⊕ 이차방정식의 근과 계수의 관계

(전략) 이차방정식의 판별식과 근과 계수의 관계를 이용하여 a, b의 조건을 구하고 자연수 a에 값에 따른 경우를 나누어 $a+b$의 최댓값을 구한다.

(풀이) 이차방정식 $x^2+ax-b=0$의 판별식을 D라 할 때, 이 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가지므로

$D=a^2+4b>0$ ······ ㉠

이차방정식 $x^2+ax-b=0$의 두 근을 α, β라 할 때, 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-a$, $\alpha\beta=-b$

이때 두 근의 차가 6 이하이므로

$|\alpha-\beta|=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=\sqrt{a^2+4b}\leq6$

$\therefore a^2+4b\leq36$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $0<a^2+4b\leq36$이고 a, b가 자연수이므로 a의 값이 될 수 있는 수는 1, 2, 3, 4, 5이다.

(i) $a=1$일 때,

$-1<4b\leq35$에서 b의 최댓값은 8이므로

$a+b$의 최댓값은 $1+8=9$

(ii) $a=2$일 때,

$-4<4b\leq32$에서 b의 최댓값은 8이므로

$a+b$의 최댓값은 $2+8=10$

(iii) $a=3$일 때,

$-9<4b\leq27$에서 b의 최댓값은 6이므로

$a+b$의 최댓값은 $3+6=9$

(iv) $a=4$일 때,

$-16<4b\leq20$에서 b의 최댓값은 5이므로

$a+b$의 최댓값은 $4+5=9$

(v) $a=5$일 때,

$-25<4b\leq11$에서 b의 최댓값은 2이므로

$a+b$의 최댓값은 $5+2=7$

이상에서 조건을 만족시키는 $a+b$의 최댓값은 10이다.

252

이차방정식의 근과 계수의 관계

(전략) 먼저 $f(4x-1)=0$의 두 근을 α, β로 나타낸다.

(풀이) 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을 α, β라 하면

$\alpha+\beta=3$

또, $f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$이므로 $f(4x-1)=0$이려면

$4x-1=\alpha$ 또는 $4x-1=\beta$

$\therefore x=\dfrac{\alpha+1}{4}$ 또는 $x=\dfrac{\beta+1}{4}$

따라서 이차방정식 $f(4x-1)=0$의 두 근의 합은

$\dfrac{\alpha+1}{4}+\dfrac{\beta+1}{4}=\dfrac{\alpha+\beta+2}{4}$

$=\dfrac{3+2}{4}=\dfrac{5}{4}$

(다른 풀이) 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근의 합이 3이므로

$f(x)=x^2-3x+k$ (k는 상수)

로 놓을 수 있다. 이때

$f(4x-1)=(4x-1)^2-3(4x-1)+k$

$=16x^2-8x+1-12x+3+k$

$=16x^2-20x+4+k$

이므로 이차방정식 $16x^2-20x+4+k=0$의 두 근의 합은
근과 계수의 관계에 의하여

$-\frac{-20}{16}=\frac{5}{4}$

1등급 비법

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 α, β일 때, 이차방정식
$f(ax+b)=0$ $(a\neq 0)$의 근은
$ax+b=\alpha$ 또는 $ax+b=\beta$ $\quad\therefore x=\frac{\alpha-b}{a}$ 또는 $x=\frac{\beta-b}{a}$

253

이차방정식의 근과 계수의 관계

(전략) 두 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 구하고 $\alpha^n+\beta^n$의 값을 구한다.

(풀이) 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 서로 다른 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-a$, $\alpha\beta=b$

이차방정식 $x^2+3ax+3b=0$의 서로 다른 두 근이 $\alpha+2$, $\beta+2$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$(\alpha+2)+(\beta+2)=-3a$에서

$\alpha+\beta+4=-3a$, $-a+4=-3a$

$\therefore a=-2$, 즉 $\alpha+\beta=2$

$(\alpha+2)(\beta+2)=3b$에서

$\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+4=3b$, $b+8=3b$

$\therefore b=4$, 즉 $\alpha\beta=4$

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=2^2-2\times4=-4$

$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=2^3-3\times4\times2=-16$

$\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2=(-4)^2-2\times4^2=-16$

$\alpha^5+\beta^5=(\alpha^3+\beta^3)(\alpha^2+\beta^2)-\alpha^2\beta^2(\alpha+\beta)$
$\qquad=(-16)\times(-4)-4^2\times2=32$

$\alpha^6+\beta^6=(\alpha^3+\beta^3)^2-2\alpha^3\beta^3=(-16)^2-2\times4^3=128$

$\alpha^7+\beta^7=(\alpha^4+\beta^4)(\alpha^3+\beta^3)-\alpha^3\beta^3(\alpha+\beta)$
$\qquad=(-16)\times(-16)-4^3\times2=128$

따라서 조건 (가), (나)를 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 6이다.

254

이차방정식의 풀이 ⊕ 이차방정식의 근의 판별 ⊕ 이차방정식의 근과 계수의 관계

(전략) 주어진 이차방정식의 두 근을 구하고, 이차방정식의 판별식과 근과 계수의 관계를 이용하여 두 근을 판별한다.

(풀이) ㄱ. $n=1$이면 $x^2-6x+5=0$이므로

$(x-1)(x-5)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=5$

따라서 두 근은 모두 자연수이다. (참)

ㄴ. 이차방정식 $x^2-2(n+2)x+n^2+4=0$의 판별식을 D라 할 때,

$\frac{D}{4}=\{-(n+2)\}^2-(n^2+4)$
$\qquad=4n>0$ ($\because$ n은 자연수)

따라서 주어진 이차방정식의 두 근은 서로 다른 실수이다. (참)

ㄷ. ㄴ에서 주어진 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가지므로 두 근을 α, β라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2(n+2)>0$

$\alpha\beta=n^2+4>0$

따라서 주어진 이차방정식의 두 근의 합과 곱이 모두 양수이므로 두 근은 모두 양수이다. (참)

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

255

이차방정식의 근과 계수의 관계 ⊕ 이차방정식의 켤레근

(전략) 이차방정식의 켤레근을 이용하여 다른 한 근을 구하고, 근과 계수의 관계와 켤레복소수의 성질을 이용한다.

(풀이) 이차방정식 $x^2-2x+10=0$의 계수가 모두 실수이고, α가 한 허근이므로 다른 한 근은 $\overline{\alpha}$이다.

이때 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\overline{\alpha}=2$, $\alpha\overline{\alpha}=10$

$$\therefore z\overline{z}=\frac{\alpha+1}{\alpha-1}\times\overline{\left(\frac{\alpha+1}{\alpha-1}\right)}$$
$$=\frac{\alpha+1}{\alpha-1}\times\frac{\overline{\alpha}+1}{\overline{\alpha}-1}$$
$$=\frac{(\alpha+1)(\overline{\alpha}+1)}{(\alpha-1)(\overline{\alpha}-1)}$$
$$=\frac{\alpha\overline{\alpha}+(\alpha+\overline{\alpha})+1}{\alpha\overline{\alpha}-(\alpha+\overline{\alpha})+1}$$
$$=\frac{10+2+1}{10-2+1}$$
$$=\frac{13}{9}$$

도전 1등급 최고난도

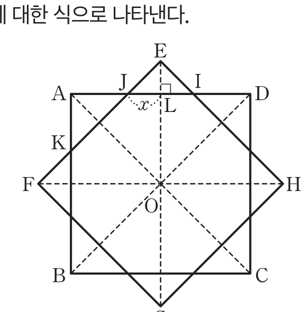
● 65쪽

256 50 **257** -35 **258** ③

256

이차방정식의 활용

(1단계) 꼭짓점 E에서 변 AD에 내린 수선의 발을 L이라 할 때, $\overline{\text{JL}}=x$로 놓고 $\triangle$EJI의 넓이를 x에 대한 식으로 나타낸다.



위 그림과 같이 꼭짓점 E에서 변 AD에 내린 수선의 발을 L이라 하고 $\overline{\text{JL}}=x$ $(x>0)$라 하자.

$\triangle$EJI는 직각이등변삼각형이므로 $\triangle$EJL도 직각이등변삼각형이다.
$\therefore \overline{EL}=x$

이때 $\triangle$EJI의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 2x\times x=x^2$

(2단계) 주어진 넓이의 비를 이용하여 x에 대한 이차방정식을 세우고 x의 값을 구한다.

$\overline{AL}=2\times\frac{1}{2}=1$이므로 $\overline{AJ}=1-x$

$\triangle$AKJ는 직각이등변삼각형이므로
$\overline{AK}=1-x$

이때 $\triangle$AKJ의 넓이는 $\frac{1}{2}\times(1-x)\times(1-x)=\frac{(1-x)^2}{2}$

$\triangle$AKJ의 넓이가 $\triangle$EJI의 넓이의 $\frac{3}{2}$배이므로

$\frac{(1-x)^2}{2}=\frac{3}{2}x^2$, $2x^2+2x-1=0$

$$\therefore x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\times2\times(-1)}}{2\times2}=\frac{-2\pm\sqrt{12}}{4}=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$$

이때 $x>0$이므로 $x=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$

(3단계) x의 값을 이용하여 k의 값을 구한 후 p, q의 값을 구한다.

정사각형 EFGH의 한 변의 길이가 $2k$이므로 $\overline{EG}=2\sqrt{2}k$

$\therefore \overline{OE}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}k=\sqrt{2}k$

$\overline{OE}=\overline{OL}+\overline{EL}$
$=1+x=1+\frac{-1+\sqrt{3}}{2}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

이므로 $\sqrt{2}k=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

$\therefore k=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

따라서 $p=\frac{1}{4}$, $q=\frac{1}{4}$이므로

$100(p+q)=100\times\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=50$

257

이차방정식의 근과 계수의 관계의 활용

(1단계) 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 α, β 사이의 관계식을 구한다.

이차방정식 $x^2-2x+7=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=7$

(2단계) $f(x)=ax^2+bx+c$로 놓고, 주어진 조건을 이용하여 α, β, a, b, c 사이의 관계식을 구한다.

$f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 실수, $a\neq0$)라 하면

$f(\alpha)=f(\beta)=\alpha\beta=7$에서

$f(\alpha)=a\alpha^2+b\alpha+c=7$ …… ㉠

$f(\beta)=a\beta^2+b\beta+c=7$ …… ㉡

$f(1)=1$에서 $f(1)=a+b+c=1$ …… ㉢

(3단계) a, b, c의 값을 구한다.

㉠+㉡을 하면

$a(\alpha^2+\beta^2)+b(\alpha+\beta)+2c=14$

$a\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}+b(\alpha+\beta)+2c=14$

$a(2^2-2\times7)+2b+2c=14$

$-10a+2b+2c=14$

$\therefore 5a-b-c=-7$ …… ㉣

㉠−㉡을 하면

$a(\alpha^2-\beta^2)+b(\alpha-\beta)=0$

$a(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)+b(\alpha-\beta)=0$

$(\alpha-\beta)\{a(\alpha+\beta)+b\}=0$

이때 $\alpha\neq\beta$이므로 $a(\alpha+\beta)+b=0$

$2a+b=0$ $\therefore b=-2a$

$b=-2a$를 ㉢, ㉣에 각각 대입하면

$a+(-2a)+c=1$, $5a-(-2a)-c=-7$

$\therefore a-c=-1$, $7a-c=-7$

두 식을 연립하여 풀면

$a=-1$, $c=0$

$a=-1$을 $b=-2a$에 대입하면

$b=2$

(4단계) $f(\alpha+\beta-\alpha\beta)$의 값을 구한다.

따라서 $f(x)=-x^2+2x$이므로

$f(\alpha+\beta-\alpha\beta)=f(-5)$
$=-(-5)^2+2\times(-5)$
$=-25-10=-35$

참고 이차방정식 $x^2-2x+7=0$의 판별식을 D라 할 때,

$\frac{D}{4}=(-1)^2-7=-6<0$

이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

$\therefore \alpha\neq\beta$

다른 풀이 이차방정식 $x^2-2x+7=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=7$

$f(\alpha)=f(\beta)=\alpha\beta=7$에서

$f(\alpha)-7=0$, $f(\beta)-7=0$

즉, α, β는 이차방정식 $f(x)-7=0$의 두 근이므로

$f(x)-7=a(x-\alpha)(x-\beta)$ $(a\neq0)$

로 놓을 수 있다.

$\therefore f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)+7$
$=a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}+7$
$=a(x^2-2x+7)+7$
$=ax^2-2ax+7a+7$

이때 $f(1)=1$이므로

$a-2a+7a+7=1$, $6a+7=1$

$\therefore a=-1$

따라서 $f(x)=-x^2+2x$이므로

$f(\alpha+\beta-\alpha\beta)=f(-5)$
$=-(-5)^2+2\times(-5)$
$=-25-10=-35$

258

이차방정식의 근과 계수의 관계의 활용

(1단계) 도형의 닮음을 이용하여 $\alpha+\beta$의 값을 구한다.

$\triangle$PBQ$\backsim\triangle$ABH (AA 닮음)이므로

$\overline{BQ}:\overline{BH}=\overline{PQ}:\overline{AH}$, $\overline{BQ}:\alpha=\frac{5}{7}:1$

$\therefore \overline{BQ}=\frac{5}{7}\alpha$

$\triangle$SCR$\backsim\triangle$ACH (AA 닮음)이므로

$\overline{CR}:\overline{CH}=\overline{SR}:\overline{AH}$, $\overline{CR}:\beta=\frac{5}{7}:1$

$\therefore \overline{CR}=\frac{5}{7}\beta$

이때 □PQRS는 정사각형이므로 $\overline{QR}=\overline{PQ}=\frac{5}{7}$

$\overline{BC}=\overline{BQ}+\overline{QR}+\overline{RC}=\frac{5}{7}\alpha+\frac{5}{7}+\frac{5}{7}\beta$이고

$\overline{BC}=\overline{BH}+\overline{CH}=\alpha+\beta$이므로

$\frac{5}{7}(\alpha+\beta)+\frac{5}{7}=\alpha+\beta \qquad \therefore \alpha+\beta=\frac{5}{2}$

(2단계) 도형의 닮음과 $\overline{AP}\times\overline{AS}=\frac{2\sqrt{26}}{49}$임을 이용하여 $\alpha\beta$의 값을 구한다.

두 직각삼각형 ABH와 ACH에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AB}=\sqrt{\alpha^2+1}$, $\overline{AC}=\sqrt{\beta^2+1}$이므로

$\overline{AP}=\frac{2}{7}\overline{AB}=\frac{2}{7}\sqrt{\alpha^2+1}$

$\overline{AS}=\frac{2}{7}\overline{AC}=\frac{2}{7}\sqrt{\beta^2+1}$

이때 $\overline{AP}\times\overline{AS}=\frac{2\sqrt{26}}{49}$에서

$\frac{2}{7}\sqrt{\alpha^2+1}\times\frac{2}{7}\sqrt{\beta^2+1}=\frac{2\sqrt{26}}{49}$

$\therefore \sqrt{(\alpha^2+1)(\beta^2+1)}=\frac{\sqrt{26}}{2}$

위의 식의 양변을 제곱하면

$$\begin{aligned}(\alpha^2+1)(\beta^2+1)&=\alpha^2\beta^2+\alpha^2+\beta^2+1\\&=(\alpha+\beta)^2+(\alpha\beta-1)^2\\&=\left(\frac{5}{2}\right)^2+(\alpha\beta-1)^2=\frac{13}{2}\end{aligned}$$

즉, $(\alpha\beta-1)^2=\frac{1}{4}$에서 $\alpha\beta-1=\frac{1}{2}$ 또는 $\alpha\beta-1=-\frac{1}{2}$

이므로 $\alpha\beta=\frac{3}{2}$ 또는 $\alpha\beta=\frac{1}{2}$

(3단계) 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 a, b의 값을 구한다.

이차방정식 $x^2-ax+b=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$a=\alpha+\beta=\frac{5}{2}$이고

$b=\alpha\beta$에서 $b=\frac{3}{2}$ 또는 $b=\frac{1}{2}$이므로

$a+b=\frac{5}{2}+\frac{3}{2}=4$ 또는 $a+b=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}=3$

따라서 $a+b$의 최댓값은 4이다.

06 이차방정식과 이차함수

유형 분석 기출

67쪽 ~ 73쪽

259 ③	260 ②	261 ⑤	262 6	263 ②
264 ①	265 ①	266 16	267 ③	268 ④
269 -23	270 ②	271 11	272 ②	273 ④
274 1	275 ②	276 0	277 ④	278 -4
279 ①	280 4	281 ①	282 ①	283 ①
284 ③	285 ⑤	286 -3	287 -1	288 63
289 ③	290 ②	291 ②	292 24	293 20
294 $4\sqrt{2}$	295 ②	296 350원	297 ④	298 ②

259

이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 두 교점의 x좌표가 0, 2이므로 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 0, 2이다.

이때 x^2의 계수는 1이므로

$f(x)=x(x-2)$

$\therefore f(3)=3\times(3-2)=3$

260

이차함수 $y=x^2-ax+b$의 그래프와 x축의 두 교점의 x좌표가 -1, 6이므로 이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 두 근이 -1, 6이다.

근과 계수의 관계에 의하여

$-1+6=a \qquad \therefore a=5$

$(-1)\times 6=b \qquad \therefore b=-6$

이차함수 $y=x^2-bx+a$, 즉 $y=x^2+6x+5$의 그래프와 x축이 만나는 점의 x좌표는 이차방정식 $x^2+6x+5=0$의 두 근이므로

$(x+5)(x+1)=0 \qquad \therefore x=-5$ 또는 $x=-1$

따라서 이차함수 $y=x^2+6x+5$의 그래프와 x축은 두 점 $(-5, 0)$, $(-1, 0)$에서 만나므로 두 점 사이의 거리는

$-1-(-5)=4$

261

두 점 A, B의 x좌표를 각각 α, β라 하면 α, β는 이차방정식 $x^2+6x+k=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-6$, $\alpha\beta=k$

이때 $\overline{AB}=7$이므로 $|\alpha-\beta|=7$

양변을 제곱하면 $(\alpha-\beta)^2=49$

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$이므로

$49=(-6)^2-4k$, $4k=-13$

$\therefore k=-\frac{13}{4}$

다른 풀이 $\overline{AB}=7$이므로 A$(a, 0)$, B$(a+7, 0)$이라 하자.

이때 이차방정식 $x^2+6x+k=0$의 두 근이 a, $a+7$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$a+(a+7)=-6$ …… ㉠

$a(a+7)=k$ …… ㉡

㉠에서 $2a+7=-6$ $\therefore a=-\frac{13}{2}$

$a=-\frac{13}{2}$을 ㉡에 대입하면

$k=\left(-\frac{13}{2}\right)\times\left(-\frac{13}{2}+7\right)$

$=\left(-\frac{13}{2}\right)\times\frac{1}{2}=-\frac{13}{4}$

262

이차함수 $y=x^2+ax+9$의 그래프가 x축과 접하려면 이차방정식 $x^2+ax+9=0$이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D라 할 때,

$D=a^2-4\times9=0$

$a^2=36$ $\therefore a=6$ ($\because a>0$)

263

이차함수 $y=x^2+2kx+k^2+k-6$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나려면 이차방정식 $x^2+2kx+k^2+k-6=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 판별식을 D라 할 때,

$\frac{D}{4}=k^2-(k^2+k-6)>0$

$-k+6>0$ $\therefore k<6$

따라서 정수 k의 최댓값은 5이다.

264

이차함수 $y=x^2+px+q$의 그래프가 점 $(1, 1)$을 지나므로

$1=1+p+q$ $\therefore q=-p$ …… ㉠

또, 이 이차함수의 그래프가 x축에 접하려면 이차방정식 $x^2+px+q=0$이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D라 할 때,

$D=p^2-4q=0$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $p^2+4p=0$

$p(p+4)=0$ $\therefore p=-4$ ($\because p\neq0$)

$pq\neq0$에서 $p\neq0$, $q\neq0$

$p=-4$를 ㉠에 대입하면 $q=4$

$\therefore 2p+q=2\times(-4)+4=-4$

265

x^2의 계수가 1이므로 $f(x)=x^2+ax+b$라 하자.

$f(-1)=f(3)$이므로 $1-a+b=9+3a+b$

$4a=-8$ $\therefore a=-2$

이차함수 $y=x^2-2x+b$의 그래프가 x축과 한 점에서 만나므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 접한다.

이차방정식 $x^2-2x+b=0$의 판별식을 D라 할 때,

$\frac{D}{4}=(-1)^2-b=0$

$1-b=0$ $\therefore b=1$

따라서 $f(x)=x^2-2x+1$이므로

$f(2)=2^2-2\times2+1=1$

266

이차함수 $y=x^2-(2k+a)x+k^2+bk+4$의 그래프가 x축에 접하려면 이차방정식 $x^2-(2k+a)x+k^2+bk+4=0$이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D라 할 때,

$D=\{-(2k+a)\}^2-4(k^2+bk+4)=0$

$4(a-b)k+a^2-16=0$

이 등식이 k에 대한 항등식이므로

$a-b=0$, $a^2-16=0$

$a^2-16=0$에서 $(a+4)(a-4)=0$

$\therefore a=-4$ 또는 $a=4$

$a=-4$를 $a-b=0$에 대입하면

$-4-b=0$ $\therefore b=-4$

$a=4$를 $a-b=0$에 대입하면

$4-b=0$ $\therefore b=4$

$\therefore a=-4$, $b=-4$ 또는 $a=4$, $b=4$

$\therefore ab=16$

1등급 비법

'등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립한다.'는 조건이 주어지면 다음과 같은 순서로 문제를 해결한다.

(i) 등식의 모든 항을 좌변으로 이항한다.

(ii) k를 포함하는 항끼리 묶어 ▒$\times k+$▲$=0$ 꼴로 만든다.

(iii) ▒$=0$, ▲$=0$이 되도록 하는 미지수의 값을 구한다.

267

이차함수 $y=x^2+3x-k$의 그래프와 직선 $y=x-2$가 만나지 않으려면 이차방정식 $x^2+3x-k=x-2$, 즉 $x^2+2x-k+2=0$이 서로 다른 두 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $x^2+2x-k+2=0$의 판별식을 D라 할 때,

$\frac{D}{4}=1^2-(-k+2)<0$

$-1+k<0$ $\therefore k<1$

개념 보충

이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$가 만나지 않는다.

⇨ 이차방정식 $f(x)=g(x)$, 즉 $f(x)-g(x)=0$이 서로 다른 두 허근을 갖는다.

⇨ 이차방정식 $f(x)-g(x)=0$의 판별식을 D라 하면 $D<0$이다.

268

이차함수 $y=x^2-5x+3k$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 만나려면 이차방정식 $x^2-5x+3k=x+k$, 즉 $x^2-6x+2k=0$이 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $x^2-6x+2k=0$의 판별식을 D라 할 때,

$\frac{D}{4}=(-3)^2-2k\geq0$

$9-2k\geq0$ $\therefore k\leq\frac{9}{2}$

따라서 정수 k의 최댓값은 4이다.

269

직선 $y=ax+b$가 직선 $y=-3x+1$과 평행하므로

$a=-3$

직선 $y=-3x+b$가 이차함수 $y=x^2+5x-4$의 그래프와 접하므로 이차방정식 $x^2+5x-4=-3x+b$, 즉 $x^2+8x-4-b=0$의 판별식을 D라 할 때,

$\frac{D}{4}=4^2-(-4-b)=0$

$20+b=0 \qquad \therefore b=-20$

$\therefore a+b=-3+(-20)=-23$

270

점 $(2, 2)$를 지나는 직선의 방정식을 $y=a(x-2)+2$라 하자.

이 직선이 이차함수 $y=x^2+6x+13$의 그래프에 접하므로 이차방정식 $x^2+6x+13=a(x-2)+2$, 즉 $x^2+(6-a)x+2a+11=0$의 판별식을 D라 할 때,

$D=(6-a)^2-4(2a+11)=0$

$\therefore a^2-20a-8=0$

이 이차방정식의 두 실근을 α, β라 하면 α, β는 두 직선의 기울기이므로 구하는 기울기의 곱은 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha\beta=-8$

참고 이차방정식 $a^2-20a-8=0$의 판별식을 D'이라 할 때,

$\frac{D'}{4}=(-10)^2-(-8)=108>0$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

271

$f(x)=x^2+ax-(b-7)^2$

$\quad=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}-(b-7)^2$

조건 (가)에서 이차함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 최솟값을 가지므로

$-\frac{a}{2}=-1 \qquad \therefore a=2$

조건 (나)에서 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=cx$가 한 점에서 만나므로 이차방정식 $x^2+ax-(b-7)^2=cx$, 즉 $x^2+(a-c)x-(b-7)^2=0$의 판별식을 D라 할 때,

$D=(a-c)^2+4(b-7)^2=0$

이때 $(a-c)^2\ge0$, $4(b-7)^2\ge0$이므로

$(a-c)^2=0$, $4(b-7)^2=0$

따라서 $a=c=2$, $b=7$이므로

$a+b+c=2+7+2=11$

272

이차함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프와 직선 $y=4x+4$가 접하므로 이차방정식 $x^2+ax+b=4x+4$, 즉 $x^2+(a-4)x+b-4=0$의 판별식을 D_1이라 할 때,

$D_1=(a-4)^2-4(b-4)=0$

$\therefore a^2-8a-4b+32=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$

또, 이차함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프와 직선 $y=-6x-11$이 접하므로 이차방정식 $x^2+ax+b=-6x-11$, 즉 $x^2+(a+6)x+b+11=0$의 판별식을 D_2라 할 때,

$D_2=(a+6)^2-4(b+11)=0$

$\therefore a^2+12a-4b-8=0 \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉠$-$㉡을 하면

$-20a+40=0 \qquad \therefore a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면 $2^2-8\times2-4b+32=0$

$-4b=-20 \qquad \therefore b=5$

$\therefore ab=2\times5=10$

273

이차함수 $y=x^2+ax+3$의 그래프와 직선 $y=2x+b$의 교점의 x좌표는 이차방정식 $x^2+ax+3=2x+b$, 즉 $x^2+(a-2)x+3-b=0$의 실근과 같다.

따라서 이차방정식의 두 근이 -1, 2이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$-1+2=-(a-2) \qquad \therefore a=1$

$(-1)\times2=3-b \qquad \therefore b=5$

$\therefore b-a=5-1=4$

다른 풀이 이차함수의 그래프와 직선의 교점은 이차함수 $y=x^2+ax+3$의 그래프 위의 점이고, 교점의 x좌표가 각각 -1, 2이므로

$x=-1$일 때, $y=(-1)^2+a\times(-1)+3=-a+4$

$x=2$일 때, $y=2^2+a\times2+3=2a+7$

즉, 교점의 좌표는

$(-1, -a+4)$, $(2, 2a+7)$

이때 직선 $y=2x+b$가 두 점 $(-1, -a+4)$, $(2, 2a+7)$을 지나므로

$-a+4=-2+b \qquad \therefore a+b=6 \qquad \cdots\cdots ㉠$

$2a+7=4+b \qquad \therefore 2a-b=-3 \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=5$

$\therefore b-a=5-1=4$

274

이차함수 $y=x^2-4x+2$의 그래프와 직선 $y=ax+b$의 교점의 x좌표는 이차방정식 $x^2-4x+2=ax+b$, 즉 $x^2-(a+4)x+2-b=0$의 실근과 같다.

이때 a, b가 유리수이므로 이 이차방정식의 한 근이 $2+\sqrt{3}$이면 다른 한 근은 $2-\sqrt{3}$이다.

계수가 모두 유리수인 이차방정식의 한 근이 $p+q\sqrt{m}$이면 다른 한 근은 $p-q\sqrt{m}$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=a+4$

$\therefore a=0$

$(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=2-b$

$1=2-b \qquad \therefore b=1$

$\therefore a+b=0+1=1$

오답 피하기 '계수가 유리수'라는 조건이 없으면 이차방정식의 한 근이 $2+\sqrt{3}$일 때, 다른 한 근을 $2-\sqrt{3}$이라 할 수 없다.

275

이차함수 $y=2x^2-3x+a$의 그래프와 직선 $y=3x+7$의 두 교점의 x좌표는 이차방정식 $2x^2-3x+a=3x+7$, 즉 $2x^2-6x+a-7=0$의 실근과 같다.
이차방정식의 두 근을 α, β라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha\beta=\dfrac{a-7}{2}$

이때 두 교점의 x좌표의 곱이 -4, 즉 $\alpha\beta=-4$이므로

$-4=\dfrac{a-7}{2}$, $-8=a-7$

$\therefore a=-1$

276

이차함수 $y=x^2-mx+n$의 그래프와 직선 $y=2x+2$의 교점의 x좌표는 이차방정식 $x^2-mx+n=2x+2$, 즉 $x^2-(m+2)x+n-2=0$의 실근과 같다.
이때 이차방정식의 두 근이 a, b이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$a+b=m+2$
또, 이차함수 $y=x^2-mx+n$의 그래프와 직선 $y=2x-1$의 교점의 x좌표는 이차방정식 $x^2-mx+n=2x-1$, 즉 $x^2-(m+2)x+n+1=0$의 실근과 같다.
이때 이차방정식의 두 근이 c, d이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$c+d=m+2$

$$\begin{aligned}\therefore a+b-c-d&=(a+b)-(c+d)\\&=(m+2)-(m+2)=0\end{aligned}$$

277

이차함수 $y=x^2$의 그래프와 직선 $y=mx+1$의 두 교점 A, B의 x좌표는 이차방정식 $x^2=mx+1$, 즉 $x^2-mx-1=0$의 실근과 같다.
이 이차방정식의 두 근을 α, β라 하면
$\mathrm{C}(\alpha, 0)$, $\mathrm{D}(\beta, 0)$
이때 $\overline{\mathrm{CD}}=4$이므로
$|\alpha-\beta|=4$
또, 이차방정식 $x^2-mx-1=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=m$, $\alpha\beta=-1$
$(\alpha+\beta)^2=(\alpha-\beta)^2+4\alpha\beta$이므로
$m^2=4^2+4\times(-1)=12 \qquad \therefore m=\pm2\sqrt{3}$
이때 $m>0$이므로 $m=2\sqrt{3}$

278

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 아래로 볼록하고 x축과 두 점 $(-1, 0)$, $(3, 0)$에서 만나므로 $f(x)=a(x+1)(x-3)$ $(a>0)$이라 하면

$$\begin{aligned}f(x+1)&=a(x+1+1)(x+1-3)\\&=a(x+2)(x-2)\end{aligned}$$

따라서 이차방정식 $f(x+1)=0$의 두 실근은 $x=-2$ 또는 $x=2$이므로 두 실근의 곱은
$(-2)\times2=-4$

다른 풀이 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 -1, 3이므로
$f(-1)=0$, $f(3)=0$
이때 $f(x+1)=0$이려면
$x+1=-1$ 또는 $x+1=3$
$\therefore x=-2$ 또는 $x=2$
따라서 이차방정식 $f(x+1)=0$의 두 실근은 -2, 2이므로 두 실근의 곱은
$(-2)\times2=-4$

279

이차방정식 $f(x)-g(x)=0$, 즉 $f(x)=g(x)$의 실근은 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$의 교점의 x좌표와 같다.
주어진 그래프에서 이차함수의 그래프와 직선의 교점의 x좌표가 -5, 2이므로 이차방정식 $f(x)-g(x)=0$의 실근은
$x=-5$ 또는 $x=2$
따라서 모든 실근의 합은
$-5+2=-3$

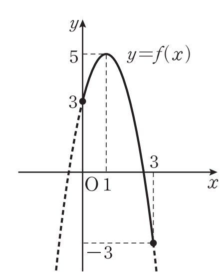
280

이차방정식 $f(x)-g(x)=0$, 즉 $f(x)=g(x)$의 두 실근은 두 이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표와 같다.
두 그래프의 두 교점의 x좌표는 0, 2이므로
$\alpha=0$, $\beta=2$ 또는 $\alpha=2$, $\beta=0$
$\therefore \alpha^2+\beta^2=4$

281

$$\begin{aligned}f(x)&=-2x^2+4x+3\\&=-2(x-1)^2+5\end{aligned}$$

$0\le x\le3$에서 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로
$x=1$일 때 최댓값 5,
$x=3$일 때 최솟값 -3
을 갖는다.
따라서 최댓값과 최솟값의 곱은
$5\times(-3)=-15$



1등급 비법

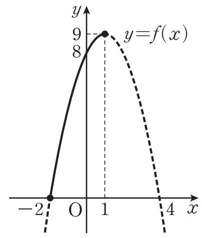
제한된 범위에서 이차함수의 최대·최소를 구할 때는 먼저 그래프를 그린 후, 꼭짓점의 위치를 파악하도록 한다.

282

이차함수 $f(x)=-x^2+ax+b$의 그래프와 x축의 두 교점의 x좌표는 -2, 4이므로 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 -2, 4이다.
이때 x^2의 계수는 -1이므로

$$\begin{aligned}f(x)&=-(x+2)(x-4)\\&=-x^2+2x+8\\&=-(x-1)^2+9\end{aligned}$$

$-2 \le x \le 1$에서 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x=1$일 때 최댓값 9,
$x=-2$일 때 최솟값 0
을 갖는다.
따라서 최댓값과 최솟값의 합은
$9+0=9$

283

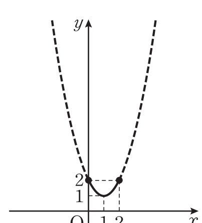
$f(x)=x^2-2x+3=(x-1)^2+2$
$1 \le x \le 5$에서 이차함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 최솟값 2를 갖는다.
$g(x)=-x^2+4x+k=-(x-2)^2+k+4$
$1 \le x \le 5$에서 이차함수 $g(x)$는 $x=2$일 때 최댓값 $k+4$를 갖는다.
따라서 $2=k+4$이므로
$k=-2$

284

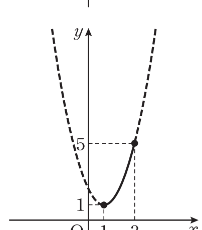
$p=-1$일 때, $f(x)=x^2+4x=(x+2)^2-4$
$0 \le x \le 2$에서 이차함수 $f(x)$는 $x=0$일 때 최솟값 0을 갖는다.
$\therefore\ g(-1)=0$
$p=\frac{1}{2}$일 때, $f(x)=x^2-2x=(x-1)^2-1$
$0 \le x \le 2$에서 이차함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 최솟값 -1을 갖는다.
$\therefore\ g\left(\frac{1}{2}\right)=-1$
$\therefore\ g(-1)+g\left(\frac{1}{2}\right)=0+(-1)=-1$

285

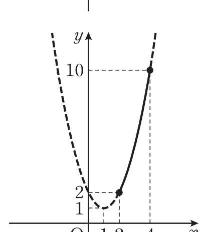
$f(x)=x^2-2x+2=(x-1)^2+1$
$a=0$일 때, $0 \le x \le 2$에서 이차함수 $f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=0$ 또는 $x=2$일 때, 최댓값 2를 갖는다.
$\therefore\ M(0)=2$



$a=1$일 때, $1 \le x \le 3$에서 이차함수 $f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=3$일 때, 최댓값 5를 갖는다.
$\therefore\ M(1)=5$



$a=2$일 때, $2 \le x \le 4$에서 이차함수 $f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=4$일 때, 최댓값 10을 갖는다.
$\therefore\ M(2)=10$



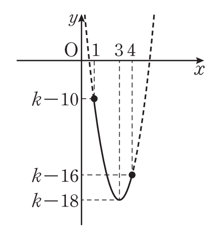
$\therefore\ M(0)+M(1)+M(2)=2+5+10=17$

1등급 비법

제한된 범위에서 이차함수의 최대 · 최소를 구할 때는
① 꼭짓점의 x좌표가 제한된 범위에 포함되어 있는 경우 제한된 범위의 양 끝, 꼭짓점의 x좌표를 대입한 함숫값에 최댓값과 최솟값이 존재한다.
② 꼭짓점의 x좌표가 제한된 범위에 포함되어 있지 않는 경우 제한된 범위의 양 끝의 x좌표를 대입한 함숫값에 최댓값과 최솟값이 존재한다.

286

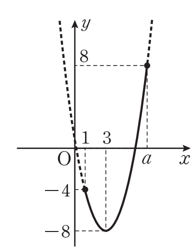
$y=2x^2-12x+k$
$\quad=2(x-3)^2+k-18$
$1 \le x \le 4$에서 주어진 이차함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x=1$일 때 최댓값 $k-10$,
$x=3$일 때 최솟값 $k-18$
을 갖는다.
이때 최솟값이 -11이므로
$k-18=-11 \qquad \therefore\ k=7$
따라서 구하는 최댓값은
$k-10=7-10=-3$

287

$y=x^2-6x+1$
$\quad=(x-3)^2-8$
$1 \le x \le a$에서 이차함수 $y=x^2-6x+1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $x=a$일 때 최댓값 8을 갖는다.



즉, $a^2-6a+1=8$에서
$a^2-6a-7=0,\ (a+1)(a-7)=0$
$\therefore\ a=7\ (\because\ a>1)$
또, $x=3$일 때 최솟값 -8을 가지므로
$b=-8$
$\therefore\ a+b=7+(-8)=-1$

288

조건 (가)에서 방정식 $f(x)=0$의 두 근이 1, 5이므로
$f(x)=a(x-1)(x-5)\ (a \ne 0)$라 하면
$f(x)=a(x-1)(x-5)$
$\quad=a(x^2-6x+5)$
$\quad=a(x-3)^2-4a$
$-4 \le x \le -1$에서 이차함수 $f(x)$의 최솟값이 양수이므로
$a>0$
즉, $-4 \le x \le -1$에서 이차함수 $f(x)$는 $x=-1$일 때 최솟값 $12a$를 가지므로
$12a=36 \qquad \therefore\ a=3$
따라서 $f(x)=3(x-3)^2-12$이므로
$f(8)=3 \times 5^2-12=63$

289

$f(x)=x^2-2kx+3=(x-k)^2+3-k^2$

(i) $k<0$일 때,

$0\le x\le 4$에서 이차함수 $f(x)$는 $x=0$일 때 최솟값 3을 가지므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $0\le k\le 4$일 때,

$0\le x\le 4$에서 이차함수 $f(x)$는 $x=k$일 때 최솟값 $3-k^2$을 가지므로

$3-k^2=-6,\ k^2=9 \qquad \therefore k=\pm 3$

그런데 $0\le k\le 4$이므로 $k=3$

(iii) $k>4$일 때,

$0\le x\le 4$에서 이차함수 $f(x)$는 $x=4$일 때 최솟값 $19-8k$를 가지므로

$19-8k=-6,\ 8k=25 \qquad \therefore k=\frac{25}{8}$

그런데 $k>4$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

이상에서 $k=3$

290

$2x^2-8x+y^2-6y+5$

$=2(x^2-4x+4)+(y^2-6y+9)-8-9+5$

$=2(x-2)^2+(y-3)^2-12$

이때 $x,\ y$가 실수이므로

$(x-2)^2\ge 0,\ (y-3)^2\ge 0$

$\therefore 2x^2-8x+y^2-6y+5\ge -12$

따라서 주어진 식은 $x=2,\ y=3$일 때 최솟값 -12를 갖는다.

1등급 비법

실수 x, y에 대하여 $ax^2+by^2+cx+dy+e$의 최대 · 최소를 구할 때는 $a(x-m)^2+b(y-n)^2+k$ 꼴로 변형한 후, $(\text{실수})^2\ge 0$임을 이용한다.

⇨ $x=m,\ y=n$일 때, 최댓값 또는 최솟값은 k이다.

291

$x^2+2ax+y^2+2by+k$

$=(x+a)^2+(y+b)^2+k-a^2-b^2$

이때 $x,\ y$가 실수이므로

$(x+a)^2\ge 0,\ (y+b)^2\ge 0$

$\therefore x^2+2ax+y^2+2by+k\ge k-a^2-b^2$

즉, 주어진 식은 $x=-a,\ y=-b$일 때 최솟값 $k-a^2-b^2$을 가지므로

$a=2,\ b=-1$

또, $k-a^2-b^2=10$에서 $k-4-1=10$

$\therefore k=15$

$\therefore a+b+k=2+(-1)+15=16$

292

$x+y=3$에서 $y=3-x$ …… ㉠

이때 $x\ge 0,\ y\ge 0$이므로 $x\ge 0,\ 3-x\ge 0$

$\therefore 0\le x\le 3$

㉠을 $2x^2+y^2$에 대입하면

$2x^2+y^2=2x^2+(3-x)^2$

$=3x^2-6x+9$

$=3(x-1)^2+6$

$0\le x\le 3$에서 주어진 식은 $x=3$일 때 최댓값 18, $x=1$일 때 최솟값 6을 갖는다.

따라서 최댓값과 최솟값의 합은

$18+6=24$

1등급 비법

조건식이 주어진 이차식의 최대 · 최소는 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) 주어진 조건식을 한 문자에 대하여 풀고, 문자의 값의 범위를 구한다.

(ii) (i)의 식을 이차식에 대입하여 한 문자에 대한 이차식으로 나타낸다.

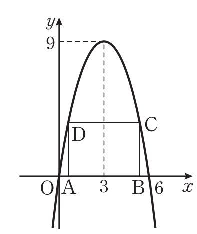
(iii) (ii)의 식을 완전제곱식의 꼴로 변형하여 최댓값 또는 최솟값을 구한다.

293

$y=-x^2+6x$

$=-(x-3)^2+9$

오른쪽 그림에서 $A(t,\ 0)\ (0<t<3)$이라 하면



$B(6-t,\ 0)$

$D(t,\ -t^2+6t)$

$C(6-t,\ -t^2+6t)$

이때 직사각형 ABCD의 둘레의 길이를 $l(t)$라 하면

$l(t)=2[\{(6-t)-t\}+(-t^2+6t)]$

$=2(-t^2+4t+6)$

$=-2(t-2)^2+20\ (0<t<3)$

$0<t<3$에서 $l(t)$는 $t=2$일 때 최댓값 20을 갖는다.

따라서 직사각형 ABCD의 둘레의 길이의 최댓값은 20이다.

294

직각삼각형에서 직각을 낀 두 변의 길이를 각각 $a,\ b$라 하면

$a+b=8 \qquad \therefore b=8-a$

이때 빗변의 길이는 $\sqrt{a^2+b^2}$이므로

$a^2+b^2=a^2+(8-a)^2$

$=2a^2-16a+64$

$=2(a-4)^2+32$

이때 a^2+b^2은 $a=4$일 때 최솟값 32를 갖는다.

따라서 빗변의 길이의 최솟값은

$\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

295

t초 후의 두 점 A, B의 좌표는

$A(6-2t,\ 0),\ B(0,\ 2t)$

이때 직사각형 OACB의 넓이를 $S(t)$라 하면

$$S(t)=(6-2t)\times 2t$$
$$=-4t^2+12t$$
$$=-4\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+9\ (0<t<3)$$

$0<t<3$에서 $S(t)$는 $t=\frac{3}{2}$일 때 최댓값 9를 갖는다.

따라서 직사각형 OACB의 넓이의 최댓값은 9이다.

296

구운 달걀 한 개의 판매 가격을 $10x$원 내려서 판다고 하면 판매 가격은

$(450-10x)$원

이때 구운 달걀 한 개의 원가는 $6000\div 30=200$(원)이므로 구운 달걀 한 개의 순이익은

$(450-10x)-200=250-10x$(원) $(x<25)$

판매량은 $(100+20x)$개이므로 달걀 판매의 하루 순이익을 $f(x)$원이라 하면

$$f(x)=(250-10x)(100+20x)$$
$$=-200x^2+4000x+25000$$
$$=-200(x-10)^2+45000\ (0\le x<25)$$

따라서 $0\le x<25$에서 $f(x)$는 $x=10$일 때 최댓값 45000을 갖는다. 따라서 순이익을 최대로 하기 위한 구운 달걀 한 개의 판매 가격은 350원이다.

1등급 비법

이차함수의 최대·최소의 활용 문제의 경우 미지수를 어떤 값으로 할지 정하고 그 정한 미지수의 범위를 반드시 구해야 한다.

297

반지름의 길이가 1일 때 밑면의 넓이는 $\pi\times 1^2=\pi$이므로 t초 후의 원뿔의 밑면의 넓이는

$\pi+\pi t=(t+1)\pi\ (0\le t<9)$

t초 후의 높이는 $9-t$이므로 원뿔의 부피를 $V(t)$라 하면

$$V(t)=\frac{1}{3}\times(t+1)\pi\times(9-t)$$
$$=\frac{\pi}{3}(-t^2+8t+9)$$
$$=\frac{\pi}{3}\{-(t-4)^2+25\}$$

$0\le t<9$에서 $V(t)$는 $t=4$일 때 최댓값 $\frac{25}{3}\pi$를 갖는다.

따라서 원뿔의 부피의 최댓값은 $\frac{25}{3}\pi$이다.

298

직선 $x=t$가 두 이차함수 $y=2x^2+1$, $y=-(x-3)^2+1$의 그래프와 만나는 두 점 P, Q의 좌표는

$\mathrm{P}(t,\ 2t^2+1)$, $\mathrm{Q}(t,\ -(t-3)^2+1)$

$\overline{\mathrm{PQ}}=2t^2+(t-3)^2=3t^2-6t+9$

$\mathrm{A}(0,\ 1)$, $\mathrm{B}(3,\ 1)$이므로 $\overline{\mathrm{AB}}=3$

$\overline{\mathrm{AB}}\perp\overline{\mathrm{PQ}}$이므로 사각형 PAQB의 넓이를 $S(t)$라 하면

$$S(t)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{PQ}}$$
$$=\frac{1}{2}\times 3\times(3t^2-6t+9)$$
$$=\frac{9}{2}(t^2-2t+3)$$
$$=\frac{9}{2}\{(t-1)^2+2\}$$

$0<t<3$에서 $S(t)$는 $t=1$일 때 최솟값 9를 갖는다.

따라서 사각형 PAQB의 넓이의 최솟값은 9이다.

내신 적중 서술형

74쪽

299 16 **300** $a=-5$, $b=4$ **301** 12

302 (1) $0\le t\le 3$ (2) $y=(t-1)^2+2\ (0\le t\le 3)$ (3) 12

299

이차함수 $y=x^2+2(k-3)x+k^2-1$의 그래프가 x축과 만나지 않으려면 이차방정식 $x^2+2(k-3)x+k^2-1=0$이 서로 다른 두 허근을 가져야 하므로 판별식을 D_1이라 할 때,

$$\frac{D_1}{4}=(k-3)^2-(k^2-1)<0$$

$-6k+10<0 \quad \therefore k>\frac{5}{3}$ …… ㉠ …… ㉮

이차함수 $y=x^2-2kx+16k$의 그래프가 x축과 접하려면 이차방정식 $x^2-2kx+16k=0$이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D_2라 할 때,

$$\frac{D_2}{4}=(-k)^2-16k=0$$

$k(k-16)=0$

$\therefore k=0$ 또는 $k=16$ …… ㉡ …… ㉯

㉠, ㉡에서 $k=16$ …… ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ $y=x^2+2(k-3)x+k^2-1$의 그래프가 x축과 만나지 않을 조건을 이용하여 k의 값의 범위 구하기	40 %
㉯ $y=x^2-2kx+16k$의 그래프가 x축과 접할 조건을 이용하여 k의 값 구하기	40 %
㉰ k의 값 구하기	20 %

300

이차함수 $y=x^2-4x+5$의 그래프가 직선 $y=-2x+b$에 접하므로 이차방정식 $x^2-4x+5=-2x+b$, 즉 $x^2-2x+5-b=0$의 판별식을 D_1이라 할 때,

$$\frac{D_1}{4}=(-1)^2-(5-b)=0$$

$b-4=0$ $\quad\therefore b=4$ …… ㉮

이차함수 $y=-x^2+4x+a$의 그래프가 직선 $y=-2x+4$에 접하므로 이차방정식 $-x^2+4x+a=-2x+4$, 즉 $x^2-6x+4-a=0$의 판별식을 D_2라 할 때,

$\frac{D_2}{4}=(-3)^2-(4-a)=0$

$a+5=0$ $\quad\therefore a=-5$ …… ㉯

채점 기준	배점 비율
㉮ $y=x^2-4x+5$의 그래프가 직선 $y=-2x+b$에 접하는 조건을 이용하여 b의 값 구하기	50 %
㉯ $y=-x^2+4x+a$의 그래프가 직선 $y=-2x+4$에 접하는 조건을 이용하여 a의 값 구하기	50 %

301

이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 α, β이므로

$f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)$ (a는 실수)라 하면

$f\left(\frac{x+1}{2}\right)=a\left(\frac{x+1}{2}-\alpha\right)\left(\frac{x+1}{2}-\beta\right)$

$\qquad=\frac{a}{4}\{x-(2\alpha-1)\}\{x-(2\beta-1)\}$ …… ㉮

즉, 이차방정식 $f\left(\frac{x+1}{2}\right)=0$의 두 근은

$x=2\alpha-1$ 또는 $x=2\beta-1$ …… ㉯

이때 $\alpha+\beta=7$이므로 두 근의 합은

$(2\alpha-1)+(2\beta-1)=2(\alpha+\beta)-2$

$\qquad=2\times7-2=12$ …… ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ $f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)$로 놓고 $f\left(\frac{x+1}{2}\right)$ 구하기	60 %
㉯ 이차방정식 $f\left(\frac{x+1}{2}\right)=0$의 두 근 구하기	20 %
㉰ 이차방정식 $f\left(\frac{x+1}{2}\right)=0$의 두 근의 합 구하기	20 %

302

(1) $t=x^2+2x$

$\quad=(x+1)^2-1$

$0\le x\le1$에서 함수 $t=x^2+2x$는 $x=0$일 때 최솟값 0, $x=1$일 때 최댓값 3을 가지므로

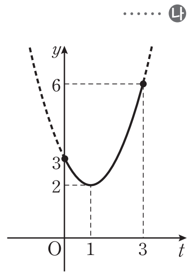
$0\le t\le3$ …… ㉮

(2) 주어진 함수는

$y=t^2-2t+3$

$\quad=(t-1)^2+2$ $(0\le t\le3)$ …… ㉯

(3) $0\le t\le3$에서 함수 $y=t^2-2t+3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$t=3$일 때 최댓값 6,

$t=1$일 때 최솟값 2

를 갖는다. …… ㉰

따라서 $M=6$, $m=2$이므로

$Mm=6\times2=12$ …… ㉱

	채점 기준	배점 비율
(1)	㉮ t의 값의 범위 구하기	30 %
(2)	㉯ 주어진 함수를 $y=a(t-p)^2+q$ 꼴로 나타내기	20 %
(3)	㉰ 주어진 함수의 최댓값, 최솟값 구하기	30 %
	㉱ Mm의 값 구하기	20 %

오답 피하기 치환하는 경우에는 변수가 바뀌므로 바뀐 변수의 값의 범위를 구해야 함에 주의한다.

1등급 실력 완성

75쪽 ~ 77쪽

303 ② **304** 12 **305** ③ **306** 6 **307** ③
308 3 **309** ⑤ **310** 12 **311** ④ **312** ②
313 $a=2$, $b=-8$ **314** 22 **315** $\frac{125}{4}$ **316** 18
317 36

303

이차함수의 그래프와 x축의 위치 관계 + 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계

전략 이차방정식의 판별식을 이용하여 이차함수의 그래프와 x축 또는 직선의 위치 관계를 파악한다.

풀이 ㄱ. $f(x)+2x=-x^2+3x-2$이므로

$-x^2+3x-2=0$에서 $x^2-3x+2=0$

$(x-1)(x-2)=0$ $\quad\therefore x=1$ 또는 $x=2$

따라서 $y=f(x)+2x$의 그래프는 x축과 두 점 $(1,\ 0)$, $(2,\ 0)$에서 만난다. (참)

ㄴ. 이차방정식 $-x^2+x-2=3x-1$, 즉 $x^2+2x+1=0$의 판별식을 D_1이라 할 때,

$\frac{D_1}{4}=1^2-1=0$

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=3x-1$과 한 점에서 만난다. (참)

ㄷ. 이차방정식 $-x^2+x-2+n=0$의 판별식을 D_2라 할 때,

$D_2=1^2-4\times(-1)\times(-2+n)$

$\quad=4n-7$

$n=1$일 때 $D_2<0$이고 $n\ge2$일 때 $D_2>0$이므로

$y=f(x)+n$의 그래프는 $n=1$일 때만 x축과 만나지 않는다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

304

이차함수의 그래프와 x축의 위치 관계

전략 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나려면 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식이 0보다 크거나 같아야 한다.

풀이 이차함수 $y=x^2+(2k-1)x+k^2-a$의 그래프가 x축과 만나려면 이차방정식 $x^2+(2k-1)x+k^2-a=0$이 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 할 때,

$D=(2k-1)^2-4(k^2-a)\ge0$

$-4k+1+4a \geq 0 \qquad \therefore k \leq a+\frac{1}{4}$

(i) $a=2$일 때,

$k \leq 2+\frac{1}{4}$이므로 자연수 k의 개수는 2이다.
1, 2

$\therefore f(2)=2$

(ii) $a=4$일 때,

$k \leq 4+\frac{1}{4}$이므로 자연수 k의 개수는 4이다.
1, 2, 3, 4

$\therefore f(4)=4$

(iii) $a=6$일 때,

$k \leq 6+\frac{1}{4}$이므로 자연수 k의 개수는 6이다.
1, 2, 3, 4, 5, 6

$\therefore f(6)=6$

이상에서 $f(2)+f(4)+f(6)=2+4+6=12$

305

이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계

전략 이차함수의 그래프가 직선보다 항상 위쪽에 있으려면 두 식을 연립하여 얻은 이차방정식의 판별식이 0보다 작아야 한다.

풀이 이차함수 $y=x^2-6x+3a$의 그래프가 직선 $y=2x+a-1$보다 항상 위쪽에 있으려면 이차함수의 그래프와 직선이 만나지 않아야 하므로 이차방정식 $x^2-6x+3a=2x+a-1$, 즉 $x^2-8x+2a+1=0$의 판별식을 D라 할 때,

$\frac{D}{4}=(-4)^2-(2a+1)<0$

$-2a<-15 \qquad \therefore a>\frac{15}{2}$

따라서 정수 a의 최솟값은 8이다.

306

이차함수의 그래프와 직선의 교점

전략 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$의 교점의 x좌표는 이차방정식 $f(x)=g(x)$의 실근과 같음을 이용한다.

풀이 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$의 교점의 x좌표는 이차방정식 $f(x)=g(x)$, 즉 $f(x)-g(x)=0$의 실근과 같다.

주어진 그래프에서 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$의 교점의 x좌표가 β, γ이므로 이차방정식 $f(x)-g(x)=0$의 두 실근은 β, γ이다.

$f(x)$는 최고차항의 계수가 -2인 이차함수이다.

$\therefore f(x)-g(x)=-2(x-\beta)(x-\gamma) \qquad \cdots\cdots$ ㉠

한편, 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 두 점 $(\alpha, 0)$, $(\beta, 0)$에서 만나고 최고차항의 계수가 -2이므로

$f(x)=-2(x-\alpha)(x-\beta)$

이것을 ㉠에 대입하면

$-2(x-\alpha)(x-\beta)-g(x)=-2(x-\beta)(x-\gamma)$

$$\begin{aligned} g(x)&=-2(x-\beta)\{(x-\alpha)-(x-\gamma)\} \\ &=-2(x-\beta)(\gamma-\alpha) \\ &=2(\alpha-\gamma)(x-\beta) \end{aligned}$$

이때 $\alpha-\gamma=1$이므로

$g(x)=2(x-\beta)=2x-2\beta$

직선 $y=g(x)$의 y절편이 4이므로

$g(x)=2x+4$

$\therefore g(1)=2+4=6$

307

이차함수의 그래프와 직선의 교점

전략 이차함수의 그래프와 직선의 두 교점의 x좌표를 α, β로 놓고 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

풀이 이차함수 $y=(x-a)^2$의 그래프와 직선 $y=x$의 두 교점 A, B의 x좌표를 각각 α, β라 할 때 α, β는 이차방정식 $(x-a)^2=x$, 즉 $x^2-(2a+1)x+a^2=0$의 두 근이다.

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2a+1$, $\alpha\beta=a^2$

이때 두 점 $\mathrm{A}(\alpha, \alpha)$, $\mathrm{B}(\beta, \beta)$ 사이의 거리는 $\sqrt{26}$이므로

$\sqrt{(\beta-\alpha)^2+(\beta-\alpha)^2}=\sqrt{26}$, $\sqrt{2}|\beta-\alpha|=\sqrt{26}$

$|\beta-\alpha|=\sqrt{13}$

$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$이므로

$(\sqrt{13})^2=(2a+1)^2-4a^2$

$13=4a+1$, $4a=12$

$\therefore a=3$

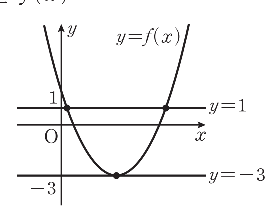
308

이차함수의 그래프와 직선의 교점의 개수

전략 주어진 방정식의 좌변을 인수분해 하고 그래프를 이용하여 서로 다른 실근의 개수를 구한다.

풀이 $\{f(x)\}^2+2f(x)-3=0$에서 $\{f(x)+3\}\{f(x)-1\}=0$

$\therefore f(x)=-3$ 또는 $f(x)=1$



(i) 방정식 $f(x)=-3$의 서로 다른 실근의 개수는 위의 그림에서 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-3$의 교점의 개수와 같으므로 1이다.

(ii) 방정식 $f(x)=1$의 서로 다른 실근의 개수는 위의 그림에서 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=1$의 교점의 개수와 같으므로 2이다.

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는

$1+2=3$

309

이차함수의 그래프와 이차방정식의 실근

전략 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프를 지나는 점의 x좌표는 방정식 $f(x)=g(x)$의 근임을 이용한다.

풀이 이차방정식 $x^2+x-a=0$의 서로 다른 두 실근이 α, β이므로

$\alpha^2+\alpha-a=0$, $\beta^2+\beta-a=0$

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-1$, $\alpha\beta=-a$

$\therefore\ \alpha^2-1-a=-\alpha-1=\beta$, $\beta^2-1-a=-\beta-1=\alpha$

즉, 이차함수 $f(x)=2x^2+bx-6$의 그래프가 두 점 (α, α^2), (β, β^2)을 지나고 이 두 점은 이차함수 $y=x^2$의 그래프 위의 점이므로 α, β는 x에 대한 이차방정식 $f(x)=x^2$의 두 근이다.

따라서 $2x^2+bx-6=x^2$, 즉 $x^2+bx-6=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-b=-1$, $\alpha\beta=-6=-a$ ← $\alpha+\beta=-1$, $\alpha\beta=-a$

$\therefore\ a=6$, $b=1$

$\therefore\ a+b=6+1=7$

310

이차함수의 그래프와 이차방정식의 실근

전략 직선 $y=n$과 이차함수 $y=x^2-4x+4$의 그래프의 교점의 x좌표를 n에 대한 식으로 나타내어 경우를 나누어 해결한다.

풀이 직선 $y=n$이 이차함수 $y=x^2-4x+4$와 만나는 점의 x좌표는 이차방정식 $x^2-4x+4=n$의 실근과 같다.

$x^2-4x+4=n$에서 $(x-2)^2=n$

$\therefore\ x=2-\sqrt{n}$ 또는 $x=2+\sqrt{n}$

$x_1=2-\sqrt{n}$, $x_2=2+\sqrt{n}$이라 하자.

(i) $1\le n\le 4$일 때,

$x_1\ge 0$, $x_2>0$이므로

$$\frac{|x_1|+|x_2|}{2}=\frac{(2-\sqrt{n})+(2+\sqrt{n})}{2}=2$$

따라서 $\dfrac{|x_1|+|x_2|}{2}$의 값이 자연수가 되는 n의 개수는 1, 2, 3, 4의 4개이다.

(ii) $n>4$일 때,

$x_1<0<x_2$이므로

$$\frac{|x_1|+|x_2|}{2}=\frac{-x_1+x_2}{2}=\frac{(\sqrt{n}-2)+(2+\sqrt{n})}{2}=\sqrt{n}$$

따라서 $\dfrac{|x_1|+|x_2|}{2}$의 값이 자연수가 되는 100 이하의 자연수 n의 개수는 3^2, 4^2, 5^2, $\cdots$, 10^2의 8개이다.

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 자연수 n의 개수는 $4+8=12$

311

제한된 범위에서 이차함수의 최대 · 최소

전략 주어진 함수를 완전제곱식의 꼴로 나타낸 후, $a\le 0$, $0<a<1$, $a\ge 1$일 때의 이차함수의 최댓값을 각각 구한다.

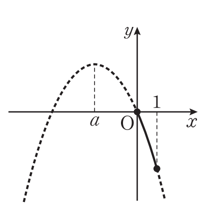
풀이 $y=-x^2+2ax$

$\quad=-(x-a)^2+a^2$

(i) $a\le 0$일 때,

이차함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=0$일 때 최댓값 0을 갖는다.

따라서 조건을 만족시키지 않는다.

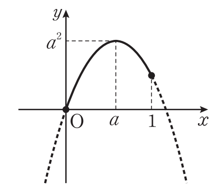


(ii) $0<a<1$일 때,

이차함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=a$일 때 최댓값 a^2을 갖는다.

즉, $a^2=3$에서 $a=\pm\sqrt{3}$

이때 $0<a<1$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

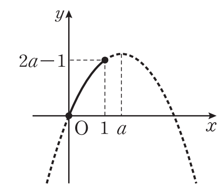


(iii) $a\ge 1$일 때,

이차함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=1$일 때 최댓값 $2a-1$을 갖는다.

즉, $2a-1=3$에서 $2a=4$

$\therefore\ a=2$



이상에서 $a=2$

312

제한된 범위에서 이차함수의 최대 · 최소

전략 $x^2+2x=t$로 놓고, t에 대한 함수의 최솟값을 구한다. 이때 t의 값의 범위에 주의한다.

풀이 $x^2+2x=t$라 하면

$t=x^2+2x$

$\quad=(x+1)^2-1\ge -1$

이때 주어진 함수는

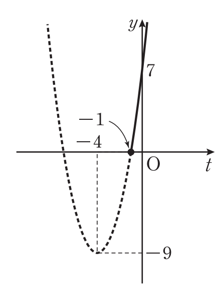
$y=(x^2+2x+2)(x^2+2x+3)+3(x^2+2x)+1$

$\quad=(t+2)(t+3)+3t+1$

$\quad=t^2+8t+7$

$\quad=(t+4)^2-9$

$t\ge -1$에서 함수 $y=t^2+8t+7$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $t=-1$일 때 최솟값 0을 갖는다.



$x^2+2x=-1$에서

$x^2+2x+1=0$, $(x+1)^2=0$

$\therefore\ x=-1$

따라서 주어진 함수는 $x=-1$일 때 최솟값 0을 가지므로

$a=-1$, $b=0$

$\therefore\ a+b=-1+0=-1$

313

최댓값 또는 최솟값이 주어질 때 미지수의 값 구하기

전략 a의 값의 범위를 나누어 조건 (가)를 만족시키는 a의 값을 구한 후, a의 값에 따른 음수 b의 값을 구한다.

풀이 $f(x)=x^2-2ax+a+2$

$\quad=(x-a)^2-a^2+a+2$

(i) $a<0$일 때,

이차함수 $f(x)$는 $x=0$일 때 최솟값 $a+2$를 갖는다.

즉, $a+2=0$에서 $a=-2$

(ii) $0\le a\le 3$일 때,

이차함수 $f(x)$는 $x=a$일 때 최솟값 $-a^2+a+2$를 갖는다.

즉, $-a^2+a+2=0$에서 $a^2-a-2=0$

$(a+1)(a-2)=0 \qquad \therefore a=-1$ 또는 $a=2$

그런데 $0 \le a \le 3$이므로 $a=2$

(iii) $a>3$일 때,

이차함수 $f(x)$는 $x=3$일 때 최솟값 $11-5a$를 갖는다.

즉, $11-5a=0$에서 $a=\frac{11}{5}$

그런데 $a>3$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

이상에서 $a=-2$ 또는 $a=2$

$a=-2$인 경우

$f(x)=x^2+4x$이고 조건 (나)에 의하여 직선 $y=bx$와 한 점에서 만나려면 이차방정식 $x^2+4x=bx$, 즉 $x^2+(4-b)x=0$의 판별식을 D_1이라 할 때,

$D_1=(4-b)^2=0 \qquad \therefore b=4$

그런데 $b<0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$a=2$인 경우

$f(x)=x^2-4x+4$이므로 조건 (나)에 의하여 직선 $y=bx$와 한 점에서 만나려면 이차방정식 $x^2-4x+4=bx$, 즉

$x^2-(4+b)x^2+4=0$의 판별식을 D_2라 할 때,

$D_2=\{-(4+b)\}^2-4\times4=0$

$(4+b)^2=16 \qquad \therefore b=-8$ 또는 $b=0$

그런데 $b<0$이므로 $b=-8$

따라서 조건을 모두 만족시키는 상수 a, b의 값은

$a=2$, $b=-8$

314

최댓값 또는 최솟값이 주어질 때 미지수의 값 구하기

전략 $f(x)=(x-a)^2-3$으로 놓고, 방정식 $f(x)-2=0$에서 근과 계수의 관계를 이용한다.

풀이 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$의 최솟값이 -3이므로 $f(x)=(x-a)^2-3$ (a는 상수)이라 하면

$f(x)-2=x^2-2ax+a^2-5$

방정식 $f(x)-2=0$은 두 근이 α, β인 이차방정식이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2a$, $\alpha\beta=a^2-5$

이때

$\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}$이므로

$\frac{(2a)^2-2(a^2-5)}{a^2-5}=3$

$2a^2+10=3a^2-15$

$\therefore a^2=25$

따라서 방정식 $f(x)=(x-a)^2-3=0$, 즉 $x^2-2ax+a^2-3=0$의 두 근의 곱은 근과 계수의 관계에 의하여

$a^2-3=25-3=22$

315

이차식의 최대 · 최소

전략 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 $(\alpha+5)(\beta+5)$를 a에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 α, β가 이차방정식 $x^2-(a+1)x-a^2-2a-1=0$의 두 실근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=a+1$, $\alpha\beta=-a^2-2a-1$

$$\begin{aligned}\therefore (\alpha+5)(\beta+5)&=\alpha\beta+5(\alpha+\beta)+25\\&=-a^2-2a-1+5(a+1)+25\\&=-a^2+3a+29\\&=-\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{125}{4}\end{aligned}$$

따라서 $(\alpha+5)(\beta+5)$는 $a=\frac{3}{2}$일 때 최댓값 $\frac{125}{4}$를 갖는다.

316

이차식의 최대 · 최소

전략 주어진 식을 $\alpha(x-a)^2+\beta(y-b)^2+\gamma(z-c)^2+d$ 꼴로 변형한 후, $(\text{실수})^2\ge0$임을 이용한다.

풀이 $-x^2-2y^2-4z^2+6x+4y-8z$

$=-(x^2-6x+9)-2(y^2-2y+1)-4(z^2+2z+1)+9+2+4$

$=-(x-3)^2-2(y-1)^2-4(z+1)^2+15$

이때 x, y, z가 실수이므로

$(x-3)^2\ge0$, $(y-1)^2\ge0$, $(z+1)^2\ge0$

$\therefore -x^2-2y^2-4z^2+6x+4y-8z\le15$

따라서 주어진 식은 $x=3$, $y=1$, $z=-1$일 때 최댓값 15를 가지므로

$a=3$, $b=1$, $c=-1$, $d=15$

$\therefore a+b+c+d=3+1+(-1)+15=18$

317

이차함수의 최대 · 최소의 활용

전략 이익금을 $100x$원 줄였을 때, 이익과 샌드위치의 개수를 구한 후 하루의 이익금을 x에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 샌드위치 한 개당 이익금을 $100x$원 줄인다고 하면 한 개당 이익은

$(1000-100x)$원

하루에 팔리는 샌드위치의 개수는

$32+4x$

하루의 이익금을 y원이라 하면

$y=(1000-100x)(32+4x)$

$=400(-x^2+2x+80)$

$=-400(x-1)^2+32400 \ (x>0)$

따라서 $x=1$일 때 y는 최댓값을 가지므로 하루의 이익금이 최대일 때, 하루에 팔리는 샌드위치의 개수는

$32+4\times1=36$

도전 1등급 최고난도

78쪽

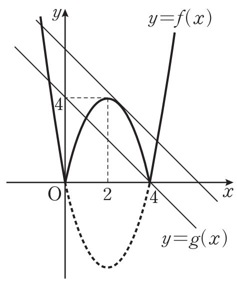
318 25 **319** ③ **320** ④

318

이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계 ⊕ 이차함수의 그래프와 이차방정식의 실근

(1단계) 방정식 $f(x)-g(x)=0$의 실근의 개수는 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 개수이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프를 그려 방정식 $f(x)-g(x)=0$이 4개의 실근을 갖는 경우를 찾는다.

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프를 그리면 다음 그림과 같다.



이때 방정식 $f(x)-g(x)=0$이 4개의 실근을 가지려면 k의 값은 직선 $y=g(x)$가 점 $(4, 0)$을 지날 때의 k의 값보다 크고, 이차함수 $y=-x^2+4x$의 그래프와 직선 $y=g(x)$가 접할 때의 k의 값보다 작아야 한다.

(2단계) k의 값의 범위를 구한다.

(i) 직선 $y=g(x)$가 점 $(4, 0)$을 지날 때,

$0=-4+k \qquad \therefore k=4$

(ii) 이차함수 $y=-x^2+4x$의 그래프와 직선 $y=g(x)$가 접할 때,

이차방정식 $-x^2+4x=-x+k$, 즉 $x^2-5x+k=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-5)^2-4\times1\times k=0$

$\therefore k=\dfrac{25}{4}$

(i), (ii)에서 k의 값의 범위는

$4<k<\dfrac{25}{4}$

(3단계) ab의 값을 구한다.

따라서 $a=4$, $b=\dfrac{25}{4}$이므로

$ab=4\times\dfrac{25}{4}=25$

319

이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계

(1단계) 점 H의 좌표를 $(k, 0)$ $(k>0)$으로 놓고 도형의 닮음을 이용하여 $\overline{PQ}$의 길이를 a, k를 사용한 식으로 나타낸다.

점 H의 좌표를 $(k, 0)(k>0)$이라 하자.

두 삼각형 OHP, OIQ는 서로 닮음이고, 넓이의 비가 1 : 4이므로 닮음비는 1 : 2이다.

$\therefore$ I$(2k, 0)$

두 점 P, Q가 직선 $y=ax$ 위의 점이므로

P(k, ak), Q$(2k, 2ak)$

이때 $\overline{PQ}=4\sqrt{5}$이므로

$\sqrt{(2k-k)^2+(2ak-ak)^2}=k\sqrt{1+a^2}=4\sqrt{5}$ …… ㉠

(2단계) 점 I가 이차함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점임을 이용하여 a, k 사이의 관계식을 구하고 이를 이용하여 a, k의 값을 구한다.

최고차항의 계수가 -1인 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 P(k, ak)에서 직선 $y=ax$에 접하므로

$f(x)-ax=-(x-k)^2$

$\therefore f(x)=-(x-k)^2+ax$

점 I$(2k, 0)$은 이차함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점이므로

$f(2k)=-(2k-k)^2+2ak=0$

$k(k-2a)=0$

그런데 $k>0$이므로 $k=2a$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$2a\sqrt{1+a^2}=4\sqrt{5}$, $a^2(1+a^2)=20$

$\therefore a=2$ ($\because a>0$), $k=4$

(3단계) 이차함수 $g(x)$를 구하여 $f(6)+g(6)$의 값을 구한다.

이차함수 $g(x)$의 최고차항의 계수를 m $(m<0)$이라 하면 이차함수 $y=g(x)$의 그래프는 점 Q에서 직선 $y=2x$에 접하며 점 Q의 x좌표는 8이므로

$g(x)-2x=m(x-8)^2$

$\therefore g(x)=m(x-8)^2+2x$

점 H$(4, 0)$은 이차함수 $y=g(x)$의 그래프 위의 점이므로

$g(4)=16m+8=0 \qquad \therefore m=-\dfrac{1}{2}$

따라서 $f(x)=-(x-4)^2+2x$, $g(x)=-\dfrac{1}{2}(x-8)^2+2x$이므로

$f(6)=-(6-4)^2+2\times6=8$, $g(6)=-\dfrac{1}{2}\times(6-8)^2+2\times6=10$

$\therefore f(6)+g(6)=8+10=18$

320

이차함수의 그래프와 직선의 교점

(1단계) 조건을 만족시키는 모든 실수 k의 개수를 이용하여 이차함수 $y=g(x)$의 그래프와 두 직선 $y=0$, $y=4$의 교점의 개수를 구한다.

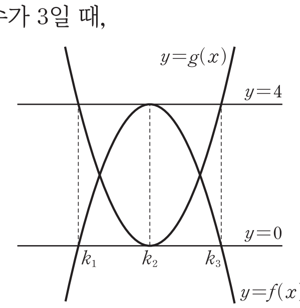
x에 대한 이차방정식 $\{x-f(k)\}\{x-g(k)\}=0$이 서로 다른 두 실근 0, 4를 가져야 하므로

$f(k)=0$, $g(k)=4$ 또는 $f(k)=4$, $g(k)=0$

조건을 만족시키는 모든 실수 k의 개수가 3이므로 이차함수 $y=g(x)$의 그래프와 두 직선 $y=0$, $y=4$의 서로 다른 교점의 개수는 3 또는 4이다.

(2단계) 교점의 개수에 따른 이차함수 $g(x)$와 $f(x)$를 구한다.

(i) 교점의 개수가 3일 때,

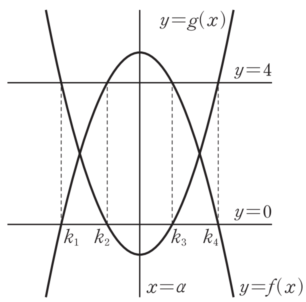


위의 그림과 같이 만나는 점의 x좌표를 작은 수부터 크기순으로 k_1, k_2, k_3이라 하자.

$g(k_1)=4$, $g(k_2)=0$, $g(k_3)=4$이고 조건을 만족시키는 모든 실수 k의 개수가 3이므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 세 점

$(k_1, 0)$, $(k_2, 4)$, $(k_3, 0)$을 모두 지나야 한다.
$f(2)=4$이므로 $k_2=2$이고 이차함수 $y=g(x)$의 그래프가 점 $(2, 0)$에서 직선 $y=0$에 접하므로
$g(x)=(x-2)^2$
이차함수 $y=g(x)$의 그래프가 두 점 $(k_1, 4)$, $(k_3, 4)$를 지나므로 $(x-2)^2=4$에서 $x=0$ 또는 $x=4$
$\therefore k_1=0, k_3=4$
또, 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(2, 4)$에서 직선 $y=4$에 접하므로 $f(x)=a(x-2)^2+4(a<0)$이고
두 점 $(0, 0)$, $(4, 0)$을 지나므로
$f(0)=f(4)=4a+4=0$, $a=-1$
$\therefore f(x)=-(x-2)^2+4$

(ii) 교점의 개수가 4일 때,



위의 그림과 같이 만나는 점의 x좌표를 작은 수부터 크기순으로 k_1, k_2, k_3, k_4라 하자.
$g(k_1)=4$, $g(k_2)=0$, $g(k_3)=0$, $g(k_4)=4$이고 이차함수 $y=g(x)$의 그래프의 꼭짓점의 x좌표를 α라 하면

$$\frac{k_1+k_4}{2}=\frac{k_2+k_3}{2}=\alpha \quad \cdots\cdots ㉠$$

이고 $k_1<k_2<\alpha<k_3<k_4$이다.
조건을 만족시키는 모든 실수 k의 개수가 3이므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 네 점 $(k_1, 0)$, $(k_2, 4)$, $(k_3, 4)$, $(k_4, 0)$ 중 세 점만을 지나야 한다.
이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 두 점 $(k_1, 0)$, $(k_4, 0)$을 지날 때, ㉠에 의하여 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 대칭축은 $x=\alpha$이므로 두 점 $(k_2, 4)$, $(k_3, 4)$ 중 한 점만을 지날 수 없고 모든 실수 k의 값이 4개가 되므로 조건을 만족시키지 않는다.
같은 방법으로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 두 점 $(k_2, 4)$, $(k_3, 4)$를 지나는 경우도 모든 실수 k의 값이 4개가 되므로 조건을 만족시키지 않는다.

3단계 조건을 모두 만족시키는 두 이차함수 $f(x)$, $g(x)$를 구하여 $g(8)-f(8)$의 값을 구한다.

(i), (ii)에서
$g(x)=(x-2)^2$, $f(x)=-(x-2)^2+4$이므로
$g(8)=(8-2)^2=36$
$f(8)=-(8-2)^2+4=-32$
$\therefore g(8)-f(8)=36-(-32)=68$

07 여러 가지 방정식

유형 분석 기출

80쪽~88쪽

321 -2	**322** ④	**323** ③	**324** ①	**325** ②
326 ③	**327** 0	**328** ③	**329** -1	
330 $a=-1$, 나머지 두 근: 1, 4			**331** 2	**332** ③
333 ④	**334** ③	**335** 19	**336** ②	**337** 6
338 ②	**339** ③	**340** 20	**341** ①	
342 $x^3-12x^2-27x+54=0$			**343** 15	**344** ①
345 ①	**346** $2-i$	**347** ③	**348** 21	**349** ②
350 ⑤	**351** ②	**352** ③	**353** 1	**354** ③
355 1	**356** ②	**357** ③	**358** ④	**359** 5
360 ④	**361** 1	**362** ①	**363** 0	**364** 6
365 64	**366** -1	**367** ④	**368** $a>\frac{1}{4}$	
369 $a=25$, $b=15$		**370** 2	**371** ①	**372** 1 km
373 ③				

321

$x^3+3x^2-x-3=0$에서
$x^2(x+3)-(x+3)=0$
$(x+3)(x^2-1)=0$
$(x+3)(x+1)(x-1)=0$
$\therefore x=-3$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$
따라서 가장 큰 근은 1, 가장 작은 근은 -3이므로 구하는 합은
$1+(-3)=-2$

322

$f(x)=x^4-5x-6$이라 하면 $f(-1)=0$, $f(2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해 하면

$$\begin{array}{r|rrrrr}
-1 & 1 & 0 & 0 & -5 & -6 \\
 & & -1 & 1 & -1 & 6 \\ \hline
2 & 1 & -1 & 1 & -6 & 0 \\
 & & 2 & 2 & 6 & \\ \hline
 & 1 & 1 & 3 & 0 &
\end{array}$$

$f(x)=(x+1)(x-2)(x^2+x+3)$
즉, 주어진 방정식은
$(x+1)(x-2)(x^2+x+3)=0$
따라서 주어진 방정식의 근은
$x=-1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{11}i}{2}$
이므로 모든 실근의 합은
$-1+2=1$

1등급 비법
다항식 $f(x)$에서 $f(\alpha)=0$이면 $f(x)$는 $x-\alpha$를 인수로 가지므로 $f(\alpha)=0$인 α의 값을 찾아 조립제법을 이용하여 인수분해 한다.

323

$f(x)=x^3+2x^2-3x-10$이라 하면 $f(2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해 하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 2 & -3 & -10 \\ & & 2 & 8 & 10 \\ \hline & 1 & 4 & 5 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-2)(x^2+4x+5)$

즉, 주어진 방정식은 $(x-2)(x^2+4x+5)=0$

이차방정식 $x^2+4x+5=0$의 판별식을 D라 할 때,

$\frac{D}{4}=2^2-1\times5=-1<0$이므로 이 이차방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

따라서 이차방정식 $x^2+4x+5=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-4$, $\alpha\beta=5$

$\therefore\ \alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=(-4)^3-3\times5\times(-4)=-4$

324

$x^2+4x=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2+2(X+3)=30$, $X^2+2X-24=0$

$(X+6)(X-4)=0$　　$\therefore\ X=-6$ 또는 $X=4$

(i) $X=-6$일 때,

$x^2+4x=-6$에서 $x^2+4x+6=0$

이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 할 때,

$\frac{D_1}{4}=2^2-1\times6=-2<0$

즉, 이 이차방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(ii) $X=4$일 때,

$x^2+4x=4$에서 $x^2+4x-4=0$

이 이차방정식의 판별식을 D_2라 할 때,

$\frac{D_2}{4}=2^2-1\times(-4)=8>0$

즉, 이 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(i), (ii)에서 주어진 사차방정식의 두 실근은 이차방정식 $x^2+4x-4=0$의 근이고, 두 허근은 이차방정식 $x^2+4x+6=0$의 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a=-4$, $b=-4$

$\therefore\ a+b=-4+(-4)=-8$

개념 보충

공통부분이 있는 사차방정식은 다음과 같은 순서로 푼다.

(i) 공통부분을 한 문자로 치환한다.

(ii) (i)의 문자에 대한 이차방정식을 푼다.

(iii) 주어진 사차방정식의 근을 구한다.

325

$x(x+1)(x+2)(x+3)-3=0$에서

$\{x(x+3)\}\{(x+1)(x+2)\}-3=0$

$(x^2+3x)(x^2+3x+2)-3=0$

$x^2+3x=X$로 놓으면 $X(X+2)-3=0$

$X^2+2X-3=0$, $(X+3)(X-1)=0$

$\therefore\ X=-3$ 또는 $X=1$

(i) $X=-3$일 때,

$x^2+3x=-3$에서 $x^2+3x+3=0$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 이 이차방정식의 모든 근의 곱은 3이다.

(ii) $X=1$일 때,

$x^2+3x=1$에서 $x^2+3x-1=0$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 이 이차방정식의 모든 근의 곱은 -1이다.

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 모든 근의 곱은

$3\times(-1)=-3$

1등급 비법

(　)(　)(　)(　)$=k$ (k는 상수) 꼴

⇨ 두 일차식의 상수항의 합이 서로 같아지도록 두 개씩 짝을 지어 전개한 후, 공통부분을 치환한다.

326

$x^2=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2-5X+4=0$, $(X-1)(X-4)=0$

$\therefore\ X=1$ 또는 $X=4$

(i) $X=1$일 때,

$x^2=1$　　$\therefore\ x=\pm1$

(ii) $X=4$일 때,

$x^2=4$　　$\therefore\ x=\pm2$

(i), (ii)에서 두 양의 근은 $x=1$, $x=2$이므로

$\alpha^2+\beta^2=1^2+2^2=5$

327

$x^4-8x^2+4=0$에서　$x^2=X$로 치환하여도 좌변이 인수분해되지 않으므로 $A^2-B^2=0$ 꼴로 변형한다.

$(x^4-4x^2+4)-4x^2=0$

$(x^2-2)^2-(2x)^2=0$

$(x^2+2x-2)(x^2-2x-2)=0$

방정식 $x^2+2x-2=0$의 두 근을 α, β, 방정식 $x^2-2x-2=0$의 두 근을 γ, δ라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=-2$, $\gamma+\delta=2$, $\gamma\delta=-2$

$\therefore\ \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+\frac{\gamma+\delta}{\gamma\delta}$

$=\frac{-2}{-2}+\frac{2}{-2}=0$

1등급 비법

$x^4+ax^2+b=0$ 꼴의 사차방정식이 $x^2=X$로 치환해도 인수분해가 안되는 경우 $(x^2+p)^2-(qx)^2=0$ 꼴로 인수분해가 될 수 있도록 이차항 ax^2을 적당히 분리하여 정리한다.

328

$x^4+3x^2+4=0$에서

$(x^4+4x^2+4)-x^2=0$

$(x^2+2)^2-x^2=0$

$(x^2+x+2)(x^2-x+2)=0$

방정식 $x^2+x+2=0$의 두 근을 α, β, 방정식 $x^2-x+2=0$의 두 근을 γ, δ라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-1$, $\alpha\beta=2$, $\gamma+\delta=1$, $\gamma\delta=2$

$\therefore\ \alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\delta^3$

$=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)+(\gamma+\delta)^3-3\gamma\delta(\gamma+\delta)$

$=(-1)^3-3\times2\times(-1)+1^3-3\times2\times1$

$=0$

329

방정식 $x^4+4x^3-3x^2+4x+1=0$의 양변을 x^2으로 나누면

$x\neq0$이므로 x^2으로 나눌 수 있다.

$$x^2+4x-3+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}+4\left(x+\frac{1}{x}\right)-3=0$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+4\left(x+\frac{1}{x}\right)-5=0$$

이때 $x+\dfrac{1}{x}=X$로 놓으면

$X^2+4X-5=0$, $(X+5)(X-1)=0$

$\therefore\ X=-5$ 또는 $X=1$

(i) $X=-5$일 때,

$x+\dfrac{1}{x}=-5$에서

$x^2+5x+1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 할 때,

$D_1=5^2-4\times1\times1=21>0$

즉, 이 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(ii) $X=1$일 때,

$x+\dfrac{1}{x}=1$에서

$x^2-x+1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D_2라 할 때,

$D_2=(-1)^2-4\times1\times1=-3<0$

즉, 이 이차방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(i), (ii)에서 α는 방정식 $x^2-x+1=0$의 한 허근이므로

$\alpha^2-\alpha+1=0$

$\therefore\ \alpha^2-\alpha=-1$

330

주어진 방정식에 $x=-1$을 대입하면

$-1+4a-a+4=0$

$3a=-3\qquad\therefore\ a=-1$

즉, 주어진 방정식은 $x^3-4x^2-x+4=0$이므로

$x^2(x-4)-(x-4)=0$

$(x^2-1)(x-4)=0$

$(x+1)(x-1)(x-4)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=4$

따라서 나머지 두 근은 1, 4이다.

331

주어진 방정식에 $x=-1$을 대입하면

$-1-a-b-2+a-2b=0$

$-3b=3\qquad\therefore\ b=-1$

주어진 방정식에 $x=3$을 대입하면

$27-9a+3b+6+a-2b=0\qquad\therefore\ 8a-b=33$ $\cdots\cdots$ ㉠

$b=-1$을 ㉠에 대입하면 $8a+1=33$

$8a=32\qquad\therefore\ a=4$

즉, 주어진 방정식은 $x^3-4x^2+x+6=0$이고, 이 방정식의 두 근이 -1, 3이므로 조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해 하면

$$\begin{array}{r|rrrr}
-1 & 1 & -4 & 1 & 6 \\
 & & -1 & 5 & -6 \\ \hline
3 & 1 & -5 & 6 & 0 \\
 & & 3 & -6 & \\ \hline
 & 1 & -2 & 0 &
\end{array}$$

$(x+1)(x-3)(x-2)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=3$ 또는 $x=2$

따라서 나머지 한 근은 2이다.

332

주어진 방정식에 $x=1$을 대입하면

$1-1-a+b-4=0$

$\therefore\ a-b=-4$ $\cdots\cdots$ ㉠

주어진 방정식에 $x=-2$를 대입하면

$16+8-4a-2b-4=0$

$\therefore\ 2a+b=10$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=6$

즉, 주어진 방정식은 $x^4-x^3-2x^2+6x-4=0$이고, 이 방정식의 두 근이 1, -2이므로 조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해 하면

$$\begin{array}{r|rrrrr}
1 & 1 & -1 & -2 & 6 & -4 \\
 & & 1 & 0 & -2 & 4 \\ \hline
-2 & 1 & 0 & -2 & 4 & 0 \\
 & & -2 & 4 & -4 & \\ \hline
 & 1 & -2 & 2 & 0 &
\end{array}$$

$(x-1)(x+2)(x^2-2x+2)=0$

이때 두 근 α, β는 이차방정식 $x^2-2x+2=0$의 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha\beta=2$

$\therefore\ ab\alpha\beta=2\times6\times2=24$

333

$f(x)=x^3+x^2+(k-7)x-k+5$라 하면 $f(1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해 하면

$$\begin{array}{r|rrrr}
1 & 1 & 1 & k-7 & -k+5 \\
 & & 1 & 2 & k-5 \\ \hline
 & 1 & 2 & k-5 & 0
\end{array}$$

$f(x)=(x-1)(x^2+2x+k-5)$

즉, 주어진 방정식은

$(x-1)(x^2+2x+k-5)=0$

이때 주어진 방정식이 한 개의 실근과 두 개의 허근을 가지므로 이차방정식 $x^2+2x+k-5=0$이 두 개의 허근을 갖는다.

따라서 이차방정식 $x^2+2x+k-5=0$의 판별식을 D라 할 때,

$\frac{D}{4}=1^2-(k-5)<0$

$-k+6<0 \qquad \therefore k>6$

334

$x=1$이 삼차방정식 $(x-a)\{x^2+(1-3a)x+4\}=0$의 근이므로 $x=1$은 방정식 $x-a=0$의 근 또는 방정식 $x^2+(1-3a)x+4=0$의 근이다.

$x=1$이 $x-a=0$의 근일 때,

$1-a=0 \qquad \therefore a=1$

이차방정식 $x^2+(1-3a)x+4=0$, 즉 $x^2-2x+4=0$의 판별식을 D라 할 때,

$\frac{D}{4}=(-1)^2-4=-3<0$

즉, 방정식 $x^2-2x+4=0$은 서로 다른 두 허근을 가지므로 주어진 삼차방정식이 서로 다른 세 실근을 갖는다는 조건이 성립하지 않는다.

따라서 $x=1$은 방정식 $x^2+(1-3a)x+4=0$의 근이고 이 방정식에 $x=1$을 대입하면

$1+1-3a+4=0$

$3a=6 \qquad \therefore a=2$

즉, 주어진 방정식은

$(x-2)(x^2-5x+4)=0$

$(x-2)(x-1)(x-4)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=1$ 또는 $x=4$

따라서 $\alpha=2,\ \beta=4$ 또는 $\alpha=4,\ \beta=2$이므로

$\alpha\beta=8$

335

$f(x)=x^3-(3k+1)x+3k$라 하면 $f(1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해 하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 0 & -3k-1 & 3k \\ & & 1 & 1 & -3k \\ \hline & 1 & 1 & -3k & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-1)(x^2+x-3k)$

즉, 주어진 방정식은

$(x-1)(x^2+x-3k)=0$

(i) 방정식 $x^2+x-3k=0$이 $x=1$을 한 근으로 가질 때,

$1+1-3k=0,\ -3k=-2$

$\therefore k=\frac{2}{3}$

(ii) 방정식 $x^2+x-3k=0$이 $x\neq1$인 중근을 가질 때,

이차방정식 $x^2+x-3k=0$의 판별식을 D라 하면

$D=1^2-4\times(-3k)=0,\ 12k=-1$

$\therefore k=-\frac{1}{12}$

(i), (ii)에서

$k=\frac{2}{3}$ 또는 $k=-\frac{1}{12}$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은

$\frac{2}{3}+\left(-\frac{1}{12}\right)=\frac{7}{12}$

이므로 $p=12,\ q=7$

$\therefore p+q=12+7=19$

1등급 비법

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$이 중근을 갖는 경우는 다음 두 가지가 있다.

(i) 세 근이 모두 같은 경우

⇨ $a(x-\alpha)^3=0$

(ii) 한 근을 제외한 나머지 두 근이 서로 같은 경우

⇨ $a(x-\alpha)(x-\beta)^2=0$ (단, $\alpha\neq\beta$)

오답 피하기 삼차방정식이 중근을 갖는다고 해서 근의 개수가 반드시 1인 것은 아님을 주의한다.

336

$x^3+3x^2+4x-8=0$에서 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-3,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=4,\ \alpha\beta\gamma=8$

$\therefore (\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)$

$=(\alpha\beta+\alpha+\beta+1)(\gamma+1)$

$=\alpha\beta\gamma+\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha+\beta\gamma+\beta+\gamma+1$

$=\alpha\beta\gamma+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+(\alpha+\beta+\gamma)+1$

$=8+4+(-3)+1$

$=10$

다른 풀이 $f(x)=x^3+3x^2+4x-8$이라 하면 $f(1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해 하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 3 & 4 & -8 \\ & & 1 & 4 & 8 \\ \hline & 1 & 4 & 8 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-1)(x^2+4x+8)$

따라서 주어진 방정식은

$(x-1)(x^2+4x+8)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=-2\pm2i$

$\therefore (\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)=2(-2+2i+1)(-2-2i+1)$

$=2(-1+2i)(-1-2i)$

$=2\times(1+4)$

$=10$

337

$x^3-2x^2+5x+1=0$에서 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=2,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=5,\ \alpha\beta\gamma=-1$

$\therefore \dfrac{\alpha}{\beta\gamma}+\dfrac{\beta}{\gamma\alpha}+\dfrac{\gamma}{\alpha\beta}=\dfrac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{\alpha\beta\gamma}$

$=\dfrac{(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)}{\alpha\beta\gamma}$

$=\dfrac{2^2-2\times5}{-1}=6$

338

$x^3-7x^2-kx+10=0$에서 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=7$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-k$, $\alpha\beta\gamma=-10$

이때 $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}=\dfrac{3}{5}$이므로

$\dfrac{\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta}{\alpha\beta\gamma}=\dfrac{3}{5}$, $\dfrac{-k}{-10}=\dfrac{3}{5}$

$\therefore k=6$

339

$x^3-ax^2+3x+7=0$에서 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=a$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3$, $\alpha\beta\gamma=-7$

$\therefore \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

$=a^2-2\times3$

$=a^2-6$

이때 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=3$이므로

$a^2-6=3$, $a^2=9$

따라서 $a>0$이므로 $a=3$

340

주어진 삼차방정식의 세 근을 α, 3α, 4α $(\alpha\neq0)$라 하면

$x^3+16x^2+ax+b=0$에서 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+3\alpha+4\alpha=-16$, $8\alpha=-16$

$\therefore \alpha=-2$

즉, 세 근이 -2, -6, -8이므로

$(-2)\times(-6)+(-6)\times(-8)+(-8)\times(-2)=a$

$(-2)\times(-6)\times(-8)=-b$

따라서 $a=76$, $b=96$이므로

$|a-b|=|76-96|=|-20|=20$

341

주어진 삼차방정식의 세 근을 α, β, γ (α, β, γ는 정수이고 $\alpha\geq\beta\geq\gamma$)라 하면 $x^3-2x^2+kx+6=0$에서 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=2$ …… ㉠

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=k$ …… ㉡

$\alpha\beta\gamma=-6$ …… ㉢

이때 α, β, γ는 $\alpha\geq\beta\geq\gamma$인 정수이고 ㉠, ㉢을 만족시켜야 하므로

$\alpha=3$, $\beta=1$, $\gamma=-2$

따라서 $\alpha=3$, $\beta=1$, $\gamma=-2$를 ㉡에 대입하면

$3\times1+1\times(-2)+(-2)\times3=k$

$\therefore k=3-2-6=-5$

342

$x^3-4x^2-3x+2=0$에서 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=4$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-3$, $\alpha\beta\gamma=-2$

구하는 삼차방정식의 세 근이 3α, 3β, 3γ이므로

(세 근의 합)$=3\alpha+3\beta+3\gamma$

$=3(\alpha+\beta+\gamma)$

$=3\times4=12$

(두 근끼리의 곱의 합)$=3\alpha\times3\beta+3\beta\times3\gamma+3\gamma\times3\alpha$

$=9(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

$=9\times(-3)=-27$

(세 근의 곱)$=3\alpha\times3\beta\times3\gamma$

$=27\alpha\beta\gamma$

$=27\times(-2)=-54$

따라서 구하는 삼차방정식은

$x^3-12x^2-27x+54=0$

343

$x^3-9x+a=0$에서 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=0$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-9$, $\alpha\beta\gamma=-a$

이때 삼차방정식 $x^3+bx^2+cx-6=0$의 세 근이 $\alpha+\beta$, $\beta+\gamma$, $\gamma+\alpha$이므로

(세 근의 합)$=(\alpha+\beta)+(\beta+\gamma)+(\gamma+\alpha)$

$=2(\alpha+\beta+\gamma)=-b$

$2\times0=-b$ $\quad\therefore b=0$

(두 근끼리의 곱의 합)

$=(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)+(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)+(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)$

$=(-\gamma)(-\alpha)+(-\alpha)(-\beta)+(-\beta)(-\gamma)$

$\alpha+\beta+\gamma=0$에서

$\alpha+\beta=-\gamma$, $\beta+\gamma=-\alpha$, $\gamma+\alpha=-\beta$

$=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$

$=c$

$\therefore c=-9$

(세 근의 곱)$=(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$

$=(-\gamma)(-\alpha)(-\beta)$

$=-\alpha\beta\gamma=6$

$-(-a)=6$ $\quad\therefore a=6$

$\therefore a-b-c=6-0-(-9)=15$

344

$x^3-x^2-x-1=0$에서 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=1$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-1$, $\alpha\beta\gamma=1$

이때 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$의 세 근이 $\dfrac{1}{\alpha\beta}$, $\dfrac{1}{\beta\gamma}$, $\dfrac{1}{\gamma\alpha}$이므로

$(\text{세 근의 합})=\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}$

$=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=-a$

$\frac{1}{1}=-a \qquad \therefore a=-1$

$(\text{두 근끼리의 곱의 합})=\frac{1}{\alpha\beta}\times\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\beta\gamma}\times\frac{1}{\gamma\alpha}+\frac{1}{\gamma\alpha}\times\frac{1}{\alpha\beta}$

$=\frac{1}{\alpha\beta^2\gamma}+\frac{1}{\alpha\beta\gamma^2}+\frac{1}{\alpha^2\beta\gamma}$

$=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{(\alpha\beta\gamma)^2}=b$

$\frac{-1}{1^2}=b \qquad \therefore b=-1$

$(\text{세 근의 곱})=\frac{1}{\alpha\beta}\times\frac{1}{\beta\gamma}\times\frac{1}{\gamma\alpha}$

$=\frac{1}{(\alpha\beta\gamma)^2}=-c$

$\frac{1}{1^2}=-c \qquad \therefore c=-1$

$\therefore a+b+c=-1+(-1)+(-1)=-3$

345

$P(-1)=P(1)=P(2)=3$에서

$P(-1)-3=P(1)-3=P(2)-3=0$

이므로 삼차방정식 $P(x)-3=0$의 세 근이 -1, 1, 2이다. 이때

(세 근의 합)$=-1+1+2=2$

(두 근끼리의 곱의 합)$=(-1)\times1+1\times2+2\times(-1)=-1$

(세 근의 곱)$=(-1)\times1\times2=-2$

이므로 -1, 1, 2를 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$x^3-2x^2-x+2=0$

즉, $P(x)-3=x^3-2x^2-x+2$이므로

$P(x)=x^3-2x^2-x+5$

따라서 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 방정식 $P(x)=0$의 모든 근의 곱은 -5이다.

346

주어진 삼차방정식의 계수가 실수이므로 한 근이 $1+i$이면 $1-i$도 근이다.

나머지 한 근을 α라 하면 $x^3-(a+1)x^2+4x-b+3=0$에서 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha(1+i)+(1+i)(1-i)+(1-i)\alpha=4$

$2\alpha+2=4 \qquad \therefore \alpha=1$

따라서 나머지 두 근의 합은

$(1-i)+1=2-i$

347

주어진 삼차방정식의 계수가 유리수이므로 한 근이 $1+\sqrt{2}$이면 $1-\sqrt{2}$도 근이다.

나머지 한 근을 α라 하면 $x^3+ax+b=0$에서 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})=0$ ...... ㉠

$\alpha(1+\sqrt{2})+(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})\alpha=a$ ...... ㉡

$\alpha(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=-b$ ...... ㉢

㉠에서 $\alpha+2=0 \qquad \therefore \alpha=-2$

$\alpha=-2$를 ㉡에 대입하여 풀면

$a=-5$

$\alpha=-2$를 ㉢에 대입하여 풀면

$b=-2$

$\therefore a+b=-5+(-2)=-7$

다른 풀이 삼차방정식 $x^3+ax+b=0$의 한 근이 $1+\sqrt{2}$이므로

$(1+\sqrt{2})^3+a(1+\sqrt{2})+b=0$

$1+3\sqrt{2}+6+2\sqrt{2}+a+a\sqrt{2}+b=0$

$(5+a)\sqrt{2}+(7+a+b)=0$

a, b가 유리수이므로 $5+a=0$, $7+a+b=0$

따라서 $a=-5$, $b=-2$이므로 $a+b=-7$

348

주어진 삼차방정식의 계수가 실수이므로 한 근이 $2-\sqrt{3}i$이면 $2+\sqrt{3}i$도 근이다.

즉, 주어진 방정식의 세 근이 -1, $2-\sqrt{3}i$, $2+\sqrt{3}i$이므로

$ax^3-3x^2+bx+c=0$에서 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-1+(2-\sqrt{3}i)+(2+\sqrt{3}i)=\frac{3}{a}$ ...... ㉠

$(-1)\times(2-\sqrt{3}i)+(2-\sqrt{3}i)\times(2+\sqrt{3}i)$
$+(2+\sqrt{3}i)\times(-1)=\frac{b}{a}$ ...... ㉡

$(-1)\times(2-\sqrt{3}i)\times(2+\sqrt{3}i)=-\frac{c}{a}$ ...... ㉢

㉠에서 $3=\frac{3}{a} \qquad \therefore a=1$

$a=1$을 ㉡에 대입하여 풀면

$b=3$

$a=1$을 ㉢에 대입하여 풀면

$c=7$

$\therefore abc=1\times3\times7=21$

349

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 유리수)라 하면 $f(x)$가 $x-1$로 나누어떨어지므로

$f(1)=0$

한편, 방정식 $f(x)=0$의 계수가 유리수이므로 한 근이 $5-2\sqrt{6}$이면 $5+2\sqrt{6}$도 근이다.

즉, 방정식 $f(x)=0$의 세 근이 1, $5-2\sqrt{6}$, $5+2\sqrt{6}$이므로

$x^3+ax^2+bx+c=0$에서 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$1+(5-2\sqrt{6})+(5+2\sqrt{6})=-a$

$1\times(5-2\sqrt{6})+(5-2\sqrt{6})\times(5+2\sqrt{6})+(5+2\sqrt{6})\times1=b$

$1\times(5-2\sqrt{6})\times(5+2\sqrt{6})=-c$

$\therefore a=-11, b=11, c=-1$

따라서 $f(x)=x^3-11x^2+11x-1$이므로

$f(2)=8-44+22-1=-15$

350

$f(x)=x^3-x^2-kx+k$라 하면 $f(1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해 하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -1 & -k & k \\ & & 1 & 0 & -k \\ \hline & 1 & 0 & -k & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-1)(x^2-k)$

즉, 주어진 방정식은 $(x-1)(x^2-k)=0$

이때 α, β 중 실수는 하나뿐이고 α가 실수이면 $\alpha^2=-2\beta$에서 β는 실수이므로 α는 실수가 아니다. 즉, α는 허수이고 β는 실수이다.

따라서 $\beta=1$이고 $\alpha^2=-2$이므로

$\alpha=\sqrt{2}i$ 또는 $\alpha=-\sqrt{2}i$

이때 γ는 α의 켤레근이므로

$\gamma=-\sqrt{2}i$ 또는 $\gamma=\sqrt{2}i$

$\therefore \beta^2+\gamma^2=1+(-2)=-1$

351

$x^3=1$에서 $x^3-1=0$

$(x-1)(x^2+x+1)=0$

따라서 방정식 $x^3=1$의 한 허근 ω는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 근이므로

$\omega^2+\omega+1=0$

$\omega+\omega^2+\omega^3=\omega(1+\omega+\omega^2)=0$

$\omega^4+\omega^5+\omega^6=\omega^4(1+\omega+\omega^2)=0$

$\vdots$

$\omega^{31}+\omega^{32}+\omega^{33}=\omega^{31}(1+\omega+\omega^2)=0$

$\therefore 1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^{33}$

$=1+\omega(1+\omega+\omega^2)+\cdots+\omega^{31}(1+\omega+\omega^2)$

$=1$

352

방정식 $x^2+x+1=0$의 양변에 $x-1$을 곱하면

$(x-1)(x^2+x+1)=0$, $x^3-1=0$

$\therefore x^3=1$

따라서 방정식 $x^2+x+1=0$의 한 허근 ω는 방정식 $x^3=1$의 근이므로

$\omega^2+\omega+1=0$, $\omega^3=1$

$\therefore \omega^{2022}+\omega^{2024}+\omega^{2026}$

$=(\omega^3)^{674}+(\omega^3)^{674}\times\omega^2+(\omega^3)^{675}\times\omega$

$=1+\omega^2+\omega=0$

353

$x^3=-1$에서 $x^3+1=0$

$(x+1)(x^2-x+1)=0$

따라서 방정식 $x^3=-1$의 한 허근 ω는 이차방정식 $x^2-x+1=0$의 근이므로

$\omega^3=-1$, $\omega^2-\omega+1=0$

$\therefore 1+\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}+\frac{1}{\omega^3}+\cdots+\frac{1}{\omega^{120}}$

$$=1+\Big(\underbrace{\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}-1+\frac{1}{-\omega}+\frac{1}{-\omega^2}+1}_{=0}\Big)$$

$$+\Big(\underbrace{\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}-1+\frac{1}{-\omega}+\frac{1}{-\omega^2}+1}_{=0}\Big)$$

$$+\cdots+\Big(\underbrace{\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}-1+\frac{1}{-\omega}+\frac{1}{-\omega^2}+1}_{=0}\Big)$$

$=1$

354

ㄱ. $x^3+1=0$에서 $(x+1)(x^2-x+1)=0$

따라서 방정식 $x^3+1=0$의 한 허근 ω는 이차방정식 $x^2-x+1=0$의 근이므로 $\omega^2-\omega+1=0$ (참)

ㄴ. ω가 이차방정식 $x^2-x+1=0$의 한 근이면 켤레복소수인 $\overline{\omega}$도 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=1$, $\omega\overline{\omega}=1$

$\therefore \omega+\overline{\omega}=\omega\overline{\omega}$ (참)

ㄷ. ㄴ에 의하여 ω, $\overline{\omega}$는 방정식 $x^3+1=0$의 근이므로

$\omega^3+1=0$, $\overline{\omega}^3+1=0$에서

$\omega^3=-1$, $\overline{\omega}^3=-1$

$\therefore \omega^3+\overline{\omega}^3=-1+(-1)=-2$

또, $\omega^2+\overline{\omega}^2=(\omega+\overline{\omega})^2-2\omega\overline{\omega}$

$=1^2-2\times1=-1$ ($\because$ ㄴ)

이므로 $\omega^3+\overline{\omega}^3\neq\omega^2+\overline{\omega}^2$ (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

355

방정식 $x+\frac{1}{x}=-1$의 양변에 x를 곱하면

$x^2+1=-x$ $\quad\therefore x^2+x+1=0$

이 식의 양변에 $x-1$을 곱하면

$(x-1)(x^2+x+1)=0$, $x^3-1=0$

$\therefore x^3=1$

이때 방정식 $x+\frac{1}{x}=-1$의 한 허근이 ω이므로

$\omega+\frac{1}{\omega}=-1$, $\omega^2+\omega+1=0$, $\omega^3=1$

즉, $\omega^5=\omega^{11}=\omega^{17}=\omega^2$, $\omega^7=\omega^{13}=\omega^{19}=\omega$, $\omega^9=\omega^{15}=\omega^{21}=\omega^3$이므로

$$\Big(\omega+\frac{1}{\omega}\Big)+\Big(\omega^3+\frac{1}{\omega^3}\Big)+\Big(\omega^5+\frac{1}{\omega^5}\Big)$$

$$+\cdots+\Big(\omega^{19}+\frac{1}{\omega^{19}}\Big)+\Big(\omega^{21}+\frac{1}{\omega^{21}}\Big)$$

$=\left(\omega+\frac{1}{\omega}\right)+\left(\omega^3+\frac{1}{\omega^3}\right)+\left(\omega^2+\frac{1}{\omega^2}\right)$

$\qquad\qquad+\cdots+\left(\omega+\frac{1}{\omega}\right)+\left(\omega^3+\frac{1}{\omega^3}\right)$

$=3\left(\omega+\omega^2+\omega^3+\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}+\frac{1}{\omega^3}\right)+\left(\omega+\omega^3+\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^3}\right)$

$=3\left(\omega^2+\omega+1+\frac{\omega^2+\omega+1}{\omega^3}\right)+\left(\omega+\frac{1}{\omega}+2\right)$

$=3\times0+1=1$

356

$x^3+1=0$에서 $x^3=-1$

$(x+1)(x^2-x+1)=0$

이때 방정식 $x^3+1=0$의 한 허근 ω는 이차방정식 $x^2-x+1=0$의 근이므로

$\omega^3=-1$, $\omega^2-\omega+1=0$

$\omega-1=\omega^2$이므로

$(\omega-1)+(\omega-1)^2+(\omega-1)^3+\cdots+(\omega-1)^{20}$

$=\omega^2+\omega^4+\omega^6+\omega^8+\cdots+\omega^{40}$

$=(\omega^2+\omega^4+\omega^6)+\omega^6(\omega^2+\omega^4+\omega^6)+\cdots+\omega^{36}(\omega^2+\omega^4+\omega^6)-\omega^{42}$

$=(\omega^2\underbrace{-\omega+1}_{\omega^4+\omega^6=\omega^3\times\omega+(\omega^3)^2=-\omega+1})+(\omega^2-\omega+1)+\cdots+(\omega^2-\omega+1)-1$

$=-1$

357

$\begin{cases}2x-y=1 & \cdots\cdots ㉠\\ 5x^2-y^2=-5 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠에서 $y=2x-1$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$5x^2-(2x-1)^2=-5$

$x^2+4x+4=0$, $(x+2)^2=0$

$\therefore x=-2$

$x=-2$를 ㉢에 대입하면

$y=-5$

즉, 연립방정식의 해는 $\begin{cases}x=-2\\ y=-5\end{cases}$

따라서 $\alpha=-2$, $\beta=-5$이므로

$\alpha-\beta=-2-(-5)=3$

개념 보충

$\begin{cases}(\text{일차식})=0\\ (\text{이차식})=0\end{cases}$ **꼴의 연립이차방정식의 풀이 순서**

(i) (일차식)$=0$을 한 문자에 대하여 정리한다.

(ii) (i)에서 얻은 식을 (이차식)$=0$에 대입하여 푼다.

358

$\begin{cases}2x+y=1 & \cdots\cdots ㉠\\ x^2+4xy+y^2=-2 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠에서 $y=1-2x$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$x^2+4x(1-2x)+(1-2x)^2=-2$

$-3x^2+1=-2$, $x^2=1$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$

$x=-1$을 ㉢에 대입하면 $y=3$

$x=1$을 ㉢에 대입하면 $y=-1$

즉, 연립방정식의 해는 $\begin{cases}x=-1\\ y=3\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=1\\ y=-1\end{cases}$

따라서 $\alpha+\beta=2$ 또는 $\alpha+\beta=0$이므로 $\alpha+\beta$의 최댓값은 2이다.

359

$\begin{cases}x^2+2y^2=9 & \cdots\cdots ㉠\\ 2x^2+xy-y^2=0 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉡에서 $(2x-y)(x+y)=0$

$\therefore y=2x$ 또는 $y=-x$

(i) $y=2x$를 ㉠에 대입하면

$x^2+8x^2=9$, $9x^2=9$

$x^2=1$ $\quad\therefore x=-1$ 또는 $x=1$

$x=-1$을 $y=2x$에 대입하면 $y=-2$

$x=1$을 $y=2x$에 대입하면 $y=2$

즉, 연립방정식의 해는 $\begin{cases}x=-1\\ y=-2\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=1\\ y=2\end{cases}$

(ii) $y=-x$를 ㉠에 대입하면

$x^2+2x^2=9$, $3x^2=9$

$x^2=3$ $\quad\therefore x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=\sqrt{3}$

$x=-\sqrt{3}$을 $y=-x$에 대입하면 $y=\sqrt{3}$

$x=\sqrt{3}$을 $y=-x$에 대입하면 $y=-\sqrt{3}$

즉, 연립방정식의 해는 $\begin{cases}x=-\sqrt{3}\\ y=\sqrt{3}\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=\sqrt{3}\\ y=-\sqrt{3}\end{cases}$

(i), (ii)에서 x, y는 정수이므로 $\begin{cases}x=-1\\ y=-2\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=1\\ y=2\end{cases}$

$\therefore x^2+y^2=5$

개념 보충

$\begin{cases}(\text{이차식})=0\\ (\text{이차식})=0\end{cases}$ **꼴의 연립이차방정식의 풀이 순서**

(i) 인수분해가 되는 (이차식)$=0$을

$AB=0$ (A, B는 일차식)

꼴로 인수분해 하여 두 일차방정식 $A=0$ 또는 $B=0$을 얻는다.

(ii) (i)에서 얻은 두 일차방정식을 다른 (이차식)$=0$과 각각 연립하여 푼다.

360

$\begin{cases}x^2+y^2=10 & \cdots\cdots ㉠\\ x^2-2xy-3y^2=0 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉡에서 $(x+y)(x-3y)=0$

$\therefore x=-y$ 또는 $x=3y$

(i) $x=-y$를 ㉠에 대입하면

$(-y)^2+y^2=10$, $2y^2=10$

$y^2=5$　　$\therefore y=-\sqrt{5}$ 또는 $y=\sqrt{5}$

$y=-\sqrt{5}$를 $x=-y$에 대입하면 $x=\sqrt{5}$

$y=\sqrt{5}$를 $x=-y$에 대입하면 $x=-\sqrt{5}$

즉, 연립방정식의 해는 $\begin{cases} x=\sqrt{5} \\ y=-\sqrt{5} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{5} \\ y=\sqrt{5} \end{cases}$

(ii) $x=3y$를 ㉠에 대입하면

$(3y)^2+y^2=10$, $10y^2=10$

$y^2=1$　　$\therefore y=-1$ 또는 $y=1$

$y=-1$을 $x=3y$에 대입하면 $x=-3$

$y=1$을 $x=3y$에 대입하면 $x=3$

즉, 연립방정식의 해는 $\begin{cases} x=-3 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$

(i), (ii)에서 주어진 연립방정식의 해가 아닌 것은 ④이다.

361

$\begin{cases} 2x^2-xy-y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x^2-5xy+y^2=16 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(x-y)(2x+y)=0$

$\therefore y=x$ 또는 $y=-2x$

(i) $y=x$를 ㉡에 대입하면

$2x^2-5x^2+x^2=16$, $-2x^2=16$

$x^2=-8$

이것을 만족시키는 실수 x의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $y=-2x$를 ㉡에 대입하면

$2x^2+10x^2+4x^2=16$, $16x^2=16$

$x^2=1$　　$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$

$x=-1$을 $y=-2x$에 대입하면 $y=2$

$x=1$을 $y=-2x$에 대입하면 $y=-2$

즉, 연립방정식의 해는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$

(i), (ii)에서 연립방정식의 해는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$

$\therefore |x+y|=1$

362

$\begin{cases} x+y=a & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+xy+y^2=b & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

$x=1$, $y=2$를 ㉠에 대입하면

$1+2=a$　　$\therefore a=3$

$x=1$, $y=2$를 ㉡에 대입하면

$1+2+4=b$　　$\therefore b=7$

㉠에서 $x+y=3$, 즉 $y=3-x$　　$\cdots\cdots$ ㉢

$b=7$이므로 ㉢을 ㉡에 대입하면

$x^2+x(3-x)+(3-x)^2=7$

$x^2-3x+2=0$, $(x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=2$

$x=2$를 ㉢에 대입하면 $y=1$

$\therefore c=2$, $d=1$

$\therefore a+b+c+d=3+7+2+1=13$

363

두 연립방정식 $\begin{cases} x+y=-1 \\ x^2+ay^2=6 \end{cases}$과 $\begin{cases} bx+8y=4 \\ x^2-5y^2=-1 \end{cases}$의 공통인 해는

연립방정식

$\begin{cases} x+y=-1 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-5y^2=-1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

의 해와 같다.

㉠에서 $y=-x-1$　　$\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$x^2-5(-x-1)^2=-1$

$4x^2+10x+4=0$, $2x^2+5x+2=0$

$(2x+1)(x+2)=0$　　$\therefore x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=-2$

$x=-\frac{1}{2}$을 ㉢에 대입하면 $y=-\frac{1}{2}$

$x=-2$를 ㉢에 대입하면 $y=1$

즉, 연립방정식의 해는 $\begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}$

(i) $x=-\frac{1}{2}$, $y=-\frac{1}{2}$을 $x^2+ay^2=6$, $bx+8y=4$에 각각 대입하면

$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}a=6$, $-\frac{1}{2}b-4=4$

$\therefore a=23$, $b=-16$

(ii) $x=-2$, $y=1$을 $x^2+ay^2=6$, $bx+8y=4$에 각각 대입하면

$4+a=6$, $-2b+8=4$

$\therefore a=2$, $b=2$

(i), (ii)에서 a, b는 자연수이므로 $a=2$, $b=2$

$\therefore a-b=2-2=0$

364

주어진 연립방정식은 $\begin{cases} (x+y)+xy=7 \\ (x+y)-xy=1 \end{cases}$

$x+y=u$, $xy=v$로 놓고, 주어진 연립방정식을 u, v에 대한 식으로 나타내면

$\begin{cases} u+v=7 & \cdots\cdots ㉠ \\ u-v=1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠+㉡을 하면 $2u=8$　　$\therefore u=4$

$u=4$를 ㉠에 대입하여 풀면 $v=3$

즉, $x+y=4$, $xy=3$이고 x, y는 t에 대한 이차방정식

$t^2-4t+3=0$의 두 근이므로

$(t-1)(t-3)=0$에서 $t=1$ 또는 $t=3$

$\therefore \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$

따라서 $x+3y=10$ 또는 $x+3y=6$이므로 $x+3y$의 최솟값은 6이다.

개념 보충

이차방정식의 작성

두 수 α, β를 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$$x^2-\underbrace{(\alpha+\beta)}_{\text{두 근의 합}}x+\underbrace{\alpha\beta}_{\text{두 근의 곱}}=0$$

365

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$이므로 주어진 연립방정식은

$$\begin{cases}(x+y)^2-2xy=16\\(x+y)-xy=4\end{cases}$$

$x+y=u$, $xy=v$로 놓고, 주어진 연립방정식을 u, v에 대한 식으로 나타내면

$$\begin{cases}u^2-2v=16 & \cdots\cdots ㉠\\u-v=4 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$$

㉡에서 $v=u-4$ …… ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면 $u^2-2(u-4)=16$

$u^2-2u-8=0$, $(u+2)(u-4)=0$

$\therefore u=-2$ 또는 $u=4$

$u=-2$를 ㉢에 대입하면 $v=-6$

$u=4$를 ㉢에 대입하면 $v=0$

$\therefore \begin{cases}x+y=-2\\xy=-6\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x+y=4\\xy=0\end{cases}$

(i) $x+y=-2$, $xy=-6$일 때,

x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2+2t-6=0$의 두 근이므로

$t=-1\pm\sqrt{7}$

$\therefore \begin{cases}x=-1+\sqrt{7}\\y=-1-\sqrt{7}\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-1-\sqrt{7}\\y=-1+\sqrt{7}\end{cases}$

(ii) $x+y=4$, $xy=0$일 때,

x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2-4t=0$의 두 근이므로

$t(t-4)=0$에서 $t=0$ 또는 $t=4$

$\therefore \begin{cases}x=0\\y=4\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=4\\y=0\end{cases}$

(i), (ii)에서 x, y는 정수이므로 $\begin{cases}x=0\\y=4\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=4\\y=0\end{cases}$

$\therefore x^3+y^3=64$

366

$$\begin{cases}x-y=2 & \cdots\cdots ㉠\\x^2+y^2=1-a & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$$

㉠에서 $y=x-2$ …… ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$x^2+(x-2)^2=1-a$

$\therefore 2x^2-4x+a+3=0$

이것을 만족시키는 실수 x의 값이 존재해야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 할 때,

$\dfrac{D}{4}=(-2)^2-2(a+3)\ge0$

$-2a-2\ge0 \qquad \therefore a\le-1$

따라서 실수 a의 최댓값은 -1이다.

367

$$\begin{cases}x+y=k & \cdots\cdots ㉠\\x^2+y^2=8 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$$

㉠에서 $y=k-x$ …… ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$x^2+(k-x)^2=8$

$\therefore 2x^2-2kx+k^2-8=0$

이것을 만족시키는 x의 값이 오직 하나 존재해야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 할 때,

$\dfrac{D}{4}=(-k)^2-2(k^2-8)=0$

$16-k^2=0$, $k^2=16$

$\therefore k=4$ 또는 $k=-4$

따라서 k는 양수이므로 $k=4$

368

$$\begin{cases}x+y=5 & \cdots\cdots ㉠\\xy-x-y=a+1 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$$

㉠에서 $y=-x+5$ …… ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$x(-x+5)-x-(-x+5)=a+1$

$\therefore x^2-5x+a+6=0$

이것을 만족시키는 실수 x의 값이 존재하지 않아야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 할 때,

$D=(-5)^2-4(a+6)<0$

$-4a+1<0 \qquad \therefore a>\dfrac{1}{4}$

다른 풀이 $\begin{cases}x+y=5 & \cdots\cdots ㉠\\xy-x-y=a+1 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠을 ㉡에 대입하면

$xy-5=a+1$

$\therefore xy=a+6$ …… ㉢

㉠, ㉢을 동시에 만족시키는 x, y는 t에 대한 이차방정식

$t^2-5t+(a+6)=0$ …… ㉣

의 두 근이므로 주어진 연립방정식의 실근이 존재하지 않으려면 이차방정식 ㉣의 판별식을 D라 할 때,

$D=(-5)^2-4(a+6)<0$

$-4a+1<0 \qquad \therefore a>\dfrac{1}{4}$

369

두 정사각형의 둘레의 길이의 합이 160 cm이므로

$4a+4b=160$, $a+b=40$

$\therefore b=40-a$ …… ㉠

두 정사각형의 넓이의 합이 850 cm^2이므로

$a^2+b^2=850$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$a^2+(40-a)^2=850$

$2a^2-80a+750=0$, $a^2-40a+375=0$

$(a-15)(a-25)=0$ $\quad\therefore a=15$ 또는 $a=25$
$a=15$를 ㉠에 대입하면 $b=25$
$a=25$를 ㉠에 대입하면 $b=15$
그런데 $a>b$이므로
$a=25, b=15$

370

두 원 O_1, O_2의 반지름의 길이를 각각 r_1, r_2라 하면 두 원의 둘레의 길이의 합이 8π이므로
$2\pi r_1+2\pi r_2=8\pi$
$r_1+r_2=4$ $\quad\therefore r_2=4-r_1$ ...... ㉠
두 원의 넓이의 합이 10π이므로
$\pi r_1^2+\pi r_2^2=10\pi$ $\quad\therefore r_1^2+r_2^2=10$ ...... ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면
$r_1^2+(4-r_1)^2=10$
$2r_1^2-8r_1+6=0$, $r_1^2-4r_1+3=0$
$(r_1-1)(r_1-3)=0$ $\quad\therefore r_1=1$ 또는 $r_1=3$
$r_1=1$을 ㉠에 대입하면 $r_2=3$
$r_1=3$을 ㉠에 대입하면 $r_2=1$
따라서 두 원의 반지름의 길이의 차는
$|r_1-r_2|=2$

371

$2r+h=7$에서 $h=7-2r$ ...... ㉠
이때 원기둥의 겉넓이가 24π이므로
$2\pi r^2+2\pi rh=24\pi$ ...... ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면
$2\pi r^2+2\pi r(7-2r)=24\pi$, $r^2+7r-2r^2=12$
$r^2-7r+12=0$
$(r-3)(r-4)=0$
$\therefore r=3$ 또는 $r=4$
$r=3$을 ㉠에 대입하면 $h=1$
$r=4$를 ㉠에 대입하면 $h=-1$
이때 $h>0$이므로 $r=3$, $h=1$
따라서 구하는 원기둥의 부피는
$\pi r^2h=\pi\times 3^2\times 1=9\pi$

372

처음 땅의 가로의 길이를 x km, 세로의 길이를 y km라 하면 대각선의 길이가 $\sqrt{5}$ km이므로
$x^2+y^2=5$ ...... ㉠
가로의 길이와 세로의 길이를 각각 1 km씩 늘인 땅의 넓이가 처음 땅의 넓이보다 4 km^{2}만큼 넓어졌으므로
$(x+1)(y+1)=xy+4$
$x+y=3$
$\therefore y=3-x$ ...... ㉡
㉡을 ㉠에 대입하면
$x^2+(3-x)^2=5$, $2x^2-6x+4=0$
$x^2-3x+2=0$, $(x-1)(x-2)=0$
$\therefore x=1$ 또는 $x=2$
$x=1$을 ㉡에 대입하면 $y=2$
$x=2$를 ㉡에 대입하면 $y=1$
따라서 처음 땅의 가로의 길이와 세로의 길이의 차는
$2-1=1$ (km)

다른 풀이 처음 땅의 가로의 길이를 x km, 세로의 길이를 y km라 하면 대각선의 길이가 $\sqrt{5}$ km이므로
$x^2+y^2=5$ ...... ㉠
가로의 길이와 세로의 길이를 각각 1 km씩 늘인 땅의 넓이가 처음 땅의 넓이보다 4 km^{2}만큼 넓어졌으므로
$(x+1)(y+1)=xy+4$
$\therefore x+y=3$ ...... ㉡
$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$이므로 ㉠, ㉡에서
$3^2=5+2xy$, $2xy=4$
$\therefore xy=2$
이때 $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy$이므로
$(x-y)^2=3^2-4\times 2=1$
$\therefore |x-y|=1$
따라서 처음 땅의 가로의 길이와 세로의 길이의 차는 1 km이다.

373

$\overline{AB}=a$, $\overline{EF}=b$이고 $\overline{AF}=5$, $\overline{EB}=1$이므로
$a+b=6$ $\quad\therefore a=6-b$ ...... ㉠
직사각형 EBCI의 넓이는 a, 정사각형 EFGH의 넓이는 b^2이고,
$\square EBCI=\frac{1}{4}\square EFGH$이므로
$a=\frac{1}{4}b^2$ ...... ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면
$6-b=\frac{1}{4}b^2$, $b^2+4b-24=0$
$\therefore b=-2\pm 2\sqrt{7}$
그런데 $1<a<b<5$이므로 $b=-2+2\sqrt{7}$

내신 적중 서술형

89쪽

374 4 **375** 4 **376** (1) 풀이 참조 (2) -1
377 95

374

$(x-1)(x-2)(x-3)(x-6)=3x^2$에서
$\{(x-1)(x-6)\}\{(x-2)(x-3)\}=3x^2$
$(x^2-7x+6)(x^2-5x+6)=3x^2$
$x^2+6=X$로 놓으면

$(X-7x)(X-5x)=3x^2$

$X^2-12xX+32x^2=0$

$(X-4x)(X-8x)=0$

$\therefore X=4x$ 또는 $X=8x$ …… ㉮

(i) $X=4x$일 때,

$x^2+6=4x$에서 $x^2-4x+6=0$

이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 할 때,

$\frac{D_1}{4}=(-2)^2-1\times6=-2<0$

즉, 이 이차방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다. …… ㉯

(ii) $X=8x$일 때,

$x^2+6=8x$에서 $x^2-8x+6=0$

이 이차방정식의 판별식을 D_2라 할 때,

$\frac{D_2}{4}=(-4)^2-1\times6=10>0$

즉, 이 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다. …… ㉰

(i), (ii)에서 주어진 사차방정식의 허근은 이차방정식 $x^2-4x+6=0$의 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 주어진 방정식의 모든 허근의 합은 4이다. …… ㉱

채점 기준	배점 비율
㉮ $x^2+6=X$로 놓고 X에 대한 이차방정식의 해 구하기	30 %
㉯ $X=4x$일 때, 근 판별하기	30 %
㉰ $X=8x$일 때, 근 판별하기	30 %
㉱ 주어진 방정식의 모든 허근의 합 구하기	10 %

375

$x^3=1$에서 $x^3-1=0$

$(x-1)(x^2+x+1)=0$

따라서 방정식 $x^3=1$의 한 허근 ω는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 근이므로

$\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$ …… ㉮

$\therefore (1+\omega)(1+\omega^2)(1+\omega^3)(1+\omega^4)(1+\omega^5)(1+\omega^6)$

$=(1+\omega)(1+\omega^2)\times(1+1)\times(1+\omega)(1+\omega^2)\times(1+1)$

$=4(1+\omega)^2(1+\omega^2)^2$

$=4(-\omega^2)^2(-\omega)^2$

$=4\omega^6$ …… ㉯

$=4\times1=4$ …… ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ $\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$임을 알기	30 %
㉯ $\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$임을 이용하여 주어진 식 간단히 하기	50 %
㉰ 주어진 식의 값 구하기	20 %

376

(1) $x^4+x^2+1=0$에서

$(x^4+2x^2+1)-x^2=0$

$(x^2+1)^2-x^2=0$

$(x^2+x+1)(x^2-x+1)=0$

사차방정식 $x^4+x^2+1=0$의 한 근이 ω이므로 ω는 $x^2+x+1=0$ 또는 $x^2-x+1=0$의 근이다.

$\therefore \omega^2+\omega+1=0$ 또는 $\omega^2-\omega+1=0$

(i) $\omega^2+\omega+1=0$일 때,

양변에 $\omega-1$을 곱하면

$(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0$, $\omega^3=1$

$\therefore \omega^6=(\omega^3)^2=1$

(ii) $\omega^2-\omega+1=0$일 때,

양변에 $\omega+1$을 곱하면

$(\omega+1)(\omega^2-\omega+1)=0$, $\omega^3=-1$

$\therefore \omega^6=(\omega^3)^2=1$

(i), (ii)에서 $\omega^6=1$ …… ㉮

(2) (1)에서 $\omega^6=1$이므로

(i) $\omega^3=1$인 경우

$\omega^2+\omega+1=0$이므로

$\omega^{2023}+\omega^{2024}+\omega^{2025}+\omega^{2026}+\omega^{2027}$

$=\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4+\omega^5$

$=\omega+\omega^2+1+\omega+\omega^2$

$=(1+\omega+\omega^2)+(1+\omega+\omega^2)-1$

$=-1$

(ii) $\omega^3=-1$인 경우

$\omega^2-\omega+1=0$이므로

$\omega^{2023}+\omega^{2024}+\omega^{2025}+\omega^{2026}+\omega^{2027}=\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4+\omega^5$

$=\omega+\omega^2-1-\omega-\omega^2$

$=-1$

(i), (ii)에서

$\omega^{2023}+\omega^{2024}+\omega^{2025}+\omega^{2026}+\omega^{2027}=-1$ …… ㉯

	채점 기준	배점 비율
(1)	㉮ $\omega^6=1$임을 보이기	50 %
(2)	㉯ $\omega^{2023}+\omega^{2024}+\omega^{2025}+\omega^{2026}+\omega^{2027}$의 값 구하기	50 %

377

두 자리의 자연수의 십의 자리의 숫자를 x, 일의 자리의 숫자를 y $(x>y)$라 하면

$\begin{cases} x^2+y^2=106 & \cdots\cdots ㉠ \\ (10x+y)+(10y+x)=154 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ …… ㉮

㉡에서 $11x+11y=154$

$x+y=14$ $\quad\therefore y=14-x$ …… ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면 $x^2+(14-x)^2=106$

$2x^2-28x+90=0$, $x^2-14x+45=0$

$(x-5)(x-9)=0$ $\quad\therefore x=5$ 또는 $x=9$

$x=5$를 ㉢에 대입하면 $y=9$

$x=9$를 ㉢에 대입하면 $y=5$

그런데 $x>y$이므로 $x=9$, $y=5$ …… ㉯

따라서 처음 수는 95이다. …… ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ 연립이차방정식 세우기	30 %
㉯ 연립이차방정식의 해 구하기	60 %
㉰ 처음 수 구하기	10 %

1등급 비법

연립이차방정식의 활용 문제를 풀 때는 미지수로 놓을 것을 정한 후, 주어진 조건을 식으로 나타낸다. 이때 미지수의 개수만큼 방정식을 세우면 답을 구할 수 있다.

1등급 실력 완성

● 90쪽 ~ 92쪽

378 ⑤	**379** ③	**380** 2	**381** 12	**382** 7
383 -5	**384** ①	**385** 0	**386** -15	**387** $\frac{1}{18}$
388 ③	**389** -1	**390** 1, 3	**391** ④	**392** ③

378

삼 · 사차방정식의 풀이

(전략) 조립제법을 이용하여 주어진 삼차방정식의 좌변을 인수분해 한 후 조건을 만족시키는 한 근 z를 파악한다.

(풀이) $f(x)=x^3-3x^2+7x-5$라 하면 $f(1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해 하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -3 & 7 & -5 \\ & & 1 & -2 & 5 \\ \hline & 1 & -2 & 5 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-1)(x^2-2x+5)$

즉, 주어진 방정식은

$(x-1)(x^2-2x+5)=0$

이 삼차방정식의 한 근을 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면

$\overline{z}=a-bi$이므로

$\dfrac{z-\overline{z}}{2i}=\dfrac{2bi}{2i}=b>0$

즉, z의 허수부분은 양수이어야 하므로

$z\neq 1$

따라서 z, $\overline{z}$는 이차방정식 $x^2-2x+5=0$의 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$z\overline{z}=5$

379

삼 · 사차방정식의 풀이

(전략) $x^2-6x+1=X$로 치환하여 방정식을 풀고, 주어진 조건을 이용하여 a, b의 값을 구한다.

(풀이) $x^2-6x+1=X$로 놓으면

$X^2+a(X-1)-1=0$, $X^2+aX-(a+1)=0$

$(X-1)(X+a+1)=0$

$\therefore X=1$ 또는 $X=-a-1$

(i) $X=1$일 때,

$x^2-6x+1=1$, $x^2-6x=0$

$x(x-6)=0$　　$\therefore x=0$ 또는 $x=6$

즉, 이 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(ii) $X=-a-1$일 때,

$x^2-6x+1=-a-1$

$x^2-6x+a+2=0$

이때 주어진 사차방정식의 한 허근이 $b+i$이므로 (i), (ii)에서 $b+i$는 이차방정식 $x^2-6x+a+2=0$의 근이다.

이 이차방정식의 계수가 실수이고 한 근이 $b+i$이므로 다른 한 근은 $b-i$이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(b+i)+(b-i)=6$

$2b=6$　　$\therefore b=3$

$(b+i)(b-i)=(3+i)(3-i)=a+2$이므로

$10=a+2$　　$\therefore a=8$

$\therefore a+b=8+3=11$

380

삼 · 사차방정식의 풀이

(전략) 정육면체의 부피와 겉넓이를 이용하여 삼차방정식을 세운다.

(풀이) 한 모서리의 길이가 x cm인 정육면체의 부피는 x^3 cm^{3}이므로 주어진 도형의 부피는 $4x^3$ cm^{3}이다.

주어진 그림에서 네 개의 정육면체의 면 24개 중에서 6개가 붙어 있으므로 주어진 도형의 겉넓이는 $18x^2$ cm^{2}이다.

$\therefore A=4x^3$, $B=18x^2$

$5A=2B+16$에서 $20x^3=36x^2+16$

$\therefore 5x^3-9x^2-4=0$

$f(x)=5x^3-9x^2-4$라 하면 $f(2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해 하면

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 5 & -9 & 0 & -4 \\ & & 10 & 2 & 4 \\ \hline & 5 & 1 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-2)(5x^2+x+2)$

$\therefore (x-2)(5x^2+x+2)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{39}i}{10}$

그런데 모서리의 길이 x는 양의 실수이므로

$x=2$

381

근이 주어진 삼 · 사차방정식

(전략) 주어진 방정식의 좌변을 인수분해 하여 중근을 가질 수 있는 경우로 나누어 해결한다.

(풀이) 주어진 사차방정식의 서로 다른 실근의 개수가 3이려면 주어진 사차방정식이 한 개의 중근을 가져야 한다.

$x^4+(2a+1)x^3+(3a+2)x^2+(a+2)x$

$=x\{x^3+(2a+1)x^2+(3a+2)x+(a+2)\}$

$f(x)=x^3+(2a+1)x^2+(3a+2)x+a+2$라 하면 $f(-1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해 하면

$$\begin{array}{c|cccc} -1 & 1 & 2a+1 & 3a+2 & a+2 \\ & & -1 & -2a & -a-2 \\ \hline & 1 & 2a & a+2 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x+1)(x^2+2ax+a+2)$

즉, 주어진 방정식은

$x(x+1)(x^2+2ax+a+2)=0$

(ⅰ) $x=0$이 사차방정식의 중근일 때,

$x=0$은 이차방정식 $x^2+2ax+a+2=0$의 근이어야 하므로

$0^2+2a\times0+a+2=0 \qquad \therefore a=-2$

즉, 주어진 방정식은 $x^2(x+1)(x-4)=0$

(ⅱ) $x=-1$이 사차방정식의 중근일 때,

$x=-1$은 이차방정식 $x^2+2ax+a+2=0$의 근이어야 하므로

$(-1)^2+2a\times(-1)+a+2=0 \qquad \therefore a=3$

즉, 주어진 방정식은 $x(x+1)^2(x+5)=0$

(ⅲ) 이차방정식 $x^2+2ax+a+2=0$이 $x\neq0$, $x\neq-1$인 중근을 가질 때,

이차방정식 $x^2+2ax+a+2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-(a+2)=0$, $a^2-a-2=0$

$(a+1)(a-2)=0 \qquad \therefore a=-1$ 또는 $a=2$

$a=-1$일 때, 주어진 방정식은 $x(x+1)(x-1)^2=0$

$a=2$일 때, 주어진 방정식은 $x(x+1)(x+2)^2=0$

이상에서 구하는 실수 a는 -2, -1, 2, 3이므로 그 곱은

$(-2)\times(-1)\times2\times3=12$

382

근이 주어진 삼 · 사차방정식

전략 먼저 조립제법을 이용하여 주어진 방정식의 좌변을 인수분해 한다.

풀이 $f(x)=x^3-(a+6)x^2+7ax-a^2$이라 하면 $f(a)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해 하면

$$\begin{array}{c|cccc} a & 1 & -a-6 & 7a & -a^2 \\ & & a & -6a & a^2 \\ \hline & 1 & -6 & a & 0 \end{array}$$

$f(x)=(x-a)(x^2-6x+a)$

즉, 주어진 방정식은

$(x-a)(x^2-6x+a)=0$

이때 이 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면 이차방정식 $x^2-6x+a=0$이 $x\neq a$인 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

(ⅰ) $x=a$는 이차방정식 $x^2-6x+a=0$의 근이 아니어야 하므로

$a^2-6a+a\neq0$, $a(a-5)\neq0$

$\therefore a\neq0$이고 $a\neq5$

(ⅱ) 이차방정식 $x^2-6x+a=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 할 때,

$\frac{D}{4}=(-3)^2-a>0$

$9-a>0 \qquad \therefore a<9$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 자연수 a는 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8의 7개이다.

383

삼차방정식의 근과 계수의 관계

전략 삼차방정식의 세 근을 α, $-\alpha$, β $(\alpha>0)$로 놓고, 세 근의 합과 세 근의 곱을 이용하여 α, β의 값을 구한다.

풀이 주어진 삼차방정식의 세 근을 α, $-\alpha$, β $(\alpha>0)$라 하면

$x^3-2x^2+ax+10=0$에서 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(-\alpha)+\beta=2 \qquad \therefore \beta=2$

또, $\alpha\times(-\alpha)\times\beta=-10$이므로 $\beta=2$를 대입하면

$-2\alpha^2=-10$, $\alpha^2=5$

$\therefore \alpha=\sqrt{5}$ ($\because \alpha>0$)

따라서 세 근이 $\sqrt{5}$, $-\sqrt{5}$, 2이므로

$a=\sqrt{5}\times(-\sqrt{5})+(-\sqrt{5})\times2+2\times\sqrt{5}=-5$

384

세 수를 근으로 하는 삼차방정식

전략 $P(x)=0$의 세 근을 α, β, γ라 하면 방정식 $P(3x-1)=0$의 세 근은 $\frac{\alpha+1}{3}$, $\frac{\beta+1}{3}$, $\frac{\gamma+1}{3}$임을 이용한다.

풀이 방정식 $P(x)=0$의 한 실근을 α, 서로 다른 두 허근을 β, γ라 하면 방정식 $P(3x-1)=0$의 세 근은

$\frac{\alpha+1}{3}$, $\frac{\beta+1}{3}$, $\frac{\gamma+1}{3}$

조건 (가)에서 $\beta\gamma=5$ ······ ㉠

조건 (나)에서

$\frac{\alpha+1}{3}=0$이고 $\frac{\beta+1}{3}+\frac{\gamma+1}{3}=2$이므로

$\alpha=-1$, $\beta+\gamma=4$ ······ ㉡

따라서 α, β, γ를 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은 ㉠, ㉡에서

$(x+1)(x^2-4x+5)=0$

즉, $P(x)=(x+1)(x^2-4x+5)=x^3-3x^2+x+5$이므로

$a=-3$, $b=1$, $c=5$

$\therefore a+b+c=-3+1+5=3$

385

세 수를 근으로 하는 삼차방정식

전략 α, β, γ를 세 근으로 하는 삼차방정식을 세워 그 근을 구한다.

풀이 $(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$이므로

$2^2=6+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

$\therefore \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-1$

α, β, γ를 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=0$에서

$x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma=0$

이때 $\alpha+\beta+\gamma=2$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-1$, $\alpha\beta\gamma=-2$이므로

$x^3-2x^2-x+2=0$

$x^2(x-2)-(x-2)=0$

$(x^2-1)(x-2)=0$

$(x+1)(x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

그런데 $\alpha\leq\beta\leq\gamma$이므로

$\alpha=-1$, $\beta=1$, $\gamma=2$

$\therefore \alpha-\beta+\gamma=-1-1+2=0$

386

삼차방정식의 켤레근

전략 삼차방정식의 계수가 모두 실수이므로 한 허근이 α이면 $\overline{\alpha}$도 근임을 이용하여 $\alpha, \overline{\alpha}$ 사이의 관계를 파악한다.

풀이 주어진 삼차방정식의 계수가 실수이므로 한 허근이 α이면 $\overline{\alpha}$도 근이다.

즉, $\alpha^3+2\alpha+3=0$, $\overline{\alpha}^3+2\overline{\alpha}+3=0$이므로

$\alpha^3=-2\alpha-3$, $\overline{\alpha}^3=-2\overline{\alpha}-3$ …… ㉠

또, $f(x)=x^3+2x+3$이라 하면 $f(-1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해 하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ & & -1 & 1 & -3 \\ \hline & 1 & -1 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x+1)(x^2-x+3)$

즉, 주어진 방정식은

$(x+1)(x^2-x+3)=0$

이때 α, $\overline{\alpha}$는 이차방정식 $x^2-x+3=0$의 두 허근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\overline{\alpha}=1$, $\alpha\overline{\alpha}=3$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$$\begin{aligned}\alpha^3\overline{\alpha}+\alpha\overline{\alpha}^3&=(-2\alpha-3)\overline{\alpha}+\alpha(-2\overline{\alpha}-3)\\&=-4\alpha\overline{\alpha}-3(\alpha+\overline{\alpha})\\&=(-4)\times3-3\times1\\&=-15\end{aligned}$$

387

삼차방정식의 켤레근 + 삼차방정식의 근과 계수의 관계

전략 삼차방정식의 켤레근과 근과 계수의 관계를 이용하여 식을 세운다.

풀이 조건 (가)에서 삼차방정식 $P(x)=0$의 계수가 실수이고 한 근이 $2+i$이므로 $2-i$도 근이다.

나머지 한 근을 α라 하면 $x^3-ax^2+bx-c=0$에서 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

(세 근의 합)$=\alpha+(2+i)+(2-i)=a$

(두 근끼리의 곱의 합)$=\alpha(2+i)+(2+i)(2-i)+(2-i)\alpha=b$

(세 근의 곱)$=\alpha(2+i)(2-i)=c$

$\therefore a=\alpha+4$, $b=4\alpha+5$, $c=5\alpha$ …… ㉠

한편, 조건 (나)에서 $P(x)=x^3-ax^2+bx-c$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 1이므로 나머지정리에 의하여

$P(1)=1-a+b-c=1$

$\therefore a-b+c=0$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$(\alpha+4)-(4\alpha+5)+5\alpha=0$

$2\alpha-1=0 \qquad \therefore \alpha=\dfrac{1}{2}$

즉, 삼차방정식 $P(x)=0$의 세 근이 $\dfrac{1}{2}$, $2+i$, $2-i$이므로 삼차방정식 $P(2-3x)=0$에서

$2-3x=\dfrac{1}{2}$ 또는 $2-3x=2+i$ 또는 $2-3x=2-i$

$\therefore x=\dfrac{1}{2}$ 또는 $x=-\dfrac{i}{3}$ 또는 $x=\dfrac{i}{3}$

따라서 방정식 $P(2-3x)=0$의 세 근의 곱은

$\dfrac{1}{2}\times\left(-\dfrac{i}{3}\right)\times\dfrac{i}{3}=\dfrac{1}{18}$

개념 보충

나머지정리

다항식 $f(x)$를 일차식 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지는 $f(\alpha)$이다.

388

방정식 $x^3=1$의 허근의 성질

전략 $\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$임을 이용하여 주어진 식을 간단히 한다.

풀이 $x^3-1=0$에서 $x^3=1$

$(x-1)(x^2+x+1)=0$

이때 방정식 $x^3-1=0$의 한 허근 ω는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 근이므로

$\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$

$$\begin{aligned}\omega+\omega^2+\cdots+\omega^{10}&=(\omega+\omega^2+1)+(\omega+\omega^2+1)+(\omega+\omega^2+1)+\omega\\&=\omega\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega^2+\omega^3+\cdots+\omega^{10}&=(\omega^2+1+\omega)+(\omega^2+1+\omega)+(\omega^2+1+\omega)\\&=0\end{aligned}$$

$\omega^3+\omega^4+\cdots+\omega^{10}=(1+\omega+\omega^2)+(1+\omega+\omega^2)+1+\omega=1+\omega$

$\omega^4+\omega^5+\cdots+\omega^{10}=(\omega+\omega^2+1)+(\omega+\omega^2+1)+\omega=\omega$

$\vdots$

$$\begin{aligned}\therefore\ &\omega+2\omega^2+3\omega^3+\cdots+10\omega^{10}\\&=(\omega+\omega^2+\cdots+\omega^{10})+(\omega^2+\omega^3+\cdots+\omega^{10})\\&\quad+(\omega^3+\omega^4+\cdots+\omega^{10})+(\omega^4+\omega^5+\cdots+\omega^{10})+\cdots+\omega^{10}\\&=3\{\omega+0+(1+\omega)\}+\omega\\&=3+7\omega\end{aligned}$$

따라서 $a=3$, $b=7$이므로

$a+b=3+7=10$

389

방정식 $x^3=1$의 허근의 성질

전략 $f(1), f(2), f(3), \cdots$을 차례대로 구하여 규칙을 찾는다.

풀이 $x^3=1$에서 $x^3-1=0$

즉, $(x-1)(x^2+x+1)=0$

따라서 방정식 $x^3=1$의 한 허근 ω는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 근이므로

$\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$

이때 $f(n)$에 $n=1, 2, 3, \cdots$을 차례대로 대입하면

$f(1)=\dfrac{\omega^2+1}{\omega}=\dfrac{-\omega}{\omega}=-1$

$f(2)=\dfrac{\omega^4+1}{\omega^2}=\dfrac{\omega+1}{\omega^2}=\dfrac{-\omega^2}{\omega^2}=-1$

$f(3)=\dfrac{\omega^6+1}{\omega^3}=\dfrac{1+1}{1}=2$

$f(4)=\dfrac{\omega^8+1}{\omega^4}=\dfrac{\omega^2+1}{\omega}=f(1)$

$f(5)=\dfrac{\omega^{10}+1}{\omega^5}=\dfrac{\omega+1}{\omega^2}=f(2)$

$f(6)=\dfrac{\omega^{12}+1}{\omega^{6}}=\dfrac{1+1}{1}=f(3)$

$\vdots$

따라서 $f(1)=f(4)=f(7)=f(10)=-1$,

$f(2)=f(5)=f(8)=-1$, $f(3)=f(6)=f(9)=2$이므로

$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(10)$

$=3\times(-1-1+2)+(-1)$

$=-1$

390

연립이차방정식의 풀이

전략 주어진 두 연립방정식에서 a, b를 포함하지 않는 두 방정식을 연립하여 해를 구한다.

풀이 두 연립방정식 $\begin{cases} x-y=3 \\ bx^2-ay=5 \end{cases}$와 $\begin{cases} bx+ay=1 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$의 공통인 해는

연립방정식

$\begin{cases} x-y=3 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=5 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

의 해와 같다.

㉠에서 $y=x-3$ ⋯⋯ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$x^2+(x-3)^2=5$

$2x^2-6x+4=0$, $x^2-3x+2=0$

$(x-1)(x-2)=0$ $\therefore x=1$ 또는 $x=2$

$x=1$을 ㉢에 대입하면 $y=-2$

$x=2$를 ㉢에 대입하면 $y=-1$

즉, 연립방정식의 해는 $\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$

(i) $x=1$, $y=-2$를 $bx^2-ay=5$와 $bx+ay=1$에 각각 대입하면

$b+2a=5$, $b-2a=1$

두 식을 연립하여 풀면

$a=1$, $b=3$ $\therefore ab=1\times3=3$

(ii) $x=2$, $y=-1$을 $bx^2-ay=5$와 $bx+ay=1$에 각각 대입하면

$4b+a=5$, $2b-a=1$

두 식을 연립하여 풀면

$a=1$, $b=1$ $\therefore ab=1\times1=1$

(i), (ii)에서 ab의 값은 1 또는 3이다.

391

대칭식으로 이루어진 연립이차방정식의 풀이

전략 $x+y=u$, $xy=v$로 놓고 주어진 식을 u, v에 대한 식으로 변형하여 연립방정식을 푼다.

풀이 $x^2y+xy^2=xy(x+y)$이므로 주어진 연립방정식은

$\begin{cases} (x+y)+xy=9 \\ xy(x+y)=20 \end{cases}$

$x+y=u$, $xy=v$로 놓고, 연립방정식을 u, v에 대한 식으로 나타내면

$\begin{cases} u+v=9 & \cdots\cdots ㉠ \\ uv=20 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $u=9-v$ ⋯⋯ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$(9-v)v=20$, $v^2-9v+20=0$

$(v-4)(v-5)=0$ $\therefore v=4$ 또는 $v=5$

$v=4$를 ㉢에 대입하면 $u=5$

$v=5$를 ㉢에 대입하면 $u=4$

$\therefore \begin{cases} x+y=5 \\ xy=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x+y=4 \\ xy=5 \end{cases}$

(i) $x+y=5$, $xy=4$일 때,

x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2-5t+4=0$의 두 근이므로

$(t-1)(t-4)=0$에서

$t=1$ 또는 $t=4$

$\therefore \begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$

(ii) $x+y=4$, $xy=5$일 때,

x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2-4t+5=0$의 두 근이므로

$t=2\pm i$

$\therefore \begin{cases} x=2+i \\ y=2-i \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2-i \\ y=2+i \end{cases}$

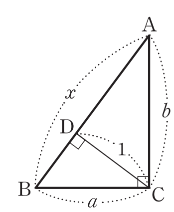
이때 x, y는 실수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $|x-y|=3$

392

연립이차방정식의 활용

전략 직각삼각형의 성질을 이용하여 연립이차방정식을 세워 풀고 선분 AB의 길이를 구한다.



풀이 오른쪽 그림과 같이

$\overline{AB}=x$, $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$라 하면

$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}ab=\dfrac{1}{2}x$

$\therefore ab=x$ ⋯⋯ ㉠

삼각형 ABC의 둘레의 길이가 5이므로

$a+b+x=5$

$\therefore a+b=5-x$ ⋯⋯ ㉡

삼각형 ABC는 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{BC}^2+\overline{AC}^2=\overline{AB}^2$

$a^2+b^2=x^2$

$\therefore (a+b)^2-2ab=x^2$ ⋯⋯ ㉢

㉠, ㉡을 ㉢에 대입하면

$(5-x)^2-2x=x^2$

$25-12x=0$ $\therefore x=\dfrac{25}{12}$

따라서 선분 AB의 길이는 $\dfrac{25}{12}$이다.

도전 1등급 최고난도

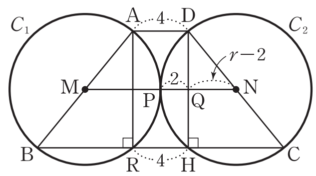
● 93쪽

393 164 **394** ③

393

삼 · 사차방정식의 풀이

(1단계) 두 원의 반지름의 길이를 r이라 하고 $\overline{DH}^2$과 $\overline{BC}$를 r에 대한 식으로 나타낸다.



위의 그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 원을 C_1이라 하고 선분 CD를 지름으로 하는 원을 C_2라 하자. 두 선분 AB, CD의 중점을 각각 M, N이라 하면 두 점 M, N은 각각 두 원 C_1, C_2의 중심이다.

$\overline{AB}=\overline{CD}$이므로 두 원 C_1, C_2의 반지름의 길이가 서로 같고 원 C_1과 C_2는 오직 한 점에서 만나므로 원 C_1과 원 C_2가 만나는 점은 선분 MN의 중점이다. 이 중점을 P, 점 D에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H, 선분 DH와 선분 MN이 만나는 점을 Q라 하자.

두 원 C_1, C_2의 반지름의 길이를 r이라 하면

$\overline{QN}=\overline{PN}-\overline{PQ}=r-2$에서

$\overline{HC}=2\times\overline{QN}=2r-4$이므로

$\overline{DH}^2=\overline{CD}^2-\overline{HC}^2=(2r)^2-(2r-4)^2=16r-16$ …… ㉠

점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 R이라 하면

$\overline{BR}=\overline{HC}=2r-4$, $\overline{RH}=4$이므로

$\overline{BC}=\overline{BR}+\overline{RH}+\overline{HC}$

$\quad=(2r-4)+4+(2r-4)=4r-4$ …… ㉡

(2단계) S^2과 l을 r에 대한 식으로 나타낸다.

㉠, ㉡에서

$$S^2=\left\{\frac{1}{2}\times(\overline{AD}+\overline{BC})\times\overline{DH}\right\}^2$$

$$=\frac{1}{4}\times(\overline{AD}+\overline{BC})^2\times\overline{DH}^2$$

$$=\frac{1}{4}\times(4r)^2\times(16r-16)$$

$$=64r^2(r-1)$$

$l=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{AD}$

$\quad=2r+(4r-4)+2r+4=8r$

(3단계) $S^2+8l=6720$을 이용하여 r의 값을 구하고 $\overline{BD}^2$의 값을 구한다.

$S^2+8l=6720$에서

$64r^2(r-1)+64r=6720$

$r^3-r^2+r-105=0$

$(r-5)(r^2+4r+21)=0$

이차방정식 $r^2+4r+21=0$의 판별식 D라 할 때,

$\frac{D}{4}=2^2-21=-17<0$이므로 실수 r의 값은 존재하지 않는다.

따라서 $r=5$이므로

$\overline{BH}=\overline{BR}+\overline{RH}=(2r-4)+4=2r=2\times5=10$

또, ㉠에서

$\overline{DH}=\sqrt{16r-16}=\sqrt{16\times5-16}=\sqrt{64}=8$

직각삼각형 BHD에서 피타고라스 정리에 의하여

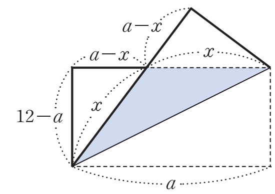
$\overline{BD}^2=\overline{BH}^2+\overline{DH}^2=100+64=164$

394

연립이차방정식의 활용

(1단계) 직사각형의 가로의 길이를 a로 놓고, 직사각형을 접었을 때 겹쳐지지 않은 직각삼각형의 빗변을 a에 대한 식으로 나타낸다.

직사각형의 가로의 길이를 a라 하면 직사각형의 둘레의 길이가 24이므로 세로의 길이는 $12-a$이다.



위의 그림과 같이 겹쳐지지 않은 두 직각삼각형은 합동이므로 이 직각삼각형의 빗변의 길이를 x라 하면 다른 두 변의 길이는 각각 $12-a$, $a-x$이다.

피타고라스 정리에 의하여

$x^2=(12-a)^2+(a-x)^2$

$2ax=2a^2-24a+144$

$\therefore\ x=a-12+\frac{72}{a}$ …… ㉠

(2단계) 겹쳐진 부분의 넓이가 10임을 이용하여 a에 대한 삼차방정식을 세운다.

또, 겹쳐진 부분의 넓이가 10이므로

$\frac{1}{2}(12-a)x=10$

㉠을 위의 식에 대입하면

$\frac{1}{2}(12-a)\left(a-12+\frac{72}{a}\right)=10$

$\therefore\ a^3-24a^2+236a-864=0$

(3단계) 인수정리를 이용하여 삼차방정식을 풀어 a의 값을 구한다.

$f(a)=a^3-24a^2+236a-864$라 하면 $f(8)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(a)$를 인수분해 하면

8	1	-24	236	-864
		8	-128	864
	1	-16	108	0

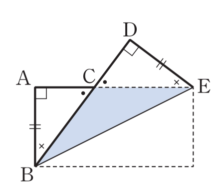
$f(a)=(a-8)(a^2-16a+108)$

즉, 방정식 $(a-8)(a^2-16a+108)=0$에서 이차방정식 $a^2-16a+108=0$은 허근을 가지므로

$a=8$ $\quad \frac{D}{4}=(-8)^2-108=-44<0$

따라서 직사각형의 긴 변의 길이는 8이다.

참고 ① 다음 그림에서 $\triangle ABC\equiv\triangle DEC$ (ASA 합동)



② 직사각형의 가로의 길이가 a일 때, 세로의 길이는 $12-a$이므로 직사각형의 가로 또는 세로의 길이는 8 또는 4이다.
따라서 직사각형의 긴 변의 길이는 8이다.

08 연립일차부등식

유형 분석 기출

● 95쪽 ~ 99쪽

395 ②	396 ②	397 ①	398 ④	399 ④
400 ④	401 ⑤	402 ③	403 ②	404 21
405 ⑤	406 ④	407 ①	408 ②	409 ③
410 21	411 −3	412 ⑤	413 ⑤	414 21
415 ③	416 ③	417 ③	418 ④	419 ③
420 ①	421 ①	422 ⑤	423 ⑤	424 ②

395

ㄱ. $a>b$이므로 $a+c>b+c$ ⋯⋯ ㉠

$c>d$이므로 $b+c>b+d$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $a+c>b+d$ (참)

ㄴ. $a=4$, $b=3$, $c=2$, $d=1$이면

$a>b>0$, $c>d>0$이지만

$a-c=4-2=2$, $b-d=3-1=2$이므로

$a-c=b-d$ (거짓)

ㄷ. $a>b$, $c>0$이므로 $ac>bc$ ⋯⋯ ㉠

$c>d$, $b>0$이므로 $bc>bd$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $ac>bd$ (참)

ㄹ. $a=2$, $b=1$, $c=4$, $d=1$이면

$a>b>0$, $c>d>0$이지만

$\frac{a}{c}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$, $\frac{b}{d}=\frac{1}{1}=1$이므로

$\frac{a}{c}<\frac{b}{d}$ (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

396

$x-2y=4$에서 $x=2y+4$

이것을 $-3\le x+y\le -1$에 대입하면

$-3\le 3y+4\le -1$, $-7\le 3y\le -5$ $\quad\therefore -\frac{7}{3}\le y\le -\frac{5}{3}$

따라서 $M=-\frac{5}{3}$, $m=-\frac{7}{3}$이므로

$M+m=\left(-\frac{5}{3}\right)+\left(-\frac{7}{3}\right)=-4$

397

$1\le x<3$에서 $2\le 2x<6$ ⋯⋯ ㉠

$-4<y\le 2k$에서 $-k\le -\frac{1}{2}y<2$ ⋯⋯ ㉡

㉠+㉡을 하면 $2-k\le 2x-\frac{1}{2}y<8$

이때 $2x-\frac{1}{2}y$의 최솟값이 4이므로

$2-k=4$

$\therefore k=-2$

398

$(2-a)x>a-b$의 해가 $x<-3$이므로

$2-a<0$ $\quad\therefore a>2$

$\therefore x<\frac{a-b}{2-a}$

즉, $\frac{a-b}{2-a}=-3$이므로

$a-b=-3(2-a)$, $a-b=-6+3a$

$\therefore 2a+b=6$ ⋯⋯ ㉠

㉠을 $(2a+b)x\le 12$에 대입하면

$6x\le 12$

$\therefore x\le 2$

1등급 비법

부등식 $ax>b$를 풀어 $x<\frac{b}{a}$와 같이 부등호의 방향이 반대가 되려면 $a<0$이어야 한다.

399

$ax\ge b$의 해가 $x\ge 2$이므로 $a>0$

$\therefore x\ge\frac{b}{a}$

따라서 $\frac{b}{a}=2$이므로 $b=2a$ ⋯⋯ ㉠

㉠을 $ax\ge 2a+b$에 대입하면

$ax\ge 2a+2a$, $ax\ge 4a$

$\therefore x\ge 4$ ($\because a>0$)

따라서 x의 최솟값은 4이다.

400

$(a-2)x\ge b-a+1$의 해가 모든 실수이려면

$a-2=0$, $b-a+1\le 0$이어야 한다.

$a=2$이므로 $b-2+1\le 0$ $\quad\therefore b\le 1$

즉, $a+b=2+b\le 2+1=3$

따라서 $a+b$의 최댓값은 3이다.

1등급 비법

부등식 $ax\ge b$의 해가 모든 실수이려면 $a=0$이고 $b\le 0$을 만족시켜야 한다.

401

$4x-2\le 6$에서 $4x\le 8$

$\therefore x\le 2$ ⋯⋯ ㉠

$7-3x<12-2x$에서

$-x<5$ $\quad\therefore x>-5$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-5<x\le 2$

따라서 이를 수직선 위에 나타내면 ⑤와 같다.

오답 피하기 해를 수직선 위에 나타낼 때는 기준점에서 등호의 포함 여부에 주의한다.

402

$-x+16>2x-5$에서

$-3x>-21 \qquad \therefore x<7$ …… ㉠

$x+5\le 5x-3$에서

$-4x\le -8 \qquad \therefore x\ge 2$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$2\le x<7$

따라서 정수 x는 2, 3, 4, 5, 6의 5개이다.

403

$5(x+2)\le 3(x+5)$에서

$5x+10\le 3x+15$, $2x\le 5$

$\therefore x\le \frac{5}{2}$ …… ㉠

$\frac{x-2}{2}<\frac{x+1}{3}$의 양변에 6을 곱하면

$3x-6<2x+2$

$\therefore x<8$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$x\le \frac{5}{2}$

따라서 자연수 x는 1, 2이므로 그 합은

$1+2=3$

개념 보충

계수가 분수 또는 소수인 연립일차부등식

부등식에서

① 계수가 분수이면 ⇨ 양변에 분모의 최소공배수를 곱한다.

② 계수가 소수이면 ⇨ 양변에 10의 거듭제곱을 곱한다.

404

$x-1>8$에서 $x>9$

$2x-16\le x+a$에서 $x\le a+16$

이때 주어진 연립부등식의 해가 $b<x\le 28$이므로

$b=9$, $a+16=28$에서

$a=12$, $b=9$

$\therefore a+b=12+9=21$

405

$\frac{x}{6}\le a-\frac{x}{3}$의 양변에 6을 곱하면

$x\le 6a-2x$, $3x\le 6a$

$\therefore x\le 2a$

$0.5x+0.8>0.2x-1$의 양변에 10을 곱하면

$5x+8>2x-10$, $3x>-18$

$\therefore x>-6$

이때 주어진 연립부등식의 해가 $b<x\le -2$이므로

$2a=-2$, $b=-6$

$\therefore a=-1$, $b=-6$

이것을 $ax-b\ge 0$에 대입하면

$-x+6\ge 0$, $-x\ge -6$

$\therefore x\le 6$

따라서 해가 아닌 것은 ⑤이다.

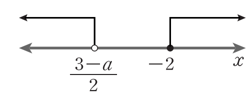
406

$-2x>a-3$에서 $x<\frac{3-a}{2}$

$-3x-4\le 2$에서 $-3x\le 6$

$\therefore x\ge -2$

이때 주어진 연립부등식이 해를 갖지 않으려면 오른쪽 그림에서



$\frac{3-a}{2}\le -2$

$a-3\ge 4$

$\therefore a\ge 7$

따라서 a의 최솟값은 7이다.

1등급 비법

연립부등식이 해를 갖지 않는 경우

연립부등식에서 각각의 부등식의 해를 구한 후 공통부분이 없도록 해를 수직선 위에 나타낸다.

407

$-x+5\ge x+a$에서

$-2x\ge a-5$

$\therefore x\le \frac{5-a}{2}$

$3(x-2)\le 4x+b$에서

$3x-6\le 4x+b$

$-x\le b+6$

$\therefore x\ge -b-6$

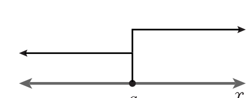
이때 주어진 연립부등식의 해가 $x=2$이므로

$\frac{5-a}{2}=2$, $-b-6=2$

따라서 $a=1$, $b=-8$이므로

$ab=1\times(-8)=-8$

오답 피하기 $x\le a$와 $x\ge a$를 동시에 만족시키는 x의 값의 범위는 $x=a$가 된다. 부등식의 해가 방정식의 해와 같이 등식으로 표현되는 점에 주의한다.



408

$\frac{3x-1}{2}\le x+a$의 양변에 2를 곱하면

$3x-1\le 2x+2a$

$\therefore x\le 2a+1$

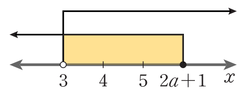
$0.2(x-1)<0.3x-0.5$의 양변에 10을 곱하면

$2(x-1)<3x-5$, $2x-2<3x-5$

$-x<-3$

$\therefore x>3$

이때 주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x가 2개이려면 오른쪽 그림에서



$5\le 2a+1<6$, $4\le 2a<5$

$\therefore 2\le a<\frac{5}{2}$

409

$6x-1\le 2x+k$에서

$4x\le k+1$

$\therefore x\le\frac{k+1}{4}$ …… ㉠

$4x-3<5x+1$에서

$-x<4$

$\therefore x>-4$ …… ㉡

ㄱ. $k>0$이면 $\frac{k+1}{4}>\frac{1}{4}$이므로

$-4<x\le\frac{k+1}{4}$

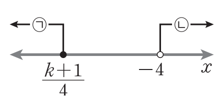
따라서 ㉠, ㉡의 공통부분이 존재하므로 주어진 연립부등식은 반드시 해를 갖는다. (참)

ㄴ. $k=11$이면 $\frac{k+1}{4}=3$이므로 ㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-4<x\le 3$

따라서 자연수 x는 1, 2, 3의 3개이다. (참)

ㄷ. 주어진 연립부등식이 해를 갖지 않으려면 오른쪽 그림에서



$\frac{k+1}{4}\le -4$, $k+1\le -16$

$\therefore k\le -17$

따라서 k의 최댓값은 -17이다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

410

$-3(x+2)+2\le -x-5\le 1-2x$에서

$$\begin{cases}-3(x+2)+2\le -x-5\\ -x-5\le 1-2x\end{cases}$$

$-3(x+2)+2\le -x-5$에서

$-3x-4\le -x-5$, $-2x\le -1$

$\therefore x\ge\frac{1}{2}$ …… ㉠

$-x-5\le 1-2x$에서 $x\le 6$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$\frac{1}{2}\le x\le 6$

따라서 정수 x는 1, 2, 3, 4, 5, 6이므로 그 합은

$1+2+3+4+5+6=21$

411

$\frac{4x-a}{5}\le 2x+3\le x+1$에서

$$\begin{cases}\frac{4x-a}{5}\le 2x+3\\ 2x+3\le x+1\end{cases}$$

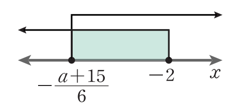
$\frac{4x-a}{5}\le 2x+3$의 양변에 5를 곱하면

$4x-a\le 10x+15$, $-6x\le a+15$

$\therefore x\ge -\frac{a+15}{6}$

$2x+3\le x+1$에서 $x\le -2$

이때 주어진 부등식이 해를 가지려면 오른쪽 그림에서



$-\frac{a+15}{6}\le -2$

$a+15\ge 12$

$\therefore a\ge -3$

따라서 a의 최솟값은 -3이다.

1등급 비법

연립부등식이 해를 갖는 경우

연립부등식에서 각각의 부등식의 해를 구한 후 공통부분이 있도록 해를 수직선 위에 나타낸다.

412

$7x-a<2x-1<4x-5$에서

$$\begin{cases}7x-a<2x-1\\ 2x-1<4x-5\end{cases}$$

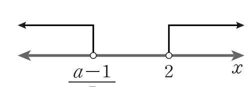
$7x-a<2x-1$에서 $5x<a-1$

$\therefore x<\frac{a-1}{5}$

$2x-1<4x-5$에서 $-2x<-4$

$\therefore x>2$

이때 주어진 부등식의 해가 없으려면 오른쪽 그림에서



$\frac{a-1}{5}\le 2$

$a-1\le 10$

$\therefore a\le 11$

따라서 a의 최댓값은 11이다.

413

사탕을 x개 산다고 하면 초콜릿은 $(10-x)$개 살 수 있으므로

$3700\le 300x+500(10-x)\le 3900$

$37\le 50-2x\le 39$

$-13\le -2x\le -11$

$\therefore \frac{11}{2}\le x\le\frac{13}{2}$

따라서 사탕은 6개 살 수 있다.

414

연속하는 세 홀수 중 가장 큰 수를 x라 하면 세 수는 $x-4$, $x-2$, x이므로

$$\begin{cases}(x-4)+(x-2)+x>54\\3(x-4)+7\le 61\end{cases}$$

$(x-4)+(x-2)+x>54$에서

$3x-6>54$, $3x>60$ $\therefore x>20$ …… ㉠

$3(x-4)+7\le 61$에서

$3x-5\le 61$, $3x\le 66$ $\therefore x\le 22$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$20<x\le 22$

이때 x는 홀수이므로 $x=21$

따라서 세 홀수 중 가장 큰 수는 21이다.

개념 보충

연립일차부등식의 활용 문제 풀이 순서

(i) 구하려는 것을 미지수 x로 놓는다.
(ii) 주어진 조건을 만족시키는 연립부등식을 세운다.
(iii) 연립부등식을 풀고, 구한 해가 문제의 뜻에 맞는지 확인한다.

415

과자를 x개 산다고 하면 음료수는 $(14-x)$개 살 수 있으므로

$$\begin{cases}x>14-x\\1000x+800(14-x)\le 13000\end{cases}$$

$x>14-x$에서

$2x>14$ $\therefore x>7$ …… ㉠

$1000x+800(14-x)\le 13000$에서

$2x+112\le 130$, $2x\le 18$

$\therefore x\le 9$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$7<x\le 9$

따라서 과자는 최대 9개를 살 수 있다.

416

바구니의 개수를 x라 하면 달걀의 개수는 $6x+25$이므로

$8x+2\le 6x+25\le 8x+4$에서

$$\begin{cases}8x+2\le 6x+25\\6x+25\le 8x+4\end{cases}$$

$8x+2\le 6x+25$에서

$2x\le 23$ $\therefore x\le \frac{23}{2}$ …… ㉠

$6x+25\le 8x+4$에서

$-2x\le -21$ $\therefore x\ge \frac{21}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$\frac{21}{2}\le x\le \frac{23}{2}$

따라서 바구니의 개수는 11이므로 달걀의 개수는

$6\times 11+25=91$

417

처음 자연수의 십의 자리의 숫자를 x라 하면 일의 자리의 숫자는 $x+2$이므로

$$\begin{cases}x+(x+2)>10\\10(x+2)+x>2\{10x+(x+2)\}-45\end{cases}$$

$x+(x+2)>10$에서

$2x>8$ $\therefore x>4$ …… ㉠

$10(x+2)+x>2\{10x+(x+2)\}-45$에서

$11x+20>22x-41$

$-11x>-61$ $\therefore x<\frac{61}{11}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$4<x<\frac{61}{11}$

이때 x는 자연수이므로 $x=5$

따라서 처음 자연수는 57이다.

418

텐트의 개수를 x라 하면 학생 수는 $4x+2$이므로

$7(x-2)+1\le 4x+2\le 7(x-2)+7$에서

남는 텐트 1개를 제외한 나머지 텐트 중에서 마지막 텐트에는 학생이 최소 1명에서 최대 7명까지 들어갈 수 있다.

$$\begin{cases}7(x-2)+1\le 4x+2\\4x+2\le 7(x-2)+7\end{cases}$$

$7(x-2)+1\le 4x+2$에서

$7x-13\le 4x+2$, $3x\le 15$ $\therefore x\le 5$ …… ㉠

$4x+2\le 7(x-2)+7$에서

$4x+2\le 7x-7$, $-3x\le -9$ $\therefore x\ge 3$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$3\le x\le 5$

따라서 최대 학생 수는 $x=5$일 때이므로

$4\times 5+2=22$

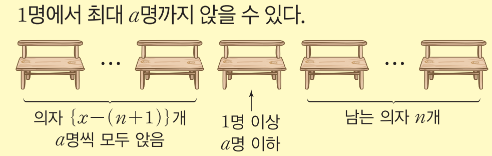
1등급 비법

과부족에 대한 문제

한 의자에 학생이 a명씩 앉으면 n개의 의자가 남는다.

⇨ 의자의 개수를 x라 하면

(i) 남는 의자를 제외한 나머지 의자 중에서 마지막 의자에는 학생이 최소 1명에서 최대 a명까지 앉을 수 있다.



(ii) 최소 학생 수는 $a\{x-(n+1)\}+1$
최대 학생 수는 $a\{x-(n+1)\}+a$

(iii) 학생 수의 범위는
$a\{x-(n+1)\}+1\le$(학생 수)$\le a\{x-(n+1)\}+a$

419

$|2x-3|<5$에서 $-5<2x-3<5$

$-2<2x<8 \quad \therefore -1<x<4$

주어진 부등식의 해가 $a<x<b$이므로

$a=-1$, $b=4$

$\therefore a+b=-1+4=3$

개념 보충

부등식 $|x|<a\ (a>0)$는 $-a<x<a$와 같이 풀 수 있다.

420

$|x-4|\ge 2x+1$에서

(i) $x<4$일 때,

$-(x-4)\ge 2x+1$, $-x+4\ge 2x+1$

$-3x\ge -3 \quad \therefore x\le 1$

그런데 $x<4$이므로 $x\le 1$

(ii) $x\ge 4$일 때,

$x-4\ge 2x+1$, $-x\ge 5 \quad \therefore x\le -5$

그런데 $x\ge 4$이므로 해는 없다.

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는 $x\le 1$

따라서 양의 정수 x는 1의 1개이다.

1등급 비법

$|ax+b|<cx+d$ 꼴의 부등식

절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값, 즉 $x=-\frac{b}{a}$를 기준으로 x의 값의 범위를 $x<-\frac{b}{a}$, $x\ge -\frac{b}{a}$로 나눈다.

421

$|x-a|<6$에서

$-6<x-a<6$

$-6+a<x<6+a$

이때 정수 x의 최댓값이 7이어야 하므로

$7<6+a\le 8 \quad \therefore 1<a\le 2$

422

$\left|3x+\frac{2}{3}\right|+a\ge 2$에서 $\left|3x+\frac{2}{3}\right|\ge 2-a$

이 부등식의 해가 모든 실수이려면

$2-a\le 0 \quad \therefore a\ge 2$

423

$-\sqrt{9x^2+6x+1}+2|-3x-1|\le 2x+4$에서

$-\sqrt{(3x+1)^2}+2|-3x-1|\le 2x+4$

$-|3x+1|+2|-3x-1|\le 2x+4$

$-|3x+1|+2|3x+1|\le 2x+4$

$\therefore |3x+1|\le 2x+4$

(i) $x<-\frac{1}{3}$일 때,

$-(3x+1)\le 2x+4$

$-3x-1\le 2x+4$

$-5x\le 5 \quad \therefore x\ge -1$

그런데 $x<-\frac{1}{3}$이므로 $-1\le x<-\frac{1}{3}$

(ii) $x\ge -\frac{1}{3}$일 때,

$3x+1\le 2x+4 \quad \therefore x\le 3$

그런데 $x\ge -\frac{1}{3}$이므로 $-\frac{1}{3}\le x\le 3$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$-1\le x\le 3$

따라서 모든 정수 x는 $-1, 0, 1, 2, 3$이므로 그 합은

$(-1)+0+1+2+3=5$

참고 $\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases} a & (a\ge 0) \\ -a & (a<0) \end{cases}$

424

$2|x-1|+3|x+1|<9$에서

(i) $x<-1$일 때,

$-2(x-1)-3(x+1)<9$

$-2x+2-3x-3<9$

$-5x<10 \quad \therefore x>-2$

그런데 $x<-1$이므로 $-2<x<-1$

(ii) $-1\le x<1$일 때,

$-2(x-1)+3(x+1)<9$

$-2x+2+3x+3<9 \quad \therefore x<4$

그런데 $-1\le x<1$이므로 $-1\le x<1$

(iii) $x\ge 1$일 때,

$2(x-1)+3(x+1)<9$

$2x-2+3x+3<9$

$5x<8 \quad \therefore x<\frac{8}{5}$

그런데 $x\ge 1$이므로 $1\le x<\frac{8}{5}$

이상에서 주어진 부등식의 해는

$-2<x<\frac{8}{5}$

따라서 $a=-2$, $b=\frac{8}{5}$이므로

$a+b=-2+\frac{8}{5}=-\frac{2}{5}$

1등급 비법

$|x-a|+|x-b|<c\ (a<b, c>0)$ 꼴의 부등식

절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값, 즉 $x=a$, $x=b$를 기준으로 x의 값의 범위를 $x<a$, $a\le x<b$, $x\ge b$로 나눈다.

내신 적중 서술형

● 100쪽

425 7 **426** (1) $a=2$, $b=-3$ (2) 12 **427** 3
428 $x\geq-1$

425

$2(5x+a)-1\leq x+5$에서

$10x+2a-1\leq x+5$, $9x\leq 6-2a$

$\therefore x\leq\frac{6-2a}{9}$ …… ㉠ …… ㉮

$\frac{x-b}{3}\geq\frac{x}{2}-\frac{3x+1}{6}$의 양변에 6을 곱하면

$2(x-b)\geq 3x-(3x+1)$, $2x-2b\geq-1$

$2x\geq 2b-1$ $\therefore x\geq\frac{2b-1}{2}$ …… ㉡ …… ㉯

이때 주어진 연립부등식의 해가 $x=-1$이므로

㉠에서 $\frac{6-2a}{9}=-1$

$6-2a=-9$

$\therefore a=\frac{15}{2}$

㉡에서 $\frac{2b-1}{2}=-1$

$2b-1=-2$

$\therefore b=-\frac{1}{2}$ …… ㉰

$\therefore a+b=\frac{15}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)=7$ …… ㉱

채점 기준	배점 비율
㉮ $2(5x+a)-1\leq x+5$의 해 구하기	30 %
㉯ $\frac{x-b}{3}\geq\frac{x}{2}-\frac{3x+1}{6}$의 해 구하기	30 %
㉰ a, b의 값 구하기	30 %
㉱ $a+b$의 값 구하기	10 %

426

(1) $2x-2a<x+a$에서 $x<3a$

$2x-2a<3x+b$에서 $-x<2a+b$

$\therefore x>-2a-b$

그런데 잘못 변형한 이 연립부등식의 해가 $-1<x<6$이므로

$-2a-b=-1$, $3a=6$

$\therefore a=2$, $b=-3$ …… ㉮

(2) 주어진 부등식 $2x-2a<x+a<3x+b$에 $a=2$, $b=-3$을 대입하면

$2x-4<x+2<3x-3$이므로

$\begin{cases}2x-4<x+2\\x+2<3x-3\end{cases}$

$2x-4<x+2$에서 $x<6$ …… ㉠

$x+2<3x-3$에서 $-2x<-5$

$\therefore x>\frac{5}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$\frac{5}{2}<x<6$ …… ㉯

따라서 부등식을 만족시키는 정수 x는 3, 4, 5이므로 그 합은

$3+4+5=12$ …… ㉰

채점 기준		배점 비율
(1)	㉮ 연립부등식을 풀어 a, b의 값 구하기	50 %
(2)	㉯ 주어진 부등식의 해 구하기	30 %
	㉰ 정수 x의 값의 합 구하기	20 %

427

$\left|10-\frac{x}{2}\right|\leq n$에서 $-n\leq 10-\frac{x}{2}\leq n$

$-n-10\leq-\frac{x}{2}\leq n-10$

각 변에 -2를 곱하면

$-2n+20\leq x\leq 2n+20$ …… ㉮

이 부등식을 만족시키는 정수 x가 13개이므로

$(2n+20)-(-2n+20)+1=13$

$4n+1=13$, $4n=12$

$\therefore n=3$ …… ㉯

채점 기준	배점 비율
㉮ 절댓값을 포함한 부등식 풀기	60 %
㉯ 자연수 n의 값 구하기	40 %

개념 보충

$a\leq n\leq b$ (a, b는 정수)를 만족시키는 정수 n의 개수는 $b-a+1$이다.

428

$|x+4|\geq|-x+2|$에서 $|x+4|\geq|x-2|$

$|-x+2|=|-(x-2)|=|x-2|$

(i) $x<-4$일 때,

$-(x+4)\geq-(x-2)$

$-x-4\geq-x+2$

$0\times x\geq 6$이므로 해는 없다. …… ㉮

(ii) $-4\leq x<2$일 때,

$x+4\geq-(x-2)$

$x+4\geq-x+2$

$2x\geq-2$ $\therefore x\geq-1$

그런데 $-4\leq x<2$이므로 $-1\leq x<2$ …… ㉯

(iii) $x\geq 2$일 때,

$x+4\geq x-2$

$0\times x\geq-6$이므로 해는 모든 실수이다.

그런데 $x\geq 2$이므로 $x\geq 2$ …… ㉰

이상에서 주어진 부등식의 해는

$x\geq-1$ …… ㉱

채점 기준	배점 비율
㉮ $x<-4$일 때, 부등식의 해 구하기	30 %
㉯ $-4\le x<2$일 때, 부등식의 해 구하기	30 %
㉰ $x\ge 2$일 때, 부등식의 해 구하기	30 %
㉱ 주어진 부등식의 해 구하기	10 %

1등급 실력 완성

● 101쪽~102쪽

429 ② **430** 해는 없다. **431** ②
432 $0<a\le 1$ **433** $1\le a<\frac{3}{2}$ **434** ④
435 ① **436** 10 **437** $a\le 1$ **438** -14

429

부등식의 기본 성질

(전략) 부등식의 성질을 이용하여 a, b, c 사이의 대소 관계를 이끌어 낸다.

(풀이) 조건 (가)에서 $a+b>c$ ······ ㉠

조건 (나)에서 $b>c+a$ ······ ㉡

조건 (다)에서 $b+c>a$ ······ ㉢

㉠+㉡을 하면 $a+2b>2c+a$, $2b>2c$

$\therefore b>c$ ······ ㉣

㉡+㉢을 하면 $2b+c>c+2a$, $2b>2a$

$\therefore b>a$ ······ ㉤

㉣, ㉤에서 b가 가장 크다는 사실만 알 수 있으므로

ㄱ. $a<b$ (참)

ㄴ. $c<b$ (참)

ㄷ. a와 c의 대소 관계는 주어진 조건에서 알 수 없으므로 $a<c<b$가 항상 옳다고 말할 수 없다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

430

연립일차부등식의 풀이

(전략) 부등식 $px+q>0$에서 $p>0$이면 $x>-\frac{q}{p}$이고, $p<0$이면 $x<-\frac{q}{p}$임을 이용한다.

(풀이) $ax-b\le 0$에서 $ax\le b$

이 부등식의 해가 $x\le 3$이므로 $a>0$, $\frac{b}{a}=3$ $\therefore b=3a$

$cx+d>0$에서 $cx>-d$

이 부등식의 해가 $x<-2$이므로 $c<0$, $-\frac{d}{c}=-2$ $\therefore d=2c$

$ax+b\le 0$에서 $x\le -\frac{b}{a}$ $(\because a>0)$

$\therefore x\le -3$ $(\because b=3a)$ ······ ㉠

$-cx+d>0$에서 $x>\frac{d}{c}$ $(\because c<0)$

$\therefore x>2$ $(\because d=2c)$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분이 없으므로 연립부등식 $\begin{cases} ax+b\le 0 \\ -cx+d>0 \end{cases}$의 해는 없다.

431

연립일차부등식의 풀이

(전략) a, b에 대한 부등식을 세운 후 $a-b=13$을 만족시키는 자연수 a, b의 값을 구한다.

(풀이) $\frac{a}{b}$를 소수점 아래 첫째 자리에서 반올림하면 3이므로

$2.5\le\frac{a}{b}<3.5$

b는 자연수이므로 부등식의 각 변에 $2b$를 곱하면

$5b\le 2a<7b$

이때 $a-b=13$이므로 $a=13+b$를 위의 부등식에 대입하면

$5b\le 26+2b<7b$

$\therefore \begin{cases} 5b\le 26+2b \\ 26+2b<7b \end{cases}$

$5b\le 26+2b$에서 $3b\le 26$

$\therefore b\le\frac{26}{3}$ ······ ㉠

$26+2b<7b$에서 $-5b<-26$

$\therefore b>\frac{26}{5}$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $\frac{26}{5}<b\le\frac{26}{3}$

그런데 b는 자연수이므로 $b=6$ 또는 $b=7$ 또는 $b=8$

(i) $b=6$일 때, $a=19$

(ii) $b=7$일 때, $a=20$

(iii) $b=8$일 때, $a=21$

이상에서 조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b)는 $(6, 19)$, $(7, 20)$, $(8, 21)$의 3개이다.

432

연립일차부등식의 풀이

(전략) 두 조건을 만족시키는 x의 값의 범위를 각각 구한 후 공통부분을 구해 정수 x의 개수가 5인 a의 값의 범위를 구한다.

(풀이) 조건 (가)에서 $\sqrt{x-4}\sqrt{-4-x}=-\sqrt{(x-4)(-4-x)}$이므로

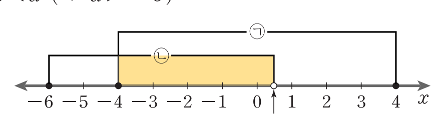
$x-4<0$, $-4-x<0$ 또는 $x-4=0$ 또는 $-4-x=0$

$\therefore -4\le x\le 4$ ······ ㉠

조건 (나)에서 $\frac{\sqrt{x+6}}{\sqrt{x-a}}=-\sqrt{\frac{x+6}{x-a}}$이므로

$x+6>0$, $x-a<0$ 또는 $x+6=0$, $x-a\ne 0$

$\therefore -6\le x<a$ $(\because a>-6)$ ······ ㉡



따라서 ㉠, ㉡을 모두 만족시키는 정수 x의 개수가 5이려면

$0<a\le 1$

개념 보충

실수 a, b에 대하여

① $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$이면 $a<0$, $b<0$ 또는 $a=0$ 또는 $b=0$

② $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}$이면 $a>0$, $b<0$ 또는 $a=0$, $b\ne 0$

433

$A<B<C$ 꼴의 부등식

전략 $A<B<C$ 꼴의 부등식은 $\begin{cases}A<B\\B<C\end{cases}$로 고쳐서 푼다.

풀이 $x+y+1=0$에서 $y=-x-1$

이것을 부등식 $x-1<1+\dfrac{-y-3}{2}\le\dfrac{2x+a}{3}$에 대입하면

$x-1<1+\dfrac{-(-x-1)-3}{2}\le\dfrac{2x+a}{3}$

$x-1<1+\dfrac{x-2}{2}\le\dfrac{2x+a}{3}$

$\begin{cases}x-1<1+\dfrac{x-2}{2}\\1+\dfrac{x-2}{2}\le\dfrac{2x+a}{3}\end{cases}$

$x-1<1+\dfrac{x-2}{2}$의 양변에 2를 곱하면

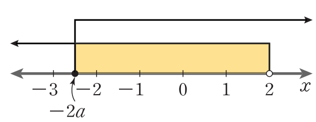
$2x-2<2+x-2 \qquad \therefore x<2$

$1+\dfrac{x-2}{2}\le\dfrac{2x+a}{3}$의 양변에 6을 곱하면

$6+3x-6\le 4x+2a,\ -x\le 2a$

$\therefore x\ge -2a$

이때 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x가 4개이려면



$-3<-2a\le -2$

$\therefore 1\le a<\dfrac{3}{2}$

434

연립일차부등식의 활용

전략 의자의 개수를 x라 하고, 학생 수에 대한 부등식을 세운다.

풀이 의자의 개수를 x라 하면 학생 수는 $4x+8$이므로

$5(x-6)+1\le 4x+8\le 5(x-6)+5$에서

남는 의자 5개를 제외한 나머지 의자 중에서 마지막 의자에는 학생이 최소 1명에서 최대 5명까지 앉을 수 있다.

$\begin{cases}5(x-6)+1\le 4x+8\\4x+8\le 5(x-6)+5\end{cases}$

$5(x-6)+1\le 4x+8$에서 $5x-29\le 4x+8$

$\therefore x\le 37$ …… ㉠

$4x+8\le 5(x-6)+5$에서 $4x+8\le 5x-25$

$-x\le -33 \qquad \therefore x\ge 33$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$33\le x\le 37$

그런데 x는 자연수이므로 ← 의자의 개수는 자연수이어야 한다.

$x=33, 34, 35, 36, 37$

이때 학생 수는 $4x+8$이므로

$4x+8=140, 144, 148, 152, 156$

따라서 학생 수가 될 수 있는 것은 ④이다.

435

절댓값 기호를 포함한 부등식

전략 먼저 $|x-1|$의 값의 범위를 구한 후 부등식의 해를 구한다.

풀이 $||x-1|-4|<2$에서 $-2<|x-1|-4<2$

$\therefore 2<|x-1|<6$

(i) $x<1$일 때,

$2<-(x-1)<6,\ 2<-x+1<6$

$1<-x<5 \qquad \therefore -5<x<-1$

그런데 $x<1$이므로 $-5<x<-1$

(ii) $x\ge 1$일 때,

$2<x-1<6 \qquad \therefore 3<x<7$

그런데 $x\ge 1$이므로 $3<x<7$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는 $-5<x<-1$ 또는 $3<x<7$

따라서 정수 x는 $-4, -3, -2, 4, 5, 6$의 6개이다.

436

절댓값 기호를 포함한 부등식

전략 양수 c에 대하여 $|ax+b|<c$이면 $-c<ax+b<c$임을 이용한다.

풀이 $|x-2k|<k^2$에서 $-k^2<x-2k<k^2$

$\therefore -k^2+2k<x<k^2+2k$

이 부등식의 해가 $-3<x<15$이므로

(i) $-k^2+2k=-3$에서 $k^2-2k-3=0$

$(k+1)(k-3)=0$

$\therefore k=-1$ 또는 $k=3$

(ii) $k^2+2k=15$에서 $k^2+2k-15=0$

$(k+5)(k-3)=0$

$\therefore k=-5$ 또는 $k=3$

(i), (ii)에서 $k=3$

$|x-2|<k$에서 $|x-2|<3$

$-3<x-2<3 \qquad \therefore -1<x<5$

따라서 정수 x는 $0, 1, 2, 3, 4$이므로 그 합은

$0+1+2+3+4=10$

437

절댓값 기호를 포함한 부등식

전략 x의 값의 범위를 $x<1$, $1\le x<2$, $2\le x$일 때로 나누어 절댓값 기호를 없애고 조건을 만족시키는 실수 a의 값의 범위를 구한다.

풀이 (i) $x<1$일 때,

$-(x-1)-(x-2)<a$

$-x+1-x+2<a,\ -2x<a-3,\ x>\dfrac{3-a}{2}$

그런데 $x<1$이므로 주어진 부등식이 해를 갖지 않으려면

$\dfrac{3-a}{2}\ge 1,\ 3-a\ge 2,\ -a\ge -1$

$\therefore a\le 1$

(ii) $1\le x<2$일 때,

$x-1-(x-2)<a,\ x-1-x+2<a,\ 1<a$

그런데 $1\le x<2$이므로 주어진 부등식이 해를 갖지 않으려면

$a\le 1$

(iii) $x\ge 2$일 때,

$x-1+x-2<a,\ 2x-3<a$

$2x<a+3,\ x<\dfrac{a+3}{2}$

그런데 $x\geq 2$이므로 주어진 부등식이 해를 갖지 않으려면

$\frac{a+3}{2}\leq 2$, $a+3\leq 4$

$\therefore a\leq 1$

이상에서 부등식 $|x-1|+|x-2|<a$의 해가 존재하지 않으려면 $a\leq 1$이어야 한다.

438

절댓값 기호를 포함한 부등식

(전략) 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되도록 하는 x의 값을 기준으로 x의 값의 범위를 나누어 생각한다.

(풀이) $\sqrt{4x^2+4x+1}=\sqrt{(2x+1)^2}=|2x+1|$이므로

$|2x+1|+|x|\leq a$

(i) $x<-\frac{1}{2}$일 때,

$-(2x+1)-x\leq a$, $-3x-1\leq a$, $-3x\leq a+1$

$\therefore x\geq -\frac{a+1}{3}$

이때 $a>1$이므로 $-\frac{a+1}{3}<-\frac{2}{3}$

그런데 $x<-\frac{1}{2}$이므로 $-\frac{a+1}{3}\leq x<-\frac{1}{2}$

(ii) $-\frac{1}{2}\leq x<0$일 때,

$2x+1-x\leq a$, $x+1\leq a$ $\quad\therefore x\leq a-1$

이때 $a>1$이므로 $a-1>0$

그런데 $-\frac{1}{2}\leq x<0$이므로 $-\frac{1}{2}\leq x<0$

(iii) $x\geq 0$일 때,

$2x+1+x\leq a$, $3x+1\leq a$, $3x\leq a-1$

$\therefore x\leq \frac{a-1}{3}$

이때 $a>1$이므로 $\frac{a-1}{3}>0$

그런데 $x\geq 0$이므로 $0\leq x\leq \frac{a-1}{3}$

이상에서 주어진 부등식의 해는

$-\frac{a+1}{3}\leq x\leq \frac{a-1}{3}$

한편, 부등식 $0\leq x-b\leq 4$의 해는 $b\leq x\leq b+4$이므로

$b=-\frac{a+1}{3}$, $b+4=\frac{a-1}{3}$

$3b=-a-1$, $3b+12=a-1$

$\therefore a+3b=-1$, $a-3b=13$

두 식을 연립하여 풀면 $a=6$, $b=-\frac{7}{3}$

$\therefore ab=6\times\left(-\frac{7}{3}\right)=-14$

도전 1등급 최고난도 103쪽

439 5 **440** ③ **441** ③

439

연립일차부등식의 풀이

(1단계) 부등식 $ax+6\leq -3x-2a$의 해가 $x<1$임을 이용하여 a의 값을 구한다.

$ax+6\leq -3x-2a$에서

$ax+3x\leq -2a-6$

$\therefore (a+3)x\leq -2(a+3)$ …… ㉠

(i) $a>-3$일 때,

$a+3>0$이므로 부등식 ㉠의 해는 $x\leq -2$이고 이때 주어진 부등식의 해는 $x<1$이 될 수 없다.

(ii) $a=-3$일 때,

$0\times x\leq 0$이므로 부등식 ㉠의 해는 모든 실수이고 이때 주어진 부등식의 해는 $x<1$이 될 수 있다.

(iii) $a<-3$일 때,

$a+3<0$이므로 부등식 ㉠의 해는 $x\geq -2$이고 이때 주어진 부등식의 해는 $x<1$이 될 수 없다.

이상에서 $a=-3$

(2단계) a의 값을 부등식 $bx-7<ax-b$에 대입하여 b의 값을 구한다.

$a=-3$을 $bx-7<ax-b$에 대입하면

$bx-7<-3x-b$, $bx+3x<-b+7$

$\therefore (b+3)x<-b+7$

이 부등식의 해가 $x<1$이어야 하므로 $b+3>0$

$\therefore x<\frac{-b+7}{b+3}$

즉, $\frac{-b+7}{b+3}=1$이므로

$-b+7=b+3$, $-2b=-4$ $\quad\therefore b=2$

(3단계) $b-a$의 값을 구한다.

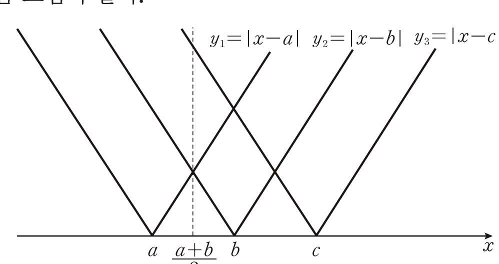
$\therefore b-a=2-(-3)=5$

440

절댓값 기호를 포함한 부등식

(1단계) 절댓값이 포함된 일차함수의 그래프를 그린다.

$y_1=|x-a|$, $y_2=|x-b|$, $y_3=|x-c|$로 놓고 그 그래프를 그리면 다음 그림과 같다.



(2단계) 그래프를 이용하여 x의 값의 범위를 구한다.

위의 그림에서 부등식 $|x-a|<|x-b|<|x-c|$의 해는 $y_1<y_2<y_3$을 만족시키는 x의 값의 범위이다.

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 x의 값의 범위는 두 직선 $y=x-a$와 $y=-x+b$의 교점의 x좌표인 $x=\frac{a+b}{2}$보다 작을 때이므로 $x<\frac{a+b}{2}$

441

절댓값 기호를 포함한 부등식

(1단계) 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되도록 하는 x의 값을 기준으로 x의 값의 범위를 나누어 부등식의 해를 구한다.

(ⅰ) $x<0$일 때,

$-x-(x-a)<b$, $-2x+a<b$

$-2x<b-a$ $\quad\therefore x>\dfrac{a-b}{2}$

이때 $0<a<b$에서 $a-b<0$

$\therefore \dfrac{a-b}{2}<0$

그런데 $x<0$이므로

$\dfrac{a-b}{2}<x<0$

(ⅱ) $0\le x<a$일 때,

$x-(x-a)<b$, $a<b$

이때 $a<b$는 항상 성립하므로

$0\le x<a$

(ⅲ) $x\ge a$일 때,

$x+x-a<b$, $2x<a+b$

$\therefore x<\dfrac{a+b}{2}$

그런데 $x\ge a$이고 $0<a<b$에서 $a<\dfrac{a+b}{2}$이므로

$a\le x<\dfrac{a+b}{2}$

이상에서 $\dfrac{a-b}{2}<x<\dfrac{a+b}{2}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

(2단계) 부등식의 해에 a, b의 값을 대입하여 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. ㉠에 $a=1$, $b=2$를 대입하면

$\dfrac{1-2}{2}<x<\dfrac{1+2}{2}$ $\quad\therefore -\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{3}{2}$

즉, 정수 x는 0, 1의 2개이므로 $A(1, 2)=2$ (참)

ㄴ. ㉠에 $a=n$, $b=n+2$를 대입하면

$\dfrac{n-(n+2)}{2}<x<\dfrac{n+(n+2)}{2}$ $\quad\therefore -1<x<n+1$

즉, 정수 x는 $(n+1)$개이므로 $A(n, n+2)=n+1$ (참)

ㄷ. ㉠에 $a=n$, $b=3n$을 대입하면

$\dfrac{n-3n}{2}<x<\dfrac{n+3n}{2}$ $\quad\therefore -n<x<2n$

즉, 정수 x는 $2n-(-n)-1=3n-1$(개)이므로

$A(n, 3n)=3n-1$

이때 $3n-1>100$에서 $3n>101$ $\quad\therefore n>\dfrac{101}{3}$

따라서 자연수 n의 최솟값은 34이다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

09 이차부등식

유형 분석 기출

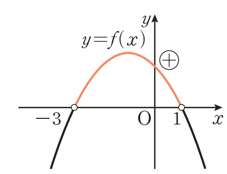
106쪽 ~ 111쪽

442 ④	443 ④	444 3	445 ④	446 ⑤
447 ④	448 ⑤	449 ③	450 ②	451 ②
452 ①	453 ③	454 ⑤	455 ①	456 -3
457 ⑤	458 22	459 ③	460 $-1<x<6$	
461 ⑤	462 ①	463 ⑤	464 ⑤	465 3
466 $a\ge 2$	467 ③	468 30	469 ③	470 ①
471 $3\le x\le 5$		472 ⑤	473 $k>\dfrac{19}{4}$	
474 ③	475 4	476 10	477 ③	

442

이차부등식 $f(x)>0$의 해는 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로

$-3<x<1$



개념 보충

① 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$의 해
⇨ 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 x축보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위

② 이차부등식 $ax^2+bx+c<0$의 해
⇨ 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 x축보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위

443

이차부등식 $x^2-4x+1\le 0$의 해가 $\alpha\le x\le\beta$이므로

$x^2-4x+1=(x-\alpha)(x-\beta)$

즉, α, β가 이차방정식 $x^2-4x+1=0$의 두 근이므로 근의 공식에 의하여

$x=2\pm\sqrt{3}$

따라서 이차부등식 $x^2-4x+1\le 0$의 해는

$2-\sqrt{3}\le x\le 2+\sqrt{3}$이므로

$\alpha=2-\sqrt{3}$, $\beta=2+\sqrt{3}$

$\therefore \alpha-\beta=2-\sqrt{3}-(2+\sqrt{3})=-2\sqrt{3}$

다른 풀이 α, β가 이차방정식 $x^2-4x+1=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=1$

$\therefore (\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$
$\quad=4^2-4\times 1=12$

$\therefore \alpha-\beta=-2\sqrt{3}$ ($\because \alpha<\beta$)

1등급 비법

이차부등식 $ax^2+bx+c\le 0$에서 ax^2+bx+c가 인수분해 되지 않으면 근의 공식을 이용하여 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근을 구한 후, 이차부등식의 해를 구한다.

444

$f(x)g(x)\geq 0$에서

$f(x)\geq 0,\ g(x)\geq 0$ 또는 $f(x)\leq 0,\ g(x)\leq 0$

(i) $f(x)\geq 0,\ g(x)\geq 0$을 만족시키는 x의 값의 범위는

$f(x)\geq 0$에서 $x\leq -1$ 또는 $x\geq 3$

$g(x)\geq 0$에서 $0\leq x\leq 3$

이므로 $x=3$

(ii) $f(x)\leq 0,\ g(x)\leq 0$을 만족시키는 x의 값의 범위는

$f(x)\leq 0$에서 $-1\leq x\leq 3$

$g(x)\leq 0$에서 $x\leq 0$ 또는 $x\geq 3$

이므로 $-1\leq x\leq 0$ 또는 $x=3$

(i), (ii)에서 부등식 $f(x)g(x)\geq 0$의 해는

$-1\leq x\leq 0$ 또는 $x=3$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x는 $-1,\ 0,\ 3$의 3개이다.

445

(i) $x\geq 0$일 때,

$x^2-3x+2\leq 0,\ (x-1)(x-2)\leq 0$

$\therefore\ 1\leq x\leq 2$

그런데 $x\geq 0$이므로 $1\leq x\leq 2$

(ii) $x<0$일 때,

$x^2+3x+2\leq 0,\ (x+1)(x+2)\leq 0$

$\therefore\ -2\leq x\leq -1$

그런데 $x<0$이므로 $-2\leq x\leq -1$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$-2\leq x\leq -1$ 또는 $1\leq x\leq 2$

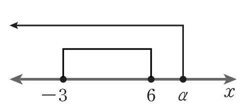
따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x는 $-2,\ -1,\ 1,\ 2$의 4개이다.

446

$x^2-3x-18\leq 0$에서

$(x-6)(x+3)\leq 0\qquad \therefore\ -3\leq x\leq 6$

이때 오른쪽 그림과 같이 $-3\leq x\leq 6$이 $x\leq \alpha$에 포함되려면

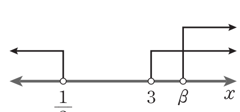


$\alpha\geq 6$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉠

$-2x^2+7x-3<0$에서 $2x^2-7x+3>0$

$(2x-1)(x-3)>0\qquad \therefore\ x<\frac{1}{2}$ 또는 $x>3$

이때 오른쪽 그림과 같이 $x>\beta$가 $x<\frac{1}{2}$ 또는 $x>3$에 포함되려면



$\beta\geq 3$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $\alpha+\beta\geq 9$

따라서 $\alpha+\beta$의 최솟값은 9이다.

447

$x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$이므로

$|x^2+x+1|=x^2+x+1$

이차부등식 $x^2+x+1\leq |x+4|$에서

(i) $x<-4$일 때,

$x^2+x+1\leq -(x+4),\ x^2+2x+5\leq 0$

$(x+1)^2+4\leq 0$

그런데 모든 실수 x에 대하여 $(x+1)^2+4>0$이므로 해는 없다.

(ii) $x\geq -4$일 때,

$x^2+x+1\leq x+4,\ x^2\leq 3\qquad \therefore\ -\sqrt{3}\leq x\leq \sqrt{3}$

그런데 $x\geq -4$이므로 $-\sqrt{3}\leq x\leq \sqrt{3}$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$-\sqrt{3}\leq x\leq \sqrt{3}$

448

해가 $-4<x<3$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+4)(x-3)<0\qquad \therefore\ x^2+x-12<0$

이 부등식이 $x^2+ax+b<0$과 같으므로

$a=1,\ b=-12$

$\therefore\ a-b=1-(-12)=13$

449

이차부등식 $ax^2+3x-2\geq 0$의 해가 $1\leq x\leq 2$이므로

$a<0$

주어진 이차부등식과 해의 부등호의 방향을 비교하여 a의 부호를 정한다.

해가 $1\leq x\leq 2$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x-1)(x-2)\leq 0,\ x^2-3x+2\leq 0$

양변에 a를 곱하면

$ax^2-3ax+2a\geq 0\ (\because\ a<0)$

이 부등식이 $ax^2+3x-2\geq 0$과 같으므로

$a=-1$

$a=-1$을 $ax^2+5ax+6\leq 0$에 대입하면

$-x^2-5x+6\leq 0$

$x^2+5x-6\geq 0,\ (x+6)(x-1)\geq 0$

$\therefore\ x\leq -6$ 또는 $x\geq 1$

1등급 비법

이차부등식의 해가 주어졌을 때, x^2의 계수가 a인 이차부등식을 구하는 순서는 다음과 같다.

(i) 주어진 해를 이용하여 x^2의 계수가 1인 이차부등식을 만든다.

(ii) (i)의 식의 양변에 a를 곱한다. 이때 $a<0$이면 부등호의 방향이 바뀌는 것에 주의한다.

450

해가 $x<-2$ 또는 $x>4$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+2)(x-4)>0$

이차부등식 $f(x)<0$의 해가 $x<-2$ 또는 $x>4$이므로

$f(x)=a(x+2)(x-4)\ (a<0)$라 하면

$f(-x)=a(-x+2)(-x-4)$

$\qquad=a(x+4)(x-2)$

따라서 부등식 $f(-x)>0$, 즉 $a(x+4)(x-2)>0$에서

$(x+4)(x-2)<0\ (\because\ a<0)$

$\therefore\ -4<x<2$

451

이차부등식 $(a+2)x^2-4x+a-2\geq 0$의 해가 오직 한 개 존재하려면 $a+2<0$ $\quad\therefore a<-2$

또, 이차방정식 $(a+2)x^2-4x+a-2=0$이 중근을 가져야 하므로 이차방정식의 판별식을 D라 할 때,

$$\frac{D}{4}=(-2)^2-(a+2)(a-2)=0$$

$4-a^2+4=0,\ a^2=8$ $\quad\therefore a=-2\sqrt{2}$ 또는 $a=2\sqrt{2}$

이때 $a<-2$이므로 $a=-2\sqrt{2}$

1등급 비법

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때, 이차부등식 $ax^2+bx+c\geq 0$이 해를 한 개만 가지려면 $a<0,\ D=0$이어야 한다.

452

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 두 점 $(-2,\ 0),\ (1,\ 0)$에서 만나므로

$f(x)=a(x-1)(x+2)\ (a>0)$라 하면

$$f\left(\frac{x+k}{2}\right)=a\left(\frac{x+k}{2}-1\right)\left(\frac{x+k}{2}+2\right)$$

$$=\frac{a}{4}(x+k-2)(x+k+4)$$

$f\left(\frac{x+k}{2}\right)\leq 0$, 즉 $\frac{a}{4}(x+k-2)(x+k+4)\leq 0$에서

$(x+k-2)(x+k+4)\leq 0\ (\because a>0)$

$\therefore -k-4\leq x\leq -k+2$

이때 부등식 $f\left(\frac{x+k}{2}\right)\leq 0$의 해가 $-1\leq x\leq 5$이므로

$-k-4=-1,\ -k+2=5$

$\therefore k=-3$

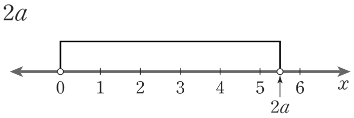
453

$x^2-2ax<0$에서 $x(x-2a)<0$

(i) $2a>0$일 때,

$x(x-2a)<0$에서 $0<x<2a$

이 부등식을 만족시키는 정수 x가 5개이려면 오른쪽 그림에서



$5<2a\leq 6$ $\quad\therefore \frac{5}{2}<a\leq 3$

그런데 $2a>0$, 즉 $a>0$이므로 $\frac{5}{2}<a\leq 3$

(ii) $2a=0$일 때,

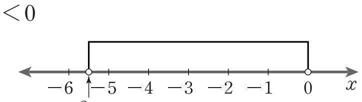
$x(x-2a)<0$에서 $x^2<0$

이 부등식을 만족시키는 정수 x는 없으므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $2a<0$일 때,

$x(x-2a)<0$에서 $2a<x<0$

이 부등식을 만족시키는 정수 x가 5개이려면 오른쪽 그림에서



$-6\leq 2a<-5$

$\therefore -3\leq a<-\frac{5}{2}$

그런데 $2a<0$, 즉 $a<0$이므로

$-3\leq a<-\frac{5}{2}$

이상에서 $\frac{5}{2}<a\leq 3$ 또는 $-3\leq a<-\frac{5}{2}$

따라서 구하는 정수 a는 $-3,\ 3$의 2개이다.

454

이차부등식 $x^2-2ax+3a+10>0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면 이차방정식 $x^2-2ax+3a+10=0$의 판별식을 D라 할 때,

$$\frac{D}{4}=(-a)^2-(3a+10)<0$$

$a^2-3a-10<0$

$(a+2)(a-5)<0$

$\therefore -2<a<5$

따라서 정수 a는 $-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$의 6개이다.

1등급 비법

이차부등식이 항상 성립할 조건

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때, 모든 실수 x에 대하여 $ax^2+bx+c>0$이 성립할 조건은 $a>0,\ D<0$이다.

455

모든 실수 x에 대하여 $\sqrt{x^2+2kx+4k+21}$이 실수가 되려면 모든 실수 x에 대하여 부등식 $x^2+2kx+4k+21\geq 0$이 성립해야 한다.

이차방정식 $x^2+2kx+(4k+21)=0$의 판별식을 D라 할 때,

$$\frac{D}{4}=k^2-(4k+21)\leq 0$$

$k^2-4k-21\leq 0$

$(k-7)(k+3)\leq 0$

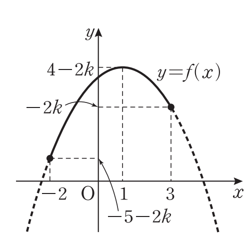
$\therefore -3\leq k\leq 7$

456

$f(x)=-x^2+2x+3-2k$라 하면

$f(x)=-(x-1)^2+4-2k$

$-2\leq x\leq 3$에서 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고 이차부등식 $f(x)\geq 0$이 항상 성립하려면 $f(-2)\geq 0$이어야 한다.



즉, $f(-2)=-9+4-2k\geq 0$에서

$-5-2k\geq 0$

$\therefore k\leq -\frac{5}{2}$

따라서 정수 k의 최댓값은 -3이다.

457

이차부등식 $x^2+5x+2a<0$이 해를 가지려면 이차방정식 $x^2+5x+2a=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 할 때,

$D=5^2-4\times1\times2a>0$

$25-8a>0$

$-8a>-25$

$\therefore a<\frac{25}{8}$

따라서 정수 a의 최댓값은 3이다.

1등급 비법

이차부등식이 해를 가질 조건

① 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$은 $a>0$이면 항상 해를 갖고 $a<0$이면 $D>0$이어야 한다.

② 이차부등식 $ax^2+bx+c<0$은 $a<0$이면 항상 해를 갖고 $a>0$이면 $D>0$이어야 한다.

458

이차부등식 $x^2+8x+(a-6)<0$이 해를 갖지 않으려면 이차방정식 $x^2+8x+(a-6)=0$이 중근 또는 근을 갖지 않아야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 할 때,

$\frac{D}{4}=4^2-(a-6)\le0$

$16-a+6\le0,\ -a+22\le0$

$-a\le-22\qquad\therefore a\ge22$

따라서 실수 a의 최솟값은 22이다.

459

(i) $k>0$일 때,

주어진 부등식의 해가 존재하려면 이차방정식 $kx^2+2kx-3=0$이 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 할 때,

$\frac{D}{4}=k^2-k\times(-3)\ge0,\ k(k+3)\ge0$

$\therefore k\le-3$ 또는 $k\ge0$

그런데 $k>0$이므로 $k>0$

(ii) $k=0$일 때,

$-3\le0$이므로 주어진 부등식의 해는 모든 실수이다.

(iii) $k<0$일 때,

이차함수 $y=kx^2+2kx-3$의 그래프는 위로 볼록하므로 주어진 부등식은 항상 해를 갖는다.

이상에서 조건을 만족시키는 실수 k의 값의 범위는 모든 실수이다.

460

이차함수 $y=2x^2-3x-2$의 그래프가 이차함수 $y=x^2+2x+4$의 그래프보다 아래쪽에 있으려면

$2x^2-3x-2<x^2+2x+4$

$x^2-5x-6<0,\ (x+1)(x-6)<0$

$\therefore -1<x<6$

461

이차함수 $y=x^2-2x+a$의 그래프가 직선 $y=2x+1$보다 항상 위쪽에 있으려면 모든 실수 x에 대하여 부등식 $x^2-2x+a>2x+1$, 즉 $x^2-4x+a-1>0$이 성립해야 한다.

이차방정식 $x^2-4x+a-1=0$의 판별식을 D라 할 때,

$\frac{D}{4}=(-2)^2-(a-1)<0$

$4-a+1<0,\ -a<-5$

$\therefore a>5$

따라서 정수 a의 최솟값은 6이다.

462

이차함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프가 직선 $y=x-3$보다 위쪽에 있으려면

$x^2+ax+b>x-3$

$\therefore x^2+(a-1)x+b+3>0$ …… ㉠

한편, 해가 $x<-1$ 또는 $x>4$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+1)(x-4)>0$

$\therefore x^2-3x-4>0$ …… ㉡

㉠, ㉡이 서로 같은 부등식이므로

$a-1=-3,\ b+3=-4$

$\therefore a=-2,\ b=-7$

$\therefore a+b=-2+(-7)=-9$

개념 보충

두 함수의 그래프와 이차부등식의 해 사이의 관계

이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$에 대하여

① 이차부등식 $f(x)>g(x)$의 해

⇨ 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=g(x)$보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위

② 이차부등식 $f(x)<g(x)$의 해

⇨ 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=g(x)$보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위

463

$x^2-3x<4$에서

$x^2-3x-4<0$

$(x+1)(x-4)<0$

$\therefore -1<x<4$ …… ㉠

$x^2\ge6x-5$에서

$x^2-6x+5\ge0$

$(x-1)(x-5)\ge0$

$\therefore x\le1$ 또는 $x\ge5$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-1<x\le1$

따라서 $\alpha=-1,\ \beta=1$이므로

$\beta-\alpha=1-(-1)=2$

464

$x^2-3x-18\le0$에서

$(x+3)(x-6)\le0 \qquad \therefore -3\le x\le6$ …… ㉠

$x^2-8x+15\ge0$에서

$(x-3)(x-5)\ge0 \qquad \therefore x\le3$ 또는 $x\ge5$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-3\le x\le3$ 또는 $5\le x\le6$

따라서 정수 x는 -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 5, 6이므로 그 합은

$(-3)+(-2)+(-1)+0+1+2+3+5+6=11$

465

$|x-2|\le1$에서

$-1\le x-2\le1 \qquad \therefore 1\le x\le3$ …… ㉠

$x^2-x-6\le0$에서

$(x+2)(x-3)\le0 \qquad \therefore -2\le x\le3$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$1\le x\le3$

따라서 정수 x는 1, 2, 3의 3개이다.

466

$x^2-4<2x-1\le x+a$에서

$\begin{cases} x^2-4<2x-1 \\ 2x-1\le x+a \end{cases}$

$x^2-4<2x-1$에서 $x^2-2x-3<0$

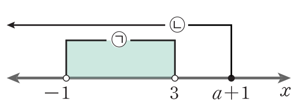
$(x+1)(x-3)<0 \qquad \therefore -1<x<3$ …… ㉠

$2x-1\le x+a$에서 $x\le a+1$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분이

$-1<x<3$이어야 하므로

오른쪽 그림에서



$a+1\ge3 \qquad \therefore a\ge2$

참고 부등식 $f(x)<g(x)<h(x)$는 연립부등식

$\begin{cases} f(x)<g(x) \\ g(x)<h(x) \end{cases}$ 꼴로 변형하여 푼다.

467

$x^2+3x-4<0$에서

$(x+4)(x-1)<0 \qquad \therefore -4<x<1$ …… ㉠

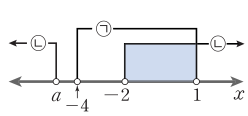
연립부등식의 해가 $-2<x<1$이 되려면 부등식

$(x-a)(x+2)>0$의 해는

$x<a$ 또는 $x>-2$ …… ㉡

이어야 한다.

즉, 오른쪽 그림에서



$a\le-4$

따라서 실수 a의 최댓값은 -4이다.

468

$x^2-10x+21\le0$에서 $(x-3)(x-7)\le0$

$\therefore 3\le x\le7$ …… ㉠

$x^2-2(n-1)x+n^2-2n\ge0$에서

$x^2-(2n-2)x+n(n-2)\ge0$, $\{x-(n-2)\}(x-n)\ge0$

$\therefore x\le n-2$ 또는 $x\ge n$ …… ㉡

(ⅰ) $1\le n\le3$일 때, ㉠, ㉡에서 $3\le x\le7$이므로 정수 x는 3, 4, 5, 6, 7의 5개이다.

(ⅱ) $n=4$일 때, ㉠, ㉡에서 $4\le x\le7$이므로 정수 x는 4, 5, 6, 7의 4개이다.

(ⅲ) $n=5$일 때, ㉠, ㉡에서 $x=3$ 또는 $5\le x\le7$이므로 정수 x는 3, 5, 6, 7의 4개이다.

(ⅳ) $n=6$일 때, ㉠, ㉡에서 $3\le x\le4$ 또는 $6\le x\le7$이므로 정수 x는 3, 4, 6, 7의 4개이다.

(ⅴ) $n=7$일 때, ㉠, ㉡에서 $3\le x\le5$ 또는 $x=7$이므로 정수 x는 3, 4, 5, 7의 4개이다.

(ⅵ) $n=8$일 때, ㉠, ㉡에서 $3\le x\le6$이므로 정수 x는 3, 4, 5, 6의 4개이다.

(ⅶ) $n\ge9$일 때, ㉠, ㉡에서 $3\le x\le7$이므로 정수 x는 3, 4, 5, 6, 7의 5개이다.

이상에서 연립이차부등식을 만족시키는 정수 x의 개수가 4가 되도록 하는 모든 자연수 n은 4, 5, 6, 7, 8이므로 그 합은

$4+5+6+7+8=30$

469

직사각형의 둘레의 길이가 36이므로 직사각형의 가로의 길이를 x라 하면 세로의 길이는 $18-x$이다.

직사각형의 가로와 세로의 길이는 양수이므로

$x>0$, $x<18 \qquad \therefore 0<x<18$ …… ㉠

이 직사각형의 넓이가 77보다 크므로

$x(18-x)>77$, $x^2-18x+77<0$

$(x-7)(x-11)<0 \qquad \therefore 7<x<11$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$7<x<11$

따라서 직사각형의 한 변의 길이가 될 수 있는 자연수는 8, 9, 10이므로 그 합은

$8+9+10=27$

470

삼각형의 세 변의 길이는 모두 양수이므로

$x-3>0$, $x>0$, $x+3>0 \qquad \therefore x>3$ …… ㉠

삼각형에서 가장 긴 변의 길이는 나머지 두 변의 길이의 합보다 작아야 하므로

$x+3<x+(x-3) \qquad \therefore x>6$ …… ㉡

둔각삼각형이려면 가장 긴 변의 길이의 제곱이 나머지 두 변의 길이의 제곱의 합보다 커야 하므로

$(x+3)^2>x^2+(x-3)^2$, $x^2-12x<0$

$x(x-12)<0 \qquad \therefore 0<x<12$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢의 공통부분을 구하면

$6<x<12$

따라서 자연수 x는 7, 8, 9, 10, 11의 5개이다.

개념 보충

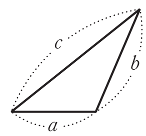
오른쪽 그림과 같이 삼각형의 세 변의 길이가 a, b, c $(a<b<c)$일 때,

① 삼각형이 될 조건 ⇨ $c<a+b$

② 예각삼각형이 될 조건 ⇨ $c^2<a^2+b^2$

③ 직각삼각형이 될 조건 ⇨ $c^2=a^2+b^2$

④ 둔각삼각형이 될 조건 ⇨ $c^2>a^2+b^2$



471

산책로의 폭이 x m이므로 $x>0$

산책로의 넓이는

$(180+2x)(120+2x)-180\times120=4x^2+600x(\text{m}^2)$

산책로의 넓이가 1836 m^2 이상 3100 m^2 이하이므로

$1836\le4x^2+600x\le3100$

$459\le x^2+150x\le775$에서 $\begin{cases}459\le x^2+150x\\x^2+150x\le775\end{cases}$

$x^2+150x\ge459$에서 $x^2+150x-459\ge0$

$(x+153)(x-3)\ge0$ $\quad\therefore x\le-153$ 또는 $x\ge3$

그런데 $x>0$이므로 $x\ge3$ ······ ㉠

$x^2+150x\le775$에서 $x^2+150x-775\le0$

$(x+155)(x-5)\le0$ $\quad\therefore -155\le x\le5$

그런데 $x>0$이므로 $0<x\le5$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $3\le x\le5$

472

이차방정식 $x^2-2(a+3)x+a^2+4=0$의 두 근을 α, β라 하고 판별식을 D라 할 때, 두 근이 모두 양수가 되려면

$D\ge0$, $\alpha+\beta>0$, $\alpha\beta>0$

(i) $\frac{D}{4}=\{-(a+3)\}^2-(a^2+4)\ge0$

$6a+5\ge0$ $\quad\therefore a\ge-\frac{5}{6}$

(ii) $\alpha+\beta=2(a+3)>0$ $\quad\therefore a>-3$

(iii) $\alpha\beta=a^2+4>0$

즉, a는 모든 실수이다.

이상에서 $a\ge-\frac{5}{6}$

따라서 정수 a의 최솟값은 0이다.

473

이차방정식 $x^2+(2k+1)x+k^2+5=0$의 두 근을 α, β $(\alpha\ne\beta)$라 하고 판별식을 D라 할 때, 두 근이 서로 다른 음수가 되려면

$D>0$, $\alpha+\beta<0$, $\alpha\beta>0$

(i) $D=(2k+1)^2-4(k^2+5)>0$

$4k-19>0$ $\quad\therefore k>\frac{19}{4}$

(ii) $\alpha+\beta=-(2k+1)<0$

$2k+1>0$ $\quad\therefore k>-\frac{1}{2}$

(iii) $\alpha\beta=k^2+5>0$

즉, k는 모든 실수이다.

이상에서 $k>\frac{19}{4}$

474

이차방정식 $x^2-(2m-3)x+m^2-4=0$의 두 근을 α, β라 하면 두 근의 부호가 서로 다르므로 $\alpha\beta<0$

$\alpha\beta=m^2-4$이므로

$m^2-4<0$, $(m+2)(m-2)<0$

$\therefore -2<m<2$

따라서 정수 m은 -1, 0, 1의 3개이다.

1등급 비법

이차방정식의 실근의 부호

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 하면

① 두 근이 모두 양수
⇨ $D\ge0$, $\alpha+\beta>0$, $\alpha\beta>0$

② 두 근이 모두 음수
⇨ $D\ge0$, $\alpha+\beta<0$, $\alpha\beta>0$

③ 두 근이 서로 다른 부호
⇨ $\alpha\beta<0$

475

이차방정식 $x^2+(p^2-5p+4)x+p^2-7p+10=0$의 두 근을 α, β라 하면 두 근의 부호가 서로 다르므로 $\alpha\beta<0$

$\alpha\beta=p^2-7p+10$이므로 $p^2-7p+10<0$

$(p-2)(p-5)<0$

$\therefore 2<p<5$ ······ ㉠

또, 두 근의 절댓값이 같으므로 $\alpha+\beta=0$

$\alpha+\beta=-(p^2-5p+4)$이므로 $-(p^2-5p+4)=0$

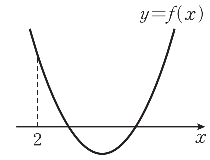
$p^2-5p+4=0$, $(p-1)(p-4)=0$

$\therefore p=1$ 또는 $p=4$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $p=4$

476

$f(x)=x^2+2kx-k+6$이라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 2보다 크므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(i) 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 할 때,

$\frac{D}{4}=k^2-(-k+6)\ge0$

$k^2+k-6\ge0$, $(k+3)(k-2)\ge0$

$\therefore k\le-3$ 또는 $k\ge2$

(ii) $f(2)>0$에서 $4+4k-k+6>0$

$3k+10>0$ $\quad\therefore k>-\frac{10}{3}$

(ⅲ) $f(x)=x^2+2kx-k+6=(x+k)^2-k^2-k+6$

에서 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식은 $x=-k$이므로

$-k>2$

$\therefore\ k<-2$

이상에서 $-\frac{10}{3}<k\leq-3$

따라서 $\alpha=-\frac{10}{3}$, $\beta=-3$이므로

$\alpha\beta=\left(-\frac{10}{3}\right)\times(-3)=10$

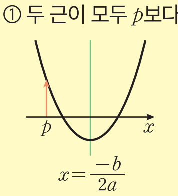
1등급 비법

이차방정식의 근의 위치

이차방정식 $ax^2+bx+c=0\ (a>0)$의 판별식을 D라 할 때,

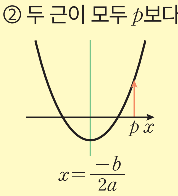
$f(x)=ax^2+bx+c$라 하면

① 두 근이 모두 p보다 크다.



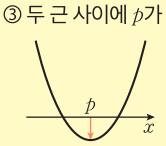
⇨ $D\geq0$, $f(p)>0$, $-\frac{b}{2a}>p$

② 두 근이 모두 p보다 작다.



⇨ $D\geq0$, $f(p)>0$, $-\frac{b}{2a}<p$

③ 두 근 사이에 p가 있다.



⇨ $f(p)<0$

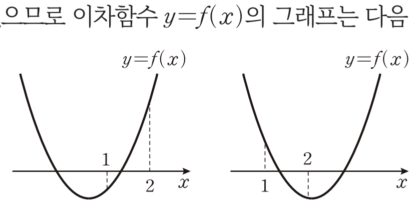
477

$x^2-3x+2=0$에서

$(x-1)(x-2)=0$

$\therefore\ x=1$ 또는 $x=2$

$f(x)=x^2-ax+5$라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 한 근만이 1과 2 사이에 있으므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$\therefore\ f(1)f(2)<0$

$f(1)=1-a+5=-a+6$

$f(2)=4-2a+5=-2a+9$

이므로

$(-a+6)(-2a+9)<0$

$(a-6)(2a-9)<0$

$\therefore\ \frac{9}{2}<a<6$

따라서 정수 a는 5이다.

내신 적중 서술형

112쪽

478 (1) $b=-a$, $c=-6a$ (2) $x<-\frac{1}{2}$ 또는 $x>\frac{1}{3}$

479 -1 **480** $\frac{5}{2}\leq a<3$ **481** $-\frac{5}{3}<k<1$

478

(1) 이차부등식 $ax^2+bx+c<0$의 해가 $-2<x<3$이므로 $a>0$

해가 $-2<x<3$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+2)(x-3)<0$ $\quad\therefore\ x^2-x-6<0$ …… ㉮

양변에 a를 곱하면

$ax^2-ax-6a<0\ (\because\ a>0)$

이 부등식이 $ax^2+bx+c<0$과 같으므로

$b=-a$, $c=-6a$ …… ㉯

(2) (1)에서 구한 것을 이차부등식 $cx^2+bx+a<0$에 대입하면

$-6ax^2-ax+a<0$

$6x^2+x-1>0\ (\because\ a>0)$

$(3x-1)(2x+1)>0$ $\quad\therefore\ x<-\frac{1}{2}$ 또는 $x>\frac{1}{3}$ …… ㉰

	채점 기준	배점 비율
(1)	㉮ a의 부호를 구한 후 해가 $-2<x<3$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식 구하기	20 %
	㉯ b, c를 a에 대한 식으로 각각 나타내기	30 %
(2)	㉰ 이차부등식 $cx^2+bx+a<0$의 해 구하기	50 %

479

함수 $y=(k+2)x^2-4x+5$의 그래프가 직선 $y=2kx+1$보다 항상 위쪽에 있으려면 모든 실수 x에 대하여 부등식

$(k+2)x^2-4x+5>2kx+1$, 즉

$(k+2)x^2-2(k+2)x+4>0$ …… ㉠

이 성립해야 한다. …… ㉮

(ⅰ) $k+2=0$, 즉 $k=-2$일 때,

$0\times x^2-0\times x+4=4>0$이므로 모든 실수 x에 대하여 부등식이 성립한다.

(ⅱ) $k+2\neq0$, 즉 $k\neq-2$일 때,

부등식 ㉠이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면

$k+2>0$ $\quad\therefore\ k>-2$ …… ㉡

이차방정식 $(k+2)x^2-2(k+2)x+4=0$의 판별식을 D라 할 때,

$\frac{D}{4}=\{-(k+2)\}^2-4(k+2)<0$

$k^2-4<0$, $(k+2)(k-2)<0$

$\therefore\ -2<k<2$ …… ㉢

㉡, ㉢의 공통부분을 구하면

$-2<k<2$

(ⅰ), (ⅱ)에서 k의 값의 범위는

$-2\leq k<2$ …… ㉯

따라서 정수 k의 최댓값은 1, 최솟값은 -2이므로 그 합은

$1+(-2)=-1$ …… ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ 조건을 만족시키는 부등식 세우기	30 %
㉯ 조건을 만족시키는 k의 값의 범위 구하기	50 %
㉰ 정수 k의 최댓값과 최솟값의 합 구하기	20 %

오답 피하기 부등식이 모든 실수에 대하여 성립하는 경우를 확인할 때, 최고차항의 계수가 0인 경우도 생각한다.

1등급 비법

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 직선 $y=mx+n$보다 항상 위쪽에 있다.
⇨ 모든 실수 x에 대하여 부등식 $ax^2+bx+c>mx+n$, 즉 $ax^2+(b-m)x+(c-n)>0$이 성립한다.

480

$2(x-1)>x+1$에서

$2x-2>x+1 \quad \therefore x>3$ ······ ㉠ ······ ㉮

$x^2\le(2a+1)x-2a$에서

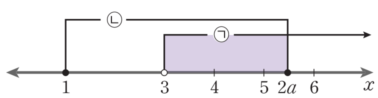
$x^2-(2a+1)x+2a\le0,\ (x-1)(x-2a)\le0$

그런데 $2a\le1$이면 연립부등식의 해가 존재하지 않으므로

$2a>1$

$\therefore 1\le x\le 2a$ ······ ㉡ ······ ㉯

이때 ㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 정수 x가 2개만 존재하려면 다음 그림과 같아야 한다.



따라서 $5\le2a<6$에서 $\frac{5}{2}\le a<3$ ······ ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ $2(x-1)>x+1$의 해 구하기	20 %
㉯ $x^2\le(2a+1)x-2a$의 해 구하기	40 %
㉰ 조건을 만족시키는 a의 값의 범위 구하기	40 %

481

이차방정식 $x^2+(3k+5)x+k-1=0$의 두 근을 α, β라 하면

(i) 음수인 근의 절댓값이 양수인 근보다 크므로 $\alpha+\beta<0$

$\alpha+\beta=-(3k+5)$이므로 $-(3k+5)<0$

$3k+5>0 \quad \therefore k>-\frac{5}{3}$ ······ ㉮

(ii) 두 근의 부호가 서로 다르므로 $\alpha\beta<0$

$\alpha\beta=k-1$이므로 $k-1<0$

$\therefore k<1$ ······ ㉯

(i), (ii)에서 $-\frac{5}{3}<k<1$ ······ ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ 두 근의 합을 이용하여 k의 값의 범위 구하기	40 %
㉯ 두 근의 곱을 이용하여 k의 값의 범위 구하기	40 %
㉰ 조건을 만족시키는 k의 값의 범위 구하기	20 %

1등급 비법

이차방정식의 두 실근을 α, β라 할 때,
① 두 근의 절댓값이 같고 부호가 반대일 조건
⇨ $\alpha+\beta=0,\ \alpha\beta<0$
② 음수인 근의 절댓값이 양수인 근보다 클 조건
⇨ $\alpha+\beta<0,\ \alpha\beta<0$
③ 양수인 근이 음수인 근의 절댓값보다 클 조건
⇨ $\alpha+\beta>0,\ \alpha\beta<0$
④ 한 근만 0일 조건 ⇨ $\alpha+\beta\ne0,\ \alpha\beta=0$

1등급 실력 완성

113쪽 ~ 115쪽

482 ③ **483** 4 **484** $0<x<\frac{1}{3}$ **485** ④
486 26 **487** $m<-1$ 또는 $m>0$ **488** 5 **489** ①
490 ⑤ **491** 10 **492** ② **493** ②
494 $1\le k<2$ **495** $2\le m<\frac{11}{5}$
496 $\sqrt{3}<m<2$

482

이차부등식의 풀이

전략 해가 α, β이고 x^2의 계수가 a인 이차방정식은 $a(x-\alpha)(x-\beta)=0$임을 이용한다.

풀이 주어진 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 아래로 볼록하므로

$a>0$

이차함수 $f(x)$는 x축과 두 점 $(\alpha, 0)$, $(\beta, 0)$에서 만나므로

$f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)=ax^2-a(\alpha+\beta)x+a\alpha\beta$

$\therefore b=-a(\alpha+\beta),\ c=a\alpha\beta$

이것을 $cx^2+bx+a<0$에 대입하면

$a\alpha\beta x^2-a(\alpha+\beta)x+a<0$

$\alpha\beta x^2-(\alpha+\beta)x+1<0\ (\because a>0)$

$(\alpha x-1)(\beta x-1)<0$

$\therefore \frac{1}{\beta}<x<\frac{1}{\alpha}\ (\because 0<\alpha<\beta)$

다른 풀이 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta=\frac{c}{a}$ ······ ㉠

한편, 이차부등식 $cx^2+bx+a<0$에서 이차방정식 $cx^2+bx+a=0$의 두 근을 p, q라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$p+q=-\frac{b}{c}=\frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$$

$$pq=\frac{a}{c}=\frac{1}{\frac{c}{a}}=\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{1}{\alpha}\times\frac{1}{\beta}\ (\because ㉠)$$

따라서 이차방정식 $cx^2+bx+a=0$의 두 근이 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$이고,

$0<\alpha<\beta$에서 $\frac{1}{\beta}<\frac{1}{\alpha}$이므로 이차부등식 $cx^2+bx+a<0$의 해는

$\frac{1}{\beta}<x<\frac{1}{\alpha}$

483

이차부등식의 풀이

전략 $x+y=k$ (k는 상수)라 하고, 한 문자를 소거하여 이차방정식의 실근이 존재할 조건을 이용한다.

풀이 $x+y=k$ (k는 상수)라 하면 $y=-x+k$

$y=-x+k$를 $x^2+xy+y^2=3$에 대입하면

$x^2+x(-x+k)+(-x+k)^2=3$

$\therefore x^2-kx+k^2-3=0$ ...... ㉠

㉠을 x에 대한 이차방정식으로 보면 이 이차방정식을 만족시키는 실수 x가 존재해야 하므로 ㉠의 판별식을 D라 할 때,

$D=(-k)^2-4(k^2-3)\geq 0$

$-3k^2+12\geq 0$, $k^2-4\leq 0$

$(k+2)(k-2)\leq 0$ $\quad\therefore -2\leq k\leq 2$

따라서 $M=2$, $m=-2$이므로

$M-m=2-(-2)=4$

484

해가 주어진 이차부등식

전략 해가 $x<\alpha$ 또는 $x>\beta$ ($\alpha<\beta$)이고 x^2의 계수가 음수인 이차부등식은 $a(x-\alpha)(x-\beta)<0$ ($a<0$)임을 이용하여 $f(x)$를 구한다.

풀이 해가 $x<-2$ 또는 $x>3$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은 $(x+2)(x-3)>0$

이차부등식 $f(x)<0$의 해가 $x<-2$ 또는 $x>3$이므로

$f(x)=a(x+2)(x-3)$ $(a<0)$이라 하면

$f(2x)=a(2x+2)(2x-3)$

$f(2x)-f(x)>0$에서

$a(2x+2)(2x-3)-a(x+2)(x-3)>0$

$a(4x^2-2x-6-x^2+x+6)>0$

$a(3x^2-x)>0$, $ax(3x-1)>0$

양변을 a로 나누면

$x(3x-1)<0$ ($\because a<0$)

$\therefore 0<x<\frac{1}{3}$

485

해가 주어진 이차부등식

전략 문자가 포함된 이차부등식을 먼저 푼 후 주어진 조건을 이용하여 p의 값의 범위를 추론한다.

풀이 $(x+p)(x-p-1)<0$에서

$-p<x<p+1$ ($\because p>0$) ...... ㉠

이때 양의 실수 p에 대하여 ㉠을 만족시키는 정수인 해의 합이 5이려면 x의 값은 -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5이어야 한다.

즉, $-5\leq -p<-4$, $5<p+1\leq 6$에서 $4<p\leq 5$

486

해가 주어진 이차부등식

전략 k의 값에 따라 이차부등식을 풀고 조건을 만족시키는 k의 값을 구한다.

풀이 (i) $k>0$일 때,

$2x^2+kx\leq 0$에서 $x(2x+k)\leq 0$

$\therefore -\frac{k}{2}\leq x\leq 0$

이 부등식을 만족시키는 정수 x가 7개이려면

$-7<-\frac{k}{2}\leq -6$ $\quad\therefore 12\leq k<14$

따라서 조건을 만족시키는 정수 k는 12, 13이다.

(ii) $k=0$일 때,

$2x^2+kx\leq 0$에서 $2x^2\leq 0$ $\quad\therefore x^2\leq 0$

이 부등식을 만족시키는 정수 x는 0뿐이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $k<0$일 때,

$2x^2+kx\leq 0$에서 $x(2x+k)\leq 0$ $\quad\therefore 0\leq x\leq -\frac{k}{2}$

이 부등식을 만족시키는 정수 x가 7개이려면

$6\leq -\frac{k}{2}<7$ $\quad\therefore -14<k\leq -12$

따라서 조건을 만족시키는 정수 k는 -13, -12이다.

이상에서 정수 k의 최댓값은 13, 최솟값은 -13이므로

$M=13$, $m=-13$

$\therefore M-m=13-(-13)=26$

487

이차부등식이 항상 성립할 조건

전략 $a\leq x\leq b$에서 이차부등식 $f(x)>0$이 항상 성립하려면 $a\leq x\leq b$에서 ($f(x)$의 최솟값)>0이어야 한다.

풀이 $f(x)=x^2-2mx+m^2+m$이라 하면

$f(x)=(x-m)^2+m$이므로 이 이차함수의 꼭짓점의 x좌표는 m이다.

(i) $m<0$일 때,

$f(x)$의 최솟값은 $f(0)$이므로 $f(0)>0$이어야 한다.

$f(0)=m^2+m$이므로 $m^2+m>0$

즉, $m(m+1)>0$이므로 $m<-1$ 또는 $m>0$

그런데 $m<0$이므로 $m<-1$

(ii) $0\leq m<4$일 때,

$f(x)$의 최솟값은 $f(m)$이므로 $f(m)>0$이어야 한다.

$f(m)=m$이므로 $m>0$

그런데 $0\leq m<4$이므로 $0<m<4$

(iii) $m\geq 4$일 때,

$f(x)$의 최솟값은 $f(4)$이므로 $f(4)>0$이어야 한다.

$f(4)=16-8m+m^2+m$이므로

$m^2-7m+16=\left(m-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{15}{4}>0$

즉, 모든 $m\geq 4$에 대하여 성립한다.

이상에서 실수 m의 값의 범위는

$m<-1$ 또는 $m>0$

488

두 그래프의 위치 관계와 이차부등식

전략 $ax^2+bx+c<mx+n$의 해는 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 직선 $y=mx+n$보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위와 같음을 이용한다.

풀이 $y=\frac{1}{2}x+3$에 $y=2$를 대입하면

$\frac{1}{2}x+3=2 \qquad \therefore x=-2$

$y=\frac{1}{2}x+3$에 $y=5$를 대입하면

$\frac{1}{2}x+3=5 \qquad \therefore x=4$

따라서 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}x+3$의 교점의 좌표는 $(-2, 2)$, $(4, 5)$이다.

부등식 $f(x)-\frac{1}{2}x-3<0$에서 $f(x)<\frac{1}{2}x+3$이므로 이 부등식의 해는 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=\frac{1}{2}x+3$보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이다.

즉, 부등식 $f(x)-\frac{1}{2}x-3<0$의 해는

$-2<x<4$

따라서 조건을 만족시키는 정수 x는 -1, 0, 1, 2, 3이므로 그 합은

$(-1)+0+1+2+3=5$

489

연립이차부등식의 풀이

전략 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $ax^2+bx+c\ge0$이 성립할 조건은 $a>0$, $b^2-4ac\le0$임을 이용한다.

풀이 $-x^2-2x\le mx-m\le x^2-4x+5$에서

$\begin{cases} -x^2-2x\le mx-m \\ mx-m\le x^2-4x+5 \end{cases}$

$-x^2-2x\le mx-m$에서

$-x^2-(2+m)x+m\le0$

$x^2+(2+m)x-m\ge0$

이 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2+(2+m)x-m=0$의 판별식을 D_1이라 할 때,

$D_1=(2+m)^2+4m\le0$, $m^2+8m+4\le0$

$\therefore -4-2\sqrt{3}\le m\le-4+2\sqrt{3}$ …… ㉠

$mx-m\le x^2-4x+5$에서

$-x^2+(4+m)x-(m+5)\le0$

$x^2-(4+m)x+(m+5)\ge0$

이 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2-(4+m)x+(m+5)=0$의 판별식을 D_2라 할 때,

$D_2=(4+m)^2-4(m+5)\le0$, $m^2+4m-4\le0$

$\therefore -2-2\sqrt{2}\le m\le-2+2\sqrt{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-2-2\sqrt{2}\le m\le-4+2\sqrt{3}$

따라서 이를 만족시키는 정수 m은 -4, -3, -2, -1이고 그 합은

$(-4)+(-3)+(-2)+(-1)=-10$

490

연립이차부등식의 풀이

전략 a, b의 값을 부등식 $|x-a|\le b$에 대입하여 해를 구한다.

풀이 $|x-a|\le b$에서

$-b\le x-a\le b \qquad \therefore a-b\le x\le a+b$ …… ㉠

$x^2-x-6\le0$에서

$(x+2)(x-3)\le0 \qquad \therefore -2\le x\le3$ …… ㉡

ㄱ. $a=2$, $b=2$일 때,

$a=2$, $b=2$를 ㉠에 대입하면

$0\le x\le4$ …… ㉢

㉡, ㉢의 공통부분을 구하면 $0\le x\le3$

따라서 정수 x는 0, 1, 2, 3의 4개이다.

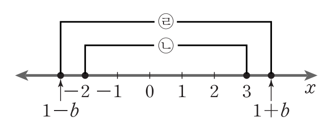
$\therefore f(2, 2)=4$ (참)

ㄴ. $a=1$일 때,

$a=1$을 ㉠에 대입하면

$1-b\le x\le1+b$ …… ㉣

$f(1, b)$가 최댓값을 가지려면 오른쪽 그림에서



$1-b\le-2$, $1+b\ge3$이어야 하므로

$b\ge3$, $b\ge2 \qquad \therefore b\ge3$

따라서 b의 최솟값은 3이다. (참)

ㄷ. $b=3$일 때,

$b=3$을 ㉠에 대입하면

$a-3\le x\le a+3$ …… ㉤

$f(a, 3)$이 최솟값을 가지려면 ㉡, ㉤의 공통부분이 없어야 하므로

$a+3<-2$ 또는 $3<a-3$

$\therefore a<-5$ 또는 $a>6$

따라서 a는 자연수이므로 a의 최솟값은 7이다. (참)

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

491

연립이차부등식의 풀이

전략 각각의 이차부등식을 먼저 풀고 정수 x가 존재하지 않도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구한다.

풀이 $x^2-(a^2-3)x-3a^2<0$에서 $(x-a^2)(x+3)<0$

이때 $a>2$이므로 $a^2>4 \qquad \therefore -3<x<a^2$ …… ㉠

$x^2+(a-9)x-9a>0$에서

$(x+a)(x-9)>0 \qquad \therefore x<-a$ 또는 $x>9$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a^2>10$이면 연립부등식의 해에 $x=10$이 포함되므로 정수 x가 존재하게 된다.

즉, 정수 x가 존재하지 않기 위한 a의 값의 범위는

$a^2\le10$, $-a\le-2$이어야 한다.

$\therefore 2<a\le\sqrt{10}$ ($\because a>2$)

따라서 실수 a의 최댓값 $M=\sqrt{10}$이므로

$M^2=10$

492

연립이차부등식의 풀이

전략 먼저 부등식 $x^2+3x-10<0$을 풀고 a의 값의 범위에 따라 부등식 $ax\geq a^2$의 해를 구하여 연립부등식을 만족시키는 정수 x의 개수가 4가 되도록 하는 정수 a의 값을 구한다.

풀이 $x^2+3x-10<0$에서

$(x+5)(x-2)<0 \qquad \therefore -5<x<2$

이 이차부등식을 만족시키는 정수 x는 $-4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1$의 6개이다.

(i) $a>0$일 때,

$ax\geq a^2$에서 $x\geq a$

이때 주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x의 개수는 0 또는 1이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=0$일 때,

$ax\geq a^2$에서 $0\times x\geq 0$이고 이 부등식의 해는 모든 실수이다.

그런데 주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x의 개수는 6이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $a<0$일 때,

$ax\geq a^2$에서 $x\leq a$이므로 주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x의 개수가 4이려면 그 값이 $-4,\ -3,\ -2,\ -1$이어야 한다.

따라서 정수 a의 값은 -1이다.

이상에서 $a=-1$

493

이차부등식의 활용

전략 A를 원점으로 하는 수직선 위에 세 지점 A, B, C를 놓고 보관 창고의 좌표를 t라 하여 t에 대한 이차부등식을 세운다.

풀이 세 지점 A, B, C를 A를 원점으로 하는 수직선 위에 놓으면

$A(0),\ B(-10),\ C(40)$

보관 창고의 좌표를 t라 하면 보관 창고는 A와 C 사이에 있으므로

$0<t<40$ …… ㉠

총 운송비는 $50t^2+100(t+10)^2+200(40-t)^2$이고 하루에 드는 총 운송비가 198750원 이하가 되어야 하므로

$50t^2+100(t+10)^2+200(t-40)^2\leq 198750$

$t^2+2(t+10)^2+4(t-40)^2\leq 3975$

$7t^2-280t+2625\leq 0$

$t^2-40t+375\leq 0$

$(t-15)(t-25)\leq 0$

$\therefore 15\leq t\leq 25$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$15\leq t\leq 25$

따라서 보관 창고와 A 지점까지 거리의 최댓값은 25 km, 최솟값은 15 km이므로 그 차는

$25-15=10\,(\mathrm{km})$

494

이차방정식과 연립이차부등식

전략 이차방정식의 판별식을 D라 할 때, 실근을 가지려면 $D\geq 0$이어야 하고, 허근을 가지려면 $D<0$이어야 함을 이용하여 연립이차부등식을 세운다.

풀이 이차방정식 $x^2-2kx+1=0$의 판별식을 D_1이라 할 때, 이 이차방정식이 실근을 가지므로

$\dfrac{D_1}{4}=(-k)^2-1\geq 0$

$(k+1)(k-1)\geq 0 \qquad \therefore k\leq -1$ 또는 $k\geq 1$ …… ㉠

이차방정식 $x^2-2kx+2k=0$의 판별식을 D_2라 할 때, 이 이차방정식이 허근을 가지므로

$\dfrac{D_2}{4}=(-k)^2-2k<0$

$k(k-2)<0 \qquad \therefore 0<k<2$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$1\leq k<2$

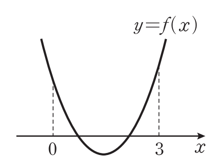
495

이차방정식의 실근의 위치

전략 이차방정식 $ax^2+bx+c=0\ (a>0)$에서 $f(x)=ax^2+bx+c$, 판별식 $D=b^2-4ac$라 할 때, 두 근이 $p,\ q\ (p<q)$ 사이에 있으려면 $D\geq 0,\ f(p)>0,\ f(q)>0,\ p<-\dfrac{b}{2a}<q$이어야 한다.

풀이 $f(x)=x^2-2mx+m+2$라 하면

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 3보다 작은 양수이므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(i) 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 할 때,

$\dfrac{D}{4}=(-m)^2-(m+2)\geq 0$

$m^2-m-2\geq 0,\ (m+1)(m-2)\geq 0$

$\therefore m\leq -1$ 또는 $m\geq 2$

(ii) $f(0)>0$에서 $m+2>0 \qquad \therefore m>-2$

(iii) $f(3)>0$에서 $9-6m+m+2>0$

$-5m>-11 \qquad \therefore m<\dfrac{11}{5}$

(iv) $f(x)=x^2-2mx+m+2$

$=(x-m)^2-m^2+m+2$

에서 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식은 $x=m$이므로

$0<m<3$

이상에서 $2\leq m<\dfrac{11}{5}$

496

이차방정식의 실근의 위치

전략 $f(x)=x^3+(2-2m)x^2+(3-4m)x+6$이라 하고 $f(-2)=0$임을 이용하여 $f(x)=0$을 인수분해 한다.

풀이 $f(x)=x^3+(2-2m)x^2+(3-4m)x+6$이라 하면

$f(-2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해 하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 2-2m & 3-4m & 6 \\ & & -2 & 4m & -6 \\ \hline & 1 & -2m & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x+2)(x^2-2mx+3)$

즉, 주어진 방정식은 $(x+2)(x^2-2mx+3)=0$

이때 한 근이 -2이므로 이 근이 -1보다 작은 한 근이고, 이차방정식 $x^2-2mx+3=0$의 두 근이 1과 3 사이의 서로 다른 두 근이어야 한다.

이때 $g(x)=x^2-2mx+3$이라 하자.

(i) $g(x)=0$의 판별식을 D라 할 때,

$\frac{D}{4}=(-m)^2-3>0$

$(m+\sqrt{3})(m-\sqrt{3})>0$

$\therefore m<-\sqrt{3}$ 또는 $m>\sqrt{3}$

(ii) $g(1)>0$에서

$1-2m+3>0,\ -2m>-4$

$\therefore m<2$

(iii) $g(3)>0$에서

$9-6m+3>0,\ -6m>-12$

$\therefore m<2$

(iv) $g(x)=x^2-2mx+3=(x-m)^2-m^2+3$에서 $y=g(x)$의 그래프의 축의 방정식은 $x=m$이므로

$1<m<3$

이상에서 $\sqrt{3}<m<2$

도전 1등급 최고난도

● 116쪽

497 ① **498** 21 **499** 3

497

이차부등식의 풀이

(1단계) 작년의 수입 화장품의 가격을 a원, 판매량을 b개라 하고, 올해의 가격과 판매량을 식으로 나타낸다.

작년의 수입 화장품의 가격을 a원, 판매량을 b개라 하면 작년보다 가격이 x % 올랐으므로 올해의 가격은

$a\left(1+\frac{x}{100}\right)$(원)

판매량이 $\frac{2}{3}x$ % 감소했으므로 올해의 판매량은

$b\left(1-\frac{2x}{300}\right)$(개)

(2단계) (매출)=(제품 1개당 가격)×(판매량)임을 이용하여 이차부등식을 세운다.

작년 매출은 ab(원)이고,

올해 매출은 $a\left(1+\frac{x}{100}\right)\times b\left(1-\frac{2x}{300}\right)$(원)이다.

매출이 작년 대비 4 % 이상 증가했으므로

$a\left(1+\frac{x}{100}\right)\times b\left(1-\frac{2x}{300}\right)\geq ab\left(1+\frac{4}{100}\right)$

(3단계) 이차부등식을 풀어 x의 값의 범위를 구한다.

$\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1-\frac{2x}{300}\right)\geq\frac{104}{100}$ ($\because a>0,\ b>0$)

양변에 30000을 곱하면

$(100+x)(300-2x)\geq 31200$

$x^2-50x+600\leq 0$

$(x-20)(x-30)\leq 0$

$\therefore 20\leq x\leq 30$

따라서 $p=20,\ q=30$이므로

$p+q=20+30=50$

개념 보충

① A가 a % 증가하면 ⇨ $A\left(1+\frac{a}{100}\right)$

② A가 b % 감소하면 ⇨ $A\left(1-\frac{b}{100}\right)$

498

연립이차부등식의 풀이

(1단계) 각각의 부등식의 해를 구한다.

$|x-n|>2$에서

$x-n<-2$ 또는 $x-n>2$

$\therefore x<n-2$ 또는 $x>n+2$

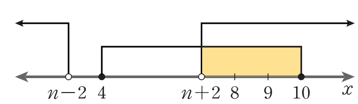
$x^2-14x+40\leq 0$에서

$(x-4)(x-10)\leq 0$

$\therefore 4\leq x\leq 10$

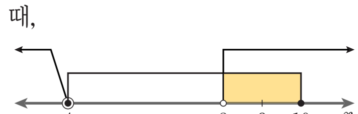
(2단계) n의 값의 범위를 나누어 주어진 연립부등식을 만족시키는 자연수 x의 개수를 구한다.

(i) $n\leq 5$일 때,



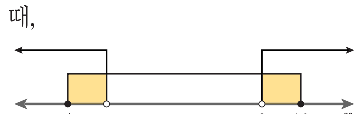
$n+2\leq 7$이므로 주어진 연립부등식을 만족시키는 자연수 x의 개수는 3 이상이고, 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $n=6$일 때,



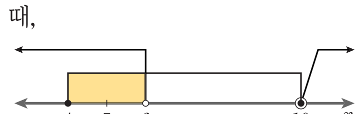
주어진 연립부등식을 만족시키는 자연수 x는 9, 10의 2개이다.

(iii) $n=7$일 때,



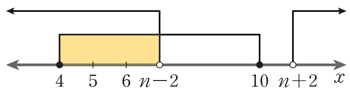
주어진 연립부등식을 만족시키는 자연수 x는 4, 10의 2개이다.

(iv) $n=8$일 때,



주어진 연립부등식을 만족시키는 자연수 x는 4, 5의 2개이다.

(v) $n \geq 9$일 때,



$n-2 \geq 7$, $n+2 \geq 11$이므로 주어진 연립부등식을 만족시키는 자연수 x의 개수는 3 이상이고, 조건을 만족시키지 않는다.

(3단계) 주어진 연립부등식을 만족시키는 자연수 x의 개수가 2가 되도록 하는 n의 값의 합을 구한다.

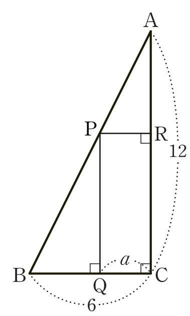
이상에서 조건을 만족시키는 자연수 n의 값은 6, 7, 8이므로 그 합은

$6+7+8=21$

499

연립이차부등식의 활용

(1단계) 세 직각삼각형 ABC, APR, PBQ는 각각 닮음임을 이용하여 $\overline{AR}$, $\overline{PR}$, $\overline{PQ}$의 길이를 a를 이용하여 나타낸다.



$\overline{QC}=a$이므로 $0<a<6$이고

$\overline{BQ}=6-a$

$\overline{PR}=\overline{QC}=a$

$\triangle APR \backsim \triangle ABC$ (AA 닮음)이므로

$\overline{AR} : \overline{PR} = \overline{AC} : \overline{BC}$

$\overline{AR} : a = 12 : 6$

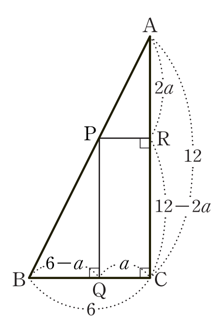
$\therefore \overline{AR}=2a$

$\therefore \overline{PQ}=\overline{RC}$

$=\overline{AC}-\overline{AR}$

$=12-2a$

(2단계) 직사각형 PQCR의 넓이는 두 삼각형 APR과 PBQ의 각각의 넓이보다 큼을 이용하여 연립이차부등식을 세운다.



직사각형 PQCR의 넓이는 $a(12-2a)$

$\triangle$PBQ의 넓이는 $\frac{1}{2}(6-a)(12-2a)$

$\triangle$APR의 넓이는 $\frac{1}{2} \times a \times 2a = a^2$

따라서 주어진 조건에 의하여

$$\begin{cases} a(12-2a) > \frac{1}{2}(6-a)(12-2a) \\ a(12-2a) > a^2 \end{cases}$$

(3단계) 연립이차부등식을 풀어 자연수 a의 값을 구한다.

$a(12-2a) > \frac{1}{2}(6-a)(12-2a)$에서

$12a-2a^2 > (6-a)^2$

$-3a^2+24a-36>0$, $a^2-8a+12<0$

$(a-2)(a-6)<0 \quad \therefore 2<a<6 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$a(12-2a)>a^2$에서

$12a-2a^2>a^2$

$-3a^2+12a>0$, $a^2-4a<0$

$a(a-4)<0 \quad \therefore 0<a<4 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$2<a<4$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 a의 값은 3이다.

III 경우의 수

10 경우의 수와 순열

유형 분석 기출

● 119쪽 ~ 126쪽

500 ⑤	**501** 33	**502** ④	**503** ①	**504** 13
505 ①	**506** ②	**507** ④	**508** ⑤	
509 1194	**510** 16	**511** ④	**512** 8	**513** 36
514 30	**515** 540	**516** 84	**517** 18	**518** 131
519 ①	**520** 24	**521** ③	**522** ③	**523** 35
524 ③	**525** 72	**526** 72	**527** ②	**528** 720
529 3	**530** 84	**531** ⑤	**532** 480	**533** ③
534 144	**535** 960	**536** 72	**537** 288	**538** 576
539 2	**540** ③	**541** 52	**542** 24	**543** ⑤
544 ②	**545** ④	**546** ③		

500

나오는 눈의 수의 합이 3의 배수가 되는 경우는 눈의 수의 합이 3 또는 6 또는 9 또는 12일 때이므로 나오는 두 눈의 수를 각각 a, b라 하면 순서쌍 (a, b)는

(i) 눈의 수의 합이 3일 때,

$(1, 2)$, $(2, 1)$의 2개

(ii) 눈의 수의 합이 6일 때,

$(1, 5)$, $(2, 4)$, $(3, 3)$, $(4, 2)$, $(5, 1)$의 5개

(iii) 눈의 수의 합이 9일 때,

$(3, 6)$, $(4, 5)$, $(5, 4)$, $(6, 3)$의 4개

(iv) 눈의 수의 합이 12일 때,

$(6, 6)$의 1개

(i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는

$2+5+4+1=12$

501

1부터 100까지의 자연수 중에서

2로 나누어떨어지는 수, 즉 2의 배수는 50개,

3으로 나누어떨어지는 수, 즉 3의 배수는 33개,

2와 3으로 나누어떨어지는 수, 즉 2와 3의 최소공배수인 6의 배수는 16개이므로

2 또는 3으로 나누어떨어지는 자연수의 개수는

$50+33-16=67$

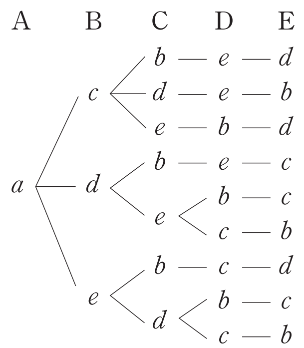
따라서 2와 3으로 모두 나누어떨어지지 않는 자연수의 개수는

$100-67=33$

502

5명의 학생 A, B, C, D, E의 우산을 각각 a, b, c, d, e라 하자.

A만 자신의 우산을 가져가고 나머지 B, C, D, E는 자신의 우산을 가져가지 않는 경우를 수형도로 나타내면 다음과 같이 9가지가 있다.



같은 방법으로 B, C, D, E 중 한 명만 자신의 우산을 가져가는 경우도 각각 9가지씩이다.
따라서 구하는 경우의 수는
$9+9+9+9+9=45$

1등급 비법

규칙성을 찾기 어려울 때에는 수형도를 이용하면 중복되지 않고 빠짐없이 모든 경우를 나열할 수 있다.

503

x, y가 양의 정수이므로 $4\le 2x+y\le 6$을 만족시키는 경우는
$2x+y=4$ 또는 $2x+y=5$ 또는 $2x+y=6$일 때이다.
(i) $2x+y=4$일 때, 순서쌍 (x, y)는
$(1, 2)$의 1개
(ii) $2x+y=5$일 때, 순서쌍 (x, y)는
$(1, 3)$, $(2, 1)$의 2개
(iii) $2x+y=6$일 때, 순서쌍 (x, y)는
$(1, 4)$, $(2, 2)$의 2개
(i), (ii), (iii)에서 구하는 순서쌍 (x, y)의 개수는
$1+2+2=5$

504

x, y, z가 자연수이므로 $x\ge 1$, $y\ge 1$, $z\ge 1$
$x+3y+5z=24$에서 z의 계수가 가장 크므로 z가 될 수 있는 자연수를 구해 보면
$5z<24$ $\therefore z=1, 2, 3, 4$
(i) $z=1$일 때, $x+3y=19$이므로 순서쌍 (x, y)는
$(16, 1)$, $(13, 2)$, $(10, 3)$, $(7, 4)$, $(4, 5)$, $(1, 6)$의 6개
(ii) $z=2$일 때, $x+3y=14$이므로 순서쌍 (x, y)는
$(11, 1)$, $(8, 2)$, $(5, 3)$, $(2, 4)$의 4개
(iii) $z=3$일 때, $x+3y=9$이므로 순서쌍 (x, y)는
$(6, 1)$, $(3, 2)$의 2개
(iv) $z=4$일 때, $x+3y=4$이므로 순서쌍 (x, y)는
$(1, 1)$의 1개
(i)~(iv)에서 구하는 순서쌍 (x, y, z)의 개수는
$6+4+2+1=13$

1등급 비법

방정식 $ax+by+cz=d$ (a, b, c, d는 상수)를 만족시키는 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 x, y, z 중에서 계수의 절댓값이 큰 것부터 대입하여 구한다.

505

(i) $a>b$일 때, 순서쌍 (a, b)는
$(2, 1)$, $(3, 1)$, $(3, 2)$, $(4, 1)$, $(4, 2)$, $(4, 3)$, $(5, 1)$, $(5, 2)$, $(5, 3)$, $(5, 4)$, $(6, 1)$, $(6, 2)$, $(6, 3)$, $(6, 4)$, $(6, 5)$의 15개
(ii) $ab>16$일 때, 순서쌍 (a, b)는
$(3, 6)$, $(4, 5)$, $(4, 6)$, $(5, 4)$, $(5, 5)$, $(5, 6)$, $(6, 3)$, $(6, 4)$, $(6, 5)$, $(6, 6)$의 10개
(iii) $a>b$, $ab>16$일 때, 순서쌍 (a, b)는
$(5, 4)$, $(6, 3)$, $(6, 4)$, $(6, 5)$의 4개
(i), (ii), (iii)에서 구하는 순서쌍 (a, b)의 개수는
$15+10-4=21$

506

$(a+b+c)(x+y)^2=(a+b+c)(x^2+2xy+y^2)$에서 a, b, c에 곱해지는 항이 각각 x^2, $2xy$, y^2의 3개이므로 구하는 항의 개수는
$3\times 3=9$

507

서로 다른 3개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 세 눈의 수의 곱이 홀수인 경우는 세 눈의 수가 모두 홀수인 경우뿐이므로 이 경우의 수는 $3\times 3\times 3=27$
따라서 서로 다른 3개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 세 눈의 수의 곱이 짝수인 경우의 수는 $6\times 6\times 6-27=189$

508

(i) 2□□ 꼴의 짝수일 때,
일의 자리에 올 수 있는 숫자는 0, 4, 6, 8의 4가지,
십의 자리에 올 수 있는 숫자는 8가지이므로
$4\times 8=32$
(ii) 3□□ 꼴의 짝수일 때,
일의 자리에 올 수 있는 숫자는 0, 2, 4, 6, 8의 5가지,
십의 자리에 올 수 있는 숫자는 8가지이므로
$5\times 8=40$
(iii) 4□□ 꼴의 짝수일 때,
일의 자리에 올 수 있는 숫자는 0, 2, 6, 8의 4가지,
십의 자리에 올 수 있는 숫자는 8가지이므로
$4\times 8=32$
(iv) 5□□ 꼴의 짝수일 때,
일의 자리에 올 수 있는 숫자는 0, 2, 4, 6, 8의 5가지,
십의 자리에 올 수 있는 숫자는 8가지이므로
$5\times 8=40$
(i)~(iv)에서 구하는 수의 개수는
$32+40+32+40=144$

509
360을 소인수분해하면

$360=2^3\times3^2\times5$

360의 양의 약수의 개수는

$(3+1)\times(2+1)\times(1+1)=24$

$\therefore\ a=24$

360의 양의 약수의 총합은

$(1+2+2^2+2^3)\times(1+3+3^2)\times(1+5)=1170$

$\therefore\ b=1170$

$\therefore\ a+b=24+1170=1194$

510
504를 소인수분해하면

$504=2^3\times3^2\times7$

504의 양의 약수의 개수는

$(3+1)\times(2+1)\times(1+1)=24$

이 중 3의 배수가 아닌 약수는 $2^3\times7$의 약수이므로 그 개수는

$(3+1)\times(1+1)=8$

따라서 구하는 3의 배수의 개수는

$24-8=16$

511
18을 소인수분해하면

$18=2\times3^2$

$18^n=(2\times3^2)^n=2^n\times3^{2n}$의 양의 약수의 개수가 91이므로

$(n+1)(2n+1)=91$

$2n^2+3n-90=0$

$(2n+15)(n-6)=0$

$\therefore\ n=6$ ($\because$ n은 자연수)

512
(ⅰ) A → C로 가는 방법의 수는

2

(ⅱ) A → B → C로 가는 방법의 수는

$3\times2=6$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 방법의 수는

$2+6=8$

1등급 비법

동시에 갈 수 없는 길이면 합의 법칙, 이어지는 길이면 곱의 법칙을 이용한다.

513
(ⅰ) A → B → D → C → A로 가는 방법의 수는

$1\times3\times2\times3=18$

(ⅱ) A → C → D → B → A로 가는 방법의 수는

$3\times2\times3\times1=18$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 방법의 수는

$18+18=36$

514
(ⅰ) 집 → 서점 → 학교로 가는 방법의 수는

$3\times3=9$

(ⅱ) 집 → 편의점 → 학교로 가는 방법의 수는

$3\times2=6$

(ⅲ) 집 → 서점 → 편의점 → 학교로 가는 방법의 수는

$3\times1\times2=6$

(ⅳ) 집 → 편의점 → 서점 → 학교로 가는 방법의 수는

$3\times1\times3=9$

(ⅰ)~(ⅳ)에서 구하는 방법의 수는

$9+6+6+9=30$

515
가장 많은 영역과 인접한 영역인 A에 칠할 수 있는 색은

5가지

B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한

$5-1=4$(가지)

C에 칠할 수 있는 색은 A, B에 칠한 색을 제외한

$5-2=3$(가지)

D에 칠할 수 있는 색은 A, C에 칠한 색을 제외한

$5-2=3$(가지)

E에 칠할 수 있는 색은 A, D에 칠한 색을 제외한

$5-2=3$(가지)

따라서 구하는 방법의 수는

$5\times4\times3\times3\times3=540$

516
(ⅰ) A와 C에 같은 색을 칠하는 경우

A에 칠할 수 있는 색은 4가지

B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한

$4-1=3$(가지)

C에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색과 같은 색이므로 1가지

D에 칠할 수 있는 색은 A(C)에 칠한 색을 제외한

$4-1=3$(가지)

이므로 이 방법의 수는

$4\times3\times1\times3=36$

(ⅱ) A와 C에 다른 색을 칠하는 경우

A에 칠할 수 있는 색은 4가지

B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한

$4-1=3$(가지)

C에 칠할 수 있는 색은 A, B에 칠한 색을 제외한

$4-2=2$(가지)

D에 칠할 수 있는 색은 A, C에 칠한 색을 제외한

$4-2=2$(가지)

이므로 이 방법의 수는

$4\times3\times2\times2=48$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 방법의 수는

$36+48=84$

517

(ⅰ) B와 D에 같은 색을 칠하는 경우

B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한

$4-1=3$(가지)

C에 칠할 수 있는 색은 A, B에 칠한 색을 제외한

$4-2=2$(가지)

D에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색과 같은 색이므로 1가지

E에 칠할 수 있는 색은 A와 B(D)에 칠한 색을 제외한

$4-2=2$(가지)

이므로 이 방법의 수는

$3\times2\times1\times2=12$

(ⅱ) B와 D에 다른 색을 칠하는 경우

B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한

$4-1=3$(가지)

C에 칠할 수 있는 색은 A, B에 칠한 색을 제외한

$4-2=2$(가지)

D에 칠할 수 있는 색은 A, B, C에 칠한 색을 제외한

$4-3=1$(가지)

E에 칠할 수 있는 색은 A, B, D에 칠한 색을 제외한

$4-3=1$(가지)

이므로 이 방법의 수는

$3\times2\times1\times1=6$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 방법의 수는

$12+6=18$

518

500원짜리 동전 1개로 지불할 수 있는 방법은

0개, 1개의 2가지

100원짜리 동전 5개로 지불할 수 있는 방법은

0개, 1개, …, 5개의 6가지

50원짜리 동전 10개로 지불할 수 있는 방법은

0개, 1개, …, 10개의 11가지

이때 0원을 지불하는 경우는 제외해야 하므로 구하는 방법의 수는

$2\times6\times11-1=131$

519

500원짜리 동전 2개로 지불하는 금액과 1000원짜리 지폐 1장으로 지불하는 금액이 같으므로 1000원짜리 지폐 2장을 500원짜리 동전 4개로 바꾸면 지불할 수 있는 금액의 수는 500원짜리 동전 7개, 100원짜리 동전 4개로 지불할 수 있는 금액의 수와 같다.

500원짜리 동전 7개로 지불할 수 있는 금액은

0원, 500원, 1000원, …, 3500원의 8가지

100원짜리 동전 4개로 지불할 수 있는 금액은

0원, 100원, 200원, 300원, 400원의 5가지

이때 0원을 지불하는 경우는 제외해야 하므로 구하는 금액의 수는

$8\times5-1=39$

520

(ⅰ) 지불할 수 있는 방법의 수

1000원짜리 지폐 3장으로 지불할 수 있는 방법은

0장, 1장, 2장, 3장의 4가지

5000원짜리 지폐 3장으로 지불할 수 있는 방법은

0장, 1장, 2장, 3장의 4가지

10000원짜리 지폐 3장으로 지불할 수 있는 방법은

0장, 1장, 2장, 3장의 4가지

이때 0원을 지불하는 경우는 제외해야 하므로 구하는 방법의 수는

$a=4\times4\times4-1=63$

(ⅱ) 지불할 수 있는 금액의 수

5000원짜리 2장으로 지불하는 금액과 10000원짜리 1장으로 지불하는 금액이 같으므로 10000원짜리 지폐 3장을 5000원짜리 지폐 6장으로 바꾸면 지불할 수 있는 금액의 수는 1000원짜리 지폐 3장과 5000원짜리 지폐 9장으로 지불할 수 있는 금액의 수와 같다.

1000원짜리 지폐 3장으로 지불할 수 있는 금액은

0원, 1000원, 2000원, 3000원의 4가지

5000원짜리 지폐 9장으로 지불할 수 있는 금액은

0원, 5000원, 10000원, …, 45000원의 10가지

이때 0원을 지불하는 경우는 제외해야 하므로 구하는 금액의 수는

$b=4\times10-1=39$

(ⅰ), (ⅱ)에서

$a-b=63-39=24$

521

${}_n\mathrm{P}_2+4\times{}_n\mathrm{P}_1=28$에서

$n(n-1)+4n=28$

$n^2+3n-28=0,\ (n+7)(n-4)=0$

$\therefore\ n=4\ (\because\ n\ge2)$

522

${}_n\mathrm{P}_4 : 2\times{}_n\mathrm{P}_2=3:1$에서

${}_n\mathrm{P}_4=6\times{}_n\mathrm{P}_2$

$n(n-1)(n-2)(n-3)=6n(n-1)$

${}_n\mathrm{P}_4$에서 $n\ge4$이므로

양변을 $n(n-1)$로 나누면

$(n-2)(n-3)=6$

$n^2-5n=0,\ n(n-5)=0$

$\therefore\ n=5\ (\because\ n\ge4)$

$\therefore\ {}_n\mathrm{P}_{n-3}={}_5\mathrm{P}_2=20$

523

${}_n\mathrm{P}_4+35\times{}_{n-1}\mathrm{P}_2-9\times{}_n\mathrm{P}_3=0$에서

$$n(n-1)(n-2)(n-3)+35(n-1)(n-2)-9n(n-1)(n-2)=0$$

${}_{n}P_4$에서 $n\ge4$이므로
양변을 $(n-1)(n-2)$로 나누면
$n(n-3)+35-9n=0$
$n^2-12n+35=0$, $(n-5)(n-7)=0$
$\therefore n=5$ 또는 $n=7$
따라서 모든 자연수 n의 값의 곱은
$5\times7=35$

524
지혜가 3등을 하는 경우의 수는 지혜를 제외한 4명의 학생을 1, 2, 4, 5등에 일렬로 세우는 경우의 수와 같으므로 구하는 경우의 수는
$4!=24$

525
빨간색 꽃과 노란색 꽃의 수가 3송이로 서로 같으므로 빨간색 꽃과 노란색 꽃을 번갈아 심는 방법은
(빨, 노, 빨, 노, 빨, 노) 또는 (노, 빨, 노, 빨, 노, 빨)
의 2가지이다.
빨간색 꽃과 노란색 꽃을 일렬로 심는 방법의 수는 각각 $3!$이므로 구하는 방법의 수는
$2\times3!\times3!=72$

526
매일 한 팀 이상이 공연해야 하므로 첫째 날에는 한 팀 또는 두 팀 또는 세 팀이 공연해야 한다.
(i) 첫째 날에 한 팀, 둘째 날에 세 팀이 공연하는 경우
첫째 날에 공연하는 한 팀을 선택하는 경우의 수는
${}_{4}P_1=4$
둘째 날에 공연하는 세 팀의 공연 순서를 정하는 경우의 수는
$3!=6$
따라서 이 경우의 수는
$4\times6=24$
(ii) 첫째 날에 두 팀, 둘째 날에 두 팀이 공연하는 경우
첫째 날에 공연하는 두 팀을 선택하여 공연 순서를 정하는 경우의 수는 ${}_{4}P_2=12$
둘째 날에 공연하는 두 팀의 공연 순서를 정하는 경우의 수는
$2!=2$
따라서 이 경우의 수는
$12\times2=24$
(iii) 첫째 날에 세 팀, 둘째 날에 한 팀이 공연하는 경우
첫째 날에 공연하는 세 팀을 선택하여 공연 순서를 정하는 경우의 수는 ${}_{4}P_3=24$
나머지 한 팀이 둘째 날에 공연하는 경우의 수는 1
따라서 이 경우의 수는
$24\times1=24$
(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는
$24+24+24=72$

527
a와 e를 한 문자로 생각하여 4개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$4!=24$
a와 e의 자리를 바꾸는 경우의 수는
$2!=2$
따라서 구하는 경우의 수는
$24\times2=48$

528
2개의 문자 e를 한 문자로 생각하여 6개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$6!=720$
2개의 문자 e끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는 1
따라서 구하는 경우의 수는
$720\times1=720$

529
바지 4벌을 한 묶음으로 생각하여 $(n+1)$벌의 옷을 일렬로 거는 경우의 수는
$(n+1)!$
바지 4벌의 자리를 바꾸는 경우의 수는
$4!=24$
따라서 바지끼리 이웃하여 거는 경우의 수는
$(n+1)!\times4!=24(n+1)!$
이고, 이 경우의 수가 576이므로
$24(n+1)!=576$, $(n+1)!=24=4!$
$\therefore n=3$

530
a와 b를 한 문자로 생각하여 4개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$4!=24$
a와 b의 자리를 바꾸는 경우의 수는
$2!=2$
즉, a와 b가 이웃하게 나열하는 경우의 수는
$24\times2=48$
같은 방법으로 a와 c가 이웃하게 나열하는 경우의 수는 48
한편, a와 b, a와 c가 동시에 이웃하는 경우는 bac, cab의 2가지
a, b, c를 한 문자로 생각하여 3개의 문자를 일렬로 배열하는 경우의 수는
$3!=6$
즉, a와 b, a와 c가 동시에 이웃하게 나열하는 경우의 수는
$2\times6=12$
따라서 구하는 경우의 수는
$48+48-12=84$

참고 구하는 경우의 수는 (a, b)가 이웃하게 나열하는 경우의 수와 (a, c)가 이웃하게 나열하는 경우의 수를 합한 값에서 (a, b)와 (a, c)가 동시에 이웃하게 나열하는 경우의 수를 뺀 값이다.

531

1, 3, 5가 적혀 있는 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$3!=6$
1, 3, 5가 적혀 있는 세 장의 카드의 사이사이와 양 끝의 네 곳 중에서 두 곳을 택하여 2, 4가 적혀 있는 카드를 하나씩 나열하는 경우의 수는
${}_4P_2=12$
따라서 구하는 경우의 수는
$6\times12=72$
다른 풀이 5장의 카드를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는
$5!=120$
2, 4가 적혀 있는 두 장의 카드를 한 묶음으로 생각하여 이 묶음과 1, 3, 5가 적혀 있는 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $4!$이고 2, 4가 적혀 있는 카드의 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!$이므로 짝수가 적혀 있는 카드끼리 서로 이웃하도록 나열하는 경우의 수는
$4!\times2!=48$
따라서 짝수가 적혀 있는 카드끼리 서로 이웃하지 않도록 나열하는 경우의 수는
$120-48=72$

532

남학생 3명이 앉을 3개의 의자와 빈 의자 1개, 총 4개의 의자를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$4!=24$
4개의 의자 사이사이와 양 끝의 5개의 자리 중 2개를 택하여 여학생이 앉을 의자를 놓는 경우의 수는
${}_5P_2=20$
따라서 구하는 경우의 수는
$24\times20=480$
다른 풀이 6개의 의자에 5명이 앉는 경우의 수는
${}_6P_5=720$
여학생이 앉을 2개의 의자를 1개로 보고 5개의 의자에 여학생이 이웃하여 앉는 경우의 수는
$5!\times2!=240$
따라서 구하는 경우의 수는
$720-240=480$

533

조건 (나)에서 2학년 학생 4명 중에서 2명이 양 끝에 있는 의자에 앉는 경우의 수는
${}_4P_2=12$
1학년 학생이 앉을 수 있는 의자를 ①, 2학년 학생이 앉을 수 있는 의자를 ②라 할 때, 조건 (가)를 만족시키도록 나머지 4명의 학생이 4개의 의자에 앉는 경우는 다음 3가지 중 하나이다.

①②①②, ①②②①, ②①②①

1학년 학생 2명과 2학년 학생 2명이 의자에 앉는 경우의 수는 위의 3가지 경우 모두 $2!\times2!=4$
따라서 구하는 경우의 수는
$12\times3\times4=144$
다른 풀이 먼저 2학년 학생 4명이 일렬로 앉은 후 1학년 학생 2명이 조건을 만족시키도록 앉는 경우를 생각하자.
2학년 학생 4명이 일렬로 앉는 경우의 수는 $4!=24$
이때 2학년 학생을 ②라 하자.

②∨②∨②∨②

두 조건 (가), (나)를 만족시키려면 1학년 학생 2명은 ∨표시된 3곳 중에서 2곳을 택하여 앉아야 하므로 1학년 학생이 앉는 경우의 수는
${}_3P_2=6$
따라서 구하는 경우의 수는 $24\times6=144$

534

사물함의 가장 윗줄부터 순서대로 1행, 2행, 3행이라 하면 서로 이웃하지 않는 네 사물함을 선택하는 경우의 수는 다음과 같다.
(i) 1개의 행에서 2개, 나머지 2개의 행에서 각각 1개씩 선택하는 경우
㉠ 1행에서 2개, 나머지 행에서 각각 1개씩 선택하는 경우
1행에서 1번, 3번 사물함을 선택할 때, 2행에서 5번 사물함을 선택할 수 있다. 이때 3행에서는 5번 사물함과 이웃하지 않는 7번, 9번 사물함 중에서 1개를 고르면 된다.
따라서 이 경우의 수는 2
㉡ 2행에서 2개, 나머지 행에서 각각 1개씩 선택하는 경우
2행에서 4번, 6번 사물함을 선택할 때, 1행과 3행에서 선택할 수 있는 경우의 수는 각각 1이다.
따라서 이 경우의 수는 1
㉢ 3행에서 2개, 나머지 행에서 각각 1개씩 선택하는 경우
㉠과 마찬가지이므로 경우의 수는 2
$\therefore$ $2+1+2=5$
(ii) 1행과 2행 또는 2행과 3행에서 4개를 선택하는 경우
이웃하는 면이 생길 수밖에 없으므로 경우의 수는 0
(iii) 1행과 3행에서 4개를 선택하는 경우
1행에서 1번, 3번 사물함을 선택하고 3행에서 7번, 9번 사물함을 선택해야 하므로 경우의 수는 1
(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는 $5+0+1=6$
네 학생이 선택한 네 사물함을 사용하는 순서를 정하는 경우의 수는 위의 6가지 경우 각각 $4!$씩이므로 구하는 경우의 수는
$6\times4!=144$

535

a, ○, ○, i를 한 묶음으로 생각하여 4개의 문자를 일렬로 나열하

는 경우의 수는

$4!=24$

a와 i 사이에 5개의 문자 중 2개의 문자를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수는

${}_5P_2=20$

묶음에서 a와 i가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$24\times20\times2=960$

536

A, B가 앉는 줄을 택하는 방법의 수는

$2!=2$

한 줄에 놓인 3개의 의자 중 2개의 의자를 택하여 A, B가 앉는 방법의 수는

${}_3P_2=6$

나머지 3명이 맞은편 줄의 의자에 앉는 방법의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 방법의 수는

$2\times6\times6=72$

537

운전석에는 아버지 또는 어머니만 앉을 수 있으므로 운전석에 앉는 방법의 수는

$2!=2$

할아버지와 할머니는 가운데 줄에만 앉을 수 있으므로 그 방법의 수는

${}_3P_2=6$

나머지 4명의 가족이 빈 자리에 앉는 방법의 수는

$4!=24$

따라서 구하는 방법의 수는

$2\times6\times24=288$

538

6개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$6!=720$

자음은 k, r, n의 3개이므로 양 끝에 모두 자음이 오는 경우의 수는

${}_3P_2\times4!=6\times24=144$

따라서 적어도 한쪽 끝에 모음이 오는 경우의 수는

$720-144=576$

참고 '적어도 한쪽 끝에 모음'의 반대는 '양 끝이 모두 자음'이다. 따라서 전체 경우의 수에서 양 끝이 모두 자음인 경우의 수를 뺀다.

539

서로 다른 한 자리의 자연수 6개를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$6!=720$

서로 다른 한 자리의 자연수 6개 중에서 짝수의 개수를 n이라 하면 양 끝에 모두 짝수가 오도록 나열하는 방법의 수는

${}_nP_2\times4!={}_nP_2\times24$

이때 적어도 한쪽 끝에 홀수가 오도록 나열하는 방법의 수가 432이므로

$720-{}_nP_2\times24=432$

${}_nP_2\times24=288$ $\quad\therefore {}_nP_2=12$

$n(n-1)=12$에서

$n^2-n-12=0$, $(n+3)(n-4)=0$

$\therefore n=4$ ($\because n\geq2$)

따라서 짝수의 개수가 4이므로 홀수의 개수는

$6-4=2$

540

1000부터 4999까지의 자연수의 개수는 4000

각 자리의 숫자가 모두 다른 수의 개수는

$4\times9\times8\times7=2016$

따라서 적어도 두 자리의 숫자가 같은 수의 개수는

$4000-2016=1984$

541

6개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4, 5에서 서로 다른 3개를 사용하여 만든 세 자리 자연수가 짝수이려면 일의 자리의 숫자가 0 또는 2 또는 4이어야 한다.

(i) 일의 자리의 숫자가 0인 경우

백의 자리, 십의 자리에는 0을 제외한 5개의 숫자 중에서 2개의 숫자가 올 수 있으므로 이 경우의 수는

${}_5P_2=20$

(ii) 일의 자리의 숫자가 2인 경우

백의 자리에는 0과 2를 제외한 4개의 숫자가 올 수 있고, 십의 자리에는 백의 자리의 숫자와 2를 제외한 4개의 숫자가 올 수 있으므로 이 경우의 수는

$4\times4=16$

(iii) 일의 자리의 숫자가 4인 경우

백의 자리에는 0과 4를 제외한 4개의 숫자가 올 수 있고, 십의 자리에는 백의 자리의 숫자와 4를 제외한 4개의 숫자가 올 수 있으므로 이 경우의 수는

$4\times4=16$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 짝수의 개수는

$20+16+16=52$

542

1, 2, 3, 4, 5의 숫자가 각각 하나씩 적힌 5장의 카드에서 3장을 택하여 만든 세 자리 자연수가 3의 배수이려면 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수이어야 한다.

(i) 각 자리의 숫자의 합이 6인 경우

1, 2, 3이므로 이 3장의 카드로 만들 수 있는 자연수의 개수는

$3!=6$

(ii) 각 자리의 숫자의 합이 9인 경우

1, 3, 5 또는 2, 3, 4이므로 각각의 3장의 카드로 만들 수 있는 자연수의 개수는

$3!=6$

즉, 이 경우의 자연수의 개수는

$6+6=12$

(iii) 각 자리의 숫자의 합이 12인 경우

3, 4, 5이므로 이 3장의 카드로 만들 수 있는 자연수의 개수는

$3!=6$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 3의 배수의 개수는

$6+12+6=24$

개념 보충

배수의 판별

① 2의 배수: 일의 자리의 숫자가 0 또는 2의 배수
② 3의 배수: 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수
③ 4의 배수: 끝의 두 자리의 수가 00 또는 4의 배수
④ 5의 배수: 일의 자리의 숫자가 0 또는 5
⑤ 9의 배수: 각 자리의 숫자의 합이 9의 배수

543

1, 1, 1, 1을 다음과 같이 나열하고 사이사이와 양 끝의 다섯 자리에 이웃하는 자리의 두 숫자가 항상 다르도록 2, 2, 3, 4를 나열해야 한다.

○1○1○1○1○

(i) 한쪽 끝을 제외한 네 자리에 각각 1개씩 숫자를 나열하는 경우

3, 4를 나열할 두 자리를 고르고 나머지 두 자리에 2를 나열하는 경우의 수는 ${}_4P_2=12$

따라서 이 경우의 수는

$2\times12=24$

(ii) 양 끝을 제외한 세 자리에 각각 1개, 1개, 2개의 숫자를 나열하는 경우

㉠ 2개의 숫자가 2와 3인 경우

두 자리에 2, 4를 각각 나열하고 나머지 한 자리에 2와 3을 나열하는 경우의 수는 $3!=6$이고, 2개의 숫자 2와 3이 서로 위치를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$이므로 경우의 수는

$6\times2=12$

㉡ 2개의 숫자가 2와 4인 경우

㉠과 마찬가지이므로 경우의 수는 12

㉢ 2개의 숫자가 3과 4인 경우

3과 4를 나열할 자리를 고르는 경우의 수는 3이고, 2개의 숫자 3과 4가 서로 위치를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$이므로 경우의 수는 $3\times2=6$

따라서 이 경우의 수는

$12+12+6=30$

(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는

$24+30=54$

544

(i) A□□□□ 꼴인 문자열의 개수는

$4!=24$

(ii) B□□□□ 꼴인 문자열의 개수는

$4!=24$

(iii) C□□□□ 꼴인 문자열의 개수는

$4!=24$

(iv) DA□□□ 꼴인 문자열의 개수는

$3!=6$

(v) DB□□□ 꼴인 문자열의 개수는

$3!=6$

(i)~(v)에서 A로 시작하는 문자열부터 DB로 시작하는 문자열까지의 총개수는

$24+24+24+6+6=84$

이므로

DCABE, DCAEB, DCBAE, DCBEA, DCEAB, ⋯

에서 89번째 문자열은 DCEAB이다.

따라서 89번째 문자열의 마지막 문자는 B이다.

1등급 비법

사전식 배열은 문자를 차례대로 나열하는 것이므로 순열과 관계가 있다. 맨 앞에 오는 문자에 따라 차례대로 문자열을 찾는다.

545

24000보다 큰 수는 24□□□, 25□□□, 26□□□, 3□□□□, 4□□□□, 5□□□□, 6□□□□ 꼴이다.

(i) 24□□□ 꼴인 자연수의 개수는

${}_4P_3=24$

(ii) 25□□□ 꼴인 자연수의 개수는

${}_4P_3=24$

(iii) 26□□□ 꼴인 자연수의 개수는

${}_4P_3=24$

(iv) 3□□□□ 꼴인 자연수의 개수는

${}_5P_4=120$

(v) 4□□□□ 꼴인 자연수의 개수는

${}_5P_4=120$

(vi) 5□□□□ 꼴인 자연수의 개수는

${}_5P_4=120$

(vii) 6□□□□ 꼴인 자연수의 개수는

${}_5P_4=120$

(i)~(vii)에서 구하는 자연수의 개수는

$24+24+24+120+120+120+120=552$

546

(i) ㄱ□□□□ 꼴인 문자열의 개수는

$4!=24$

(ii) ㄴ□□□□ 꼴인 문자열의 개수는

$4!=24$

(iii) ㄷㄱㄴ□□ 꼴인 문자열의 개수는

$2!=2$

(iv) ㄷㄱㄹ□□ 꼴인 문자열의 개수는

$2!=2$

(i)~(iv)에서 ㄱ으로 시작하는 문자열부터 ㄷㄱㄹ으로 시작하는 문자열까지의 총개수는

$24+24+2+2=52$

이므로 ㄷㄱㅁㄴㄹ, ㄷㄱㅁㄹㄴ, …에서 ㄷㄱㅁㄹㄴ은 54번째 문자열이다.

내신 적중 서술형

• 127쪽

547 18 **548** 11 **549** (1) 144 (2) 288 (3) 432
550 192

547

1반의 1교시는 국어, 2교시는 영어, 3교시는 수학, 4교시는 과학인 경우에 대하여 2반의 시간표를 수형도로 나타내면 다음과 같이 9가지이다.

1교시	2교시	3교시	4교시
영어	국어	과학	수학
	수학	과학	국어
	과학	국어	수학
수학	국어	과학	영어
	과학	국어	영어
		영어	국어
과학	국어	영어	수학
	수학	국어	영어
		영어	국어

…… ㉮

같은 방법으로 1반의 1교시는 국어, 2교시는 영어, 3교시는 과학, 4교시는 수학인 경우에 대하여 2반의 시간표를 만드는 방법도 9가지이다. …… ㉯

따라서 구하는 방법의 수는

$9+9=18$ …… ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ 1반의 3교시는 수학, 4교시는 과학인 경우 2반의 시간표를 만드는 방법의 수 구하기	40 %
㉯ 1반의 3교시는 과학, 4교시는 수학인 경우 2반의 시간표를 만드는 방법의 수 구하기	40 %
㉰ 시간표를 만들 수 있는 방법의 수 구하기	20 %

548

$7\le a+b\le 8$에서

$a+b=7$ 또는 $a+b=8$

(i) $a+b=7$일 때, 순서쌍 (a, b)는

$(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)$의 6개 …… ㉮

(ii) $a+b=8$일 때, 순서쌍 (a, b)는

$(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)$의 5개 …… ㉯

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 (a, b)의 개수는

$6+5=11$ …… ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ $a+b=7$을 만족시키는 순서쌍 (a, b)의 개수 구하기	40 %
㉯ $a+b=8$을 만족시키는 순서쌍 (a, b)의 개수 구하기	40 %
㉰ $7\le a+b\le 8$을 만족시키는 순서쌍 (a, b)의 개수 구하기	20 %

549

(1) 남자 3명이 앞줄에 옆으로 나란히 서로 이웃하여 서는 방법의 수는 $3!=6$

여자 4명이 뒷줄에 서는 방법의 수는 $4!=24$

따라서 방법의 수는 $6\times 24=144$ …… ㉮

(2) 뒷줄에 이웃하는 세 자리를 택하는 방법의 수는 2

남자 3명이 뒷줄 세 자리에 옆으로 나란히 서로 이웃하여 서는 방법의 수는 $3!=6$

여자 4명이 나머지 자리에 서는 방법의 수는 $4!=24$

따라서 방법의 수는 $2\times 6\times 24=288$ …… ㉯

(3) (1), (2)에서 구하는 방법의 수는

$144+288=432$ …… ㉰

	채점 기준	배점 비율
(1)	㉮ 남자 3명이 앞줄에 서는 방법의 수 구하기	40 %
(2)	㉯ 남자 3명이 뒷줄에 서는 방법의 수 구하기	40 %
(3)	㉰ 남자 3명이 앞줄 또는 뒷줄에 서는 방법의 수 구하기	20 %

550

(i) A, B가 2인용 소파에 앉는 경우

A, B가 2인용 소파에 앉는 방법의 수는 $2!=2$

C, D, E, F가 4인용 소파에 앉는 방법의 수는 $4!=24$

따라서 방법의 수는 $2\times 24=48$ …… ㉮

(ii) A, B가 4인용 소파에 앉는 경우

A, B를 묶어서 한 사람으로 생각하여 3명이 4인용 소파에 앉는 방법의 수는 $3!=6$

A, B가 자리를 바꾸는 방법의 수는 $2!=2$

C, D, E, F 중에서 2명이 2인용 소파에 앉는 방법의 수는

${}_4P_2=12$

따라서 방법의 수는 $6\times 2\times 12=144$ …… ㉯

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는

$48+144=192$ …… ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ A, B가 2인용 소파에 앉는 방법의 수 구하기	40 %
㉯ A, B가 4인용 소파에 앉는 방법의 수 구하기	40 %
㉰ A, B가 같은 소파에 이웃하여 앉는 방법의 수 구하기	20 %

1등급 실력 완성

● 128쪽 ~ 130쪽

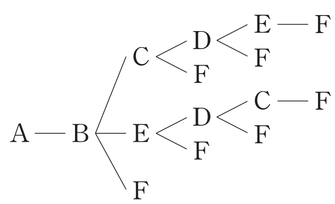
551 28	**552** ②	**553** 35	**554** 10	**555** 8
556 ③	**557** ①	**558** 5	**559** 36	**560** ③
561 120번	**562** 288	**563** 194	**564** ④	**565** 38

551

합의 법칙

전략 꼭짓점 A에서 출발하여 꼭짓점 B를 지나 꼭짓점 F로 가는 경우를 수형도를 이용하여 나타낸다.

풀이 주어진 정팔면체의 꼭짓점 A에서 출발하여 꼭짓점 B를 지나 꼭짓점 F로 가는 경우를 수형도 나타내면 다음과 같이 7가지이다.



같은 방법으로 꼭짓점 A에서 출발하여 꼭짓점 C 또는 D 또는 E를 지나 꼭짓점 F로 가는 경우도 각각 7가지씩이다.
따라서 구하는 방법의 수는
$7+7+7+7=28$

552

방정식과 부등식의 해의 개수

전략 $x+y$, $x+y+z$가 양의 정수임을 이용하여 등식을 만족시키는 순서쌍의 개수를 구한다.

풀이 x, y, z가 음이 아닌 정수이므로 $(x+y)(x+y+z)=8$에서 $x+y$, $x+y+z$는 양의 정수이어야 한다.
이때 $x+y \le x+y+z$이므로
$x+y=1$, $x+y+z=8$ 또는 $x+y=2$, $x+y+z=4$
(i) $x+y=1$, $x+y+z=8$일 때,
$1+z=8$에서 $z=7$
$x+y=1$에서 순서쌍 (x, y)는 $(0, 1)$, $(1, 0)$
따라서 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 2이다.
(ii) $x+y=2$, $x+y+z=4$일 때,
$2+z=4$에서 $z=2$
$x+y=2$에서 순서쌍 (x, y)는 $(0, 2)$, $(1, 1)$, $(2, 0)$
따라서 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 3이다.
(i), (ii)에서 순서쌍 (x, y, z)의 개수는
$2+3=5$

553

곱의 법칙

전략 사다리꼴의 넓이를 구하는 공식을 이용하여 경우를 나누어 구한다.

풀이 평행선에서 각각 두 점을 선택하여 네 꼭짓점으로 하는 사각형은 사다리꼴이므로 윗변의 길이와 아랫변의 길이를 각각 a, b라 하면
$\frac{1}{2}\times(a+b)\times1=4 \qquad \therefore a+b=8$

(i) $a=2$, $b=6$일 때,
$a=2$인 경우는 5가지, $b=6$인 경우는 1가지이므로
$5\times1=5$(개)
(ii) $a=3$, $b=5$일 때,
$a=3$인 경우는 4가지, $b=5$인 경우는 2가지이므로
$4\times2=8$(개)
(iii) $a=4$, $b=4$일 때,
$a=4$인 경우는 3가지, $b=4$인 경우는 3가지이므로
$3\times3=9$(개)
(iv) $a=5$, $b=3$일 때,
$a=5$인 경우는 2가지, $b=3$인 경우는 4가지이므로
$2\times4=8$(개)
(v) $a=6$, $b=2$일 때,
$a=6$인 경우는 1가지, $b=2$인 경우는 5가지이므로
$1\times5=5$(개)
(i)~(v)에서 구하는 사각형의 개수는
$5+8+9+8+5=35$

554

약수의 개수

전략 자연수 $N=a^pb^q$의 양의 약수의 개수가 $(p+1)(q+1)$임을 이용한다.
(단, a, b는 서로 다른 소수, p, q는 자연수이다.)

풀이 서로 다른 두 개의 주사위 A, B를 동시에 던져서 나오는 눈의 수를 각각 a, b라 하자.
P의 양의 약수의 개수가 4이므로 P는 서로 다른 두 소수 α, β에 대하여
$P=\alpha^3$ 또는 $P=\alpha\beta$ 꼴이어야 한다.
(i) $P=\alpha^3$ 꼴인 경우
$\alpha=2$일 때, 순서쌍 (a, b)는 $(2, 4)$, $(4, 2)$의 2가지
(ii) $P=\alpha\beta$ 꼴인 경우
$\alpha=2$, $\beta=3$일 때,
순서쌍 (a, b)는 $(1, 6)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$, $(6, 1)$의 4가지
$\alpha=2$, $\beta=5$일 때,
순서쌍 (a, b)는 $(2, 5)$, $(5, 2)$의 2가지
$\alpha=3$, $\beta=5$일 때,
순서쌍 (a, b)는 $(3, 5)$, $(5, 3)$의 2가지
이므로 $P=\alpha\beta$ 꼴인 경우의 수는
$4+2+2=8$
(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는
$2+8=10$

참고 주사위를 던져서 나오는 눈의 수 중에서 합성수인 4, 6은 소인수분해 하여 각각 2^2, 2×3으로 생각한다.

555

도로망에서의 방법의 수

전략 B 지점와 C 지점 사이에 x개의 도로를 추가한다고 하고 A 지점에서 D 지점으로 가는 방법의 수를 구한다.

풀이 B 지점과 C 지점 사이에 x개의 도로를 추가한다고 하면

(ⅰ) A → B → D로 가는 방법의 수는

$3\times2=6$

(ⅱ) A → C → D로 가는 방법의 수는

$2\times3=6$

(ⅲ) A → B → C → D로 가는 방법의 수는

$3\times x\times3=9x$

(ⅳ) A → C → B → D로 가는 방법의 수는

$2\times x\times2=4x$

(ⅰ)~(ⅳ)에서 A 지점에서 D 지점으로 가는 방법의 수는

$6+6+9x+4x=116$

$13x=104 \qquad \therefore x=8$

따라서 추가해야 하는 도로의 개수는 8이다.

556

색칠하는 방법의 수

전략 곱의 법칙을 이용하여 색을 칠하는 경우의 수를 구한다.

풀이 1이 적힌 정사각형과 6이 적힌 정사각형에 같은 색을 칠하고, 변을 공유하는 두 정사각형에는 서로 다른 색을 칠하므로 1, 6, 2, 3, 5, 4가 적힌 정사각형의 순서로 색을 칠해 보자.

1이 적힌 정사각형에 칠할 수 있는 색은 4가지

6이 적힌 정사각형에 칠할 수 있는 색은 1이 적힌 정사각형에 칠한 색과 같은 색이므로 1가지

2가 적힌 정사각형에 칠할 수 있는 색은 1이 적힌 정사각형에 칠한 색을 제외한 3가지

3이 적힌 정사각형에 칠할 수 있는 색은 2, 6이 적힌 정사각형에 칠한 색을 제외한 2가지

5가 적힌 정사각형에 칠할 수 있는 색은 2, 6이 적힌 정사각형에 칠한 색을 제외한 2가지

4가 적힌 정사각형에 칠할 수 있는 색은 1, 5가 적힌 정사각형에 칠한 색을 제외한 2가지

따라서 구하는 경우의 수는

$4\times1\times3\times2\times2\times2=96$

557

$_n\mathrm{P}_r$의 계산

전략 $_n\mathrm{P}_r=\dfrac{n!}{(n-r)!}\ (0\le r\le n)$임을 이용한다.

풀이 $_{n-1}\mathrm{P}_r+r\times{}_{n-1}\mathrm{P}_{r-1}$

$$=\frac{(n-1)!}{\boxed{(n-r-1)!}}+r\times\frac{(n-1)!}{\boxed{(n-r)!}}$$

$$=\frac{(n-1)!\times(n-r)}{(n-r-1)!\times(n-r)}+r\times\frac{(n-1)!}{(n-r)!}$$

$$=\frac{(n-1)!}{(n-r)!}\times\{(n-r)+r\}$$

$$=\frac{(n-1)!}{(n-r)!}\times\boxed{n}$$

$$=\frac{\boxed{n!}}{(n-r)!}={}_n\mathrm{P}_r$$

∴ (가): $(n-r-1)!$, (나): $(n-r)!$, (다): n, (라): $n!$

558

$_n\mathrm{P}_r$의 계산

전략 주어진 방정식을 n에 대한 식으로 나타낸 후 인수분해 하여 조건에 맞는 n의 값을 구한다.

풀이 $_n\mathrm{P}_3+5\times{}_n\mathrm{P}_2=5({}_{n+1}\mathrm{P}_2+n-3)$에서

$n(n-1)(n-2)+5\times n(n-1)=5\{(n+1)n+n-3\}$

$n^3-3n^2+2n+5n^2-5n=5n^2+10n-15$

$n^3-3n^2-13n+15=0$

$f(n)=n^3-3n^2-13n+15$라 하면 $f(1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(n)$을 인수분해 하면

1	1	−3	−13	15
		1	−2	−15
	1	−2	−15	0

$f(n)=(n-1)(n^2-2n-15)$

즉, 주어진 방정식은

$(n-1)(n^2-2n-15)=0$

$(n-1)(n+3)(n-5)=0$

$\therefore n=-3$ 또는 $n=1$ 또는 $n=5$

그런데 $_n\mathrm{P}_3$에서 $n\ge3$이므로 $n=5$

559

이웃하는 순열의 수

전략 아버지와 어머니가 A열에 앉는 경우와 B열에 앉는 경우로 나누어 구한다.

풀이 (ⅰ) 아버지와 어머니가 A열에 이웃하여 앉는 방법의 수는

$2\times2!\times3!=24$

(ⅱ) 아버지와 어머니가 B열에 이웃하여 앉는 방법의 수는

$2!\times3!=12$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 방법의 수는

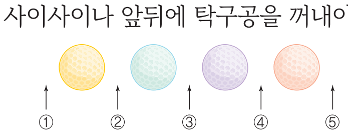
$24+12=36$

560

제한 조건이 있을 때의 순열의 수

전략 순열의 수를 이용하여 서로 다른 골프공 4개와 서로 다른 탁구공 2개를 일렬로 나열하는 방법의 수를 구하고, 곱의 법칙을 이용하여 6개의 공을 꺼내는 방법의 수를 구한다.

풀이 조건 (가)에서 탁구공은 연속하여 꺼낼 수 없으므로 골프공 4개를 꺼내는 사이사이나 앞뒤에 탁구공을 꺼내야 한다.



위의 그림에서 조건 (나)를 만족시키는 탁구공 2개의 위치는 (①, ③), (②, ③), (②, ④), (③, ④), (③, ⑤)의 5가지이다.

서로 다른 골프공 4개를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$4!=24$

위의 그림에서 정해진 2개의 위치에 서로 다른 탁구공 2개를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$2!=2$

조건 (가), (나)를 모두 만족시키면서 6개의 공을 상자에서 모두 꺼내는 방법의 수는

$5\times24\times2=240$

참고 탁구공 2개의 위치가 (①, ②), (①, ④), (①, ⑤), (②, ⑤), (④, ⑤)이면 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

561

제한 조건이 있을 때의 순열의 수

전략 3, 6, 9를 포함하는 수의 개수를 구한다.

풀이 (i) 한 자리의 자연수의 경우

한 자리의 자연수 중 3, 6, 9를 포함하는 수는 3개이므로 박수를 친 횟수는 3번

(ii) 두 자리의 자연수의 경우

십의 자리의 숫자는 3, 6, 9가 아니고 일의 자리의 숫자는 3 또는 6 또는 9인 수는 $6\times3=18$(개)

십의 자리의 숫자는 3 또는 6 또는 9이고 일의 자리의 숫자는 3, 6, 9가 아닌 수는 $3\times7=21$(개)

십의 자리의 숫자와 일의 자리의 숫자가 3 또는 6 또는 9인 수는 $3\times3=9$(개)

따라서 두 자리의 자연수 중 박수를 친 횟수는

$18+21+9\times2=57$(번)

(iii) 세 자리의 자연수의 경우

백의 자리의 숫자는 항상 1이다.

십의 자리의 숫자는 3, 6, 9가 아니고 일의 자리의 숫자는 3 또는 6 또는 9인 수는 $7\times3=21$(개)

십의 자리의 숫자는 3 또는 6 또는 9이고 일의 자리의 숫자는 3, 6, 9가 아닌 수는 $3\times7=21$(개)

십의 자리의 숫자와 일의 자리의 숫자가 3 또는 6 또는 9인 수는 $3\times3=9$(개)

따라서 세 자리의 자연수 중 박수를 친 횟수는

$21+21+9\times2=60$(번)

(i), (ii), (iii)에서 박수를 친 횟수는

$3+57+60=120$(번)

562

'적어도'의 조건이 있는 순열의 수

전략 전체 경우의 수에서 부모 사이에 자녀가 서지 않는 경우와 1명만 서는 경우의 수를 빼어 구한다.

풀이 부모 사이에 자녀 4명 중 적어도 2명이 서게 되는 경우의 수는 전체 경우의 수에서 부모 사이에 자녀가 서지 않는 경우의 수와 1명만 서는 경우의 수를 빼면 된다.

6명의 가족이 일렬로 서는 경우의 수는

$6!=720$

(i) 부모 사이에 자녀가 서지 않는 경우

부모가 이웃하여 서는 경우와 같으므로

$5!\times2!=240$

(ii) 부모 사이에 자녀 1명만 서는 경우

부자모를 한 묶음으로 생각하여 4명이 일렬로 서는 경우의 수는

$4!=24$

부모 사이에 서는 자녀를 선택하는 경우의 수는

4

부모가 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

즉, 이 경우의 수는

$24\times4\times2=192$

(i), (ii)에서 부모 사이에 자녀가 서지 않거나 1명만 서는 경우의 수는

$240+192=432$

따라서 구하는 경우의 수는

$720-432=288$

563

자연수의 개수

전략 꺼낸 4개의 공 중 같은 숫자가 없는 경우와 있는 경우를 각각 나누어 방법의 수를 구한다.

풀이 꺼낸 4개의 공 중에서

(i) 같은 숫자가 없는 경우

${}_5P_4=120$

(ii) 같은 숫자가 한 쌍 있는 경우

○△○△, △○△○, △○○△의 3가지

○ 자리에 서로 다른 두 숫자를, △ 자리에 서로 같은 숫자를 각각 넣고, 3 또는 5에서 같은 숫자를 택할 수 있으므로

$3\times{}_4P_2\times2=72$

(iii) 같은 숫자가 두 쌍 있는 경우

3535, 5353의 2가지

(i), (ii), (iii)에서 구하는 방법의 수는

$120+72+2=194$

564

자연수의 개수

전략 254보다 큰 짝수는 백의 자리의 숫자가 3 이상이고 일의 자리의 숫자가 짝수임을 이용한다.

풀이 254보다 큰 짝수는 3□0, 3□2, 3□4, 4□0, 4□2, 5□0, 5□2, 5□4 꼴이다.

(i) 3□0, 3□2, 3□4 꼴인 자연수의 개수는

$3\times{}_4P_1=12$

(ii) 4□0, 4□2 꼴인 자연수의 개수는

$2\times{}_4P_1=8$

(iii) 5□0, 5□2, 5□4 꼴인 자연수의 개수는

$3\times{}_4P_1=12$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 자연수의 개수는

$12+8+12=32$

565

자연수의 개수

전략 15의 배수는 3의 배수와 5의 배수를 동시에 만족시켜야 함을 이용하여 경우의 수를 구한다.

풀이 15의 배수이려면 3의 배수이면서 동시에 5의 배수이어야 한다. 즉, 5의 배수이려면 일의 자리 숫자가 0 또는 5이어야 하고, 3의 배수이려면 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수이어야 한다.

(i) 일의 자리 숫자가 0인 경우

천의 자리, 백의 자리, 십의 자리의 숫자의 합이 3의 배수이어야 하고

1, 2, 3 또는 1, 3, 5 또는 2, 3, 4 또는 3, 4, 5

의 4가지이므로 만들 수 있는 15의 배수의 개수는

$4\times3!=24$

(ii) 일의 자리 숫자가 5인 경우

천의 자리, 백의 자리, 십의 자리의 숫자의 합과 5의 합이 3의 배수이어야 하므로 천의 자리, 백의 자리, 십의 자리의 숫자의 합은 4, 7이어야 한다.

0, 1, 2, 3, 4 중 세 수의 합이 4, 7이 되는 경우는

0, 1, 3 또는 0, 3, 4 또는 1, 2, 4

㉠ 0, 1, 3 또는 0, 3, 4인 경우

천의 자리에 올 수 있는 숫자는 0을 제외한 2가지

백의 자리와 십의 자리에 올 수 있는 숫자는 0과 천의 자리에 온 숫자를 제외한 2가지이므로

$2\times2\times2!=8$

㉡ 1, 2, 4인 경우

$3!=6$

즉, 만들 수 있는 15의 배수의 개수는

$8+6=14$

(i), (ii)에서 구하는 수의 개수는

$24+14=38$

도전 1등급 최고난도

● 131쪽

566 576 **567** ①

566

제한 조건이 있을 때의 순열의 수

1단계 A와 B가 같은 2인용 의자에 앉는 경우의 수를 구한다.

(i) A와 B가 같이 앉을 수 있는 2인용 의자는 운전자가 앉아 있는 의자를 제외한 3개이고, 두 사람은 자리를 서로 바꾸어 앉을 수 있으므로 A와 B가 같은 2인용 의자에 앉는 경우의 수는

$3\times2!=6$

2단계 C와 D가 같은 2인용 의자에 앉지 않는 경우의 수를 구한다.

(ii) C와 D가 같은 2인용 의자에 앉지 않는 경우의 수는 A와 B가 앉은 의자와 운전자가 앉아 있는 좌석을 제외한 5개의 좌석에 C와 D가 앉는 전체 경우의 수에서 C와 D가 같은 2인용 의자에 앉는 경우의 수를 빼야 한다.

5개의 좌석에 C와 D가 앉는 전체 경우의 수는

${}_5P_2=20$

C와 D가 같이 앉을 수 있는 2인용 의자는 A와 B가 앉아 있는 의자와 운전자가 앉아 있는 의자를 제외한 나머지 2개이고, 두 사람은 자리를 서로 바꾸어 앉을 수 있으므로 C와 D가 같은 2인용 의자에 앉는 경우의 수는

$2\times2!=4$

따라서 C와 D가 같은 2인용 의자에 앉지 않는 경우의 수는

$20-4=16$

3단계 남은 3개의 좌석에 E, F, G가 앉는 경우의 수를 구한다.

(iii) 남은 3개의 좌석에 E, F, G가 앉는 경우의 수는

$3!=6$

4단계 곱의 법칙을 이용하여 7명의 관광객이 주어진 조건을 만족시키도록 놀이기구의 좌석에 앉는 경우의 수를 구한다.

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

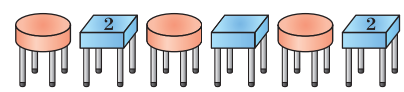
$6\times16\times6=576$

567

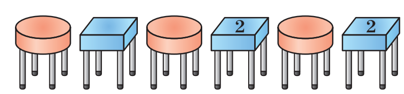
제한 조건이 있을 때의 순열의 수

1단계 2학년 학생이 오른쪽 끝 사각 의자에 앉을 때의 경우의 수를 구한다.

(i) 2학년 학생이 오른쪽 끝 사각 의자에 앉을 때



또는



위 그림과 같이 2학년 학생이 앉을 사각 의자를 선택하는 경우의 수는 2

2학년 학생이 두 사각 의자에 앉는 경우의 수는

$2!=2$

㉠ 2학년 학생이 앉지 않은 사각 의자에 1학년 학생이 앉는다면 1학년 학생이 앉은 사각 의자와 이웃한 두 개의 둥근 의자에는 3학년 학생만 앉아야 하므로 경우의 수는

$2!\times2!=4$

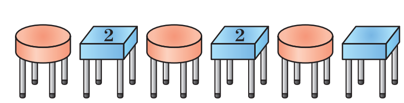
㉡ 2학년 학생이 앉지 않은 사각 의자에 3학년 학생이 앉는다면 3학년 학생이 앉은 사각 의자와 이웃한 두 개의 둥근 의자에는 1학년 학생만 앉아야 하므로 경우의 수는

$2!\times2!=4$

따라서 이 경우의 수는 $2\times2\times(4+4)=32$

2단계 2학년 학생이 오른쪽 끝의 사각 의자에 앉지 않을 때의 경우의 수를 구한다.

(ii) 2학년 학생이 오른쪽 끝의 사각 의자에 앉지 않을 때



오른쪽 끝이 아닌 나머지 2개의 사각 의자에 2학년 학생 2명이 앉는 경우의 수는

$2!=2$

㉠ 오른쪽 끝의 사각 의자에 1학년 학생이 앉는다면 1학년 학생이 앉은 사각 의자와 이웃한 둥근 의자에 3학년 학생이 앉아야 하므로 경우의 수는

$2\times2\times2!=8$

㉡ 오른쪽 끝의 사각 의자에 3학년 학생이 앉는다면 3학년 학생이 앉은 사각 의자와 이웃한 둥근 의자에 1학년 학생이 앉아야 하므로 경우의 수는

$2\times2\times2!=8$

따라서 이 경우의 수는

$2\times(8+8)=32$

(3단계) 조건을 만족시키도록 하는 경우의 수를 구한다.

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$32+32=64$

다른 풀이 사각 의자 3개 중에서 2개의 의자에 2학년 학생 2명이 앉는 경우의 수는

${}_3P_2=6$

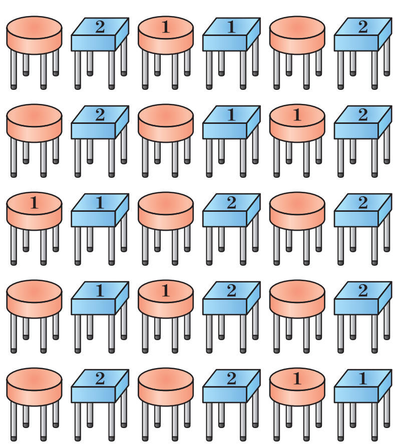
나머지 의자 4개에 1학년 학생 2명과 3학년 학생 2명이 앉는 경우의 수는

$4!=24$

조건 (가)를 만족시키는 경우의 수는

$6\times24=144$

이 중에서 1학년 학생 2명이 서로 이웃하여 앉는 경우는 그림과 같이 5가지이다.



각각의 경우 1, 2, 3학년 학생들이 앉는 경우의 수는

$2!\times2!\times2!=8$

즉, 1학년 학생 2명이 서로 이웃하여 앉는 경우의 수는

$5\times8=40$

마찬가지로 3학년 학생 2명이 서로 이웃하여 앉는 경우의 수도 40

따라서 조건을 모두 만족시키는 경우의 수는

$144-40-40=64$

11 조합

유형 분석 기출

133쪽 ~ 138쪽

568	7	**569**	①	**570**	2	**571**	4	**572**	②
573	8	**574**	③	**575**	55	**576**	②	**577**	80
578	16	**579**	④	**580**	⑤	**581**	③	**582**	91
583	380	**584**	④	**585**	80	**586**	②	**587**	46
588	②	**589**	126	**590**	350	**591**	⑤	**592**	6
593	②	**594**	③	**595**	32	**596**	70	**597**	①
598	③	**599**	20	**600**	76	**601**	126	**602**	52

568

${}_{n+2}C_2={}_{n-1}C_2+{}_nC_2$에서

$\frac{(n+2)(n+1)}{2!}=\frac{(n-1)(n-2)}{2!}+\frac{n(n-1)}{2!}$

$(n+2)(n+1)=(n-1)(n-2)+n(n-1)$

$n^2-7n=0$

$n(n-7)=0$

이때 n은 자연수이므로 $n=7$

569

(i) ${}_{12}C_{2r+1}={}_{12}C_{7-r}$에서

$2r+1=7-r$

$3r=6$

$\therefore r=2$

(ii) ${}_{12}C_{2r+1}={}_{12}C_{12-(2r+1)}$이므로

${}_{12}C_{11-2r}={}_{12}C_{7-r}$에서

$11-2r=7-r$

$\therefore r=4$

(i), (ii)에서 모든 자연수 r의 값의 곱은

$2\times4=8$

570

이차방정식 ${}_nC_1x^2-{}_nC_2x+{}_nC_3=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$(\text{두 근의 합})=\frac{{}_nC_2}{{}_nC_1}=2$

${}_nC_2=2\times{}_nC_1$

$\frac{n(n-1)}{2}=2n$

이때 $n\geq3$이므로 등식의 양변을 n으로 나누면

$\frac{n-1}{2}=2$

$\therefore n=5$

$\therefore (\text{두 근의 곱})=\frac{{}_nC_3}{{}_nC_1}=\frac{{}_5C_3}{{}_5C_1}$

$=\frac{{}_5C_2}{{}_5C_1}=\frac{10}{5}=2$

571

$\frac{{}_{n}\mathrm{C}_{r}}{6}=\frac{{}_{n}\mathrm{C}_{r+1}}{3}$에서

$\frac{n!}{6\times r!(n-r)!}=\frac{n!}{3\times(r+1)!(n-r-1)!}$

$r+1=2(n-r)$

$\therefore 2n-3r=1$ …… ㉠

$\frac{{}_{n}\mathrm{C}_{r+1}}{3}={}_{n}\mathrm{C}_{r+2}$에서

$\frac{n!}{3\times(r+1)!(n-r-1)!}=\frac{n!}{(r+2)!(n-r-2)!}$

$r+2=3(n-r-1)$

$\therefore 3n-4r=5$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$n=11,\ r=7$

$\therefore n-r=11-7=4$

572

서로 다른 n개를 1, 2, 3, …, n이라 하자.

(ⅰ) 1을 포함하여 r개를 택하는 조합의 수는 $\boxed{{}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}}$이다.

2를 포함하여 r개를 택하는 조합의 수는 $\boxed{{}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}}$이다.

3을 포함하여 r개를 택하는 조합의 수는 $\boxed{{}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}}$이다.

⋮

n을 포함하여 r개를 택하는 조합의 수는 $\boxed{{}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}}$이다.

이상을 모두 합하면 $n\times\boxed{{}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}}$이다. …… ㉠

(ⅱ) 그런데 위의 ㉠에 있는 조합의 수 중 1, 2, 3, …, r의 r개로 구성된 조합이 $\boxed{r}$번 반복된다.

(중략)

(ⅰ), (ⅱ)에서 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 조합의 수 ${}_{n}\mathrm{C}_{r}$은

${}_{n}\mathrm{C}_{r}=\boxed{\frac{n}{r}}\times{}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$

$\therefore$ (가): ${}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$, (나): r, (다): $\frac{n}{r}$

573

플로리스트 9명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는

${}_{9}\mathrm{C}_{2}=36$

호텔리어 n명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는

${}_{n}\mathrm{C}_{2}$

이때 2명의 직업이 같은 경우의 수가 64이므로

$36+{}_{n}\mathrm{C}_{2}=64$

$\therefore {}_{n}\mathrm{C}_{2}=28$

즉, $\frac{n(n-1)}{2}=28$에서

$n(n-1)=56=8\times7$

$\therefore n=8$

574

서로 다른 9개의 독서 토론 주제 중에서 2개의 주제를 택하는 경우의 수는

$a={}_{9}\mathrm{C}_{2}=36$

서로 다른 2개의 주제를 택하여 각각 A조, B조에 주제를 배정하는 경우의 수는

$b={}_{9}\mathrm{P}_{2}=72$

$\therefore a+b=36+72=108$

575

12를 12개의 1로 분리하여 나열한 후, 그 사이에 +를 2개 넣어 세 묶음으로 나누면 된다.

다음과 같이 12를 1로 분리하여 나열하고 11개의 □의 자리에서 2개를 택하여 +를 넣으면 된다.

1□1□1□1□1□1□1□1□1□1□1□1

따라서 구하는 경우의 수는

${}_{11}\mathrm{C}_{2}=55$

576

10명의 참석자가 모두 한 번씩 악수를 한 횟수는 ${}_{10}\mathrm{C}_{2}=45$

이때 여자끼리는 악수를 하지 않았으므로 악수가 이루어지지 않은 횟수는 ${}_{5}\mathrm{C}_{2}=10$

따라서 구하는 악수의 총횟수는

$45-10=35$

577

세 수의 곱이 짝수인 경우의 수에서 세 수의 곱이 짝수이면서 4의 배수가 아닌 경우의 수를 빼면 된다.

(ⅰ) 세 수의 곱이 짝수인 경우의 수

세 수 중에서 짝수가 있으면 세 수의 곱이 짝수가 되므로 전체 경우의 수에서 세 수가 모두 홀수인 경우의 수를 빼면 된다.

$\therefore {}_{10}\mathrm{C}_{3}-{}_{5}\mathrm{C}_{3}=110$

(ⅱ) 세 수의 곱이 짝수이면서 4의 배수가 아닌 경우의 수

2, 6, 10 중에서 한 개와 1, 3, 5, 7, 9 중에서 두 개를 뽑는 경우의 수이다.

$\therefore {}_{3}\mathrm{C}_{1}\times{}_{5}\mathrm{C}_{2}=30$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는

$110-30=80$

578

서로 다른 네 종류의 인형이 각각 2개씩 있으므로 5개의 인형을 선택하려면 서로 다른 세 종류 또는 서로 다른 네 종류의 인형을 선택해야 한다.

(ⅰ) 서로 다른 세 종류의 인형을 선택하는 경우

서로 다른 네 종류의 인형 중에서 세 종류의 인형을 선택하는 경우의 수는

${}_{4}\mathrm{C}_{3}=4$

선택한 세 종류의 인형 중에서 1개를 선택하는 인형 한 종류를 정하면 남은 두 종류의 인형은 모두 2개씩 선택하면 되므로

${}_{3}\mathrm{C}_{1}=3$

즉, 이 경우의 수는 $4\times3=12$

(ii) 서로 다른 네 종류의 인형을 선택하는 경우

서로 다른 네 종류의 인형 중에서 2개를 선택하는 인형 한 종류를 정하면 남은 세 종류의 인형은 모두 1개씩 선택하면 되므로

${}_4C_1=4$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$12+4=16$

579

A, B를 포함하여 5명을 뽑는 경우의 수는 A, B를 제외한 9명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수와 같으므로

${}_9C_3=84$

580

아홉 자리 자연수의 첫 번째 자리의 숫자는 0이 될 수 없으므로 1이다.

이때 0끼리는 이웃하지 않도록 하려면 다음과 같이 6개의 □의 자리에서 3개를 택하여 0을 나열하면 된다.

1□1□1□1□1□1□

따라서 구하는 자연수의 개수는

${}_6C_3=20$

581

(i) $a=5$인 경우

$c<b<5$이므로 1부터 4까지의 자연수 중에서 2개를 뽑아 큰 수를 b, 작은 수를 c라 하면 경우의 수는

${}_4C_2=6$

(ii) $a=6$인 경우

$c<b<6$이므로 1부터 5까지의 자연수 중에서 2개를 뽑아 큰 수를 b, 작은 수를 c라 하면 경우의 수는

${}_5C_2=10$

(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는

$6+10=16$

582

서로 다른 3개의 주사위를 동시에 던져서 나오는 모든 경우의 수는

$6\times6\times6=216$

이때 세 눈의 수의 곱이 5의 배수가 되지 않는 경우는 3개의 주사위에서 모두 5가 아닌 눈이 나와야 하므로 그 경우의 수는

${}_5C_1\times{}_5C_1\times{}_5C_1=5\times5\times5=125$

따라서 구하는 경우의 수는

$216-125=91$

583

다섯 자리 자연수를 만들 때, 7을 2개 이상 포함하고 7끼리는 이웃하지 않도록 하려면 7은 2개 또는 3개이어야 한다.

(i) 7이 2개인 경우

∨□∨□∨□∨ 꼴에서 □의 자리에 1, 2, 3, 5, 9의 5개의 숫자 중에서 3개를 뽑아 일렬로 나열하고, 네 개의 ∨의 자리에서 2개를 택하여 7을 나열하면 되므로

${}_5P_3\times{}_4C_2=60\times6=360$

(ii) 7이 3개인 경우

7□7□7 꼴에서 □의 자리에 1, 2, 3, 5, 9의 5개의 숫자 중에서 2개를 뽑아 일렬로 나열하면 되므로

${}_5P_2=20$

(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는

$360+20=380$

584

과자와 사탕을 합하여 3개를 뽑을 때, 과자는 최대 2개까지만 뽑을 수 있으므로 과자는 0개 또는 1개 또는 2개 뽑을 수 있다.

(i) 과자 0개, 사탕 3개를 뽑는 경우

${}_8C_0\times{}_4C_3=1\times4=4$

(ii) 과자 1개, 사탕 2개를 뽑는 경우

${}_8C_1\times{}_4C_2=8\times6=48$

(iii) 과자 2개, 사탕 1개를 뽑는 경우

${}_8C_2\times{}_4C_1=28\times4=112$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$4+48+112=164$

585

10명의 학생 중에서 3명을 선택할 때 같은 학교의 학생이 선택되지 않으려면 선택된 3명의 학생의 학교는 모두 달라야 한다.

서로 다른 5개의 학교 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

${}_5C_3=10$

각각의 학교에서 학생 2명 중에서 한 명을 택하는 경우의 수는

${}_2C_1=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$10\times2\times2\times2=80$

586

(i) 연속하는 자연수가 1, 2 또는 8, 9인 경우

연속하는 자연수가 1, 2일 때, 3이 적힌 공을 제외한 나머지 6개의 공 중에서 한 개를 뽑아야 하므로

${}_6C_1=6$

연속하는 자연수가 8, 9일 때도 마찬가지이므로

${}_6C_1=6$

즉, 이 경우의 수는 $6+6=12$

(ii) 연속하는 자연수가 2, 3 또는 3, 4 또는 4, 5 또는 5, 6 또는 6, 7 또는 7, 8인 경우

연속하는 자연수가 2, 3일 때, 1과 4가 적힌 공을 제외한 나머지 5개의 공 중에서 한 개를 뽑아야 하므로

${}_5C_1=5$

연속하는 자연수가 3, 4 또는 4, 5 또는 5, 6 또는 6, 7 또는 7, 8 인 경우도 마찬가지이므로

${}_5C_1=5$

즉, 이 경우의 수는 $5\times6=30$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$12+30=42$

587

(i) A를 선출하는 경우

B를 선출하는 경우의 수는 C, G, H, I의 4명 중에서 3명을 선출하는 경우의 수와 같으므로

${}_4C_3=4$

B는 선출하지 않고 C는 선출하는 경우의 수는 D, E, F, G, H, I의 6명 중에서 3명을 선출하는 경우의 수와 같으므로

${}_6C_3=20$

즉, 이 경우의 수는

$4+20=24$

(ii) A는 선출하지 않고 B는 선출하는 경우

C, G, H, I의 4명 중에서 4명을 선출하는 경우의 수와 같으므로

${}_4C_4=1$

(iii) A와 B를 모두 선출하지 않는 경우

C, D, E, F, G, H, I의 7명 중에서 5명을 선출하는 경우의 수와 같으므로

${}_7C_5=21$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$24+1+21=46$

588

전체 13명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

${}_{13}C_3=286$

남학생만 3명을 뽑는 경우의 수는

${}_9C_3=84$

여학생만 3명을 뽑는 경우의 수는

${}_4C_3=4$

따라서 구하는 경우의 수는

$286-(84+4)=198$

589

(i) 김밥 2개, 우동 1개, 라면 1개를 선택하는 경우

${}_3C_2\times{}_3C_1\times{}_4C_1=3\times3\times4=36$

(ii) 김밥 1개, 우동 2개, 라면 1개를 선택하는 경우

${}_3C_1\times{}_3C_2\times{}_4C_1=3\times3\times4=36$

(iii) 김밥 1개, 우동 1개, 라면 2개를 선택하는 경우

${}_3C_1\times{}_3C_1\times{}_4C_2=3\times3\times6=54$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$36+36+54=126$

590

(i) 홀수 2개, 짝수 3개를 뽑는 경우

12 미만의 홀수 6개 중에서 2개를 뽑고, 짝수 5개 중에서 3개를 뽑는 경우의 수는

${}_6C_2\times{}_5C_3=15\times10=150$

(ii) 홀수 3개, 짝수 2개를 뽑는 경우

12 미만의 홀수 6개 중에서 3개를 뽑고, 짝수 5개 중에서 2개를 뽑는 경우의 수는

${}_6C_3\times{}_5C_2=20\times10=200$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $150+200=350$

591

5권의 교과서 중에서 2권을 뽑는 경우의 수는

${}_5C_2=10$

3권의 문제집 중에서 2권을 뽑는 경우의 수는

${}_3C_2=3$

4권의 책을 일렬로 꽂는 경우의 수는

$4!=24$

따라서 구하는 경우의 수는 $10\times3\times24=720$

1등급 비법

서로 다른 n개에서 $r(0<r\le n)$개를 택하는 조합의 수는 ${}_nC_r$이고, 그 각각에 대하여 r개를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $r!$이다. 이는 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 순열의 수 ${}_nP_r$과 같으므로

${}_nC_r\times r!={}_nP_r$

592

동아리의 전체 회원 수를 $n(n\ge4)$이라 하면 특정한 2명을 포함하여 4명을 뽑는 경우의 수는 특정한 2명을 제외한 나머지 $(n-2)$명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수와 같으므로

${}_{n-2}C_2=\dfrac{(n-2)(n-3)}{2!}$

뽑은 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$4!=24$

이때 특정한 2명을 포함하여 4명을 뽑아 일렬로 세우는 경우의 수가 144이므로

$\dfrac{(n-2)(n-3)}{2}\times24=144$

$(n-2)(n-3)=12=4\times3$

$n-2=4 \qquad \therefore n=6$

따라서 이 동아리의 전체 회원 수는 6이다.

593

□□□□□□에 2부터 7까지 6개의 자연수를 주어진 조건에 맞게 나열한다고 할 때, 3, 5가 나열되는 두 자리를 선택하는 경우의 수는 ${}_6C_2=15$

이때 선택한 두 자리의 왼쪽에 3, 남은 자리에 5를 나열하면 된다.
남은 네 자리에 2, 4, 6이 나열되는 세 자리를 선택하는 경우의 수는
${}_4C_3=4$
이때 선택한 세 자리의 왼쪽부터 작은 수를 차례로 나열하고 남은 한 자리에 7을 나열하면 된다.
따라서 구하는 경우의 수는
$15\times4\times1=60$

594

가로 방향의 4개의 평행선에서 2개, 세로 방향의 6개의 평행선에서 2개를 택하면 한 개의 평행사변형을 만들 수 있다.
따라서 구하는 평행사변형의 개수는
${}_4C_2\times{}_6C_2=6\times15=90$
참고 평행사변형은 두 쌍의 대변이 각각 평행한 사각형이다.

595

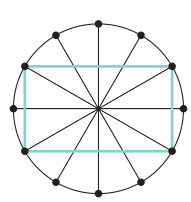
7개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는
${}_7C_3=35$
이때 한 직선 위에 있는 3개의 점으로는 삼각형을 만들 수 없으므로 구하는 삼각형의 개수는
$35-3=32$

596

대각선의 교점은 두 대각선에 의해 결정된다.
이때 한 대각선은 2개의 꼭짓점에 의해 결정되므로 두 대각선은 4개의 꼭짓점에 의해 결정된다.
따라서 팔각형의 서로 다른 대각선의 교점의 최대 개수는 8개의 꼭짓점 중에서 서로 다른 4개를 택하는 경우의 수와 같으므로
${}_8C_4=70$

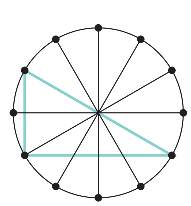
597

(i) 직사각형의 개수
원에 내접하는 직사각형의 두 대각선의 교점은 원의 중심이고, 오른쪽 그림과 같이 원 위에 같은 간격으로 놓인 12개의 점 중에서 두 점을 연결한 선분 중 원의 중심을 지나는 선분은 6개이다.



12개의 점 중에서 4개의 점을 꼭짓점으로 하는 직사각형의 개수는 원의 중심을 지나는 6개의 선분 중 2개를 택하는 경우의 수와 같으므로
$m={}_6C_2=15$

(ii) 직각삼각형의 개수
원에 내접하는 직각삼각형의 빗변의 중점은 원의 중심이고, 오른쪽 그림과 같이 원 위에 같은 간격으로 놓인 12개의 점 중에서 두 점을 연결한 선분 중 원의 중심을 지나는 선분은 6개이다.



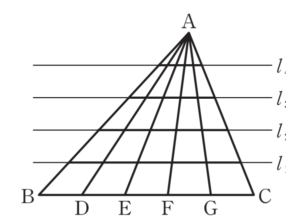
12개의 점 중에서 3개의 점을 꼭짓점으로 하는 직각삼각형의 개수는 원의 중심을 지나는 6개의 선분 중 1개를 택하고 남은 10개의 점 중 1개를 택하는 경우의 수와 같으므로
$n={}_6C_1\times{}_{10}C_1=6\times10=60$
(i), (ii)에서
$m+n=15+60=75$

1등급 비법

원의 지름에 대한 원주각의 크기는 90°이므로
① 6개의 지름 중에서 2개를 택하면 그 지름을 두 대각선으로 하는 직사각형을 만들 수 있다.
② 6개의 지름 중에서 1개를 택하면 그 지름을 빗변으로 하는 직각삼각형을 만들 수 있다.

598

오른쪽 그림과 같이 6개의 직선 AB, AD, AE, AF, AG, AC 중에서 서로 다른 2개의 직선을 택하고, 5개의 직선 BC, l_1, l_2, l_3, l_4 중에서 1개의 직선을 택하면 삼각형이 1개 만들어진다.



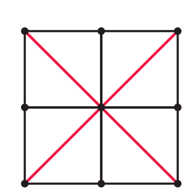
따라서 만들 수 있는 삼각형의 개수는
${}_6C_2\times{}_5C_1=15\times5=75$

599

10개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는
${}_{10}C_2=45$
한 직선 위의 4개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는
${}_4C_2=6$
이때 한 직선 위에 4개의 점이 있는 직선은 5개이므로 구하는 직선의 개수는
$45-6\times5+5=20$

600

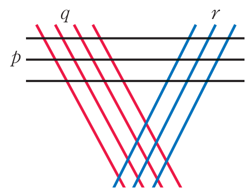
9개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는
${}_9C_3=84$
이때 한 직선 위에 있는 3개의 점으로는 삼각형을 만들 수 없으므로 다음과 같은 경우는 제외해야 한다.
(i) 가로 또는 세로 방향의 한 직선 위에 있는 3개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는 ${}_3C_3=1$이고, 이 직선은 6개이므로
$1\times6=6$
(ii) 대각선 방향의 한 직선 위에 있는 3개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는 ${}_3C_3=1$이고, 이 직선은 2개이므로
$1\times2=2$



따라서 구하는 삼각형의 개수는
$84-(6+2)=76$

601

다음 그림과 같이 3개의 평행선, 4개의 평행선, 3개의 평행선을 각각 p, q, r이라 하자.



사다리꼴은 한 쌍의 대변이 평행한 사각형이므로 평행사변형이 아닌 사다리꼴이 결정되는 경우는 다음과 같다.

(ⅰ) p에서 2개, q, r에서 각각 1개씩 택하는 경우

$${}_3C_2 \times {}_4C_1 \times {}_3C_1 = 3 \times 4 \times 3$$
$$= 36$$

(ⅱ) q에서 2개, p, r에서 각각 1개씩 택하는 경우

$${}_4C_2 \times {}_3C_1 \times {}_3C_1 = 6 \times 3 \times 3$$
$$= 54$$

(ⅲ) r에서 2개, p, q에서 각각 1개씩 택하는 경우

$${}_3C_2 \times {}_3C_1 \times {}_4C_1 = 3 \times 3 \times 4$$
$$= 36$$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 경우의 수는

$36+54+36=126$

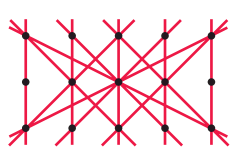
602

15개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_{15}C_2=105$

이때 한 직선 위에 있는 점들로 만들 수 있는 직선은 1개뿐이므로 다음과 같은 경우를 제외해야 한다.

(ⅰ) 한 직선 위에 3개의 점이 있는 경우



3개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는 ${}_3C_2=3$이고, 이 직선은 위의 그림과 같이 13개이므로

$3 \times 13 = 39$

(ⅱ) 한 직선 위에 5개의 점이 있는 경우

5개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는 ${}_5C_2=10$이고, 이 직선은 위의 그림과 같이 3개이므로

$10 \times 3 = 30$

따라서 구하는 직선의 개수는

$105-(39+30)+13+3=52$

참고 (ⅰ)에서 직선 13개를 빼고 (ⅱ)에서 직선 3개를 빼었으므로 한 번씩 더해야 한다.

내신 적중 서술형

● 139쪽

603 (1) 210 (2) 90 (3) 16 **604** 4 **605** 30
606 31

603

(1) 전체 10명의 선수 중에서 4명을 뽑는 경우의 수는

${}_{10}C_4=210$ …… ㉮

(2) 축구 선수 6명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는

${}_6C_2=15$

야구 선수 4명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는

${}_4C_2=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$15 \times 6 = 90$ …… ㉯

(3) 축구 선수 6명 중에서 4명을 뽑는 경우의 수는

${}_6C_4=15$

야구 선수 4명 중에서 4명을 뽑는 경우의 수는

${}_4C_4=1$

따라서 구하는 경우의 수는

$15+1=16$ …… ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ 4명의 선수를 뽑는 경우의 수 구하기	30 %
㉯ 축구 선수 2명과 야구 선수 2명을 뽑는 경우의 수 구하기	35 %
㉰ 4명의 선수를 모두 같은 종목에서 뽑는 경우의 수 구하기	35 %

604

철수를 포함하여 4명을 뽑는 경우의 수는 철수를 제외한 9명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수와 같으므로

$a={}_9C_3$ …… ㉮

철수를 포함하지 않고 4명을 뽑는 경우의 수는 철수를 제외한 9명 중에서 4명을 뽑는 경우의 수와 같으므로

$b={}_9C_4$ …… ㉯

$\therefore a+b={}_9C_3+{}_9C_4$
$={}_{10}C_4$

$\therefore r=4$ …… ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ a의 값 구하기	30 %
㉯ b의 값 구하기	30 %
㉰ r의 값 구하기	40 %

1등급 비법

① 서로 다른 n개에서 특정한 k개를 포함하여 r개를 뽑는 경우의 수는 $(n-k)$개에서 $(r-k)$개를 뽑는 경우의 수와 같다.
⇨ ${}_{n-k}C_{r-k}$

② 서로 다른 n개에서 특정한 k개를 제외하고 r개를 뽑는 경우의 수는 $(n-k)$개에서 r개를 뽑는 경우의 수와 같다.
⇨ ${}_{n-k}C_r$

605

(i) A와 B가 공통으로 등록하는 학원이 없는 경우

A가 4개의 학원 중에서 2개를 택하고, 남은 2개의 학원에 B가 등록하면 되므로 경우의 수는

${}_4C_2 \times {}_2C_2 = 6 \times 1 = 6$ ······ ㉮

(ii) A와 B가 공통으로 등록하는 학원이 1개인 경우

A가 4개의 학원 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_4C_2 = 6$

이때 B는 A가 택한 2개의 학원 중에서 하나를 택하고, A가 택하지 않은 나머지 2개의 학원 중에서 하나를 택하면 되므로 그 경우의 수는

${}_2C_1 \times {}_2C_1 = 2 \times 2 = 4$

즉, A와 B가 공통으로 등록하는 학원이 1개인 경우의 수는

$6 \times 4 = 24$ ······ ㉯

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$6 + 24 = 30$ ······ ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ A와 B가 공통으로 등록하는 학원이 없는 경우의 수 구하기	40 %
㉯ A와 B가 공통으로 등록하는 학원이 1개인 경우의 수 구하기	40 %
㉰ A와 B가 공통으로 등록하는 학원이 1개 이하가 되도록 하는 경우의 수 구하기	20 %

606

7개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

${}_7C_3 = 35$ ······ ㉮

한 직선 위에 있는 4개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

${}_4C_3 = 4$ ······ ㉯

이때 한 직선 위에 있는 3개의 점으로는 삼각형을 만들 수 없으므로 구하는 삼각형의 개수는

$35 - 4 = 31$ ······ ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ 7개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수 구하기	40 %
㉯ 한 직선 위에 있는 4개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수 구하기	40 %
㉰ 삼각형의 개수 구하기	20 %

1등급 비법

한 직선 위에 있는 서로 다른 n개의 점으로는 삼각형을 만들 수 없으므로 이런 경우는 반드시 제외해야 한다.

1등급 실력 완성

● 140쪽 ~ 141쪽

607 ⑤	**608** ③	**609** 210	**610** 130	**611** 205
612 ②	**613** 840	**614** 11	**615** 5	**616** ②

607

조합의 수

전략 각 사람이 가진 동전으로 250원을 모으는 경우를 나누어 경우의 수를 각각 구한다.

풀이 (i) 1명이 250원을 모으는 경우

250원을 낼 수 있는 사람은 A뿐이므로 1명이 250원을 내는 경우의 수는 1

(ii) 2명이 250원을 모으는 경우

㉠ $250 = 200 + 50$(원)에서

200원을 낼 수 있는 사람은 A, B의 2명 중 1명, 50원을 낼 수 있는 사람은 200원을 낸 사람을 제외한 나머지 3명 중 1명이므로 경우의 수는

${}_2C_1 \times {}_3C_1 = 2 \times 3 = 6$

㉡ $250 = 150 + 100$(원)에서

150원을 낼 수 있는 사람은 A, B의 2명 중 1명, 100원을 낼 수 있는 사람은 150원을 낸 사람을 제외한 나머지 3명 중 1명이므로 경우의 수는

${}_2C_1 \times {}_3C_1 = 2 \times 3 = 6$

(iii) 3명이 250원을 모으는 경우

㉠ $250 = 150 + 50 + 50$(원)에서

150원을 낼 수 있는 사람은 A, B의 2명 중 1명, 50원을 낼 수 있는 사람은 150원을 낸 사람을 제외한 나머지 3명 중 2명이므로 경우의 수는

${}_2C_1 \times {}_3C_2 = 2 \times 3 = 6$

㉡ $250 = 100 + 100 + 50$(원)에서

100원을 낼 수 있는 사람은 A, B, C, D의 4명 중 1명, 50원을 낼 수 있는 사람은 100원을 낸 2명을 제외한 나머지 2명 중 1명이므로 경우의 수는

${}_4C_2 \times {}_2C_1 = 6 \times 2 = 12$

(iv) 4명이 250원을 모으는 경우

$250 = 100 + 50 + 50 + 50$(원)에서

100원을 낼 수 있는 사람은 A, B, C, D의 4명 중 1명, 50원을 낼 수 있는 사람은 100원을 낸 사람을 제외한 나머지 3명 중 3명이므로 경우의 수는

${}_4C_1 \times {}_3C_3 = 4 \times 1 = 4$

(i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는

$1 + 6 + 6 + 6 + 12 + 4 = 35$

608

제한 조건이 있을 때의 조합의 수

전략 각 오리 보트에 탑승하는 어른의 수와 어린이의 수로 경우를 나눈다.

풀이 2대의 오리 보트를 A, B라 하자.

각 오리 보트에 어른이 1명 이상 탑승해야 하므로 A 보트에 어른 1명, B 보트에 어른 2명이 탑승하는 경우의 수는

${}_3C_1 \times {}_2C_2 = 3 \times 1 = 3$

(i) A 보트에 어린이 2명, B 보트에 어린이 4명이 탑승하는 경우의 수는

$_6C_2\times{}_4C_4=15\times1=15$

(ii) A 보트에 어린이 3명, B 보트에 어린이 3명이 탑승하는 경우의 수는

$_6C_3\times{}_3C_3=20\times1=20$

(iii) A 보트에 어린이 4명, B 보트에 어린이 2명이 탑승하는 경우의 수는

$_6C_4\times{}_2C_2=15\times1=15$

(iv) A 보트에 어린이 5명, B 보트에 어린이 1명이 탑승하는 경우의 수는

$_6C_5\times{}_1C_1=6\times1=6$

(i)~(iv)에서 A 보트에 어른 1명, B 보트에 어른 2명이 나누어 타는 경우의 수는

$3\times(15+20+15+6)=168$

같은 방법으로 A 보트에 어른 2명, B 보트에 어른 1명이 나누어 타는 경우의 수도 168이다.

따라서 구하는 경우의 수는

$168+168=336$

609

제한 조건이 있을 때의 조합의 수

전략 각 차의 운전자를 제외한 나머지 5명을 3개의 조로 나누는 경우를 생각한다.

풀이 8명 중에서 각 차의 운전자 3명을 제외한 5명이 승용차에 나누어 타는 경우는

(3명, 2명, 0명), (3명, 1명, 1명), (2명, 2명, 1명)

(i) 3명, 2명, 0명으로 나누어 타는 경우의 수는

$_5C_3\times{}_2C_2=10\times1=10$

(ii) 3명, 1명, 1명으로 나누어 타는 경우의 수는

$_5C_3\times{}_2C_1\times{}_1C_1\times\frac{1}{2!}=10\times2\times1\times\frac{1}{2}=10$

(iii) 2명, 2명, 1명으로 나누어 타는 경우의 수는

$_5C_2\times{}_3C_2\times{}_1C_1\times\frac{1}{2!}=10\times3\times1\times\frac{1}{2}=15$

(i), (ii), (iii)에서 3개의 조로 나누는 경우의 수는

$10+10+15=35$

3개의 조가 3대의 승용차에 나누어 타는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$35\times6=210$

1등급 비법

서로 다른 n개를 p개, q개, r개$(p+q+r=n)$로 분할하는 경우의 수는

① p, q, r이 모두 다른 수일 때 ⇨ $_nC_p\times{}_{n-p}C_q\times{}_rC_r$

② p, q, r 중 어느 두 수가 같을 때 ⇨ $_nC_p\times{}_{n-p}C_q\times{}_rC_r\times\frac{1}{2!}$

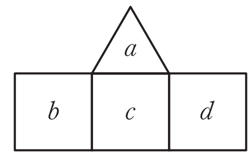
③ p, q, r이 모두 같은 수일 때 ⇨ $_nC_p\times{}_{n-p}C_q\times{}_rC_r\times\frac{1}{3!}$

610

제한 조건이 있을 때의 조합의 수

전략 정삼각형에 적힌 숫자의 경우를 나누어 경우의 수를 각각 구한다.

풀이 다음 그림과 같이 정삼각형에 적힌 숫자를 a, 정사각형에 적힌 숫자를 왼쪽부터 차례로 b, c, d라 하자.



조건 (가), (나)에서 a보다 작은 숫자가 적어도 2개 존재해야 하므로

$a\geq3$

(i) $a=3$일 때,

c는 1, 2 중 하나이므로 $_2C_1=2$

각각의 경우에 대하여 b, d는 1, 2 중 c가 아닌 숫자이면 되므로

$1\times1=1$

따라서 이 경우의 수는

$2\times1=2$

(ii) $a=4$일 때,

c는 1, 2, 3 중 하나이므로 $_3C_1=3$

각각의 경우에 대하여 b, d는 1, 2, 3 중 c가 아닌 숫자이면 되므로

$2\times2=4$

따라서 이 경우의 수는

$3\times4=12$

(iii) $a=5$일 때,

c는 1, 2, 3, 4 중 하나이므로 $_4C_1=4$

각각의 경우에 대하여 b, d는 1, 2, 3, 4 중 c가 아닌 숫자이면 되므로

$3\times3=9$

따라서 이 경우의 수는

$4\times9=36$

(iv) $a=6$일 때,

c는 1, 2, 3, 4, 5 중 하나이므로 $_5C_1=5$

각각의 경우에 대하여 b, d는 1, 2, 3, 4, 5 중 c가 아닌 숫자이면 되므로

$4\times4=16$

따라서 이 경우의 수는

$5\times16=80$

(i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는

$2+12+36+80=130$

다른 풀이 조건 (가)에서 $a>b$, $a>c$, $a>d$

조건 (나)에서 $b\neq c$, $c\neq d$

(i) $b\neq d$일 때,

a, b, c, d가 서로 다르다.

6 이하의 자연수 중에서 서로 다른 4개의 숫자를 택하는 경우의 수는 $_6C_4=15$

이 각각에 대하여 택한 4개의 숫자 중에서 가장 큰 숫자를 a라 하고, 나머지 3개의 숫자를 b, c, d로 정하면 되므로 이 경우의 수는 $1\times3!=6$

따라서 이 경우의 수는 $15\times6=90$

(ii) $b=d$일 때,

$a>b=d$, $a>c$이므로 a, b, c, d 중 서로 다른 숫자의 개수는 3이다.

6 이하의 자연수 중에서 서로 다른 3개의 숫자를 택하는 경우의 수는 ${}_6C_3=20$

이 각각에 대하여 택한 3개의 숫자 중에서 가장 큰 숫자를 a라 하고, 나머지 2개의 숫자를 $b(=d)$, c로 정하면 되므로 이 경우의 수는

$1\times2!=2$

따라서 이 경우의 수는

$20\times2=40$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$90+40=130$

611

'적어도'의 조건이 있는 조합의 수

전략 1반을 제외한 10개의 반에 카드 4개를 배정하는 경우의 수를 구한 후, A 그룹에 카드 4개를 배정하는 경우의 수를 뺀다.

풀이 1반을 제외한 10개의 반에 카드 4개를 배정하는 경우의 수에서 A 그룹에만 카드 4개를 배정하는 경우의 수를 뺀다.

1반을 제외한 10개의 반 중에서 카드를 배정할 4개의 반을 뽑는 경우의 수는

${}_{10}C_4=210$

1반을 제외한 A 그룹 5개의 반 중에서 카드를 배정할 4개의 반을 뽑는 경우의 수는

${}_5C_4=5$

따라서 구하는 경우의 수는

$210-5=205$

612

뽑아서 나열하는 경우의 수

전략 사과 주스를 나누어 주고 빵을 나누어 주는 경우의 수를 각각 구한 후, 곱의 법칙을 이용한다.

풀이 사과 주스를 받을 사람을 택하는 경우의 수는 서로 다른 5개 중에서 3개를 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_5C_3=10$

서로 다른 빵 3개 중에서 2개를 사과 주스를 받지 않은 사람에게 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 3개 중에서 2개를 택하여 나열하는 경우의 수와 같으므로

${}_3P_2=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$10\times6=60$

613

뽑아서 나열하는 경우의 수

전략 어린이가 2명, 3명 포함되는 경우로 나누어 경우의 수를 각각 구한다.

풀이 (i) 뽑은 4명 중에서 어린이가 2명 포함되는 경우

7명의 어른 중에서 2명, 3명의 어린이 중에서 2명을 뽑은 후, 2명의 어린이가 모두 이웃하도록 앉혀야 하므로 경우의 수는

${}_7C_2\times{}_3C_2\times3!\times2!=21\times3\times6\times2=756$

(ii) 뽑은 4명 중에서 어린이가 3명 포함되는 경우

7명의 어른 중에서 1명, 3명의 어린이를 모두 뽑은 후, 3명의 어린이가 모두 이웃하도록 앉혀야 하므로 경우의 수는

${}_7C_1\times{}_3C_3\times2!\times3!=7\times1\times2\times6=84$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$756+84=840$

614

뽑아서 나열하는 경우의 수

전략 주어진 조건을 만족시키는 경우의 수를 구한 후 나열하는 경우의 수를 곱하여 구한다.

풀이 (i) 첫째 날 4팀, 둘째 날 5팀이 공연하는 경우

9팀 중 첫째 날 공연하는 4팀, 둘째 날 공연하는 5팀을 택하는 경우의 수는

${}_9C_4\times{}_5C_5={}_9C_4$

각각의 경우에 대하여 각 팀의 공연 순서를 정하는 경우의 수는

$4!\times5!$

따라서 이 경우의 수는

${}_9C_4\times4!\times5!$

(ii) 첫째 날 5팀, 둘째 날 4팀이 공연하는 경우

9팀 중 첫째 날 공연하는 5팀, 둘째 날 공연하는 4팀을 택하는 경우의 수는

${}_9C_5\times{}_4C_4={}_9C_4$

각각의 경우에 대하여 각 팀의 공연 순서를 정하는 경우의 수는

$5!\times4!$

따라서 이 경우의 수는

${}_9C_4\times5!\times4!$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

${}_9C_4\times4!\times5!+{}_9C_4\times5!\times4!=2\times{}_9C_4\times4!\times5!$

따라서 $a=2$, $n=9$이므로

$a+n=2+9=11$

615

도형의 개수

전략 주어진 조건으로 방정식을 세운 후 n의 값을 구한다.

풀이 n개의 평행선 중에서 2개를 택하고 $(n-1)$개의 평행선 중에서 2개를 택하면 평행사변형 하나가 결정되므로 만들어지는 평행사변형의 개수는

${}_nC_2\times{}_{n-1}C_2$

이때 만들어지는 평행사변형의 개수가 60이므로

${}_nC_2\times{}_{n-1}C_2=60$

$\frac{n(n-1)}{2}\times\frac{(n-1)(n-2)}{2}=60$

$n(n-1)^2(n-2)=240=5\times4^2\times3$

$\therefore n=5$

616

도형의 개수

전략 만들 수 있는 삼각형의 개수에서 정n각형과 변을 공유하는 삼각형의 개수를 뺀다.

풀이 정n각형의 n개의 꼭짓점 중에서 3개를 택하여 삼각형을 만드는 경우의 수는

${}_nC_3$

이때 정n각형과 변을 공유하는 경우는 한 변을 공유하는 경우와 두 변을 공유하는 경우가 있다.

(i) 정n각형과 두 변을 공유하는 경우

정n각형의 한 꼭짓점을 택하여 그 양변을 공유하면 되므로 경우의 수는 n

(ii) 정n각형과 한 변을 공유하는 경우

정n각형에서 한 변을 택하는 경우의 수는 n

그 각각에 대하여 택한 한 변의 양 끝 점과 이웃하는 꼭짓점을 제외한 $(n-4)$개의 꼭짓점 중에서 하나를 택하는 경우의 수는 $(n-4)$이므로 구하는 경우의 수는

$n(n-4)$

(i), (ii)에서 정n각형과 변을 공유하는 삼각형의 개수는

$n+n(n-4)=n^2-3n$

이때 정n각형과 변을 공유하지 않는 삼각형의 개수가 $7n$이므로

${}_nC_3-(n^2-3n)=7n$에서

$\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)-n^2+3n=7n$

$n\geq6$이므로 양변을 n으로 나누어 정리하면

$\frac{1}{6}(n-1)(n-2)-n-4=0$

$n^2-9n-22=0$, $(n+2)(n-11)=0$

$\therefore n=11$ ($\because n\geq6$)

도전 1등급 최고난도

142쪽

617 36 **618** 39 **619** ②

617

제한 조건이 있을 때의 조합의 수

1단계 f의 값을 구하고 c의 값이 될 수 있는 수를 구한다.

여섯 자리의 자연수 $abcdef$가 5의 배수이면서 f가 0이 아니므로 $f=5$

따라서 $c<d<e<5$이므로 c의 값이 될 수 있는 수는 1, 2이다.

2단계 c의 값에 따라 자연수의 개수를 구한다.

(i) $c=1$일 때

d, e의 값이 될 수 있는 수는 2, 3, 4 중에서 2개이고 $d<e$에서 d, e의 값은 작은 수부터 차례대로 정하면 되므로

${}_3C_2=3$

a, b의 값이 될 수 있는 수는 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9 중에서 d, e의 값을 제외한 5개의 수 중에서 2개이고 $a>b$에서 a, b의 값은 큰 수부터 차례대로 정하면 되므로

${}_5C_2=10$

따라서 자연수의 개수는

$3\times10=30$

(ii) $c=2$일 때

d의 값이 될 수 있는 수는 3이고, e의 값이 될 수 있는 수는 4의 1개이다.

a, b의 값이 될 수 있는 수는 6, 7, 8, 9 중에서 2개이고 $a>b$에서 a, b의 값은 큰 수부터 차례대로 정하면 되므로

${}_4C_2=6$

따라서 자연수의 개수는

$1\times6=6$

3단계 조건을 만족시키는 자연수의 개수를 구한다.

(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는

$30+6=36$

618

제한 조건이 있을 때의 조합의 수

1단계 문제의 조건을 파악한다.

조건 (가)에서 a, b, c, d에 5가 반드시 포함되어야 하고, 짝수가 적어도 1개 이상 포함되어야 한다.

또, 조건 (나)에서 $b\times c\times d$는 a의 배수이어야 한다.

2단계 a의 값에 따라 순서쌍의 개수를 구한다.

(i) $a=1$일 때,

b, c, d 중에서 5가 반드시 포함되어야 하고, 2, 4, 6, 8 중에서 적어도 1개 이상이 포함되어야 한다.

2, 3, 4, 6, 7, 8, 9 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_7C_2=21$

3, 7, 9 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_3C_2=3$

따라서 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는

$21-3=18$

(ii) $a=2$일 때,

b, c, d 중에서 5가 반드시 포함되어야 하고, $b\times c\times d$가 2의 배수이어야 하므로 4, 6, 8 중에서 적어도 1개 이상이 포함되어야 한다.

3, 4, 6, 7, 8, 9 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_6C_2=15$

3, 7, 9 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_3C_2=3$

따라서 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는

$15-3=12$

(iii) $a=3$일 때,

b, c, d 중에서 5가 반드시 포함되어야 하고, 4, 6, 8 중에서 적어도 1개 이상이 포함되어야 한다. 또, $b\times c\times d$가 3의 배수이어야 하므로 6, 9 중 적어도 1개 이상이 포함되어야 한다.

㉠ 6이 포함되는 경우

4, 7, 8, 9 중에서 1개를 택하는 경우의 수는

${}_4C_1=4$

㉡ 6이 포함되지 않는 경우

a가 포함되어야 하므로 4, 8 중에서 1개를 택하는 경우의 수는

${}_2C_1=2$

따라서 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는

$4+2=6$

(iv) $a=4$일 때,

b, c, d 중에서 5가 반드시 포함되어야 하고, $b\times c\times d$가 4의 배수이어야 하므로 8이 반드시 포함되어야 한다.

6, 7, 9 중에서 1개를 택하는 경우의 수는

${}_3C_1=3$

따라서 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는 3이다.

(v) $a\geq 5$일 때,

b, c, d 중에서 5의 배수가 없으므로 조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b, c, d)는 없다.

(3단계) 조건을 만족시키는 순서쌍의 개수를 구한다.

(i)~(v)에서 구하는 순서쌍의 개수는

$18+12+6+3=39$

619

뽑아서 나열하는 경우의 수

(1단계) 의자의 위치와 좌석 번호를 나타내고 주어진 규칙을 파악한다.

11	12	13	14	15	16	17
		23	24	25		

규칙 (가)에서 A는 좌석 번호가 24 또는 25인 의자에 앉을 수 있고, B는 좌석 번호가 11 또는 12 또는 13 또는 14인 의자에 앉을 수 있다.

규칙 (나), (다)에서 어느 두 학생도 양옆 또는 앞뒤로 이웃하여 앉지 않는다.

5명의 학생이 앉을 수 있는 5개의 의자를 선택한 후 규칙 (가)에 의해 A, B가 앉고 남은 3개의 의자에 나머지 3명의 학생이 앉는 것으로 경우의 수를 구할 수 있다.

(2단계) A가 좌석 번호가 24인 의자에 앉을 때 경우의 수를 구한다.

(i) A가 좌석 번호가 24인 의자에 앉을 때

11	12	13	14	15	16	17
		23	A	25		

A가 좌석 번호가 24인 의자에 앉으면 나머지 4명의 학생은 규칙 (나), (다)에 의하여 좌석 번호가 11, 13, 15, 17인 의자에 각각 한 명씩 앉아야 한다.

이때 B는 규칙 (가)에 의하여 좌석 번호가 11, 13인 2개의 의자 중 1개의 의자에 앉아야 하므로 B가 의자를 선택하여 앉는 경우의 수는

${}_2C_1=2$

A, B를 제외한 3명의 학생이 나머지 3개의 의자에 앉는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 이 경우의 수는

$2\times 6=12$

(3단계) A가 좌석 번호가 25인 의자에 앉을 때 경우의 수를 구한다.

(ii) A가 좌석 번호가 25인 의자에 앉을 때

11	12	13	14	15	16	17
		23	24	A		

A가 좌석 번호가 25인 의자에 앉으면 나머지 4명의 학생은 규칙 (나), (다)에 의하여 좌석 번호가 11 또는 12인 의자 중 하나, 좌석 번호가 16 또는 17인 의자 중 하나, 좌석 번호가 14인 의자, 좌석 번호가 23인 의자에 각각 한 명씩 앉아야 한다.

좌석 번호가 11 또는 12인 의자 중 하나를 선택하고(㉠) 좌석 번호가 16 또는 17인 의자 중 하나를 선택하는 경우의 수는

${}_2C_1\times{}_2C_1=2\times 2=4$

이때 B는 규칙 (가)에 의하여 ㉠에서 선택된 의자와 좌석 번호가 14인 의자 중 1개의 의자에 앉아야 하므로 B가 의자를 선택하여 앉는 경우의 수는

${}_2C_1=2$

A, B를 제외한 3명의 학생이 나머지 3개의 의자에 앉는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 이 경우의 수는

$4\times 2\times 6=48$

(4단계) 규칙을 만족시키는 경우의 수를 구한다.

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$12+48=60$

Ⅳ 행렬

12 행렬

유형 분석 기출

● 146쪽 ~ 154쪽

620 ②	**621** ⑤	**622** 16	**623** ③	
624 $\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$	**625** ②	**626** ①	**627** ③	**628** ①
629 ④	**630** ①	**631** ③	**632** $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -7 & -4 \end{pmatrix}$	
633 ②	**634** $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$		**635** ②	**636** ③
637 ④	**638** ②	**639** $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -3 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix}$		
640 $\frac{6}{5}$	**641** ④	**642** ①	**643** ⑤	**644** 3
645 ②	**646** ②	**647** ⑤	**648** ⑤	**649** ④
650 ②	**651** -18	**652** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 20 & 1 \end{pmatrix}$		**653** ③
654 502	**655** ①	**656** 16	**657** ④	**658** ④
659 ②	**660** 1	**661** $\frac{1}{2}$	**662** $\begin{pmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$	
663 ①	**664** ④	**665** ②	**666** ①	**667** ⑤
668 30	**669** ③			

620

주어진 행렬의 $(2, 1)$ 성분은 2, $(3, 2)$ 성분은 0이므로
구하는 성분의 곱은
$2\times0=0$

621

주어진 행렬의 1행의 성분의 합은
$2+3+0=5$ …… ㉠
주어진 행렬의 2행의 성분의 합은
$(x-1)+4+x=2x+3$ …… ㉡
주어진 행렬의 3행의 성분의 합은
$y+0+(y+1)=2y+1$ …… ㉢
㉠, ㉡에서 $2x+3=5$이므로 $x=1$
㉠, ㉢에서 $2y+1=5$이므로 $y=2$
$\therefore x+y=1+2=3$

622

$a_{ij}=\begin{cases} i+2j & (i\ge j) \\ 3 & (i<j) \end{cases}$에
$i=1, 2, j=1, 2$를 차례로 대입하면
$a_{11}=1+2\times1=3$, $a_{12}=3$,
$a_{21}=2+2\times1=4$, $a_{22}=2+2\times2=6$
$\therefore A=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$
따라서 행렬 A의 모든 성분의 합은
$3+3+4+6=16$

623

$a_{ij}=\begin{cases} i-j & (i\ge j) \\ ij & (i<j) \end{cases}$에
$i=1, 2, j=1, 2, 3$을 차례로 대입하면
$a_{11}=0$, $a_{12}=2$, $a_{13}=3$,
$a_{21}=1$, $a_{22}=0$, $a_{23}=6$
$\therefore A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$
① 2×3 행렬이다. (거짓)
② $(1, 1)$ 성분은 0이다. (거짓)
③ 2행의 모든 성분의 합은 $1+0+6=7$ (참)
④ 1열의 모든 성분의 합은 $0+1=1$ (거짓)
⑤ 성분의 최솟값은 0이다. (거짓)
따라서 옳은 것은 ③이다.

624

$a_{ij}=\begin{cases} i^2 & (i=j) \\ 2i+j & (i\ne j) \end{cases}$에
$i=1, 2, j=1, 2$를 차례로 대입하면
$a_{11}=1^2=1$, $a_{12}=2\times1+2=4$,
$a_{21}=2\times2+1=5$, $a_{22}=2^2=4$
$\therefore A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$
이때 $b_{ij}=a_{ji}-1$이므로
$B=\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

625

$a_{ij}=\begin{cases} k^i & (i=j) \\ ik+j & (i\ne j) \end{cases}$에
$i=1, 2, 3, j=1, 2, 3$을 차례로 대입하면
$a_{11}=k$, $a_{12}=k+2$, $a_{13}=k+3$,
$a_{21}=2k+1$, $a_{22}=k^2$, $a_{23}=2k+3$,
$a_{31}=3k+1$, $a_{32}=3k+2$, $a_{33}=k^3$
이때 행렬 A의 $(3, 1)$ 성분이 4이므로
$3k+1=4$ $\therefore k=1$
따라서 행렬 A의 모든 성분의 합은
$k^3+k^2+13k+12=1+1+13+12=27$

626

섬 A_1과 A_2를 잇는 다리는 2개이므로
$a_{12}=2$, $a_{21}=2$

섬 A_1과 A_3을 잇는 다리는 3개이므로

$a_{13}=3$, $a_{31}=3$

섬 A_2와 A_3을 잇는 다리는 2개이므로

$a_{23}=2$, $a_{32}=2$

$\therefore A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

행렬 A의 2행의 성분의 합 k는

$k=2+0+2=4$

행렬 A의 3열의 성분의 합 l은

$l=3+2+0=5$

$\therefore k+l=4+5=9$

627

$A=\begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$에서

$a_{12}=4$이므로 공원 P_1에서 공원 P_2까지 가는 서로 다른 산책로의 수는 4

$a_{23}=3$이므로 공원 P_2에서 공원 P_3까지 가는 서로 다른 산책로의 수는 3

따라서 구하는 경로의 개수는 곱의 법칙에 의하여

$4\times3=12$

628

$A=B$이므로

$a=xy$ …… ㉠

$x+2y=4-2x$에서 $3x+2y=4$ …… ㉡

$3x-2y=4x$에서 $x+2y=0$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $x=2$, $y=-1$

$x=2$, $y=-1$을 ㉠에 대입하면

$a=-2$

$\therefore a+x+y=-2+2+(-1)=-1$

629

$a_{ij}=\begin{cases} k+i & (i=j) \\ ik-j & (i\neq j) \end{cases}$에

$i=1, 2$, $j=1, 2$를 차례로 대입하면

$a_{11}=k+1$, $a_{12}=k-2$,

$a_{21}=2k-1$, $a_{22}=k+2$

$\therefore A=\begin{pmatrix} k+1 & k-2 \\ 2k-1 & k+2 \end{pmatrix}$

$A=B$이므로 행렬 A의 $(2, 1)$ 성분과 행렬 B의 $(2, 1)$ 성분은 서로 같다.

즉, $2k-1=5$이므로 $k=3$

따라서 행렬 A의 모든 성분의 합은

$$\begin{aligned} k+1+k-2+2k-1+k+2&=5k \\ &=5\times3=15 \end{aligned}$$

630

두 행렬 A, B가 서로 같으므로 $x^3+y^3=2$, $xy=1$

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$에서 $2=(x+y)^3-3(x+y)$

$\therefore (x+y)^3-3(x+y)-2=0$

$x+y=k$라 하면 $k^3-3k-2=0$

$(k-2)(k^2+2k+1)=0$, $(k-2)(k+1)^2=0$

$\therefore k=2$ 또는 $k=-1$

(i) $x+y=2$일 때,

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=2^2-2\times1=2$

$\therefore \dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}=\dfrac{x^2+y^2}{xy}=2$

(ii) $x+y=-1$일 때,

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=(-1)^2-2\times1=-1$

이때 x, y가 실수이어야 하므로 모순이다.

(i), (ii)에서 $\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}=2$

631

$kA=\begin{pmatrix} 2k & k \\ -2k & 4k \\ 5k & -k \end{pmatrix}$이므로

행렬 kA의 모든 성분의 합은

$2k+k+(-2k)+4k+5k+(-k)=9k$

따라서 $9k=3$이므로

$k=\dfrac{1}{3}$

632

$$\begin{aligned} 2(A+B)-3B&=2A+2B-3B \\ &=2A-B \\ &=2\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -7 & -4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

633

$3(2A-X)=2(X-B)$에서

$6A-3X=2X-2B$

$5X=6A+2B$

$\therefore X=\dfrac{6}{5}A+\dfrac{2}{5}B$

두 행렬 A, B의 모든 성분의 합은 각각 2, 3이므로 행렬 X의 모든 성분의 합은

$\dfrac{6}{5}\times2+\dfrac{2}{5}\times3=\dfrac{18}{5}$

634

$a_{ij}=\begin{cases} i+j & (i\geq j) \\ 2^i+j & (i<j) \end{cases}$에

$i=1, 2$, $j=1, 2$를 차례로 대입하면

$a_{11}=1+1=2$, $a_{12}=2^1+2=4$,

$a_{21}=2+1=3$, $a_{22}=2+2=4$

$\therefore A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$2B+A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$에서

$2B+\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$2B=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$\quad=\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$

$\therefore B=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$

635

$mA+nB=C$에서

$m\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}+n\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & y \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 2m \\ 3m & 4m \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3n & -n \\ -2n & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & y \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 3n & 2m-n \\ 3m-2n & 4m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & y \end{pmatrix}$

$2m-n=1$, $3m-2n=0$을 연립하여 풀면

$m=2$, $n=3$

즉, $x=3n=9$, $y=4m=8$

$\therefore xy+mn=72+6=78$

636

$A+B=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$에서

$\begin{pmatrix} a & 3 \\ c & ab \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -b & ca \\ 2b & bc \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a-b & 3+ca \\ c+2b & ab+bc \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$

$a-b=3$, $c+2b=7$에서

$a+b+c=10$

$3+ca=5$, $ab+bc=8$에서

$ab+bc+ca=10$

$\therefore a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

$\qquad\qquad\quad=10^2-2\times10=80$

637

$X-Y=A$ ······ ㉠

$2A+3B=2Y$ ······ ㉡

㉠+㉡을 하면

$(X-Y)+2Y=A+(2A+3B)$

$\therefore X+Y=3(A+B)$

이때 행렬 $A+B$의 모든 성분의 합이 5이므로

행렬 $X+Y$의 모든 성분의 합은

$3\times5=15$

638

$3A+B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ ······ ㉠

$2A-B=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ ······ ㉡

㉠+㉡을 하면

$5A=\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$ $\quad\therefore A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\therefore A+B=(3A+B)-2A$

$\qquad=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\qquad=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 $A+B$의 모든 성분의 합은

$0+1+(-2)+1=0$

639

$\frac{1}{2}A+\frac{1}{3}B=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$에서

$3A+2B=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$ ······ ㉠

$5A-2B=\begin{pmatrix} 16 & -8 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$ ······ ㉡

㉠+㉡을 하면

$8A=\begin{pmatrix} 16 & -8 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad\therefore A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$을 ㉠에 대입하면

$3\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+2B=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}+2B=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$

$2B=\begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ $\quad\therefore B=\begin{pmatrix} -3 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix}$

$\therefore A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -3 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix}$

640

$X+2Y=A$ ······ ㉠

$2X-Y=3B$ ······ ㉡

㉠+㉡$\times2$를 하면 $5X=A+6B$

$\therefore X=\frac{1}{5}A+\frac{6}{5}B$ ······ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$2\left(\frac{1}{5}A+\frac{6}{5}B\right)-Y=3B$

$\therefore Y=\frac{2}{5}A-\frac{3}{5}B$ ······ ㉣

㉢+㉣을 하면

$X+Y=\frac{3}{5}A+\frac{3}{5}B$

$=\frac{3}{5}(A+B)$

$=\frac{3}{5}\left\{\begin{pmatrix}2 & -1\\3 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 2\end{pmatrix}\right\}$

$=\frac{3}{5}\begin{pmatrix}2 & 0\\2 & 2\end{pmatrix}=\frac{6}{5}\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}$

$\therefore k=\frac{6}{5}$

641

$2a_{ij}+3b_{ij}=ij$에서

$2A+3B=\begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 4\end{pmatrix}$ ...... ㉠

$a_{ij}-b_{ij}=2$에서

$A-B=\begin{pmatrix}2 & 2\\2 & 2\end{pmatrix}$ ...... ㉡

㉠+㉡×3을 하면

$5A=\begin{pmatrix}7 & 8\\8 & 10\end{pmatrix}$ $\therefore A=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}7 & 8\\8 & 10\end{pmatrix}$

$\therefore a_{21}=\frac{8}{5}, b_{12}=a_{12}-2=\frac{8}{5}-2=-\frac{2}{5}$

$\therefore a_{21}-b_{12}=\frac{8}{5}-\left(-\frac{2}{5}\right)=2$

642

$2A+3B=\begin{pmatrix}8 & 1\\14 & -6\end{pmatrix}$ ...... ㉠

$-3A+2B=\begin{pmatrix}1 & -8\\5 & 9\end{pmatrix}$ ...... ㉡

㉠×2−㉡×3을 하면

$13A=\begin{pmatrix}13 & 26\\13 & -39\end{pmatrix}$ $\therefore A=\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & -3\end{pmatrix}$

$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & -3\end{pmatrix}$을 ㉡에 대입하면

$-3\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & -3\end{pmatrix}+2B=\begin{pmatrix}1 & -8\\5 & 9\end{pmatrix}$

$2B=\begin{pmatrix}4 & -2\\8 & 0\end{pmatrix}$ $\therefore B=\begin{pmatrix}2 & -1\\4 & 0\end{pmatrix}$

이때 두 행렬 A, B의 모든 성분의 합은 각각 1, 5이므로

행렬 $x^2A+(x-1)B$의 모든 성분의 합은

$x^2+5(x-1)$

$x^2+5x-5=1$에서 $x^2+5x-6=0$

$(x+6)(x-1)=0$

$\therefore x=-6$ 또는 $x=1$

따라서 조건을 만족시키는 모든 실수 x의 값의 합은

$-6+1=-5$

643

$AB=\begin{pmatrix}1 & -1\\-1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\0 & -1\end{pmatrix}$

$\therefore AB+A=\begin{pmatrix}2 & 1\\0 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -1\\-1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0\\-1 & -2\end{pmatrix}$

644

세 행렬 A, B, C는 각각 3×2, 1×2, 2×3 행렬이다.

따라서 곱이 정의되는 것은 AC, BC, CA의 3개이다.

645

$A+2B=\begin{pmatrix}5 & 2\\-4 & 5\end{pmatrix}$ ...... ㉠

$3A-B=\begin{pmatrix}1 & 6\\-5 & 8\end{pmatrix}$ ...... ㉡

㉠+㉡×2를 하면

$7A=\begin{pmatrix}7 & 14\\-14 & 21\end{pmatrix}$ $\therefore A=\begin{pmatrix}1 & 2\\-2 & 3\end{pmatrix}$

$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\-2 & 3\end{pmatrix}$을 ㉡에 대입하면

$3\begin{pmatrix}1 & 2\\-2 & 3\end{pmatrix}-B=\begin{pmatrix}1 & 6\\-5 & 8\end{pmatrix}$

$\therefore B=\begin{pmatrix}2 & 0\\-1 & 1\end{pmatrix}$

$\therefore AB=\begin{pmatrix}1 & 2\\-2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\-1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2\\-7 & 3\end{pmatrix}$

따라서 행렬 AB의 모든 성분의 합은

$0+2+(-7)+3=-2$

646

$\begin{pmatrix}2 & 3\\a & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 2\\-1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\b\end{pmatrix}$에서

$\begin{pmatrix}2a+3b\\a^2+b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6+2b\\-2+2b\end{pmatrix}$

$2a+3b=6+2b$에서 $2a+b=6$ ...... ㉠

$a^2+b=-2+2b$에서 $a^2-b=-2$ ...... ㉡

㉠+㉡을 하면 $a^2+2a-4=0$

$\therefore a=-1+\sqrt{5}$ ($\because a>0$)

$a=-1+\sqrt{5}$를 ㉠에 대입하면

$-2+2\sqrt{5}+b=6$ $\therefore b=8-2\sqrt{5}$

$\therefore a+b=(-1+\sqrt{5})+(8-2\sqrt{5})=7-\sqrt{5}$

647

$\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\a-2\end{pmatrix}$에서 $\begin{pmatrix}y+8\\3y+4x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\a-2\end{pmatrix}$

$y+8=a$ ...... ㉠

$3y+4x=a-2$ ...... ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$3y+4x=(y+8)-2$, $4x+2y=6$

$\therefore y=-2x+3$

$\therefore x^2+y^2=x^2+(-2x+3)^2$

$=5x^2-12x+9$

$=5\left(x-\frac{6}{5}\right)^2+\frac{9}{5}$

따라서 구하는 최솟값은 $\frac{9}{5}$이다.

648

이차방정식 $x^2-5x-3=0$의 두 근이 α, β이므로

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=5$, $\alpha\beta=-3$

$A=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$에서

$AB=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha^2+\beta^2 & \alpha\beta \\ 2\beta & 2\alpha \end{pmatrix}$

따라서 행렬 AB의 모든 성분의 합은

$\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta+2(\alpha+\beta)=(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta+2(\alpha+\beta)$

$=5^2+3+2\times5=38$

649

$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 A^3의 $(2, 1)$ 성분은 1이다.

650

행렬 $A=\begin{pmatrix} a+2 & 0 \\ 2a & -1 \end{pmatrix}$에 대하여

$A^2=\begin{pmatrix} a+2 & 0 \\ 2a & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a+2 & 0 \\ 2a & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+4a+4 & 0 \\ 2a^2+2a & 1 \end{pmatrix}$

이때 행렬 A^2의 $(1, 1)$ 성분과 $(2, 1)$ 성분의 합이 13이므로

$(a^2+4a+4)+(2a^2+2a)=13$

$3a^2+6a-9=0$, $a^2+2a-3=0$

$(a+3)(a-1)=0$

$\therefore a=-3$ 또는 $a=1$

따라서 구하는 모든 a의 값의 합은 $-3+1=-2$

651

$2A+B=\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ …… ㉠

$2A-B=\begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ …… ㉡

㉠$-$㉡을 하면

$2B=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad\therefore B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$을 ㉠에 대입하면

$2A+\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$2A=\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad\therefore A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\therefore 4A^2-B^2=4\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$=4\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 1 & -18 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

$\therefore k=-18$

652

$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$

$A^4=A^3A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$

$\vdots$

자연수 n에 대하여 $A^n=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2n & 1 \end{pmatrix}$

$\therefore A^{10}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 20 & 1 \end{pmatrix}$

653

$A^2=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$

$A^4=A^3A=\begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

$\vdots$

자연수 n에 대하여

$A^n=\begin{pmatrix} 0 & 2^n \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$

즉, 행렬 A^n의 제2열의 모든 성분의 합은

$2^n+2^n=2\times2^n=2^{n+1}$

$2^6=64$, $2^7=128$이므로 $2^{n+1}\geq100$에서

$n+1\geq7$ $\quad\therefore n\geq6$

따라서 구하는 자연수 n의 최솟값은 6이다.

654

$A^2=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^4=A^3A=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\vdots$

자연수 n에 대하여

$A^n=\begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

이때

$A^{2n-1}-A^{2n}=\begin{pmatrix} 1 & -2n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & -2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

이므로

$A-A^2+A^3-A^4+\cdots+A^{1003}-A^{1004}$

$=\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+\cdots+\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{502\text{개}}$

$=\begin{pmatrix} 0 & 502 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\therefore a+b+c+d=502$

655

$QP=(150\ \ 200)\begin{pmatrix}18 & 20\\30 & 40\end{pmatrix}$

$=(150\times18+200\times30\ \ \ 150\times20+200\times40)$

이 제과점에서 하루 동안 사용한 버터의 양은

$150\times18+200\times30$이므로 행렬 QP의 $(1,\ 1)$ 성분과 같다.

참고 행렬 P는 2×2 행렬이고 Q는 1×2 행렬이므로 두 행렬 PQ의 곱은 정의되지 않는다.

656

주어진 조건에서

$x=$(수조 A에 남은 물의 양)$+$(수조 B에서 퍼온 물의 양)

$=\frac{2}{3}a+\frac{2}{3}\left(b+\frac{1}{3}a\right)$

$=\frac{8}{9}a+\frac{2}{3}b$

두 수조에 담긴 물의 양의 합은 같으므로

$x+y=a+b$

$\therefore\ y=a+b-\left(\frac{8}{9}a+\frac{2}{3}b\right)$

$=\frac{1}{9}a+\frac{1}{3}b$

$\therefore\ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{8}{9} & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{9} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$

따라서 $p=\frac{8}{9},\ q=\frac{2}{3},\ r=\frac{1}{9},\ s=\frac{1}{3}$이므로

$\frac{pq}{rs}=16$

657

ㄱ. $a=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21},\ b=a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}$이므로 $a,\ b$는 각각 두 제품 ㈎, ㈏의 지난해 1년 동안에 판매된 제품의 제조원가의 총액이다. 따라서 $a+b$는 지난해 1년 동안에 판매된 제품의 제조원가의 총액이다. (거짓)

ㄴ. $c=a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21},\ d=a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}$이므로 $c,\ d$는 각각 두 제품 ㈎, ㈏의 지난해 1년 동안에 판매된 제품의 판매 총액이다. 따라서 $c+d$는 지난해 1년 동안에 판매된 제품의 판매 총액이다. (참)

ㄷ. (판매 이익금)$=$(판매 가격)$-$(제조원가)이므로 $d-b$는 지난해 하반기에 판매된 제품의 판매 이익금 총액이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

658

$ABC+AB^2=AB(C+B)$

$=AB(B+C)$

$=\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\2 & 1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}4 & 3\\2 & 1\end{pmatrix}$

659

$A^2+4B^2-2(AB+BA)=(A-2B)^2$

이때

$A-2B=\begin{pmatrix}1 & 2\\-1 & 3\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}0 & 1\\3 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\-7 & 5\end{pmatrix}$

이므로

(주어진 식)$=\begin{pmatrix}1 & 0\\-7 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\-7 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\-42 & 25\end{pmatrix}$

따라서 구하는 모든 성분의 합은

$1+0+(-42)+25=-16$

660

$(A+B)(A-B)=(A+B)A-(A+B)B$

$=A^2+BA-AB-B^2$

즉, $A^2+BA-AB-B^2=A^2-B^2$이므로

$BA-AB=O$

$\therefore\ AB=BA$

이때

$AB=\begin{pmatrix}1 & 2\\4 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & 1\\2 & y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+4 & 1+2y\\4x-2 & 4-y\end{pmatrix}$,

$BA=\begin{pmatrix}x & 1\\2 & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\4 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+4 & 2x-1\\2+4y & 4-y\end{pmatrix}$

이므로

$1+2y=2x-1,\ 4x-2=2+4y$

$\therefore\ x-y=1$

661

$A\begin{pmatrix}2a\\3b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix},\ A\begin{pmatrix}4a\\3b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$에서

$A\begin{pmatrix}2a+4a\\3b+3b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+2\\4+(-1)\end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix}6a\\6b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix},\ 6A\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$

$\therefore\ A\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{6}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

따라서 구하는 $(2,\ 1)$ 성분은 $\frac{1}{2}$이다.

662

$A=\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$라 하자.

$A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\x\end{pmatrix}$에서 $\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\x\end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x-4\\-2\end{pmatrix}$에서 $\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x-4\\-2\end{pmatrix}$

$a=2,\ b=2x-4,\ c=x,\ d=-2$

이때 행렬 A의 모든 성분의 합이 8이므로

$3x-4=8\qquad\therefore\ x=4$

따라서 $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$이므로

$A^2=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$

663

두 실수 x, y에 대하여

$x\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

이라 하자.

$-2x=2$에서 $x=-1$ …… ㉠

$3x+2y=1$에서 $y=2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 이용하면

$A\begin{pmatrix} 13 \\ -5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$에서

$(-1)A\begin{pmatrix} 13 \\ -5 \end{pmatrix}=(-1)\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $2A\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix} -13 \\ 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} 12 \\ -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

$A\left\{\begin{pmatrix} -13 \\ 5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 12 \\ -4 \end{pmatrix}\right\}=\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A^2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

이때 $A^2=\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$이므로

$\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\therefore A\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

664

$AE=EA$이므로

$(A-E)(A^2+A+E)=A^3-E^3=A^3-E$ …… ㉠

$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$에서

$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 27 \end{pmatrix}$

㉠에서

(주어진 식)$=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 27 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 26 \end{pmatrix}$

따라서 구하는 2열의 성분의 합은 26이다.

665

$AE=EA$이므로

$(A-E)(A+E)=2E$에서

$A^2-E^2=2E$

$A^2=3E$

$A^4=9E^2=9E$

$A^4\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}=9E\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 & 27 \\ 18 & 45 \end{pmatrix}$

따라서 구하는 모든 성분의 합은

$9+27+18+45=99$

666

$A+2B=O$에서

$A=-2B$, $B=-\frac{1}{2}A$

$AB=E$에서

$A\left(-\frac{1}{2}A\right)=E$, $(-2B)B=E$

$A^2=-2E$, $B^2=-\frac{1}{2}E$

$A^4=4E$, $B^4=\frac{1}{4}E$

$\therefore A^4+B^4=\left(4+\frac{1}{4}\right)E=\frac{17}{4}E$

$a+b+c+d$의 값은 행렬 $\frac{17}{4}E$의 모든 성분의 합과 같으므로

$a+b+c+d=\frac{17}{4}+0+0+\frac{17}{4}=\frac{17}{2}$

667

$A=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$에서

$A^2=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=-E$

$A^{100}=(A^2)^{50}=(-E)^{50}=E$

따라서 구하는 모든 성분의 합은 2이다.

668

$A=\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$에서

$A^2=\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$

$A^3=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=E$

자연수 k에 대하여 $n=3k$라 하면 $A^n=E$이므로

$10\le n\le 99$, $10\le 3k\le 99$

$\therefore \frac{10}{3}\le k\le 33$

따라서 구하는 자연수 n의 개수는

$(33-4)+1=30$

669

$(A^2+A+E)(A^2-A+E)=O$에서

$(A-E)(A^2+A+E)(A+E)(A^2-A+E)=O$

$(A^3-E)(A^3+E)=O$

$A^6-E=O$

$\therefore A^6=E$

$\therefore 2A^{97}+3A^{96}=2(A^6)^{16}A+3(A^6)^{16}$

$=2A+3E$

이때 두 행렬 A, E의 모든 성분의 합은 각각 4, 2이므로 구하는 행렬의 모든 성분의 합은

$2\times4+3\times2=14$

내신 적중 서술형

● 155쪽

670 -2 **671** $\begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -12 & 6 \end{pmatrix}$

672 (1) $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix}$ (3) 1 **673** 129

670

$a_{ij}=\begin{cases} i-j & (i<j) \\ ij & (i=j) \\ k-j & (i>j) \end{cases}$에

$i=1, 2, 3, j=1, 2, 3$을 차례로 대입하면

$a_{11}=1,\ a_{12}=-1,\ a_{13}=-2,$

$a_{21}=k-1,\ a_{22}=4,\ a_{23}=-1,$

$a_{31}=k-1,\ a_{32}=k-2,\ a_{33}=9$ …… ㉮

$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ k-1 & 4 & -1 \\ k-1 & k-2 & 9 \end{pmatrix}$이므로

행렬 A의 모든 성분의 합은 $3k+6$이다. …… ㉯

이때 행렬 A의 모든 성분의 합이 0이므로

$3k+6=0 \qquad \therefore k=-2$ …… ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ 주어진 식에서 a_{ij}의 값 구하기	60 %
㉯ 행렬 A의 모든 성분의 합 구하기	20 %
㉰ 상수 k의 값 구하기	20 %

671

이차방정식 $x^2-3x+4=0$의 두 근이 α, β이므로

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3,\ \alpha\beta=4$

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=3^2-2\times4=1$이므로

$A=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ …… ㉮

$A+\frac{1}{2}X=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$에서

$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}+\frac{1}{2}X=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix},\ \frac{1}{2}X=\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$

$\therefore X=\begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -12 & 6 \end{pmatrix}$ …… ㉯

채점 기준	배점 비율
㉮ 행렬 A 구하기	40 %
㉯ 행렬 X 구하기	60 %

672

(1) $A\begin{pmatrix} 2a+c \\ 2b+d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$에서 $A\begin{pmatrix} 4a+2c \\ 4b+2d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ …… ㉠

$A\begin{pmatrix} a+2c \\ b+2d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 \\ -6 \end{pmatrix}$ …… ㉡

㉠−㉡을 하면

$A\begin{pmatrix} 3a \\ 3b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -9 \\ 12 \end{pmatrix}$

$\therefore A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ …… ㉢ …… ㉮

(2) ㉡−㉢을 하면

$A\begin{pmatrix} 2c \\ 2d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 \\ -10 \end{pmatrix}$

$\therefore A\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix}$ …… ㉣ …… ㉯

(3) ㉢−㉣×2를 하면

$A\begin{pmatrix} a-2c \\ b-2d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -13 \\ 14 \end{pmatrix}$

따라서 구하는 모든 성분의 합은

$-13+14=1$ …… ㉰

	채점 기준	배점 비율
(1)	㉮ 행렬 $A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ 구하기	30 %
(2)	㉯ 행렬 $A\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ 구하기	30 %
(3)	㉰ 행렬 $A\begin{pmatrix} a-2c \\ b-2d \end{pmatrix}$의 모든 성분의 합 구하기	40 %

673

$E^2=E$이므로 $4A^2-4E^2=2A-5E$에서

$4A^2-2A+E^2=O$ …… ㉮

$(2A+E)(4A^2-2A+E^2)=O$

$8A^3+E^3=O,\ A^3=-\frac{1}{8}E$

$A^6=A^3A^3=\left(-\frac{1}{8}E\right)\left(-\frac{1}{8}E\right)$

$=\frac{1}{64}E^2=\frac{1}{64}E$

$\therefore A^6+E=\frac{1}{64}E+E=\frac{65}{64}E=\begin{pmatrix} \frac{65}{64} & 0 \\ 0 & \frac{65}{64} \end{pmatrix}$ …… ㉯

따라서 구하는 행렬 A^6+E의 2열의 성분의 합은 $\frac{65}{64}$이므로

$p=64,\ q=65$

$\therefore p+q=64+65=129$ …… ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ 등식 $4A^2-2A+E^2=O$ 유도하기	30 %
㉯ 행렬 A^6+E 구하기	40 %
㉰ $p+q$의 값 구하기	30 %

1등급 실력 완성

● 156쪽 ~ 157쪽

674 5 **675** -7 **676** 3 **677** ①

678 $\begin{pmatrix} -7 & -1 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}$ **679** ③ **680** ① **681** 1

682 $\frac{7}{3}$ **683** 6

674

행렬의 (i, j) 성분 ⊕ 행렬의 덧셈, 뺄셈, 실수배

전략 $\sqrt{a^2}=|a|$임을 이용하며 k의 값의 범위를 구한다.

풀이 $a_{ij}=\begin{cases} k-3^j & (i=j) \\ 2i-3k & (i\neq j) \end{cases}$에

$i=1, 2, j=1, 2$를 차례로 대입하면

$a_{11}=k-3, a_{12}=2-3k,$

$a_{21}=4-3k, a_{22}=k-9$

행렬 $A+B$의 (i, j) 성분을 c_{ij}라 하자.

$b_{ij}=\sqrt{(a_{ij})^2}$에서 $b_{ij}=|a_{ij}|$이므로

$a_{ij}\leq 0$일 때, $c_{ij}=a_{ij}+|a_{ij}|=0$

$a_{ij}>0$일 때, $c_{ij}=a_{ij}+|a_{ij}|=2a_{ij}$

행렬 $A+B$의 모든 성분의 합이 0 이하이므로

행렬 A의 모든 성분은 0 이하이다.

$k-3\leq 0$에서 $k\leq 3$ …… ㉠

$2-3k\leq 0$에서 $k\geq \frac{2}{3}$ …… ㉡

$4-3k\leq 0$에서 $k\geq \frac{4}{3}$ …… ㉢

$k-9\leq 0$에서 $k\leq 9$ …… ㉣

㉠~㉣에서 $\frac{4}{3}\leq k\leq 3$

따라서 조건을 만족시키는 정수 k는 2, 3이므로 구하는 합은

$2+3=5$

675

행렬의 곱셈

전략 행렬의 곱셈과 항등식의 성질을 이용한다.

풀이 두 상수 a, b에 대하여 $f(x)$는 일차식이므로

$f(x)=ax+b$라 하면

$f(2x)=2ax+b$

$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f(x) \\ f(2x) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3x+4 \\ -6x-8 \end{pmatrix}$에서

$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ax+b \\ 2ax+b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3x+4 \\ -6x-8 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -3ax-b \\ 6ax+2b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3x+4 \\ -6x-8 \end{pmatrix}$

$-3ax-b=3x+4, 6ax+2b=-6x-8$ …… ㉠

임의의 실수 x에 대하여 ㉠이 성립하므로

$-3a=3$에서 $a=-1$

$-b=4$에서 $b=-4$

따라서 $f(x)=-x-4$이므로

$f(3)=-3-4=-7$

676

행렬의 거듭제곱

전략 행렬의 거듭제곱을 이용하여 규칙성을 찾는다.

풀이 $A^2=\begin{pmatrix} m & n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m & n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} m^2 & mn \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} m^2 & mn \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m & n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} m^3 & m^2n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A^4=A^3A=\begin{pmatrix} m^3 & m^2n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m & n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} m^4 & m^3n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

⋮

$k\geq 2$인 자연수 k에 대하여 $A^k=\begin{pmatrix} m^k & m^{k-1}n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A^5=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$에서 $a=m^5, b=m^4n, c=d=0$

$a-b=cd$에서 $m^5-m^4n=0$

이때 m은 자연수이므로 $m=n$

$a+b<1000$에서 $m^5+m^4n<1000$

$2m^5<1000$ $\quad\therefore m^5<500$

따라서 부등식을 만족시키는 자연수 m의 값은 1, 2, 3이므로 가능한 행렬 A의 개수는 3이다.

677

행렬의 (i, j) 성분 ⊕ 행렬의 거듭제곱

전략 허수단위의 성질을 이용하여 규칙성을 찾는다.

풀이 $i^2=-1, i^3=-i, i^4=1$이므로

$A=\begin{pmatrix} -1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$

$A^2=AA=\begin{pmatrix} -1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A^4=A^3A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

⋮

$n\geq 2$인 자연수 n에 대하여 $A^n=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

따라서 $A+A^2+A^3+\cdots+A^{20}=\begin{pmatrix} -1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$이므로

이 행렬의 $(1, 2)$ 성분은 $-i$이다.

678

행렬의 (i, j) 성분 ⊕ 행렬의 거듭제곱

전략 행렬의 거듭제곱을 이용하여 규칙성을 파악한다.

풀이 $A^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}=aE$

$A^{10}=(A^2)^5=(aE)^5=a^5E=\begin{pmatrix} a^5 & 0 \\ 0 & a^5 \end{pmatrix}$

$A^9=(A^2)^4A=(aE)^4A=a^4A=\begin{pmatrix} 0 & a^4 \\ a^5 & 0 \end{pmatrix}$

조건 (가)에서 $-a^4\leq a^5\leq 0$이고 a는 정수이므로

$a=0$ 또는 $a=-1$

(i) $a=0$일 때,

$A^{10}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$이므로 $(A^{10}+E)^2=E$가 되어 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii) $a=-1$일 때,

$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$이므로 $(A^{10}+E)^2\neq E$가 되어 조건 (나)를 만족시킨다.

따라서 $a=-1$이므로 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$\therefore (A+2E)(A-3E)=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -7 & -1 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}$

679

행렬의 곱셈의 활용; 실생활

전략 문제 상황을 이해하고 행렬의 곱으로 표현한다.

풀이 주어진 조건에 의하여 제품 A, B를 한 개씩 만드는 데 드는 비용은 각각 $3x+2y$, $4x+3y$이므로 이것을 행렬로 나타내면

$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

따라서 제품 A를 25개, B를 15개 만드는 데 사용된 강철과 알루미늄의 총 구입 가격을 행렬로 나타내면

$\begin{pmatrix} 25 & 15 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

680

행렬의 곱셈에 대한 성질 ⊕ 단위행렬

전략 $AB=BA$임을 유도하여 곱셈 공식을 활용한다.

풀이 $A+B=3E$에서 $A=3E-B$이므로

$AB=3B-B^2$, $BA=3B-B^2$

즉, $AB=BA$이므로

$A(A^2+E)+B(B^2+E)=A^3+B^3+A+B$

$=(A+B)^3-3AB(A+B)+A+B$

$=(3E)^3-3\times 4E\times 3E+3E$

$=27E-36E+3E$

$=-6E$

따라서 구하는 모든 성분의 합은 -12이다.

681

행렬의 곱셈 ⊕ 단위행렬

전략 $AB=BA$임을 추론하여 곱셈 공식을 활용한다.

풀이 $A=B+E$에서 $AB=B^2+B$, $BA=B^2+B$이므로

$AB=BA$이다. …… ㉠

$A=B+E$에서 $A-B=E$이므로

$(A-B)^2=E^2$

$A^2-2AB+B^2=E$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}-2AB=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$2AB=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

$\therefore AB=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

㉠에 의하여

$A^3B^3=AAABBB$

$=AABABB$

$=ABABAB$

$=(AB)^3$

$=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

따라서 구하는 $(2, 1)$ 성분은 1이다.

682

$A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ 꼴을 포함한 식의 변형

전략 행렬의 곱셈을 이용하여 성분 간의 관계식을 추론한다.

풀이 $A\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$에서

$A\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$A^2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$A^3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ …… ㉠

두 실수 x, y에 대하여 $x\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$라 하면

$-x+2y=1$, $2x-y=2$

두 식을 연립하여 풀면

$x=\frac{5}{3}$, $y=\frac{4}{3}$

$A\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$에서

$\frac{5}{3}A\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}=\frac{5}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\frac{4}{3}A\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}=\frac{4}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$이므로

$A\left\{\frac{5}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}+\frac{4}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}=\frac{5}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}+\frac{4}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{10}{3} \end{pmatrix}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $A^3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{10}{3} \end{pmatrix}$이므로 구하는 모든 성분의 합은

$-1+\frac{10}{3}=\frac{7}{3}$

683

단위행렬

전략 $AE=EA$임을 이용하여 곱셈 공식을 활용한다.

풀이 $A(A^2-E)=O$에서

$A^3-A=O \qquad \therefore A^3=A$

$\therefore (A^{10}-E)^2+(A^4+E)^2$

$=(A^2-E)^2+(A^2+E)^2$

$=(A^4-2A^2+E^2)+(A^4+2A^2+E^2)$

$=(A^2-2A^2+E)+(A^2+2A^2+E)$

$=2A^2+2E$

두 행렬 A^2, E의 모든 성분의 합은 각각 1, 2이므로
구하는 행렬의 모든 성분의 합은
$2\times1+2\times2=6$

참고 행렬의 곱셈에서는 $AB=O$일 때, $A\neq O$, $B\neq O$인 경우도 있다. 실제로 이 문제에서 주어진 조건을 만족시키는 행렬은
$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$이다.

도전 1등급 최고난도

● 158쪽

684 3 **685** $\begin{pmatrix}-10&-10\\-56&-48\end{pmatrix}$ **686** ㄴ

684

행렬의 (i, j) 성분 ⊕ 행렬의 곱셈

1단계 주어진 조건에서 행렬의 성분 간의 관계식을 구한다.

$a_{ij}+a_{ji}=0$에서 $a_{ij}=-a_{ji}$이므로
$a_{11}=0$, $a_{12}=-a_{21}$, $a_{22}=0$

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&a_{12}\\-a_{12}&0\end{pmatrix}$$

$b_{ij}-b_{ji}=0$에서 $b_{ij}=b_{ji}$이므로 $b_{12}=b_{21}$

$$B=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{12}&b_{22}\end{pmatrix}$$

2단계 행렬의 관계식을 이용하여 행렬의 성분을 구한다.

$$\begin{aligned}2A-B&=2\begin{pmatrix}0&a_{12}\\-a_{12}&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{12}&b_{22}\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}-b_{11}&2a_{12}-b_{12}\\-2a_{12}-b_{12}&-b_{22}\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&2\\-2&4\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$-b_{11}=1$에서 $b_{11}=-1$
$-b_{22}=4$에서 $b_{22}=-4$
$2a_{12}-b_{12}=2$ …… ㉠
$-2a_{12}-b_{12}=-2$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a_{12}=1$, $b_{12}=0$

$$\therefore A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-4\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\therefore A^2-B&=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1&0\\0&-4\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1&0\\0&-4\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}0&0\\0&3\end{pmatrix}\end{aligned}$$

따라서 행렬 A^2-B의 $(2, 2)$ 성분은 3이다.

685

행렬의 (i, j) 성분 ⊕ 행렬의 곱셈

1단계 일차함수의 계수의 부호를 이용하여 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값의 조건을 찾는다.

i, j는 모두 양수이므로 $-i<0$, $j+1>0$
함수 $f(x)$가 일차함수이므로 $(3i-2^j)$의 부호에 따라 최댓값과 최솟값이 정해진다.
$3i-2^j>0$일 때 함수 $f(x)$는 $x=-i$에서 최솟값을,
$x=j+1$에서 최댓값을 갖고,
$3i-2^j<0$일 때 함수 $f(x)$는 $x=j+1$에서 최솟값을,
$x=-i$에서 최댓값을 갖는다.

2단계 i, j의 값에 따라 a_{ij}, b_{ij}를 구한다.

(i) $i=1$, $j=1$일 때, $3-2=1>0$이므로
$a_{11}=2$, $b_{11}=-1$
(ii) $i=1$, $j=2$일 때, $3-4=-1<0$이므로
$a_{12}=1$, $b_{12}=-3$
(iii) $i=2$, $j=1$일 때, $6-2=4>0$이므로
$a_{21}=8$, $b_{21}=-8$
(iv) $i=2$, $j=2$일 때, $6-4=2>0$이므로
$a_{22}=6$, $b_{22}=-4$

3단계 (i)~(iv)에서 행렬 A, B를 구한다.

이상에서 $A=\begin{pmatrix}2&1\\8&6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&-3\\-8&-4\end{pmatrix}$이므로

$$\begin{aligned}AB&=\begin{pmatrix}2&1\\8&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&-3\\-8&-4\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}-10&-10\\-56&-48\end{pmatrix}\end{aligned}$$

686

행렬의 곱셈 ⊕ 행렬의 곱셈에 대한 성질

1단계 성립하지 않는 예를 찾아본다.

ㄱ. $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$일 때, $A\neq 0$이지만
$A^2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$이다. (거짓)

2단계 $AB=BA$임을 찾아서 관계식을 정리한다.

ㄴ. $A+B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$에서 $A+B=E$이므로
$A=E-B$
$AB=B-B^2$, $BA=B-B^2$이므로
$AB=BA$
$$\begin{aligned}\therefore (A+B)(A-B)&=A^2-AB+BA-B^2\\&=A^2-B^2\ (\text{참})\end{aligned}$$

3단계 $AB=E$임을 이용하여 주어진 관계식을 정리한다.

ㄷ. $(ABA)^3=(EA)^3=A^3$
$$\begin{aligned}A^3B^3&=AAABBB\\&=AA(AB)BB\\&=AAEBB\\&=AABB\\&=AEB\\&=AB=E\end{aligned}$$
이때 $A=2E$, $B=\frac{1}{2}E$이면 $AB=E$이지만 $A^3\neq AB$이다.
(거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

MEMO