기출 분석 문제집

# 1등급 만들기

## 공통수학2
607제

## 바른답·알찬풀이

MiraeN 에듀

# I 도형의 방정식

## 01 평면좌표

### 유형 분석 기출

● 9쪽~14쪽

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **001** 14 | **002** ② | **003** 3 | **004** 4 | **005** ③ |
| **006** ⑤ | **007** ⑤ | **008** ③ | **009** $-1$ | |
| **010** $(3, 3\sqrt{3})$ | | **011** ④ | **012** $-26$ | **013** ② |
| **014** ① | **015** ④ | **016** 10 | **017** ③ | **018** ② |
| **019** ④ | **020** ② | **021** ② | **022** ④ | **023** 4 |
| **024** ④ | **025** 2 | **026** ⑤ | **027** ⑤ | **028** $-3$ |
| **029** 4 | **030** 4 | **031** ③ | **032** 9 | **033** ① |
| **034** $3x+2y-15=0$ | | **035** 17 | **036** ② | |

### 001

$\overline{AB}=\sqrt{\{5-(a-1)\}^2+\{(a-4)-4\}^2}=\sqrt{10}$에서

$\sqrt{(6-a)^2+(a-8)^2}=\sqrt{10}$

$\sqrt{2a^2-28a+100}=\sqrt{10}$

양변을 제곱하면 $2a^2-28a+100=10$

$\therefore a^2-14a+45=0$

따라서 모든 실수 $a$의 값의 합은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 14이다.

### 002

$\overline{OA}=\overline{OB}$에서 $\overline{OA}^2=\overline{OB}^2$이므로

$(5-0)^2+(-5-0)^2=(1-0)^2+(a-0)^2$

$50=a^2+1,\ a^2=49$

$\therefore a=7\ (\because a>0)$

### 003

$\overline{OA}=5$에서 $\overline{OA}^2=25$이므로

$a^2+3^2=25,\ a^2=16$

$\therefore a=-4$ 또는 $a=4$

$\overline{OB}=5$에서 $\overline{OB}^2=25$

$(-4)^2+b^2=25,\ b^2=9$

$\therefore b=-3$ 또는 $b=3$

따라서 조건을 만족시키는 순서쌍 $(a, b)$는

$(-4, -3), (4, -3), (4, 3)$

의 3개이다.

오답 피하기 $a=-4,\ b=3$이면 두 점 A, B가 서로 같은 점이 되므로 문제의 조건을 만족시키지 않는다.

### 004

$\overline{AB}=2\overline{CD}$에서 $\overline{AB}^2=4\overline{CD}^2$이므로

$(-2-a)^2+(a-2)^2=4[(2-1)^2+\{2-(-1)\}^2]$

$2a^2+8=40,\ a^2=16$

$\therefore a=4\ (\because a>0)$

### 005

$\overline{AB}$를 한 변으로 하는 정육각형의 넓이는 $\overline{AB}$를 한 변으로 하는 정삼각형의 넓이의 6배이므로

$\overline{AB}=\sqrt{\{4-(-1)\}^2+(7-4)^2}=\sqrt{34}$

따라서 구하는 정육각형의 넓이는

$\left\{\frac{\sqrt{3}}{4}\times(\sqrt{34})^2\right\}\times 6=51\sqrt{3}$

### 006

점 P의 좌표를 $(a, 0)$이라 하면

$\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$\{a-(-2)\}^2+(0-1)^2=(a-1)^2+(0-5)^2$

$a^2+4a+5=a^2-2a+26$

$6a=21 \qquad \therefore a=\frac{7}{2}$

따라서 점 P의 좌표는 $\left(\frac{7}{2}, 0\right)$이다.

**1등급 비법**

여러 점으로부터 같은 거리에 있는 한 점의 좌표를 구하는 경우에는 그 점의 위치를 생각하여 다음과 같이 좌표를 정해야 계산을 쉽게 할 수 있다.

① $x$축 위의 점이면 ⇨ $(a, 0)$

② $y$축 위의 점이면 ⇨ $(0, a)$

③ 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점이면 ⇨ $(a, f(a))$

### 007

점 P의 좌표를 $(a, 0)$이라 하면

$\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(a-1)^2+(0-2)^2=(a-3)^2+(0-4)^2$

$a^2-2a+5=a^2-6a+25$

$4a=20 \qquad \therefore a=5$

$\therefore P(5, 0)$

점 Q의 좌표를 $(0, b)$라 하면

$\overline{AQ}=\overline{BQ}$에서 $\overline{AQ}^2=\overline{BQ}^2$이므로

$(0-1)^2+(b-2)^2=(0-3)^2+(b-4)^2$

$b^2-4b+5=b^2-8b+25$

$4b=20 \qquad \therefore b=5$

$\therefore Q(0, 5)$

$\therefore \overline{PQ}=\sqrt{(0-5)^2+(5-0)^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$

### 008

점 $P(a, b)$가 직선 $y=2x-1$ 위의 점이므로

$b=2a-1 \qquad \therefore 2a-b=1$ $\cdots\cdots$ ㉠

또, $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$\{a-(-2)\}^2+(b-0)^2=(a-2)^2+(b-4)^2$

$a^2+4a+b^2+4=a^2-4a+b^2-8b+20$

$8a+8b=16 \qquad \therefore a+b=2$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=1, b=1$

$\therefore a-b=1-1=0$

## 009

삼각형 ABC의 외심을 P$(a, b)$라 하면 점 P에서 세 점 A, B, C에 이르는 거리가 같으므로

$\overline{AP}=\overline{BP}=\overline{CP}$

$\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(a-2)^2+(b-2)^2=\{a-(-2)\}^2+(b-0)^2$

$a^2-4a+b^2-4b+8=a^2+4a+b^2+4$

$-8a-4b=-4$

$\therefore 2a+b=1$ ...... ㉠

또, $\overline{BP}=\overline{CP}$에서 $\overline{BP}^2=\overline{CP}^2$이므로

$\{a-(-2)\}^2+(b-0)^2=(a-4)^2+(b-0)^2$

$a^2+4a+b^2+4=a^2-8a+b^2+16$

$12a=12 \qquad \therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면

$b=-1$

$\therefore ab=1\times(-1)=-1$

## 010

삼각형 OAB가 정삼각형이므로

$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{AB}$

점 B의 좌표를 $(a, b)$ $(a>0, b>0)$라 하면

$\overline{OA}=\overline{OB}$에서 $\overline{OA}^2=\overline{OB}^2$이므로

$6^2=a^2+b^2$ ...... ㉠

$\overline{OB}=\overline{AB}$에서 $\overline{OB}^2=\overline{AB}^2$이므로

$a^2+b^2=(a-6)^2+b^2$

$a^2+b^2=a^2-12a+b^2+36$

$12a=36 \qquad \therefore a=3$

$a=3$을 ㉠에 대입하면

$36=9+b^2$, $b^2=27$

$\therefore b=3\sqrt{3}$ $(\because b>0)$

따라서 점 B의 좌표는 $(3, 3\sqrt{3})$이다.

## 011

삼각형 ABC의 세 변의 길이를 각각 구하면

$\overline{AB}=\sqrt{\{1-(-1)\}^2+(1-5)^2}$

$=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

$\overline{BC}=\sqrt{(3-1)^2+(2-1)^2}=\sqrt{5}$

$\overline{CA}=\sqrt{\{3-(-1)\}^2+(2-5)^2}$

$=\sqrt{25}=5$

$\therefore \overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{CA}^2$

따라서 삼각형 ABC는 빗변이 $\overline{CA}$인 직각삼각형이다.

**1등급 비법**

세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 모양을 알아볼 때는 다음과 같이 해결한다.

(i) 두 점 사이의 거리를 구하는 공식을 이용하여 세 변의 길이를 각각 구한다.

(ii) (i)에서 구한 세 변의 길이 사이의 관계를 알아본다.

삼각형 ABC의 세 변의 길이가 $a, b, c$일 때

① $a=b=c$ ⇨ 정삼각형

② $a=b$ 또는 $b=c$ 또는 $c=a$ ⇨ 이등변삼각형

③ $a^2=b^2+c^2$ ⇨ 빗변의 길이가 $a$인 직각삼각형

## 012

삼각형 ABC의 세 변의 길이를 각각 구하면

$\overline{AB}=\sqrt{\{2-(-2)\}^2+\{2-(-1)\}^2}=5$

$\overline{BC}=|a-2|$

$\overline{CA}=\sqrt{\{2-(-2)\}^2+\{a-(-1)\}^2}$

$=\sqrt{a^2+2a+17}$

(i) $\overline{AB}=\overline{BC}$일 때,

$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2$이므로

$25=(a-2)^2$

$a^2-4a-21=0$, $(a+3)(a-7)=0$

$\therefore a=-3$ $(\because a<0)$

(ii) $\overline{BC}=\overline{CA}$일 때,

$\overline{BC}^2=\overline{CA}^2$이므로

$(a-2)^2=a^2+2a+17$

$a^2-4a+4=a^2+2a+17$, $-6a=13$

$\therefore a=-\frac{13}{6}$

(iii) $\overline{CA}=\overline{AB}$일 때,

$\overline{CA}^2=\overline{AB}^2$이므로

$a^2+2a+17=25$

$a^2+2a-8=0$, $(a+4)(a-2)=0$

$\therefore a=-4$ $(\because a<0)$

(i), (ii), (iii)에서 삼각형 ABC가 이등변삼각형이 되게 하는 모든 $a$의 값의 곱은

$(-3)\times(-4)\times\left(-\frac{13}{6}\right)=-26$

## 013

점 P의 좌표를 $(a, 0)$이라 하면

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$

$=\{(a-2)^2+(0-3)^2\}+[\{a-(-4)\}^2+(0-5)^2]$

$=2a^2+4a+54$

$=2(a+1)^2+52$

따라서 $a=-1$, 즉 점 P의 좌표가 $(-1, 0)$일 때 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$의 값이 최소가 된다.

**개념 보충**

**이차함수의 최댓값과 최솟값**

이차함수 $y=a(x-m)^2+n$에서

① $a>0$이면 $x=m$일 때, 최솟값 $n$을 갖는다.

② $a<0$이면 $x=m$일 때, 최댓값 $n$을 갖는다.

## 014

직선 $y=x+2$ 위의 점 P의 좌표를 $(a, a+2)$라 하면

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$

$=\{(a-2)^2+(a+2-6)^2\}+\{(a-4)^2+(a+2-8)^2\}$

$=4a^2-32a+72$

$=4(a-4)^2+8$

따라서 $a=4$, 즉 점 P의 좌표가 $(4, 6)$일 때 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$은 최솟값 8을 갖는다.

## 015

직선 $y=x$ 위의 점 P의 좌표를 $(b, b)$라 하면

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$

$=\{(b-1)^2+(b-a)^2\}+(b-a)^2+\{b-(-3)\}^2$

$=4b^2-4(a-1)b+2a^2+10$ …… ㉠

한편, 조건에서 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$은 점 P의 $x$좌표가 $\frac{3}{2}$일 때, 최솟값 $m$을 가지므로

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=4\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+m=4x^2-12x+m+9$

점 P의 $x$좌표가 $b$이므로

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=4b^2-12b+m+9$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$-4(a-1)=-12$, $2a^2+10=m+9$

두 식을 연립하여 풀면 $a=4$, $m=33$

$\therefore a+m=4+33=37$

## 016

$\overline{AP}+\overline{BP}$의 값이 최소인 경우는 점 P가 $\overline{AB}$ 위에 있을 때이므로

$\overline{AP}+\overline{BP}\ge\overline{AB}$

$=\sqrt{\{4-(-2)\}^2+\{(-5-3)\}^2}=10$

따라서 구하는 최솟값은 10이다.

## 017

$O(0, 0)$, $A(x, y)$, $B(1, 4)$라 하면

$\sqrt{x^2+y^2}=\overline{OA}$, $\sqrt{(x-1)^2+(y-4)^2}=\overline{AB}$

$\therefore \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-1)^2+(y-4)^2}$

$=\overline{OA}+\overline{AB}$

$\ge\overline{OB}$

$=\sqrt{1^2+4^2}=\sqrt{17}$

따라서 구하는 최솟값은 $\sqrt{17}$이다.

## 018

$A(3, -1)$, $B(-4, 6)$, $P(x, y)$라 하면

$\sqrt{x^2+y^2-6x+2y+10}+\sqrt{x^2+y^2+8x-12y+52}$

$=\sqrt{(x-3)^2+(y+1)^2}+\sqrt{(x+4)^2+(y-6)^2}$

$=\overline{AP}+\overline{BP}$

$\ge\overline{AB}$

$=\sqrt{(-4-3)^2+(6+1)^2}=7\sqrt{2}$

## 019

두 점 $A(a, -1)$, $B(-6, b)$에 대하여 선분 AB의 중점의 좌표가 $(-2, 1)$이므로

$\frac{a+(-6)}{2}=-2$에서 $a-6=-4$ $\therefore a=2$

$\frac{-1+b}{2}=1$에서 $-1+b=2$ $\therefore b=3$

$\therefore a+b=2+3=5$

## 020

선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점의 좌표를 $(a, b)$라 하면

$a=\frac{2\times6+1\times0}{2+1}=4$, $b=\frac{2\times1+1\times4}{2+1}=2$

따라서 점 $(4, 2)$와 원점 사이의 거리는

$\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$

## 021

선분 AB를 $3:b$로 내분하는 점의 좌표가 $(4, -5)$이므로

$\frac{3\times6+b\times a}{3+b}=4$에서

$18+ab=4(3+b)$

$\therefore ab-4b=-6$ …… ㉠

$\frac{3\times(-8)+b\times4}{3+b}=-5$에서

$-24+4b=-5(3+b)$

$9b=9$ $\therefore b=1$

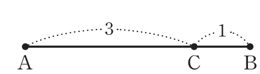
$b=1$을 ㉠에 대입하면

$a-4=-6$ $\therefore a=-2$

$\therefore a+b=(-2)+1=-1$

## 022

$\overline{AC}=3\overline{BC}$에서 $\overline{AC}:\overline{BC}=3:1$이므로 점 C는 선분 AB를 $3:1$로 내분하는 점이다.




점 C의 좌표를 $(a, b)$라 하면

$a=\frac{3\times3+1\times(-1)}{3+1}=2$, $b=\frac{3\times(-2)+1\times2}{3+1}=-1$

$\therefore C(2, -1)$

**1등급 비법**

선분 AB 위의 점 C에 대하여

$n\overline{AC}=m\overline{BC}$ (단, $m>0$, $n>0$)

⇨ $\overline{AC}:\overline{BC}=m:n$

⇨ 점 C는 선분 AB를 $m:n$으로 내분하는 점이다.

## 023

선분 AB를 $(1-t):t$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{(1-t)\times1+t\times(-4)}{(1-t)+t}, \frac{(1-t)\times3+t\times1}{(1-t)+t}\right)$

$\therefore (-5t+1, -2t+3)$
이 점이 직선 $y=x+14$ 위에 있으므로
$-2t+3=(-5t+1)+14$
$3t=12$
$\therefore t=4$

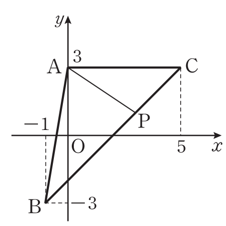
## 024

$\overline{OP_1}, \overline{OP_2}, \overline{OP_3}, \overline{OP_4}$ 중에서 가장 긴 선분은 $\overline{OP_4}$이다.
이때 점 $P_4$는 선분 AB를 $4:1$로 내분하는 점이므로 점 $P_4$의 좌표를 $(a, b)$라 하면

$a=\frac{4\times20+1\times0}{4+1}=16$, $b=\frac{4\times0+1\times10}{4+1}=2$

$\therefore P_4(16, 2)$
따라서 구하는 선분의 길이는
$\overline{OP_4}=\sqrt{16^2+2^2}=2\sqrt{65}$

## 025




삼각형 ABP의 넓이가 삼각형 APC의 넓이의 2배이고, 높이가 같은 두 삼각형의 넓이의 비는 밑변의 길이의 비와 같으므로
$\overline{BP}:\overline{PC}=2:1$
즉, 점 $P(a, b)$는 선분 BC를 $2:1$로 내분하는 점이므로

$a=\frac{2\times5+1\times(-1)}{2+1}=3$, $b=\frac{2\times3+1\times(-3)}{2+1}=1$

$\therefore a-b=3-1=2$

## 026

평행사변형의 두 대각선은 서로를 이등분하므로 대각선 AC의 중점과 대각선 BD의 중점이 일치한다. 즉,

$\frac{2+a}{2}=\frac{0+5}{2}$에서 $a=3$

$\frac{5+(-1)}{2}=\frac{0+b}{2}$에서 $b=4$

$\therefore a+b=3+4=7$

개념 보충

**평행사변형의 정의와 그 성질**

- 정의: 마주 보는 두 변이 서로 평행한 사각형
- 성질: 두 대각선은 서로를 이등분한다.

## 027

마름모의 두 대각선은 서로를 이등분하므로 대각선 AC의 중점과 대각선 BD의 중점이 일치한다. 즉,

$\frac{a+5}{2}=\frac{-a+7}{2}$에서

$2a=2 \qquad \therefore a=1$

$\frac{a+(-a)}{2}=\frac{-b+b}{2}$는 항상 성립한다.
또, 마름모는 네 변의 길이가 같으므로
$\overline{AB}=\overline{AD}$에서 $\overline{AB}^2=\overline{AD}^2$
$(-a-a)^2+(-b-a)^2=(7-a)^2+(b-a)^2$
위의 식에 $a=1$을 대입하면
$4+(1+b)^2=36+(b-1)^2$
$b^2+2b+5=b^2-2b+37$
$4b=32 \qquad \therefore b=8$
$\therefore a+b=1+8=9$

## 028

대각선 BD의 중점의 좌표는

$\left(\frac{c+d}{2}, \frac{2+(-4)}{2}\right)$, 즉 $\left(\frac{c+d}{2}, -1\right)$

이 점이 직선 $y=x-2$ 위에 있으므로

$-1=\frac{c+d}{2}-2$

$\therefore c+d=2$
또, 대각선 AC의 중점의 좌표는

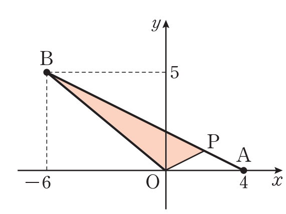
$\left(\frac{a+4}{2}, \frac{b+1}{2}\right)$

이 점은 대각선 BD의 중점의 좌표 $(1, -1)$과 일치하므로

$\frac{a+4}{2}=1$, $\frac{b+1}{2}=-1$

$\therefore a=-2, b=-3$
$\therefore a+b+c+d=(-2)+(-3)+2=-3$

## 029




오른쪽 그림에서 선분 AB를 $m:n$으로 내분하는 점 P의 좌표는

$\left(\frac{-6m+4n}{m+n}, \frac{5m}{m+n}\right)$

삼각형 OAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times4\times5=10$

삼각형 OPB의 넓이가 8이므로 삼각형 OAP의 넓이는
$10-8=2$

즉, $\frac{1}{2}\times4\times\frac{5m}{m+n}=2$에서

$5m=m+n \qquad \therefore n=4m$

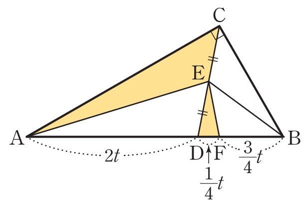
$\therefore \frac{n}{m}=4$

다른 풀이 위의 그림에서 두 삼각형 OAP와 OPB는 각각 선분 AP, 선분 PB를 밑변으로 하면 높이가 같으므로 두 삼각형의 넓이의 비는 밑변의 길이의 비와 같다.
즉, 두 삼각형 OAP, OPB의 넓이가 각각 2, 8이므로
$\overline{AP}:\overline{PB}=2:8=m:n$

$\therefore \frac{n}{m}=4$

## 030

삼각형 ABC와 세 점 D, E, F를 나타내면 오른쪽 그림과 같다.




삼각형 ABC의 넓이를 $S$라 하면 $\overline{AD}:\overline{DB}=2:1$이므로 삼각형 ADC의 넓이는 $\frac{2}{3}S$이고, 점 E가 선분 CD의 중점이므로 삼각형 AEC의 넓이를 $S_1$이라 하면

$S_1=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}S=\frac{1}{3}S$

삼각형 BCD의 넓이가 $\frac{1}{3}S$이고, 점 E가 선분 CD의 중점이므로 삼각형 BED의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}S=\frac{1}{6}S$

$\overline{DF}:\overline{FB}=1:3$이므로 삼각형 DFE의 넓이를 $S_2$라 하면

$S_2=\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}S=\frac{1}{24}S$

따라서 $\frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{1}{6}S}{\frac{1}{24}S}=4$이므로 삼각형 AEC의 넓이는 삼각형 DFE의 넓이의 4배이다.

$\therefore k=4$

## 031

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $(2, 1)$이므로

$\frac{a+(-1)+5}{3}=2$에서 $a+4=6$ $\quad\therefore a=2$

$\frac{2+b+(-2)}{3}=1$에서 $b=3$

$\therefore a+b=2+3=5$

## 032

점 B의 좌표를 $(x, y)$라 하면 $\overline{AB}$의 중점의 좌표가 $(2, 1)$이므로

$\frac{3+x}{2}=2$에서 $x=1$

$\frac{0+y}{2}=1$에서 $y=2$

$\therefore B(1, 2)$

세 점 $A(3, 0)$, $B(1, 2)$, $C(a, b)$를 세 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $(2, 3)$이므로

$\frac{3+1+a}{3}=2$에서 $a=2$

$\frac{0+2+b}{3}=3$에서 $b=7$

$\therefore a+b=2+7=9$

**다른 풀이** 선분 AB의 중점을 $M(2, 1)$이라 하면 삼각형 ABC의 무게중심은 선분 CM을 $2:1$로 내분하는 점이므로

$\frac{2\times2+1\times a}{2+1}=2$에서 $a+4=6$ $\quad\therefore a=2$

$\frac{2\times1+1\times b}{2+1}=3$에서 $b+2=9$ $\quad\therefore b=7$

$\therefore a+b=2+7=9$

## 033

선분 BC의 중점을 $M(a, b)$라 하면 삼각형 ABC의 무게중심은 선분 AM을 $2:1$로 내분하는 점이므로

$\frac{2\times a+1\times1}{2+1}=-1$에서 $2a+1=-3$

$\therefore a=-2$

$\frac{2\times b+1\times(-2)}{2+1}=2$에서 $2b-2=6$

$\therefore b=4$

따라서 선분 BC의 중점의 좌표는 $(-2, 4)$이다.

## 034

점 P의 좌표를 $(x, y)$라 하면 $\overline{PA}^2-\overline{PB}^2=12$이므로

$(1-x)^2+(-2-y)^2-\{(7-x)^2+(2-y)^2\}=12$

$x^2-2x+y^2+4y+5-(x^2-14x+y^2-4y+53)=12$

$12x+8y-48=12$

$\therefore 3x+2y-15=0$

## 035

점 P의 좌표를 $(x, y)$라 하면

$\overline{PA}=\overline{PB}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$이므로

$(3-x)^2+(-2-y)^2=(-4-x)^2+(7-y)^2$

$x^2-6x+y^2+4y+13=x^2+8x+y^2-14y+65$

$14x-18y+52=0$

$\therefore 7x-9y+26=0$

따라서 $a=-9$, $b=26$이므로

$a+b=(-9)+26=17$

## 036

실수 $t$에 대하여 점 A의 좌표를 $\left(t, \frac{1}{2}t+5\right)$라 하고, 선분 AB를 $3:1$로 내분하는 점을 $P(x, y)$라 하면

$x=\frac{3\times3+1\times t}{3+1}=\frac{9+t}{4}$ ...... ㉠

$y=\frac{3\times2+1\times\left(\frac{1}{2}t+5\right)}{3+1}=\frac{t+22}{8}$ ...... ㉡

㉠에서 $t=4x-9$이고 이를 ㉡에 대입하면

$y=\frac{(4x-9)+22}{8}=\frac{4x+13}{8}$

$\therefore 4x-8y+13=0$

## 내신 적중 서술형

15쪽

**037** $-2$ **038** $-8$ **039** (1) $B(-2\sqrt{3}, 3)$, $C(0, 1)$ (2) 5
**040** $(1, -2)$

## 037

삼각형 ABC가 $\angle C=90^\circ$인 직각이등변삼각형이므로

$\overline{AC}=\overline{BC}$이고 $\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=\overline{AB}^2$

$\overline{AC}=\overline{BC}$에서 $\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$이므로

$\{1-(-1)\}^2+(a-1)^2=\{1-(-2a)\}^2+(a-0)^2$

$a^2-2a+5=5a^2+4a+1$

$2a^2+3a-2=0$

$(a+2)(2a-1)=0$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=\dfrac{1}{2}$ ······ ㉠ ······ ㉮

또, $\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=\overline{AB}^2$이므로

$[\{1-(-1)\}^2+(a-1)^2]+[\{1-(-2a)\}^2+(a-0)^2]$

$=\{-2a-(-1)\}^2+(0-1)^2$

$6a^2+2a+6=4a^2-4a+2$

$a^2+3a+2=0$

$(a+2)(a+1)=0$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=-1$ ······ ㉡ ······ ㉯

㉠, ㉡에서 $a=-2$ ······ ㉰

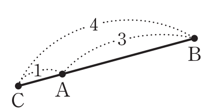
| 채점 기준 | 배점 비율 |
|---|---|
| ㉮ $\overline{AC}=\overline{BC}$를 만족시키는 $a$의 값 구하기 | 40 % |
| ㉯ $\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=\overline{AB}^2$을 만족시키는 $a$의 값 구하기 | 40 % |
| ㉰ $a$의 값 구하기 | 20 % |

## 038

$4\overline{AB}=3\overline{BC}$에서 $\overline{AB}:\overline{BC}=3:4$

이때 $a<0$이므로 점 A는 선분 CB를

1 : 3으로 내분하는 점이다. ······ ㉮




따라서

$\dfrac{1\times3+3\times a}{1+3}=-2$에서

$3+3a=-8$

$\therefore a=-\dfrac{11}{3}$

$\dfrac{1\times1+3\times b}{1+3}=-3$에서

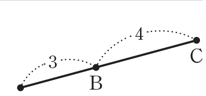
$1+3b=-12$

$\therefore b=-\dfrac{13}{3}$ ······ ㉯

$\therefore a+b=\left(-\dfrac{11}{3}\right)+\left(-\dfrac{13}{3}\right)=-8$ ······ ㉰

| 채점 기준 | 배점 비율 |
|---|---|
| ㉮ 점 A가 선분 CB를 1 : 3으로 내분하는 점임을 알기 | 50 % |
| ㉯ $a$, $b$의 값 구하기 | 40 % |
| ㉰ $a+b$의 값 구하기 | 10 % |

참고 세 점 A, B, C의 위치가 오른쪽 그림과 같을 때에도 $\overline{AB}:\overline{BC}=3:4$이지만 좌표평면 위에 나타내면 점 C의 $x$좌표인 $a$가 $a>0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.




## 039

(1) 점 B가 이차함수 $y=\dfrac{1}{4}x^2$의 그래프 위의 점이므로 점 B의 좌표를 $\left(t, \dfrac{1}{4}t^2\right)$이라 하면 선분 AB를 1 : 2로 내분하는 점 C의 좌표는

$\left(\dfrac{1\times t+2\times\sqrt{3}}{1+2}, \dfrac{1\times\frac{1}{4}t^2+2\times0}{1+2}\right)$

$\therefore C\left(\dfrac{t+2\sqrt{3}}{3}, \dfrac{t^2}{12}\right)$ ······ ㉮

이때 점 C가 $y$축 위에 있으므로

$\dfrac{t+2\sqrt{3}}{3}=0 \quad \therefore t=-2\sqrt{3}$

$\therefore B(-2\sqrt{3}, 3), C(0, 1)$ ······ ㉯

(2) 점 D의 좌표를 $(0, k)$라 하면

$\overline{BD}=\overline{CD}$에서 $\overline{BD}^2=\overline{CD}^2$이므로

$(-2\sqrt{3}-0)^2+(3-k)^2=(1-k)^2$ ······ ㉰

$21-6k+k^2=k^2-2k+1$

$-4k=-20 \quad \therefore k=5$

따라서 점 D의 $y$좌표는 5이다. ······ ㉱

| 채점 기준 | | 배점 비율 |
|---|---|---|
| (1) | ㉮ 두 점 B, C의 좌표를 구하는 식 세우기 | 30 % |
| | ㉯ 두 점 B, C의 좌표를 각각 구하기 | 40 % |
| (2) | ㉰ 점 D의 좌표를 구하는 식 세우기 | 20 % |
| | ㉱ 점 D의 $y$좌표 구하기 | 10 % |

## 040

변 AB를 2 : 1로 내분하는 점 P의 좌표를 $(x_1, y_1)$이라 하면

$x_1=\dfrac{2\times1+1\times(-1)}{2+1}=\dfrac{1}{3}$, $y_1=\dfrac{2\times6+1\times2}{2+1}=\dfrac{14}{3}$

$\therefore P\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{14}{3}\right)$ ······ ㉮

변 BC를 2 : 1로 내분하는 점 Q의 좌표를 $(x_2, y_2)$라 하면

$x_2=\dfrac{2\times3+1\times1}{2+1}=\dfrac{7}{3}$, $y_2=\dfrac{2\times(-14)+1\times6}{2+1}=-\dfrac{22}{3}$

$\therefore Q\left(\dfrac{7}{3}, -\dfrac{22}{3}\right)$ ······ ㉯

변 CA를 2 : 1로 내분하는 점 R의 좌표를 $(x_3, y_3)$이라 하면

$x_3=\dfrac{2\times(-1)+1\times3}{2+1}=\dfrac{1}{3}$, $y_3=\dfrac{2\times2+1\times(-14)}{2+1}=-\dfrac{10}{3}$

$\therefore R\left(\dfrac{1}{3}, -\dfrac{10}{3}\right)$ ······ ㉰

따라서 삼각형 PQR의 무게중심의 좌표는

$\left(\dfrac{\frac{1}{3}+\frac{7}{3}+\frac{1}{3}}{3}, \dfrac{\frac{14}{3}+\left(-\frac{22}{3}\right)+\left(-\frac{10}{3}\right)}{3}\right)$

$\therefore (1, -2)$ ······ ㉱

| 채점 기준 | 배점 비율 |
|---|---|
| ㉮ 점 P의 좌표 구하기 | 25 % |
| ㉯ 점 Q의 좌표 구하기 | 25 % |
| ㉰ 점 R의 좌표 구하기 | 25 % |
| ㉱ 삼각형 PQR의 무게중심의 좌표 구하기 | 25 % |

다른 풀이 세 점 P, Q, R은 세 변 AB, BC, CA를 각각 $2:1$로 내분하는 점이므로 삼각형 PQR의 무게중심은 삼각형 ABC의 무게중심과 일치한다.
따라서 삼각형 PQR의 무게중심의 좌표는
$\left(\frac{-1+1+3}{3},\ \frac{2+6+(-14)}{3}\right)$
$\therefore (1,\ -2)$

**1등급 비법**

삼각형 ABC에서 세 변 AB, BC, CA를 각각 $m:n\,(m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점을 P, Q, R이라 할 때, 삼각형 PQR의 무게중심의 좌표는 세 점 P, Q, R의 좌표를 직접 구한 후에 공식을 이용하여 구할 수도 있지만 삼각형 ABC의 무게중심과 같음을 이용하면 좀 더 간단히 구할 수 있다.

## 1등급 실력 완성

16쪽 ~ 18쪽

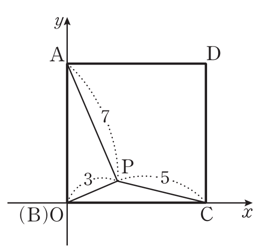
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 041 ④ | 042 ② | 043 ⑤ | 044 ② | 045 14 |
| 046 3 | 047 1 | 048 ③ | 049 ① | 050 ② |
| 051 ③ | 052 10 | 053 ④ | | |

### 041

**두 점 사이의 거리**

전략 주어진 정사각형을 좌표평면 위에 나타내고, 점 P의 좌표를 $(x, y)$, 점 C의 좌표를 $(a, 0)$이라 한 후 주어진 조건을 두 점 사이의 거리로 나타내어 본다.

풀이 주어진 정사각형을 점 B가 원점, 변 BC가 $x$축, 변 AB가 $y$축에 놓이도록 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.




$P(x, y)$, $C(a, 0)$, $A(0, a)$, $D(a, a)$라 하면
$\overline{AP}=7$에서 $\sqrt{(x-0)^2+(y-a)^2}=7$
$\therefore x^2+(y-a)^2=49$ ······ ㉠
$\overline{BP}=3$, 즉 $\overline{OP}=3$에서 $\sqrt{x^2+y^2}=3$
$\therefore x^2+y^2=9$ ······ ㉡
$\overline{CP}=5$에서 $\sqrt{(x-a)^2+(y-0)^2}=5$
$\therefore (x-a)^2+y^2=25$ ······ ㉢
㉠$-$㉡을 하면 $a^2-2ay=40$
$-2ay=-a^2+40 \qquad \therefore y=\frac{a^2-40}{2a}$ ······ ㉣
㉢$-$㉡을 하면 $a^2-2ax=16$
$-2ax=-a^2+16 \qquad \therefore x=\frac{a^2-16}{2a}$ ······ ㉤
㉣, ㉤을 ㉡에 대입하면
$\left(\frac{a^2-16}{2a}\right)^2+\left(\frac{a^2-40}{2a}\right)^2=9$
$a^4-74a^2+928=0$, $(a^2-16)(a^2-58)=0$
$(a+4)(a-4)(a+\sqrt{58})(a-\sqrt{58})=0$
$\therefore a=4$ 또는 $a=\sqrt{58}$ $(\because a>0)$

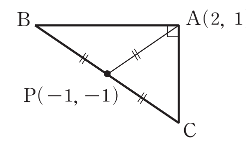
그런데 $a=4$이면 삼각형 OAP에서 $3+4=7$, 즉 가장 긴 변의 길이가 나머지 두 변의 길이의 합과 같으므로 삼각형이 만들어지지 않는다.
$\therefore a=\sqrt{58}$
따라서 정사각형 ABCD의 한 변의 길이는 $\sqrt{58}$이므로 구하는 넓이는
$(\sqrt{58})^2=58$

### 042

**같은 거리에 있는 점의 좌표**

전략 주어진 삼각형이 직각삼각형임을 알고 삼각형의 외심에서 세 꼭짓점에 이르는 거리가 같음을 이용한다.

풀이 삼각형 ABC의 외심 P가 변 BC 위에 있으므로 삼각형 ABC는 변 BC를 빗변으로 하는 직각삼각형이다.



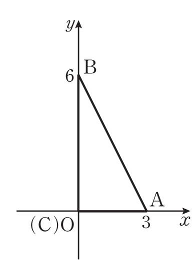

$\therefore \overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$ ······ ㉠
이때 삼각형 ABC의 외심 P에서 세 꼭짓점에 이르는 거리가 같으므로
$\overline{BC}=2\overline{PA}$
$=2\sqrt{\{2-(-1)\}^2+\{1-(-1)\}^2}$
$=2\sqrt{13}$
따라서 $\overline{BC}^2=(2\sqrt{13})^2=52$이므로 ㉠에서
$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2=52$

### 043

**거리의 제곱의 합의 최솟값**

전략 주어진 직각삼각형을 좌표평면 위에 나타내어 거리의 제곱의 합의 최솟값을 구한다.

풀이 주어진 직각삼각형을 꼭짓점 C가 원점, 변 AC가 $x$축, 변 BC가 $y$축에 놓이도록 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.




$\overline{AC}=3$, $\overline{BC}=6$이므로
$A(3, 0)$, $B(0, 6)$
점 P의 좌표를 $(a, b)$라 하면
$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$
$=\{(a-3)^2+b^2\}+\{a^2+(b-6)^2\}+(a^2+b^2)$
$=3a^2-6a+3b^2-12b+45$
$=3(a-1)^2+3(b-2)^2+30$
따라서 $a=1$, $b=2$일 때 구하는 최솟값은 30이다.

### 044

**선분의 내분점**

전략 내분점 공식을 이용하여 점 P의 좌표를 구하고, 점 P가 제2사분면 위에 있기 위한 $x$좌표와 $y$좌표의 조건을 이용한다.

풀이 선분 AB를 $t:(2-t)$로 내분하는 점 P의 좌표는
$\left(\frac{t\times7+(2-t)\times(-3)}{t+(2-t)},\ \frac{t\times4+(2-t)\times1}{t+(2-t)}\right)$
$\therefore \left(5t-3,\ \frac{3}{2}t+1\right)$

이때 점 P가 제2사분면 위에 있으므로

$5t-3<0$, $\frac{3}{2}t+1>0$

$5t-3<0$에서 $t<\frac{3}{5}$ ...... ㉠

$\frac{3}{2}t+1>0$에서 $t>-\frac{2}{3}$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $-\frac{2}{3}<t<\frac{3}{5}$

그런데 $0<t<1$이므로 $0<t<\frac{3}{5}$

$0<15t<9$에서 $15t$가 될 수 있는 정수는 1, 2, 3, ⋯, 8이므로 각각에 대하여 실수 $t$의 값은 $\frac{1}{15}$, $\frac{2}{15}$, $\frac{3}{15}$, ⋯, $\frac{8}{15}$이다.

따라서 조건을 만족시키는 실수 $t$의 개수는 8이다.

## 045

**선분의 내분점의 활용**

전략 곡선의 방정식과 직선의 방정식을 연립하여 구한 해가 교점의 $x$좌표임을 이해하고 이를 이용하여 내분점의 좌표를 구한다.

풀이 곡선 $y=x^2-2x$와 직선 $y=3x+k$ $(k>0)$가 두 점 P, Q에서 만나므로 두 점 P, Q의 $x$좌표를 각각 $\alpha$, $\beta$라 하면 이차방정식 $x^2-2x=3x+k$, 즉 $x^2-5x-k=0$의 실근이 $\alpha$, $\beta$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=5$ ...... ㉠

$\alpha\beta=-k$ ...... ㉡

또, 선분 PQ를 1 : 2로 내분하는 점의 $x$좌표가 1이므로

$\frac{1\times\beta+2\times\alpha}{1+2}=1$ $\quad\therefore 2\alpha+\beta=3$ ...... ㉢

㉠, ㉢을 연립하여 풀면

$\alpha=-2$, $\beta=7$

㉡에서 $k=-\alpha\beta=-(-2)\times7=14$

> **개념 보충**
>
> **이차방정식의 근과 계수의 관계**
>
> 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 $\alpha$, $\beta$라 하면
>
> $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

## 046

**선분의 내분점의 활용**

전략 $k\overline{AC}=\overline{BC}$를 비례식으로 나타내어 점 C가 어떤 점인지 파악한다.

풀이 $k\overline{AC}=\overline{BC}$에서 $\overline{AC}:\overline{BC}=1:k$이므로 점 C는 선분 AB를 $1:k$로 내분하는 점이다.

즉, 점 C의 좌표는

$\left(\frac{1\times0+k\times(-2)}{1+k}, \frac{1\times5+k\times0}{1+k}\right)$

$\therefore \left(\frac{-2k}{1+k}, \frac{5}{1+k}\right)$

점 C가 직선 $x+2y=1$ 위에 있으므로

$\frac{-2k}{1+k}+2\times\frac{5}{1+k}=1$, $-2k+10=1+k$

$-3k=-9$ $\quad\therefore k=3$

## 047

**선분의 내분점의 활용**

전략 두 점 A, B의 좌표를 각각 $(\alpha, 2-\alpha^2)$, $(\beta, 2-\beta^2)$으로 놓고, 한 점의 좌표를 구한 후 그 점이 직선 $y=kx$ 위의 점임을 이용한다.

풀이 $A(\alpha, 2-\alpha^2)$, $B(\beta, 2-\beta^2)$ $(\alpha<0, \beta>0)$이라 하면 $\overline{OA}:\overline{OB}=2:1$이므로 원점 O는 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점이다.

$\frac{2\times\beta+1\times\alpha}{2+1}=0$에서 $\alpha=-2\beta$ ...... ㉠

$\frac{2\times(2-\beta^2)+1\times(2-\alpha^2)}{2+1}=0$에서

$6-2\beta^2-\alpha^2=0$ ...... ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $6-2\beta^2-(-2\beta)^2=0$

$-6\beta^2=-6$, $\beta^2=1$ $\quad\therefore \beta=1$ $(\because \beta>0)$

$\therefore B(1, 1)$

이때 점 B(1, 1)이 직선 $y=kx$ 위의 점이므로

$k=1$

## 048

**선분의 내분점의 사각형에서의 활용**

전략 평행사변형의 두 대각선의 중점은 서로 일치하는 성질과 평행사변형 ABCD의 둘레의 길이를 이용하여 점 D의 좌표를 구한다.

풀이 점 D의 좌표를 $(a, b)$라 하면 대각선 AC의 중점과 대각선 BD의 중점이 일치하므로

$\frac{2+1}{2}=\frac{3+a}{2}$에서 $a=0$

$\frac{3+k}{2}=\frac{5+b}{2}$에서 $k=b+2$ ...... ㉠

평행사변형 ABCD의 둘레의 길이가 $6\sqrt{5}$이므로

$\overline{AB}+\overline{AD}=3\sqrt{5}$

$\sqrt{(3-2)^2+(5-3)^2}+\sqrt{(a-2)^2+(b-3)^2}=3\sqrt{5}$

$\sqrt{b^2-6b+13}=2\sqrt{5}$ $(\because a=0)$

양변을 제곱하면 $b^2-6b+13=20$

$b^2-6b-7=0$, $(b+1)(b-7)=0$

$\therefore b=-1$ 또는 $b=7$

(i) $b=-1$일 때, ㉠에서 $k=1$

(ii) $b=7$일 때, ㉠에서 $k=9$

(i), (ii)에서 가능한 실수 $k$의 값의 합은

$1+9=10$

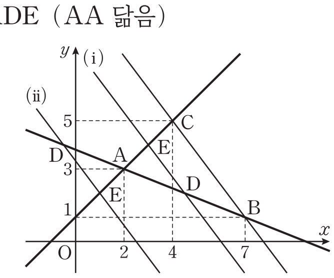
## 049

**선분의 내분점의 삼각형에서의 활용**

전략 △ABC, △ADE의 닮음비를 이용하여 두 점 A, D의 특징을 파악한다.

풀이 다음 그림에서 직선 BC와 직선 DE가 서로 평행하므로

△ABC∽△ADE (AA 닮음)



두 삼각형 ABC와 ADE의 넓이의 비가 $4:1=2^2:1^2$이므로 닮음비는

$\overline{AB}:\overline{AD}=2:1$

따라서 점 D는 선분 AB의 중점이거나 점 A가 선분 BD를 $2:1$로 내분하는 점이다.

(i) 점 D가 선분 AB의 중점일 때,

선분 AB의 중점의 좌표는

$\left(\frac{2+7}{2}, \frac{3+1}{2}\right)$, 즉 $\left(\frac{9}{2}, 2\right)$

따라서 점 D의 좌표는 $\left(\frac{9}{2}, 2\right)$이다.

(ii) 점 A가 선분 BD를 $2:1$로 내분하는 점일 때,

점 D의 좌표를 $(a, b)$라 하면 점 A는 선분 BD를 $2:1$로 내분하는 점이므로

$\frac{2\times a+7\times 1}{2+1}=2$에서 $2a+7=6$

$\therefore a=-\frac{1}{2}$

$\frac{2\times b+1\times 1}{2+1}=3$에서 $2b+1=9$

$\therefore b=4$

따라서 점 D의 좌표는 $\left(-\frac{1}{2}, 4\right)$이다.

(i), (ii)에서 모든 점 D의 $y$좌표의 곱은 $2\times 4=8$

## 050

**선분의 내분점의 삼각형에서의 활용**

(전략) 각의 이등분선의 성질을 이용하여 두 선분 OB와 BH의 길이를 구하고, 내분점의 공식을 이용하여 두 점 C, D의 좌표를 구한다.

(풀이) $\overline{OA}=\sqrt{12^2+16^2}=20$, $\overline{AH}=12$

각의 이등분선의 성질에 의하여

$\overline{OB}:\overline{BH}=\overline{OA}:\overline{AH}=20:12=5:3$이므로

$\overline{OB}=\frac{5}{8}\overline{OH}=\frac{5}{8}\times 16=10$

$\overline{BH}=\frac{3}{8}\overline{OH}=\frac{3}{8}\times 16=6$

B$(10, 0)$이고, 두 점 C, D는 각각 두 선분 AB, BO를 $(1-k):k$로 내분하는 점이므로 점 C의 좌표는

$\left(\frac{(1-k)\times 10+k\times 16}{(1-k)+k}, \frac{(1-k)\times 0+k\times 12}{(1-k)+k}\right)$에서

$(6k+10, 12k)$

점 D의 좌표는

$\left(\frac{0\times(1-k)+k\times 10}{(1-k)+k}, 0\right)$에서 $(10k, 0)$

삼각형 BCD의 밑변의 길이를 $\overline{BD}=10-10k$라 하면 높이는 $12k$이므로 삼각형 BCD의 넓이는

$\frac{1}{2}\times(10-10k)\times 12k=\frac{45}{4}$

$\therefore 16k^2-16k+3=0$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 $k$의 값의 곱은 $\frac{3}{16}$이다.

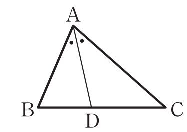
**개념 보충**

**삼각형의 각의 이등분선의 성질**

삼각형 ABC에서 ∠A의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 D라 하면

⇨ $\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}$

⇨ 점 D는 $\overline{BC}$를 $\overline{AB}:\overline{AC}$로 내분하는 점이다.




## 051

**삼각형의 무게중심**

(전략) 두 점 B, C의 좌표를 임의로 놓고 주어진 조건을 이용하여 관계식을 구한다.

(풀이) B$(a_1, b_1)$, C$(a_2, b_2)$라 하면 두 점 M, N은 두 변 AB, AC의 중점이므로

$x_1=\frac{1+a_1}{2}$, $y_1=\frac{6+b_1}{2}$

$x_2=\frac{1+a_2}{2}$, $y_2=\frac{6+b_2}{2}$

$x_1+x_2=2$, $y_1+y_2=4$이므로

$\frac{1+a_1}{2}+\frac{1+a_2}{2}=2 \qquad \therefore a_1+a_2=2$

$\frac{6+b_1}{2}+\frac{6+b_2}{2}=4 \qquad \therefore b_1+b_2=-4$

따라서 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{1+a_1+a_2}{3}, \frac{6+b_1+b_2}{3}\right)$에서 $\left(\frac{1+2}{3}, \frac{6+(-4)}{3}\right)$

$\therefore \left(1, \frac{2}{3}\right)$

## 052

**삼각형의 무게중심**

(전략) 직선의 방정식을 연립하여 두 점 A, B의 좌표를 구한다.

(풀이) 두 직선 $y=3x$와 $y=-2x+k$의 교점 A의 좌표는

$3x=-2x+k$에서

$x=\frac{k}{5}$, $y=3\times\frac{k}{5}=\frac{3}{5}k$

$\therefore$ A$\left(\frac{k}{5}, \frac{3}{5}k\right)$

또, 두 직선 $y=\frac{1}{2}x$와 $y=-2x+k$의 교점 B의 좌표는

$\frac{1}{2}x=-2x+k$에서

$x=\frac{2}{5}k$, $y=\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}k=\frac{k}{5}$

$\therefore$ B$\left(\frac{2}{5}k, \frac{k}{5}\right)$

이때 삼각형 OAB의 무게중심의 좌표가 $\left(2, \frac{8}{3}\right)$이므로

$\frac{0+\frac{k}{5}+\frac{2}{5}k}{3}=2$, $\frac{0+\frac{3}{5}k+\frac{k}{5}}{3}=\frac{8}{3}$

$\therefore k=10$

## 053

삼각형의 무게중심

전략 두 점 C, D가 각각 두 선분 OA, OB의 중점임을 이용하여 점 E의 좌표와 △OAB 사이의 관계를 파악한다.

풀이 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$라 하면 두 점 C, D의 좌표는 각각 $\left(\frac{x_1}{2}, \frac{y_1}{2}\right)$, $\left(\frac{x_2}{2}, \frac{y_2}{2}\right)$이다.

삼각형 OCD의 무게중심의 좌표가 $(3, 4)$이므로

$$\frac{0+\frac{x_1}{2}+\frac{x_2}{2}}{3}=3,\ \frac{0+\frac{y_1}{2}+\frac{y_2}{2}}{3}=4$$

$\therefore x_1+x_2=18,\ y_1+y_2=24$

두 점 C, D는 각각 선분 AO, BO의 중점이므로 두 선분 AD, BC는 삼각형 OAB의 중선이고, 점 $E(p, q)$는 삼각형 OAB의 무게중심이다.

따라서 $p=\frac{0+x_1+x_2}{3}=\frac{18}{3}=6,\ q=\frac{0+y_1+y_2}{3}=\frac{24}{3}=8$이므로

$p+q=6+8=14$

## 도전 1등급 최고난도

19쪽

**054** ① **055** $(6, -6)$

## 054

삼각형의 무게중심

1단계 점 D가 선분 BC의 중점이므로 중선정리를 이용하여 선분 AC의 길이를 구한다.

점 D가 선분 BC의 중점이므로 중선정리에 의하여

$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AD}^2+\overline{CD}^2)$에서

$(2\sqrt{3})^2+\overline{AC}^2=2\{(\sqrt{7})^2+1^2\}$

$\overline{AC}^2=4$

$\therefore \overline{AC}=2\ (\because \overline{AC}>0)$

2단계 $\overline{AP}$, $\overline{DP}$, $\overline{CP}$, $\overline{PE}$의 길이를 구한다.

즉, 삼각형 ABC는 $\overline{AC}=\overline{BC}$인 이등변삼각형이므로 선분 CE는 선분 AB의 수직이등분선이다.

직각삼각형 CEB에서 $\overline{BE}=\sqrt{3}$이고

$\overline{CE}=\sqrt{\overline{BC}^2-\overline{BE}^2}=\sqrt{2^2-(\sqrt{3})^2}=1$

이때 점 P가 삼각형 ABC의 무게중심이므로

$$\overline{AP}=\frac{2}{3}\overline{AD}=\frac{2}{3}\times\sqrt{7}=\frac{2\sqrt{7}}{3}$$

$$\overline{DP}=\frac{1}{3}\overline{AD}=\frac{1}{3}\times\sqrt{7}=\frac{\sqrt{7}}{3}$$

$$\overline{CP}=\frac{2}{3}\overline{CE}=\frac{2}{3}\times1=\frac{2}{3}$$

$$\overline{PE}=\frac{1}{3}\overline{CE}=\frac{1}{3}\times1=\frac{1}{3}$$

3단계 삼각형의 각의 이등분선의 성질을 이용하여 $S_1$, $S_2$를 $S$에 대한 식으로 나타낸다.

삼각형 APE에서 선분 PR이 각 APE의 이등분선이므로

$$\begin{aligned}\overline{AR}:\overline{ER}&=\overline{AP}:\overline{PE}\\&=\frac{2\sqrt{7}}{3}:\frac{1}{3}\\&=2\sqrt{7}:1\end{aligned}$$

삼각형 ABC의 넓이를 $S$라 하면 삼각형 APE의 넓이는 $\frac{1}{6}S$이므로

$$\begin{aligned}S_1&=\frac{1}{6}S\times\frac{1}{2\sqrt{7}+1}\\&=\frac{S}{6(2\sqrt{7}+1)}\end{aligned}\quad\cdots\cdots ㉠$$

같은 방법으로 삼각형 CPD에서

$$\begin{aligned}\overline{DQ}:\overline{CQ}&=\overline{PD}:\overline{CP}\\&=\frac{\sqrt{7}}{3}:\frac{2}{3}\\&=\sqrt{7}:2\end{aligned}$$

삼각형 CPD의 넓이도 $\frac{1}{6}S$이므로

$$\begin{aligned}S_2&=\frac{1}{6}S\times\frac{2}{\sqrt{7}+2}\\&=\frac{S}{3(\sqrt{7}+2)}\end{aligned}\quad\cdots\cdots ㉡$$

4단계 $\frac{S_2}{S_1}$의 값을 구하고 이를 이용하여 $a$, $b$의 값을 구한다.

㉠, ㉡에서

$$\begin{aligned}\frac{S_2}{S_1}&=\frac{\frac{S}{3(\sqrt{7}+2)}}{\frac{S}{6(2\sqrt{7}+1)}}\\&=\frac{2(2\sqrt{7}+1)}{\sqrt{7}+2}\\&=\frac{2(2\sqrt{7}+1)(\sqrt{7}-2)}{(\sqrt{7}+2)(\sqrt{7}-2)}\\&=8-2\sqrt{7}\end{aligned}$$

따라서 $a=8$, $b=-2$이므로

$ab=8\times(-2)=-16$

## 055

삼각형의 무게중심

1단계 두 직선 $l_1$, $l_2$를 이용하여 세 점 A, B, C의 좌표를 구하고, 세 변 AB, BC, CA의 길이를 이용하여 삼각형 ABC의 특징을 파악한다.

두 직선 $l_1$, $l_2$의 교점의 좌표는 연립방정식 $\begin{cases}2x-y+2=0\\x+2y-4=0\end{cases}$의 해와 같으므로 $x=0$, $y=2$

$\therefore A(0, 2)$

직선 $l_1: 2x-y+2=0$의 $x$절편은 $-1$이므로 $B(-1, 0)$이고, 직선 $l_2: x+2y-4=0$의 $x$절편은 4이므로 $C(4, 0)$이다.

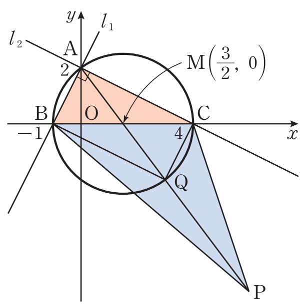
$\overline{AB}=\sqrt{(-1-0)^2+(0-2)^2}=\sqrt{5}$

$\overline{BC}=4-(-1)=5$

$\overline{CA}=\sqrt{(4-0)^2+(0-2)^2}=2\sqrt{5}$

$\therefore \overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{CA}^2$

따라서 삼각형 ABC는 변 BC를 빗변으로 하는 직각삼각형이고, 삼각형 ABC의 외접원의 중심을 M이라 하면 점 M은 선분 BC의 중점이므로 점 M의 좌표는 $\left(\frac{-1+4}{2}, 0\right)$, 즉 $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$이다.




(2단계) 삼각형 BPC의 넓이 조건을 이용하여 점 P의 $y$좌표를 구하고, 이를 이용하여 점 Q의 $y$좌표를 유추한다.

삼각형 BPC와 삼각형 ABC는 변 BC를 공통으로 가지므로 두 삼각형의 넓이의 비는 높이의 비와 같다.
즉, 삼각형 BPC의 넓이가 삼각형 ABC의 넓이의 3배이므로 삼각형 BPC의 높이가 삼각형 ABC의 높이의 3배이다.
삼각형 ABC의 높이가 2이므로 삼각형 BPC의 높이는 6이고, 점 P의 $y$좌표는 $-6$이다.
또, 점 Q가 삼각형 BPC의 무게중심이므로 점 Q의 $y$좌표는

$$\frac{0+0+(-6)}{3}=-2$$

(3단계) 점 Q가 삼각형 ABC의 외접원 위에 있음을 이용하여 점 Q의 좌표를 구하고, 이를 이용하여 점 P의 좌표를 구한다.

점 Q가 삼각형 ABC의 외접원 위에 있으므로 삼각형 ABC와 삼각형 QCB는 RHS 합동이다.
사각형 ABQC는 직사각형이므로 점 $M\left(\frac{3}{2}, 0\right)$은 선분 AQ의 중점이다.
점 Q의 $x$좌표를 $a$라 하면

$$\frac{0+a}{2}=\frac{3}{2}$$

$\therefore a=3$

$\therefore Q(3, -2)$

점 P의 좌표를 $(p, -6)$이라 하면 점 Q가 삼각형 BPC의 무게중심이므로

$$\frac{(-1)+4+p}{3}=3$$

$\therefore p=6$

따라서 점 P의 좌표는 $(6, -6)$이다.

# 02 직선의 방정식

## 유형 분석 기출

● 21쪽~28쪽

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 056 ② | 057 16 | 058 ⑤ | 059 ① | 060 2 |
| 061 ① | 062 ③ | 063 ② | 064 1 | 065 2 |
| 066 ⑤ | 067 ② | 068 18 | 069 ④ | 070 $-25$ |
| 071 ② | 072 ⑤ | 073 ④ | 074 ② | 075 $-48$ |
| 076 ② | 077 $\left(-\frac{3}{5}, \frac{14}{5}\right)$ | | 078 0 | 079 ⑤ |
| 080 $\frac{1}{25}$ | 081 $-10$ | 082 $-\frac{7}{4}$ | 083 ② | 084 ③ |
| 085 ① | 086 ① | 087 ⑤ | 088 $-18$ | 089 ② |
| 090 14 | 091 $\sqrt{5}$ | 092 ⑤ | 093 ③ | 094 4 |
| 095 125 | 096 $\frac{11}{2}$ | 097 30 | 098 $\frac{15}{4}$ | |

### 056

$\tan 60^\circ=\sqrt{3}$ 이므로 직선의 기울기는 $\sqrt{3}$ 이다.
따라서 점 $(-\sqrt{3}, -1)$을 지나고 기울기가 $\sqrt{3}$ 인 직선의 방정식은

$y-(-1)=\sqrt{3}\{x-(-\sqrt{3})\}$

$y+1=\sqrt{3}(x+\sqrt{3})$

$\therefore y=\sqrt{3}x+2$

**개념 보충**

직선이 $x$축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $x^\circ$일 때,
⇨ (기울기)$=\tan x^\circ$ (단, $0^\circ \le x^\circ < 90^\circ$)

### 057

두 점 $(3, -8)$, $(5, 4)$를 이은 선분의 중점의 좌표는

$\left(\frac{3+5}{2}, \frac{-8+4}{2}\right)$ $\quad \therefore (4, -2)$

따라서 점 $(4, -2)$를 지나고 기울기가 $-6$인 직선의 방정식은

$y-(-2)=-6(x-4)$ $\quad \therefore y=-6x+22$

즉, $a=-6$, $b=22$이므로

$a+b=-6+22=16$

**개념 보충**

좌표평면 위의 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$에 대하여 선분 AB의 중점의 좌표는
⇨ $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

### 058

두 점 $(-3, 4)$, $(2, -6)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-4=\frac{-6-4}{2-(-3)}\{x-(-3)\}$

$y-4=-2(x+3)$ $\quad \therefore y=-2x-2$

직선 $y=-2x-2$가 점 $(a, a+1)$을 지나므로

$a+1=-2a-2$, $3a=-3$

$\therefore a=-1$

## 059

세 점이 한 직선 위에 있으려면 직선 AB의 기울기와 직선 AC의 기울기가 서로 같아야 하므로

$\dfrac{1-a}{1-(-1)}=\dfrac{-7-a}{a-(-1)}$

$(1-a)(a+1)=2(-7-a)$

$-a^2+1=-2a-14$

$a^2-2a-15=0$, $(a-5)(a+3)=0$

$\therefore a=5$ ($\because a>0$)

**1등급 비법**

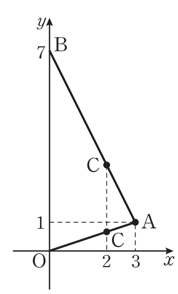
세 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$이 한 직선 위에 있으면

① (직선 AB의 기울기)=(직선 BC의 기울기)=(직선 CA의 기울기)

⇨ $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y_3-y_2}{x_3-x_2}=\dfrac{y_1-y_3}{x_1-x_3}$

② 두 점 A, B를 지나는 직선 위에 점 C가 있다.

## 060




점 C의 $x$좌표가 2이므로 주어진 조건을 만족시키려면 오른쪽 그림과 같이 점 C가 선분 OA 또는 선분 AB 위에 있어야 한다.

(i) 점 C가 선분 OA 위에 있을 때,

(직선 OA의 기울기)

=(직선 OC의 기울기)

이므로

$\dfrac{1}{3}=\dfrac{a}{2}$ $\quad\therefore a=\dfrac{2}{3}$

(ii) 점 C가 선분 AB 위에 있을 때,

(직선 AB의 기울기)=(직선 AC의 기울기)

이므로

$\dfrac{6}{-3}=\dfrac{a-1}{2-3}$, $-2=1-a$ $\quad\therefore a=3$

(i), (ii)에서 모든 $a$의 값의 곱은

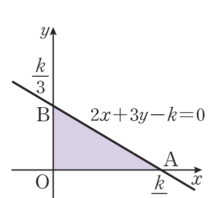
$\dfrac{2}{3}\times 3=2$

## 061

$2x+3y-k=0$에

$y=0$을 대입하여 풀면 $x=\dfrac{k}{2}$

$x=0$을 대입하여 풀면 $y=\dfrac{k}{3}$




즉, $x$절편이 $\dfrac{k}{2}$, $y$절편이 $\dfrac{k}{3}$이고 $k$는 양수이므로 직선 $2x+3y-k=0$은 오른쪽 그림과 같다.

이때 △OAB의 넓이가 12이므로

$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{k}{2}\times\dfrac{k}{3}=12$, $k^2=144$

$\therefore k=12$ ($\because k>0$)

따라서 두 점 $(12, 1)$, $(12, 3)$을 지나는 직선의 방정식은

$x=12$

## 062

직사각형 ABCD의 세로의 길이를 $a$라 하면 가로의 길이는 $3a$이고, 둘레의 길이가 32이므로

$2(a+3a)=32$, $8a=32$ $\quad\therefore a=4$

즉, 직사각형 ABCD의 세로의 길이는 4, 가로의 길이는 12이므로

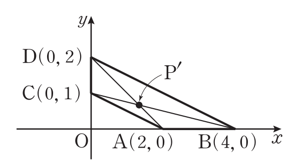
$B(-8, -1)$, $D(4, 3)$

따라서 두 점 B, D를 지나는 직선의 방정식은

$y-(-1)=\dfrac{3-(-1)}{4-(-8)}\{x-(-8)\}$

$y+1=\dfrac{1}{3}(x+8)$ $\quad\therefore y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{5}{3}$

## 063




오른쪽 그림에서 두 대각선 AD, BC의 교점을 P′이라 하면

$\overline{PA}+\overline{PD}\geq\overline{P'A}+\overline{P'D}=\overline{AD}$

$\overline{PB}+\overline{PC}\geq\overline{P'B}+\overline{P'C}=\overline{BC}$

따라서 $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}$의 값이 최소가 되도록 하는 점 P는 사각형 ABDC의 두 대각선 AD, BC의 교점 P′과 일치해야 한다.

두 점 A, D를 지나는 직선의 방정식은

$\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{2}=1$ $\quad\therefore y=-x+2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

두 점 B, C를 지나는 직선의 방정식은

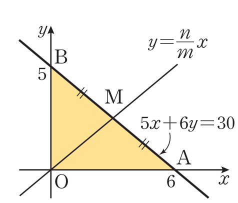
$\dfrac{x}{4}+y=1$ $\quad\therefore y=-\dfrac{1}{4}x+1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=\dfrac{4}{3}$, $y=\dfrac{2}{3}$

따라서 점 P의 좌표는 $\left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$이므로 $a=\dfrac{4}{3}$, $b=\dfrac{2}{3}$

$\therefore a-b=\dfrac{4}{3}-\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{3}$

## 064




$5x+6y=30$에서 $\dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{5}=1$

직선 $\dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{5}=1$이 $x$축과 만나는 점을 A, $y$축과 만나는 점을 B라 하자.

직선 $\dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{5}=1$과 $x$축, $y$축으로 둘러싸인 부분은 위의 그림에서 삼각형 OAB이므로 원점을 지나는 직선 $y=\dfrac{n}{m}x$가 삼각형 OAB의 넓이를 이등분하려면 직선 $y=\dfrac{n}{m}x$가 선분 AB의 중점 M을 지나야 한다.

이때 A$(6, 0)$, B$(0, 5)$이므로 선분 AB의 중점 M의 좌표는

$\left(\frac{6+0}{2}, \frac{0+5}{2}\right)$ $\quad \therefore \left(3, \frac{5}{2}\right)$

따라서 $x=3$, $y=\frac{5}{2}$를 $y=\frac{n}{m}x$에 대입하면

$\frac{5}{2}=\frac{n}{m}\times 3$ $\quad \therefore \frac{n}{m}=\frac{5}{6}$

즉, $m=6$, $n=5$이므로

$m-n=6-5=1$

## 065

두 직사각형의 넓이를 동시에 이등분하는 직선은 두 직사각형의 대각선의 교점을 모두 지나야 한다.

오른쪽 직사각형의 네 꼭짓점의 좌표는

$(2, 3)$, $(2, 7)$, $(8, 3)$, $(8, 7)$

왼쪽 직사각형의 네 꼭짓점의 좌표는

$(-4, 3)$, $(-4, -5)$, $(-2, 3)$, $(-2, -5)$

이때 두 직사각형의 대각선의 교점의 좌표는 각각

두 대각선의 교점은 한 대각선의 중점과 같다.

$\left(\frac{2+8}{2}, \frac{3+7}{2}\right)$에서 $(5, 5)$

$\left(\frac{-4+(-2)}{2}, \frac{3+(-5)}{2}\right)$에서 $(-3, -1)$

따라서 두 점 $(5, 5)$, $(-3, -1)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-5=\frac{-1-5}{-3-5}(x-5)$, $y-5=\frac{3}{4}(x-5)$

$\therefore y=\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$

따라서 $a=\frac{3}{4}$, $b=\frac{5}{4}$이므로

$a+b=\frac{3}{4}+\frac{5}{4}=2$

## 066

두 점 A$(5, 3)$, C$(4, -1)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-3=\frac{-1-3}{4-5}(x-5)$

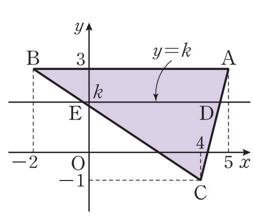
$\therefore y=4x-17$

두 점 B$(-2, 3)$, C$(4, -1)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-3=\frac{-1-3}{4-(-2)}\{x-(-2)\}$

$\therefore y=-\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}$

오른쪽 그림과 같이 직선 $y=k$가 두 직선 AC, BC와 만나는 점을 각각 D, E라 하자.




점 D의 $x$좌표는 $4x-17=k$에서

$x=\frac{k+17}{4}$

점 E의 $x$좌표는 $-\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}=k$에서

$x=\frac{5-3k}{2}$

$\therefore \overline{DE}=\frac{k+17}{4}-\frac{5-3k}{2}=\frac{7(k+1)}{4}$

$\triangle CDE=\frac{1}{2}\triangle ABC=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 7\times 4=7$

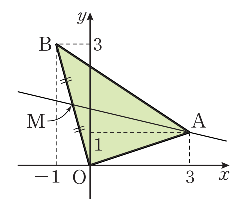
이므로 $\frac{1}{2}\times\frac{7(k+1)}{4}\times(k+1)=7$

$(k+1)^2=8$ $\quad \therefore k=2\sqrt{2}-1$ ($\because -1<k<3$)

## 067

직선 $y=m(x-3)+1$은 $m$의 값에 관계없이 항상 점 $(3, 1)$을 지나므로 이 직선은 항상 점 A를 지난다.

따라서 이 직선이 삼각형 OAB의 넓이를 이등분하려면 오른쪽 그림과 같이 선분 OB의 중점 M$\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$을 지나야 한다.




$\frac{3}{2}=m\left(-\frac{1}{2}-3\right)+1$에서

$\frac{7}{2}m=-\frac{1}{2}$ $\quad \therefore m=-\frac{1}{7}$

## 068

주어진 식을 $m$에 대하여 정리하면

$m(x+1)+(y-1)=0$

이 등식이 $m$에 대한 항등식이므로

$x+1=0$, $y-1=0$ $\quad \therefore x=-1$, $y=1$

즉, 주어진 직선은 실수 $m$의 값에 관계없이 항상 점 $(-1, 1)$을 지난다.

이 직선이 $m$의 값에 관계없이 항상 직사각형 ABCD의 넓이를 이등분하려면 점 $(-1, 1)$이 대각선 AC의 중점과 일치해야 한다.

이때 선분 AC의 중점의 좌표는 $\left(\frac{p+1}{2}, \frac{q+5}{2}\right)$이므로

$\frac{p+1}{2}=-1$, $\frac{q+5}{2}=1$

따라서 $p=-3$, $q=-3$이므로

$p^2+q^2=9+9=18$

**1등급 비법**

등식이 실수 $k$의 값에 관계없이 항상 성립하면 이 등식은 $k$에 대한 항등식이므로 $\blacktriangle\times k+\blacksquare=0$ 꼴로 정리하여 항등식의 성질을 이용한다.

## 069

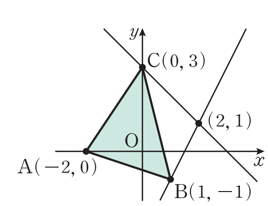
직선 $y=2m(x-2)+1$은 실수 $m$의 값에 관계없이 항상 점 $(2, 1)$을 지난다.

이때 주어진 직선이 삼각형 ABC와 만나도록 움직여 보면

(i) 직선 $y=2m(x-2)+1$이 점 B$(1, -1)$을 지날 때,

$-1=-2m+1$

$\therefore m=1$



(ii) 직선 $y=2m(x-2)+1$이 점 $C(0, 3)$을 지날 때,

$3=-4m+1 \qquad \therefore m=-\frac{1}{2}$

(i), (ii)에서 실수 $m$의 값의 범위는

$-\frac{1}{2} \le m \le 1$

따라서 실수 $m$의 최댓값은 1이다.

## 070

주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$x+7y+5+k(x+2y-1)=0$ ($k$는 실수)이라 하면

$(k+1)x+(2k+7)y-k+5=0$ …… ㉠

이 직선의 기울기가 7이므로

$-\frac{k+1}{2k+7}=7$, $-k-1=14k+49$

$15k=-50 \qquad \therefore k=-\frac{10}{3}$

이것을 ㉠에 대입하면

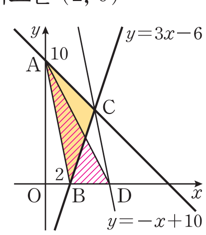
$-\frac{7}{3}x+\frac{1}{3}y+\frac{25}{3}=0 \qquad \therefore y=7x-25$

따라서 구하는 $y$절편은 $-25$이다.

## 071

직선 $y=-x+10$의 $y$절편이 10이므로 점 A의 좌표는 $(0, 10)$

직선 $y=3x-6$의 $x$절편이 2이므로 점 B의 좌표는 $(2, 0)$




$x$축 위의 점 $D(a, 0)$ $(a>2)$에 대하여 삼각형 ABD의 넓이가 삼각형 ABC의 넓이와 같으려면 점 C를 지나고 기울기가 직선 AB와 같은 직선이 $x$축과 만나는 점이 D이면 된다.

두 직선 $y=-x+10$, $y=3x-6$의 교점 C를 지나는 직선의 방정식을

$x+y-10+k(3x-y-6)=0$ ($k$는 실수)이라 하면

$(1+3k)x+(1-k)y-10-6k=0$ …… ㉠

이 직선의 기울기가 직선 AB의 기울기 $\frac{0-10}{2-0}=-5$와 같아야 하므로

$\frac{1+3k}{k-1}=-5$, $1+3k=5-5k \qquad \therefore k=\frac{1}{2}$

$k=\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면

$\frac{5}{2}x+\frac{1}{2}y-13=0$

따라서 점 D의 좌표는 $\left(\frac{26}{5}, 0\right)$이므로 $a=\frac{26}{5}$

## 072

두 직선이 서로 수직이므로

$3\times(k-1)+(-k)\times1=0$

$3k-3-k=0$, $2k=3 \qquad \therefore k=\frac{3}{2}$

## 073

두 직선이 평행하려면

$\frac{k}{1}=\frac{k+3}{k-1}\ne\frac{-3}{3}$ …… ㉠

두 직선이 일치하려면

$\frac{k}{1}=\frac{k+3}{k-1}=\frac{-3}{3}$ …… ㉡

$\frac{k}{1}=\frac{k+3}{k-1}$에서 $k^2-k=k+3$

$k^2-2k-3=0$, $(k+1)(k-3)=0$

$\therefore k=-1$ 또는 $k=3$

(i) $k=-1$일 때, ㉡을 만족시키므로 두 직선은 일치한다.

(ii) $k=3$일 때, ㉠을 만족시키므로 두 직선은 서로 평행하다.

따라서 $a=3$, $b=-1$이므로

$a-b=3-(-1)=4$

## 074

주어진 두 직선이 서로 평행하므로

$\frac{1-m}{2}=\frac{3}{-m}\ne\frac{1-2m}{5}$

$\frac{1-m}{2}=\frac{3}{-m}$에서 $-m+m^2=6$

$m^2-m-6=0$, $(m+2)(m-3)=0$

$\therefore m=-2$ 또는 $m=3$

(i) $m=-2$일 때,

$\frac{1-(-2)}{2}=\frac{3}{-(-2)}\ne\frac{1-2\times(-2)}{5}$

이므로 두 직선은 서로 평행하다.

(ii) $m=3$일 때,

$\frac{1-3}{2}=\frac{3}{-3}=\frac{1-2\times3}{5}$

이므로 두 직선은 일치한다.

(i), (ii)에서 $m=-2$일 때, 두 직선이 서로 평행하므로 구하는 직선의 기울기는

$\frac{m-1}{3}=\frac{-2-1}{3}=-1$

**오답 피하기** 두 직선의 기울기가 같을 때, 두 직선은 서로 평행할 수도 있고 일치할 수도 있다.

따라서 $m=-2$일 때와 $m=3$일 때로 나누어 각각의 경우에 두 직선의 위치 관계를 정확하게 파악해야 한다.

## 075

두 점 $(-2, 5)$, $(1, -4)$를 지나는 직선의 기울기는

$\frac{-4-5}{1-(-2)}=-3$

기울기가 $-3$이고 점 $(3, 7)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-7=-3(x-3) \qquad \therefore -3x-y+16=0$

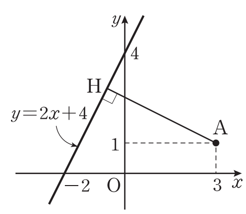
따라서 $a=-3$, $b=16$이므로

$ab=(-3)\times16=-48$

## 076

두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기는 $\frac{2-4}{7-3}=-\frac{1}{2}$ 이므로 직선 AB에 수직인 직선의 기울기는 2이다.
선분 AB를 1 : 3으로 내분하는 점의 좌표는
$\left(\frac{1\times7+3\times3}{1+3}, \frac{1\times2+3\times4}{1+3}\right)$, 즉 $\left(4, \frac{7}{2}\right)$
따라서 기울기가 2이고 점 $\left(4, \frac{7}{2}\right)$을 지나는 직선의 방정식은
$y-\frac{7}{2}=2(x-4)$
$\therefore y=2x-\frac{9}{2}$
위의 식에 $y=0$을 대입하면
$2x-\frac{9}{2}=0 \qquad \therefore x=\frac{9}{4}$
따라서 구하는 $x$절편은 $\frac{9}{4}$이다.

## 077




직선 $y=2x+4$의 기울기는 2이고, 이 직선과 직선 AH가 서로 수직이므로 직선 AH의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이다.
또, 직선 AH가 점 A(3, 1)을 지나므로 직선 AH의 방정식은
$y-1=-\frac{1}{2}(x-3)$
$\therefore y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$
이때 점 H는 두 직선 $y=2x+4$와 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$의 교점이므로 두 직선의 교점의 $x$좌표는
$2x+4=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$에서
$\frac{5}{2}x=-\frac{3}{2} \qquad \therefore x=-\frac{3}{5}$
$x=-\frac{3}{5}$을 $y=2x+4$에 대입하면 $y=\frac{14}{5}$
따라서 점 H의 좌표는 $\left(-\frac{3}{5}, \frac{14}{5}\right)$이다.

**다른 풀이** 수선의 발 H는 직선 $y=2x+4$ 위의 점이므로 점 H의 좌표를 $(p, 2p+4)$로 놓으면 직선 AH의 기울기는
$\frac{(2p+4)-1}{p-3}=\frac{2p+3}{p-3}$
그런데 직선 AH가 직선 $y=2x+4$에 수직이므로 직선 AH의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이다. 즉,
$\frac{2p+3}{p-3}=-\frac{1}{2}$, $4p+6=-p+3$, $5p=-3$
$\therefore p=-\frac{3}{5}$
따라서 점 H의 좌표는 $\left(-\frac{3}{5}, \frac{14}{5}\right)$이다.

**1등급 비법**

점 A에서 직선 $l$에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 직선 $l$과 직선 AH의 교점이다.
따라서 주어진 문제에서 직선 AH와 직선 $l$이 서로 수직임을 이용하여 직선 AH의 방정식을 구한 후, 직선 $l$의 방정식과 연립하여 풀면 점 H의 좌표를 구할 수 있다.

## 078

두 점 A$(-2, 1)$, B$(2, 3)$을 지나는 직선의 기울기는
$\frac{3-1}{2-(-2)}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$
이므로 선분 AB를 수직이등분하는 직선의 기울기는 $-2$이다.
한편, 선분 AB의 중점의 좌표는
$\left(\frac{-2+2}{2}, \frac{1+3}{2}\right) \qquad \therefore (0, 2)$
이때 선분 AB를 수직이등분하는 직선은 선분 AB의 중점 $(0, 2)$를 지나므로 구하는 직선의 방정식은
$y-2=-2(x-0)$
$\therefore 2x+y-2=0$
따라서 $a=2$, $b=-2$이므로
$a+b=2+(-2)=0$

**1등급 비법**

선분 AB의 수직이등분선을 $l$이라 하면
① $l\perp\overline{AB}$이므로 직선 $l$과 직선 AB의 기울기의 곱은 $-1$이다.
② 직선 $l$은 선분 AB의 중점을 지난다.

## 079

$x+3y+6=0$에서 $y=-\frac{1}{3}x-2$
직선 $x+3y+6=0$의 기울기는 $-\frac{1}{3}$이므로 선분 AB의 수직이등분선의 기울기는 3이다.
한편, A$(-6, 0)$, B$(0, -2)$이므로 선분 AB의 중점의 좌표는
$\left(\frac{-6+0}{2}, \frac{0+(-2)}{2}\right) \qquad \therefore (-3, -1)$
이때 선분 AB의 수직이등분선은 선분 AB의 중점 $(-3, -1)$을 지나므로 선분 AB의 수직이등분선의 방정식은
$y-(-1)=3\{x-(-3)\}$
$\therefore y=3x+8$

## 080

선분 AB의 중점의 좌표는
$\left(\frac{4+0}{2}, \frac{0+4}{2}\right) \qquad \therefore (2, 2)$
두 점 A$(4, 0)$, B$(0, 4)$를 지나는 직선의 기울기는
$\frac{4-0}{0-4}=-1$
따라서 선분 AB의 수직이등분선은 기울기가 1이고 점 $(2, 2)$를 지나므로 방정식은
$y-2=x-2 \qquad \therefore y=x$ …… ㉠

선분 BC의 중점의 좌표는

$\left(\frac{0-2}{2}, \frac{4-4}{2}\right) \qquad \therefore (-1, 0)$

두 점 B$(0, 4)$, C$(-2, -4)$를 지나는 직선의 기울기는

$\frac{-4-4}{-2-0}=4$

따라서 선분 BC의 수직이등분선은 기울기가 $-\frac{1}{4}$이고 점 $(-1, 0)$을 지나므로 방정식은

$y-0=-\frac{1}{4}\{x-(-1)\} \qquad \therefore y=-\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=-\frac{1}{5}, y=-\frac{1}{5}$

따라서 구하는 교점의 좌표는 $\left(-\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}\right)$이므로

$a=-\frac{1}{5}, b=-\frac{1}{5}$

$\therefore ab=-\frac{1}{5}\times\left(-\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{25}$

## 081

$x+y-1=0$ …… ㉠

$2x-ay+1=0$ …… ㉡

$(a-3)x+2y+2=0$ …… ㉢

세 직선에 의하여 생기는 교점이 2개가 되려면 세 직선 중 두 직선이 서로 평행해야 한다.

(i) 두 직선 ㉠, ㉡이 서로 평행할 때,

$\frac{1}{2}=\frac{1}{-a}\neq\frac{-1}{1}$에서 $a=-2$

$a=-2$이면 직선 ㉢은 직선 ㉠, ㉡과 평행하지 않으므로 조건을 만족시킨다.

(ii) 두 직선 ㉡, ㉢이 서로 평행할 때,

$\frac{2}{a-3}=\frac{-a}{2}\neq\frac{1}{2}$에서 $4=-a^2+3a$

$\therefore a^2-3a+4=0$

이 이차방정식의 판별식을 $D$라 하면

$D=(-3)^2-4\times4=-7<0$

이므로 실수 $a$는 존재하지 않는다.

(iii) 두 직선 ㉠, ㉢이 서로 평행할 때,

$\frac{1}{a-3}=\frac{1}{2}\neq\frac{-1}{2}$에서 $2=a-3$

$\therefore a=5$

$a=5$이면 직선 ㉡은 직선 ㉠, ㉢과 평행하지 않으므로 조건을 만족시킨다.

(i), (ii), (iii)에서 모든 실수 $a$의 값의 곱은

$(-2)\times5=-10$

## 082

$3x-4y+6=0$ …… ㉠

$x+2y+2=0$ …… ㉡

$ax+3y-2=0$ …… ㉢

직선 ㉠의 기울기는 $\frac{3}{4}$, 직선 ㉡의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이고 두 직선 ㉠, ㉡의 기울기는 다르므로 세 직선이 모두 평행한 경우는 없다.

따라서 세 직선이 한 점에서 만나는 경우와 세 직선 중 두 직선이 서로 평행한 경우만 생각하면 된다.

(i) 세 직선이 한 점에서 만나는 경우

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$x=-2, y=0$

즉, 두 직선의 교점의 좌표가 $(-2, 0)$이므로 직선 ㉢도 점 $(-2, 0)$을 지나야 한다.

$-2a-2=0 \qquad \therefore a=-1$

(ii) 세 직선 중 두 직선이 서로 평행한 경우

두 직선 ㉠, ㉢이 서로 평행할 때,

$\frac{3}{a}=\frac{-4}{3}\neq\frac{6}{-2}$에서 $-4a=9 \qquad \therefore a=-\frac{9}{4}$

두 직선 ㉡, ㉢이 서로 평행할 때,

$\frac{1}{a}=\frac{2}{3}\neq\frac{2}{-2}$에서 $2a=3 \qquad \therefore a=\frac{3}{2}$

(i), (ii)에서 모든 실수 $a$의 값의 합은

$(-1)+\left(-\frac{9}{4}\right)+\frac{3}{2}=-\frac{7}{4}$

참고 서로 다른 세 직선이 삼각형을 이루지 않는 경우는 다음과 같다.

① 서로 다른 세 직선이 모두 평행할 때
② 서로 다른 세 직선 중 두 직선이 서로 평행할 때
③ 서로 다른 세 직선이 한 점에서 만날 때

## 083

(i) $a=2$일 때,

$2x+y+5=0$, $2x+y-4=0$, $2x+y+3=0$에서 세 직선의 기울기가 모두 같고, $y$절편이 서로 다르므로 세 직선이 모두 평행하다. 즉, 세 직선은 좌표평면을 4개의 영역으로 나눈다.

$\therefore p=4$

(ii) $a=3$일 때,

$3x+y+5=0$, $3x+y-4=0$, $2x+y+3=0$에서 두 직선 $3x+y+5=0$, $3x+y-4=0$이 서로 평행하다. 즉, 세 직선은 좌표평면을 6개의 영역으로 나눈다.

$\therefore q=6$

(i), (ii)에서 $pq=4\times6=24$

개념 보충

**세 직선의 위치 관계와 좌표평면의 분할**

① 세 직선이 한 점에서 만난다.
⇨ 좌표평면을 6개의 영역으로 나눈다.
② 세 직선 중 두 직선이 서로 평행하다.
⇨ 좌표평면을 6개의 영역으로 나눈다.
③ 세 직선이 모두 평행하다.
⇨ 좌표평면을 4개의 영역으로 나눈다.
④ 세 직선으로 삼각형이 만들어진다.
⇨ 좌표평면을 7개의 영역으로 나눈다.

## 084

$2x-3y-12=0$, $x-2y-7=0$을 연립하여 풀면

$x=3$, $y=-2$

따라서 점 $(3, -2)$와 직선 $2x-y-2=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|2\times3+(-1)\times(-2)-2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{6}{\sqrt{5}}=\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$

## 085

직선 $4x+3y-1=0$, 즉 $y=-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{1}{3}$의 기울기는 $-\dfrac{4}{3}$이므로

이 직선과 수직인 직선의 기울기는 $\dfrac{3}{4}$이다.

따라서 구하는 직선의 방정식을 $y=\dfrac{3}{4}x+k$로 놓으면

$3x-4y+4k=0$ ...... ㉠

이때 원점과 직선 ㉠ 사이의 거리가 2이므로

$\dfrac{|4k|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=2$

$\dfrac{|4k|}{5}=2$, $4k=\pm10$ $\quad\therefore k=\pm\dfrac{5}{2}$

$\therefore k^2=\dfrac{25}{4}$

## 086

$x+y-2+k(x-y)=0$에서

$(1+k)x+(1-k)y-2=0$ ...... ㉠

원점과 직선 ㉠ 사이의 거리 $f(k)$는

$f(k)=\dfrac{|-2|}{\sqrt{(1+k)^2+(1-k)^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{2k^2+2}}$

이때 $f(k)$의 값이 최대가 되려면 분모 $\sqrt{2k^2+2}$가 최솟값을 가져야 한다.

임의의 실수 $k$에 대하여 $k^2\ge0$이므로 $k=0$일 때 분모는 최솟값 $\sqrt{2}$를 갖는다.

따라서 $f(k)$의 최댓값은 $\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

## 087

두 점 $(6, 0)$, $(0, 3)$을 지나는 직선 $l$의 방정식은

$\dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{3}=1$ $\quad\therefore x+2y-6=0$

점 $A(a, 6)$과 직선 $l$ 사이의 거리는

$\dfrac{|a+2\times6-6|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{|a+6|}{\sqrt{5}}$

정사각형 ABCD의 넓이는 $\dfrac{81}{5}$이므로 $\overline{AB}=\dfrac{9}{\sqrt{5}}$

이때 정사각형 ABCD의 한 변의 길이는 점 A와 직선 $l$ 사이의 거리와 같으므로 $\dfrac{|a+6|}{\sqrt{5}}=\dfrac{9}{\sqrt{5}}$, $|a+6|=9$

$a+6=\pm9$

$\therefore a=3\ (\because a>0)$

## 088

직선 $y=4x+k$가 이차함수 $y=x^2+2x$의 그래프와 만나지 않으므로 이차방정식 $x^2+2x=4x+k$, 즉 $x^2-2x-k=0$의 판별식을 $D$라 하면 $D<0$이어야 한다.

$\dfrac{D}{4}=(-1)^2-1\times(-k)<0$ $\quad\therefore k<-1$ ...... ㉠

이차함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 P와 직선 $y=4x+k$ 사이의 거리가 최소가 될 때는 기울기가 4인 직선이 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 접할 때의 접점이 P일 때이다.

이차함수 $y=x^2+2x$의 그래프에 접하고 기울기가 4인 직선을 $y=4x+t$라 하면 이차방정식 $x^2+2x=4x+t$, 즉 $x^2-2x-t=0$의 판별식 $D$에서

$\dfrac{D}{4}=(-1)^2-1\times(-t)=0$ $\quad\therefore t=-1$

$x^2+2x=4x-1$에서 $x^2-2x+1=0$

$(x-1)^2=0$ $\quad\therefore x=1$

$\therefore P(1, 3)$

이때 점 $P(1, 3)$과 직선 $y=4x+k$, 즉 $4x-y+k=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{17}$이므로

$\dfrac{|4\times1-3+k|}{\sqrt{4^2+(-1)^2}}=\sqrt{17}$

$|k+1|=17$이므로 $k+1=-17$ 또는 $k+1=17$

$\therefore k=-18$ 또는 $k=16$

그런데 ㉠에서 $k<-1$이므로 $k=-18$

**오답 피하기** $k=16$이면 직선 $y=4x+16$이고, 이 직선은 이차함수 $y=x^2+2x$의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만나므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

## 089

두 직선 $3x-4y-2=0$, $3x-4y+2k=0$이 서로 평행하므로 두 직선 사이의 거리는 직선 $3x-4y-2=0$ 위의 한 점 $\left(0, -\dfrac{1}{2}\right)$과 직선 $3x-4y+2k=0$ 사이의 거리와 같다. 즉,

$\dfrac{|2+2k|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=2$

$|1+k|=5$이므로 $1+k=-5$ 또는 $1+k=5$

$\therefore k=-6$ 또는 $k=4$

따라서 모든 실수 $k$의 값의 합은

$-6+4=-2$

**1등급 비법**

평행한 두 직선 $ax+by+c=0$, $ax+by+d=0$ ($a, b, c, d$는 상수, $c\ne d$) 사이의 거리는 직선 $ax+by+c=0$ 위의 한 점과 직선 $ax+by+d=0$ 사이의 거리와 같다.

## 090

직선 $m$ 위의 한 점 $(2, 0)$과 직선 $l: 3x+4y+a=0$ 사이의 거리가 4이므로

직선 $m$의 $x$절편이 2이다.

$\frac{|6+a|}{\sqrt{3^2+4^2}}=4$

$|6+a|=20$이므로 $6+a=-20$ 또는 $6+a=20$

$\therefore a=-26$ 또는 $a=14$

그런데 $a>0$이므로 $a=14$

## 091

두 직선 $x+(a-3)y+3a=0$, $ax-2y+a+7=0$이 서로 평행하므로

$\frac{1}{a}=\frac{a-3}{-2}\neq\frac{3a}{a+7}$

$\frac{1}{a}=\frac{a-3}{-2}$에서 $-2=a^2-3a$

$a^2-3a+2=0$, $(a-1)(a-2)=0$

$\therefore a=1$ ($\because a<2$)

따라서 두 직선의 방정식은

$x-2y+3=0$, $x-2y+8=0$

이므로 두 직선 사이의 거리는 직선 $x-2y+3=0$ 위의 한 점 $(-3, 0)$과 직선 $x-2y+8=0$ 사이의 거리와 같다.

$\therefore \frac{|-3+8|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

## 092

두 점 $A(0, -2)$, $B(4, 0)$을 지나는 직선의 방정식은

$\frac{x}{4}+\frac{y}{-2}=1$

$\therefore x-2y-4=0$

직선 CD는 직선 AB와 평행하고 두 점 C, D는 서로 다른 사분면에 있으므로 직선 CD의 방정식을

$x-2y+k=0$ $(k>0)$

이라 하면 두 직선 AB, CD 사이의 거리는 정사각형 ABCD의 한 변의 길이 $\overline{AB}$와 같다.

$\overline{AB}=\sqrt{(4-0)^2+(0+2)^2}=2\sqrt{5}$

이므로 점 $(0, -2)$와 직선 CD 사이의 거리가 $2\sqrt{5}$이다. 즉,

$\frac{|4+k|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=2\sqrt{5}$

$|4+k|=10$이므로 $4+k=-10$ 또는 $4+k=10$

$\therefore k=-14$ 또는 $k=6$

그런데 $k>0$이므로 $k=6$

따라서 직선 CD의 방정식은

$x-2y+6=0$

이 식에 $y=0$을 대입하면

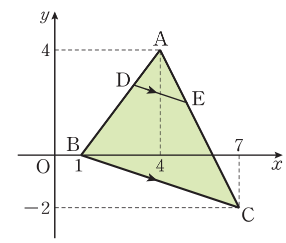
$x+6=0$ $\qquad\therefore x=-6$

따라서 구하는 $x$절편은 $-6$이다.

**1등급 비법**

정사각형의 네 변의 길이가 같고 네 각은 모두 수직이므로 이러한 도형의 성질을 이용하면 두 점 A, B의 좌표가 주어졌을 때, 두 점 C, D의 좌표가 각각 $(-2, 2)$, $(2, 4)$임을 알 수 있다.

## 093




$\overline{AB}$, $\overline{AC}$ 위의 점 D, E에 대하여 조건 (가)에 의하여 두 삼각형 ABC와 ADE는 닮음이다.

조건 (나)에서 삼각형 ADE와 삼각형 ABC의 넓이의 비가 $1:9=1^2:3^2$이므로 삼각형 ADE와 삼각형 ABC의 닮음비는 $1:3$이다.

즉, 두 점 D, E는 두 선분 AB, AC를 각각 $1:2$로 내분하는 점이므로

$D\left(\frac{1\times1+2\times4}{1+2}, \frac{1\times0+2\times4}{1+2}\right)$ $\qquad\therefore D\left(3, \frac{8}{3}\right)$

$E\left(\frac{1\times7+2\times4}{1+2}, \frac{1\times(-2)+2\times4}{1+2}\right)$ $\qquad\therefore E(5, 2)$

두 점 D, E를 지나는 직선의 기울기는

$\frac{2-\frac{8}{3}}{5-3}=\frac{-\frac{2}{3}}{2}=-\frac{1}{3}$

이므로 직선 DE의 방정식은

$y-2=-\frac{1}{3}(x-5)$ $\qquad\therefore x+3y-11=0$

따라서 직선 BC와 직선 DE 사이의 거리는 점 $B(1, 0)$과 직선 $x+3y-11=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\frac{|1-11|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\sqrt{10}$

**다른 풀이** 삼각형 ADE와 삼각형 ABC의 닮음비가 $1:3$이므로 두 직선 BC와 DE 사이의 거리는 점 A와 직선 BC 사이의 거리의 $\frac{2}{3}$이다.

직선 BC의 방정식은 $y=-\frac{1}{3}(x-1)$에서 $x+3y-1=0$이고, 이 직선과 점 $A(4, 4)$ 사이의 거리는

$\frac{|4+12-1|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{3\sqrt{10}}{2}$

따라서 두 직선 BC와 DE 사이의 거리는

$\frac{2}{3}\times\frac{3\sqrt{10}}{2}=\sqrt{10}$

## 094

직선 OA의 방정식은 $y=-\frac{1}{6}x$에서 $x+6y=0$

$\overline{OA}=\sqrt{6^2+(-1)^2}=\sqrt{37}$이고, 점 $B(2, a)$와 직선 OA 사이의 거리는

$\frac{|2+6a|}{\sqrt{1^2+6^2}}=\frac{|2+6a|}{\sqrt{37}}$

이므로 삼각형 OAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\sqrt{37}\times\frac{|2+6a|}{\sqrt{37}}=13$

$|2+6a|=26$이므로 $2+6a=-26$ 또는 $2+6a=26$

$\therefore a=-\frac{14}{3}$ 또는 $a=4$

그런데 $a>0$이므로 $a=4$

## 095

직선 $l_1$의 기울기를 $m$이라 하면 직선 $l_1$의 방정식은

$y-1=m(x-1)$

$\therefore y=mx-m+1$ …… ㉠

이 접선이 이차함수 $y=x^2$의 그래프에 접하므로 이차방정식

$x^2=mx-m+1$, 즉 $x^2-mx+m-1=0$의 판별식을 $D$라 하면

$D=m^2-4m+4=0$

$(m-2)^2=0$ $\therefore m=2$

$m=2$를 ㉠에 대입하면 직선 $l_1$의 방정식은 $y=2x-1$

따라서 점 Q의 좌표는 $(0, -1)$이다.

직선 $l_2$는 직선 $l_1$과 수직이므로 기울기는 $-\frac{1}{2}$이고, 점 $\mathrm{P}(1, 1)$을 지나므로 직선 $l_2$의 방정식은

$y-1=-\frac{1}{2}(x-1)$ $\therefore y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

또, 이차함수 $y=x^2$의 그래프와 직선 $l_2$가 만나는 점의 $x$좌표는

$x^2=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$에서

$2x^2+x-3=0$, $(2x+3)(x-1)=0$

$\therefore x=-\frac{3}{2}$ 또는 $x=1$

따라서 점 R의 좌표는 $\left(-\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$이다.

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(0-1)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{5}$

$\overline{\mathrm{PR}}=\sqrt{\left(-\frac{3}{2}-1\right)^2+\left(\frac{9}{4}-1\right)^2}=\frac{5\sqrt{5}}{4}$

이므로 $S=\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\frac{5\sqrt{5}}{4}=\frac{25}{8}$

$\therefore 40S=40\times\frac{25}{8}=125$

## 096

두 직선 $x+7y-4=0$, $5x+5y+7=0$이 이루는 각의 이등분선 위의 임의의 점을 $\mathrm{P}(x, y)$라 하자.

점 P에서 두 직선에 이르는 거리가 같아야 하므로

$\frac{|x+7y-4|}{\sqrt{1^2+7^2}}=\frac{|5x+5y+7|}{\sqrt{5^2+5^2}}$

$|x+7y-4|=|5x+5y+7|$

(i) $x+7y-4=5x+5y+7$일 때,

$4x-2y+11=0$에서 $y=2x+\frac{11}{2}$이고, 기울기가 2이므로 기울기가 양수이다.

(ii) $x+7y-4=-(5x+5y+7)$일 때,

$2x+4y+1=0$에서 $y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$이고, 기울기가 $-\frac{1}{2}$이므로 기울기가 음수이다.

(i), (ii)에서 구하는 직선은 $y=2x+\frac{11}{2}$이므로 $y$절편은 $\frac{11}{2}$이다.

**1등급 비법**

두 직선 $l$, $l'$이 이루는 각의 이등분선의 방정식은 각의 이등분선 위의 점에서 두 직선 $l$, $l'$까지의 거리가 같음을 이용하여 구한다.

## 097

선분 AC의 중점을 M이라 하면 각의 이등분선의 성질에 의하여

$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{AM}}:\overline{\mathrm{MC}}=1:1$

$\therefore \overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}$

$\sqrt{(-15-0)^2+(0-a)^2}=17$

$225+a^2=289$, $a^2=64$

$\therefore a=8$ ($\because a>0$)

점 M은 선분 AC의 중점이므로 점 M의 좌표는

$\left(\frac{0+2}{2}, \frac{8+0}{2}\right)$ $\therefore (1, 4)$

직선 $l$은 두 점 B, M을 지나므로 직선 $l$의 방정식은

$y=\frac{4-0}{1-(-15)}\{x-(-15)\}$

$\therefore y=\frac{1}{4}x+\frac{15}{4}$

따라서 직선 $l$의 $y$절편은 $\frac{15}{4}$이므로 $k=\frac{15}{4}$

$\therefore ak=8\times\frac{15}{4}=30$

## 098

두 직선 $l_1$, $l_2$와 각의 두 이등분선은 $l_1$과 $l_2$의 교점을 지나므로 네 직선은 한 점을 지난다.

$x+7y-10=0$, $3x-4y-5=0$을 연립하여 풀면

$x=3$, $y=1$이므로 네 직선의 교점의 좌표는 $(3, 1)$이다.

이때 두 직선 $l_1$, $l_2$가 이루는 각의 두 이등분선은 서로 수직이므로 기울기가 음수인 각의 이등분선은 직선 $3x-4y-5=0$에 수직이다.

직선 $3x-4y-5=0$, 즉 $y=\frac{3}{4}x-\frac{5}{4}$의 기울기가 $\frac{3}{4}$이므로 구하는 직선의 기울기는 $-\frac{4}{3}$이다.

즉, 구하는 직선은 점 $(3, 1)$을 지나고 기울기가 $-\frac{4}{3}$이므로

$y-1=-\frac{4}{3}(x-3)$

$\therefore y=-\frac{4}{3}x+5$

위의 식에 $y=0$을 대입하면

$-\frac{4}{3}x+5=0$ $\therefore x=\frac{15}{4}$

따라서 구하는 $x$절편은 $\frac{15}{4}$이다.

### 내신 적중 서술형

29쪽

**099** $y=-\frac{2}{3}x+\frac{8}{3}$ **100** $2\sqrt{2}$ **101** $4$

**102** (1) $\mathrm{E}\left(-\frac{2}{7}a, \frac{4}{7}a\right)$ (2) $\frac{21}{2}$

## 099

두 점 A$(6,\ 1)$, B$(-2,\ -3)$을 이은 선분 AB를 $1:3$으로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{1\times(-2)+3\times6}{1+3},\ \dfrac{1\times(-3)+3\times1}{1+3}\right)$　　$\therefore\ (4,\ 0)$ …… ㉮

따라서 두 점 $(4,\ 0)$, $(7,\ -2)$를 지나는 직선의 방정식은

$y=\dfrac{-2-0}{7-4}(x-4)$　　$\therefore\ y=-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{8}{3}$ …… ㉯

| 채점 기준 | 배점 비율 |
|---|---|
| ㉮ 선분 AB를 $1:3$으로 내분하는 점의 좌표 구하기 | 50 % |
| ㉯ 두 점을 지나는 직선의 방정식 구하기 | 50 % |

## 100

주어진 식을 $k$에 대하여 정리하면

$k(x+4y+6)+(x-3y-8)=0$

이 등식이 $k$에 대한 항등식이므로

$x+4y+6=0,\ x-3y-8=0$ …… ㉮

두 식을 연립하여 풀면 $x=2,\ y=-2$

즉, 주어진 직선은 실수 $k$의 값에 관계없이 항상 점 P$(2,\ -2)$를 지난다. …… ㉯

$\therefore\ \overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{2^2+(-2)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ …… ㉰

| 채점 기준 | 배점 비율 |
|---|---|
| ㉮ 주어진 직선의 방정식이 실수 $k$의 값에 관계없이 항상 성립할 조건 알기 | 50 % |
| ㉯ 점 P의 좌표 구하기 | 30 % |
| ㉰ 원점 O와 점 P 사이의 거리 구하기 | 20 % |

## 101

선분 BD는 마름모 ABCD의 대각선이고 직선 $l$은 두 점 B, D를 지나므로 직선 $l$은 직선 AC와 수직이고 선분 AC의 중점

$\left(\dfrac{1+5}{2},\ \dfrac{3+1}{2}\right)$, 즉 점 $(3,\ 2)$를 지난다. …… ㉮

한편, 직선 AC의 기울기는

$\dfrac{1-3}{5-1}=-\dfrac{1}{2}$ …… ㉯

따라서 직선 $l$은 기울기가 2이고 점 $(3,\ 2)$를 지나므로 직선 $l$의 방정식은

$y-2=2(x-3)$

$\therefore\ 2x-y-4=0$ …… ㉰

즉, $a=-1,\ b=-4$이므로

$ab=(-1)\times(-4)=4$ …… ㉱

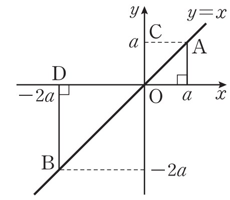
| 채점 기준 | 배점 비율 |
|---|---|
| ㉮ 마름모의 두 대각선의 교점 구하기 | 30 % |
| ㉯ 직선 AC의 기울기 구하기 | 30 % |
| ㉰ 직선 $l$의 방정식 구하기 | 30 % |
| ㉱ $ab$의 값 구하기 | 10 % |

## 102

(1) 점 A의 좌표를 $(a,\ a)\ (a>0)$라 하면

B$(-2a,\ -2a)$, C$(0,\ a)$,

D$(-2a,\ 0)$ …… ㉮




직선 AD의 방정식은

$y-0=\dfrac{0-a}{-2a-a}\{x-(-2a)\}$

$\therefore\ x-3y+2a=0$ …… ㉠

직선 BC의 방정식은

$y-a=\dfrac{a-(-2a)}{0-(-2a)}x$

$\therefore\ 3x-2y+2a=0$ …… ㉡ …… ㉯

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$x=-\dfrac{2}{7}a,\ y=\dfrac{4}{7}a$

$\therefore\ \mathrm{E}\left(-\dfrac{2}{7}a,\ \dfrac{4}{7}a\right)$ …… ㉰

(2) $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(-2a-a)^2+(-2a-a)^2}$

$=3\sqrt{2}a$

점 E와 직선 $y=x$, 즉 $x-y=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{\left|-\dfrac{2}{7}a-\dfrac{4}{7}a\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{7}a$ …… ㉱

삼각형 AEB의 넓이가 9이므로

$\dfrac{1}{2}\times3\sqrt{2}a\times\dfrac{3\sqrt{2}}{7}a=9$

$\therefore\ a^2=7$ …… ㉲

따라서 삼각형 ACB의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times3a\times a=\dfrac{3}{2}a^2$

$=\dfrac{3}{2}\times7=\dfrac{21}{2}$ …… ㉳

| | 채점 기준 | 배점 비율 |
|---|---|---|
| (1) | ㉮ 세 점 B, C, D의 좌표를 $a$로 나타내기 | 10 % |
| | ㉯ 두 직선 AD, BC의 방정식 구하기 | 20 % |
| | ㉰ 점 E의 좌표 구하기 | 20 % |
| (2) | ㉱ $\overline{\mathrm{AB}}$의 길이, 점 E와 직선 $y=x$ 사이의 거리 구하기 | 20 % |
| | ㉲ $a^2$의 값 구하기 | 20 % |
| | ㉳ 삼각형 ACB의 넓이 구하기 | 10 % |

## 1등급 실력 완성

● 30쪽~32쪽

**103** $\dfrac{1}{2}$　**104** ④　**105** ①　**106** 6　**107** $\dfrac{3}{5}$

**108** ④　**109** 25　**110** ④　**111** 9　**112** ①

**113** $-1$　**114** $x=2$ 또는 $3x-4y+10=0$　**115** ①

**116** $\dfrac{3}{4}$

## 103

**직선의 방정식**

전략 두 점 A, B의 좌표를 문자로 놓고 주어진 조건으로 관계식을 세워 직선 AB의 기울기를 구한다.

풀이 제2사분면 위의 두 점 A, B를

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ $(x_1<0, y_1>0, x_2<0, y_2>0)$라 하면

직선 OA의 기울기는 $-1$이므로

$\dfrac{y_1}{x_1}=-1 \qquad \therefore y_1=-x_1$

직선 OB의 기울기는 $-7$이므로

$\dfrac{y_2}{x_2}=-7 \qquad \therefore y_2=-7x_2$

$\therefore A(x_1, -x_1)$, $B(x_2, -7x_2)$

이때 $\overline{OA}=\overline{OB}$에서 $\overline{OA}^2=\overline{OB}^2$이므로

$x_1{}^2+(-x_1)^2=x_2{}^2+(-7x_2)^2$

$2x_1{}^2=50x_2{}^2$, $x_1{}^2=25x_2{}^2$

$\therefore x_1=5x_2$ $(\because x_1<0, x_2<0)$

따라서 직선 AB의 기울기는

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-7x_2-(-x_1)}{x_2-x_1}=\frac{-7x_2+5x_2}{x_2-5x_2}=\frac{-2x_2}{-4x_2}=\frac{1}{2}$$

## 104

**직선의 방정식**

전략 색칠한 두 부분의 넓이의 합과 사다리꼴의 넓이를 각각 구한 후, 두 넓이가 같음을 이용한다.

풀이 $D(0, a)$, $E(b, 0)$ $(0<a<6, b>0)$이라 하면 색칠한 두 부분의 넓이의 합은

$\dfrac{1}{2}\times(6-a)\times6+\dfrac{1}{2}\times a\times b=18-3a+\dfrac{1}{2}ab$ …… ㉠

사다리꼴 ODBC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times(6+a)\times6=18+3a$ …… ㉡

㉠, ㉡의 넓이가 같으므로

$18-3a+\dfrac{1}{2}ab=18+3a$

$ab-12a=0$, $a(b-12)=0$

$\therefore b=12$ $(\because 0<a<6)$

따라서 $B(-6, 6)$, $E(12, 0)$이고, 직선 BD는 직선 BE와 같으므로 직선 BD의 방정식은

$y-6=\dfrac{0-6}{12-(-6)}\{x-(-6)\}$

$y=-\dfrac{1}{3}x+4$

$\therefore x+3y-12=0$

참고 직선 BD는 직선 BE와 같으므로 $a$의 값을 구하지 않아도 된다.

## 105

**직선의 방정식**

전략 두 사각형의 넓이의 차를 삼각형 DEF를 포함하는 두 삼각형의 넓이의 차로 생각하여 식을 세운다. 이를 이용하여 선분 BE의 길이를 선분 DC의 길이로 나타낸다.

풀이 삼각형 ODC와 삼각형 ABE는 삼각형 DEF를 공통으로 포함하고 있으므로 삼각형 ODC의 넓이는 삼각형 ABE의 넓이보다 6만큼 크다.

즉, $\dfrac{1}{2}\times\overline{OC}\times\overline{CD}=\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BE}+6$이므로

$\dfrac{1}{2}\times6\times\overline{CD}=\dfrac{1}{2}\times6\times\overline{BE}+6$

$3\overline{CD}=3\overline{BE}+6$

$\therefore \overline{CD}=\overline{BE}+2$

$\overline{CD}=k$라 하면 $\overline{BE}=\overline{CD}-2=k-2$

이때 직선 OD의 기울기는 $\dfrac{\overline{OC}}{\overline{CD}}=\dfrac{6}{k}$

직선 AE의 기울기는 $-\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BE}}=-\dfrac{6}{k-2}$

두 직선 OD, AE의 기울기의 곱이 $-\dfrac{36}{35}$이므로

$\dfrac{6}{k}\times\left(-\dfrac{6}{k-2}\right)=-\dfrac{36}{35}$, $k^2-2k-35=0$

$(k+5)(k-7)=0$

$\therefore k=7$ $(\because k>0)$

직선 OD의 방정식은 $y=\dfrac{6}{7}x$, 직선 AE의 방정식은

$y=-\dfrac{6}{5}(x-9)$, 즉 $y=-\dfrac{6}{5}x+\dfrac{54}{5}$이므로 두 식을 연립하여 풀면

$x=\dfrac{21}{4}$, $y=\dfrac{9}{2}$

따라서 $F\left(\dfrac{21}{4}, \dfrac{9}{2}\right)$이므로

$a=\dfrac{21}{4}$, $y=\dfrac{9}{2}$

$\therefore a+b=\dfrac{21}{4}+\dfrac{9}{2}=\dfrac{39}{4}$

## 106

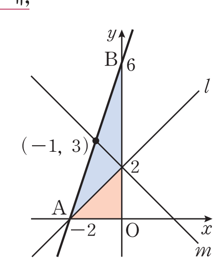
**도형의 넓이를 삼등분하는 직선의 방정식**

전략 직선 $l$이 점 A를 지나면서 삼각형 AOB를 삼등분하려면 선분 OB를 삼등분하는 점 중 하나를 지나야 함을 이용한다.

$\overline{OB}$를 1 : 2로 내분하는 경우

풀이 (i) 직선 $l$이 점 A와 점 $(0, 2)$를 지날 때,

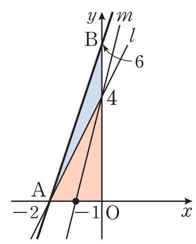
조건 (나)에서 직선 $m$은 직선 $l$과 $y$축에서 만나므로 조건 (다)를 만족시키려면 직선 $m$은 점 $(0, 2)$와 선분 AB의 중점 $(-1, 3)$을 지나야 한다.




직선 $l$의 기울기는 1이고, 직선 $m$의 기울기는 $\dfrac{3-2}{-1-0}=-1$이므로 두 직선 $l$, $m$의 기울기의 합은 $1+(-1)=0$

(ii) 직선 $l$이 점 A와 점 $(0,\ 4)$를 지날 때, → $\overline{OB}$를 $2:1$로 내분하는 경우

조건 (나)에서 직선 $m$은 직선 $l$과 $y$축에서 만나므로 조건 (다)를 만족시키려면 직선 $m$은 점 $(0,\ 4)$와 선분 AO의 중점 $(-1,\ 0)$을 지나야 한다.




직선 $l$의 기울기는 2이고, 직선 $m$의 기울기는 4이므로 두 직선 $l$, $m$의 기울기의 합은 $2+4=6$

(i), (ii)에서 두 직선 $l$, $m$의 기울기의 합의 최댓값은 6이다.

## 107

**정점을 지나는 직선**

전략 직선 $(k+1)x+(k-1)y-2=0$이 실수 $k$의 값에 관계없이 항상 지나는 점을 이용하여 그래프를 그려 본다.

풀이 주어진 식을 $k$에 대하여 정리하면

$k(x+y)+(x-y-2)=0$ ⋯⋯ ㉠

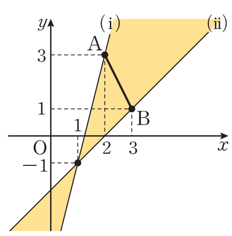
이 등식이 $k$의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$x+y=0,\ x-y-2=0$

두 식을 연립하여 풀면 $x=1,\ y=-1$

즉, 직선 ㉠은 실수 $k$의 값에 관계없이 항상 점 $(1,\ -1)$을 지난다.

이때 직선 ㉠이 선분 AB와 만나려면 직선 ㉠이 오른쪽 그림의 색칠한 부분에 있어야 한다.




(i) 직선 ㉠이 점 $A(2,\ 3)$을 지날 때,

$k(2+3)+(2-3-2)=0$

$5k=3 \qquad \therefore k=\frac{3}{5}$

(ii) 직선 ㉠이 점 $B(3,\ 1)$을 지날 때,

$k(3+1)+(3-1-2)=0$

$4k=0 \qquad \therefore k=0$

(i), (ii)에서 선분 AB와 직선 ㉠이 만나도록 하는 실수 $k$의 값의 범위는 $0\le k\le\frac{3}{5}$

따라서 $\alpha=0,\ \beta=\frac{3}{5}$이므로

$\alpha+\beta=0+\frac{3}{5}=\frac{3}{5}$

## 108

**정점을 지나는 직선 ⊕ 두 직선의 위치 관계**

전략 $k$에 대한 항등식이므로 ▲$\times k+$■$=0$ 꼴로 정리하여 항등식의 성질을 이용한다.

풀이 ㄱ. 주어진 식을 $k$에 대하여 정리하면

$(y-1)k+(2x-y+5)=0$

이 등식이 $k$의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$y-1=0,\ 2x-y+5=0$

$\therefore x=-2,\ y=1$

즉, 주어진 직선은 $k$의 값에 관계없이 항상 점 $(-2,\ 1)$을 지난다. (참)

ㄴ. $k=0$이면 $2x-y+5=0$, 즉 $y=2x+5$이므로 이 직선의 기울기는 2이다.

이때 두 직선 $y=2x+5$, $y=x$의 기울기의 곱은 $2\times1\ne-1$이므로 직선 $2x-y+5=0$은 직선 $y=x$와 수직이 아니다. (거짓)

ㄷ. 두 점 $(0,\ 4)$, $(-4,\ -2)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-4=\frac{-2-4}{-4-0}(x-0) \qquad \therefore y=\frac{3}{2}x+4$

이 식에 $x=-2,\ y=1$을 대입하면

$1=\frac{3}{2}\times(-2)+4$

즉, 점 $(-2,\ 1)$이 직선 $y=\frac{3}{2}x+4$ 위의 점이므로 두 직선은 적어도 한 점에서 만난다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

## 109

**정점을 지나는 직선 ⊕ 두 직선의 위치 관계**

전략 두 직선 $l_1$, $l_2$가 실수 $m$의 값에 관계없이 항상 지나는 점 A, B의 좌표를 구하고, 두 직선 $l_1$, $l_2$가 항상 수직임을 이용한다.

풀이 두 직선 $l_1$, $l_2$를 각각 $m$에 대하여 정리하면

$l_1$: $x-my=0$

$l_2$: $(x-6)m+(y-8)=0$

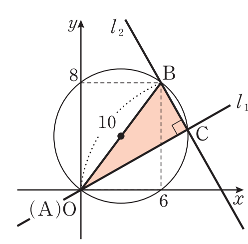
이므로 $A(0,\ 0)$, $B(6,\ 8)$

이때 직선 $l_1$의 기울기는 $\frac{1}{m}$, 직선 $l_2$의 기울기는 $-m$이므로

$\frac{1}{m}\times(-m)=-1$

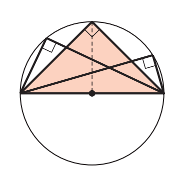
즉, 두 직선 $l_1$, $l_2$는 실수 $m$의 값에 관계없이 항상 수직이다.

삼각형 ABC는 $\overline{AB}$를 지름으로 하는 원에 내접하는 직각삼각형이므로 삼각형 ABC의 넓이가 최대가 되는 경우는 삼각형 ABC가 직각이등변삼각형이 될 때이다.




따라서 삼각형 ABC의 넓이의 최댓값은 $\frac{1}{2}\times10\times5=25$

참고 원의 지름을 밑변으로 하고 원에 내접하는 삼각형 중 넓이가 가장 큰 삼각형은 반지름을 높이로 하는 삼각형이다.



## 110

**두 직선의 평행과 수직**

전략 이등변삼각형의 꼭지각의 이등분선은 밑변을 수직이등분함을 이용한다.

풀이 선분 BC의 중점을 M이라 하면 삼각형 ABC는 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형이므로 직선 AM과 직선 BC는 서로 수직이다.

이때 점 M은 $y$축 위에 있고, 직선 $y=m(x+8)$ 위의 점이므로 $M(0,\ 8m)$이다.

또, 직선 BC의 기울기가 $m$이므로 직선 AM의 기울기는

$\frac{8m-(-2)}{0-1}=-\frac{1}{m}$

$8m^2+2m-1=0,\ (2m+1)(4m-1)=0$

$\therefore m=\frac{1}{4}\ (\because m>0)$

## 111

**두 직선의 평행과 수직**

전략 두 직선이 평행하면 기울기가 서로 같음을 이용한다.

풀이 조건 (가)에서 직선 CD의 기울기가 음수이므로

$\dfrac{q-p}{3\sqrt{2}-\sqrt{2}}<0 \qquad \therefore q<p$

조건 (나)에서 $\overline{AB}=\overline{CD}$이므로 $\overline{AB}^2=\overline{CD}^2$에서

$3^2=(3\sqrt{2}-\sqrt{2})^2+(q-p)^2$

$9=8+(q-p)^2$, $(q-p)^2=1$

$\therefore q-p=-1\ (\because q<p)$ $\cdots\cdots$ ㉠

$\overline{AD}\,/\!/\,\overline{BC}$에서 직선 AD와 직선 BC의 기울기가 같으므로

$\dfrac{q-1}{3\sqrt{2}-0}=\dfrac{p-4}{\sqrt{2}-0}$

$\therefore 3p-q=11$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $p=5$, $q=4$

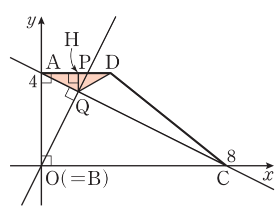
$\therefore p+q=5+4=9$

## 112

**두 직선의 평행과 수직**

전략 좌표평면 위에 사각형 ABCD를 놓고 직선 BP가 직선 AC와 수직이고 점 P가 선분 AD를 2 : 1로 내분함을 이용하여 점 Q의 좌표를 구한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 변 BC를 $x$축, 변 AB를 $y$축에 오도록 놓으면




A$(0, 4)$, C$(8, 0)$

직선 AC의 방정식은

$\dfrac{x}{8}+\dfrac{y}{4}=1$

$\therefore y=-\dfrac{1}{2}x+4$

점 B$(0, 0)$을 지나고 직선 AC에 수직인 직선 BP의 방정식은

$y=2x$

점 D의 좌표를 $(t, 4)$라 하면 점 P는 선분 AD를 2 : 1로 내분하는 점이므로 점 P의 좌표는

$\left(\dfrac{2\times t+1\times 0}{2+1}, \dfrac{2\times 4+1\times 4}{2+1}\right) \qquad \therefore \mathrm{P}\left(\dfrac{2}{3}t, 4\right)$

점 P가 직선 BP 위의 점이므로

$4=2\times\dfrac{2}{3}t \qquad \therefore t=3$

즉, D$(3, 4)$이므로 $\overline{AD}=3$

점 Q는 두 직선 AC, BP의 교점이므로 두 직선의 방정식을 연립하여 풀면

$x=\dfrac{8}{5}$, $y=\dfrac{16}{5} \qquad \therefore \mathrm{Q}\left(\dfrac{8}{5}, \dfrac{16}{5}\right)$

그림과 같이 점 Q에서 선분 AD에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{HQ}=4-\dfrac{16}{5}=\dfrac{4}{5}$

따라서 삼각형 AQD의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{AD}\times\overline{HQ}=\dfrac{1}{2}\times 3\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{6}{5}$

## 113

**세 직선의 위치 관계**

전략 세 직선이 좌표평면을 6개의 영역으로 나누는 경우는 세 직선 중 두 직선이 서로 평행하거나 세 직선이 한 점에서 만나는 경우임을 이용한다.

풀이 $y=x+1$ $\cdots\cdots$ ㉠

$y=-2x+4$ $\cdots\cdots$ ㉡

$y=ax+2$ $\cdots\cdots$ ㉢

이 세 직선이 좌표평면을 6개의 영역으로 나누므로 세 직선 중 두 직선이 서로 평행하거나 세 직선이 한 점에서 만난다.

(i) 세 직선 중 두 직선이 서로 평행한 경우

두 직선 ㉠, ㉢이 서로 평행할 때, $a=1$

두 직선 ㉡, ㉢이 서로 평행할 때, $a=-2$

(ii) 세 직선이 한 점에서 만나는 경우

두 직선 ㉠, ㉡의 교점의 좌표는 $(1, 2)$이므로 직선 ㉢이 점 $(1, 2)$를 지나야 한다.

$2=a+2 \qquad \therefore a=0$

(i), (ii)에서 모든 상수 $a$의 값의 합은

$1+(-2)+0=-1$

## 114

**두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식 + 점과 직선 사이의 거리**

전략 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을 세우고, 점 $(1, 2)$와 이 직선 사이의 거리가 1임을 이용한다.

풀이 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$(x-2y+6)+k(x-y+2)=0$ (단, $k$는 실수)

$\therefore (1+k)x+(-2-k)y+6+2k=0$ $\cdots\cdots$ ㉠

점 $(1, 2)$와 직선 ㉠ 사이의 거리가 1이므로

$\dfrac{|1+k-4-2k+6+2k|}{\sqrt{(1+k)^2+(-2-k)^2}}=1$

$\dfrac{|k+3|}{\sqrt{2k^2+6k+5}}=1$

$|k+3|=\sqrt{2k^2+6k+5}$

양변을 제곱하면

$k^2+6k+9=2k^2+6k+5$

$k^2=4 \qquad \therefore k=-2$ 또는 $k=2$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 구하는 직선의 방정식은

$-x+2=0$ 또는 $3x-4y+10=0$

$\therefore x=2$ 또는 $3x-4y+10=0$

다른 풀이 $x-2y+6=0$ $\cdots\cdots$ ㉠

$x-y+2=0$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=2$, $y=4$

즉, 두 직선 ㉠, ㉡의 교점의 좌표는 $(2, 4)$이다.

(i) 구하는 직선이 $y$축과 평행할 때,

점 $(2, 4)$를 지나고 $y$축과 평행한 직선의 방정식은 $x=2$

이때 점 $(1, 2)$와 직선 $x=2$ 사이의 거리는 1이므로 주어진 조건을 만족시킨다.

$\therefore x=2$

(ii) 구하는 직선이 $y$축과 평행하지 않을 때,

점 (2, 4)를 지나는 직선의 기울기를 $m$이라 하면 직선의 방정식은

$y-4=m(x-2)$ $\quad \therefore y=mx-2m+4$

이때 점 (1, 2)와 직선 $y=mx-2m+4$, 즉

$mx-y-2m+4=0$ 사이의 거리가 1이므로

$\frac{|m-2-2m+4|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1$

$|-m+2|=\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하면 $m^2-4m+4=m^2+1$

$-4m=-3$ $\quad \therefore m=\frac{3}{4}$

따라서 직선의 방정식은 $\frac{3}{4}x-y-\frac{3}{2}+4=0$

$\therefore 3x-4y+10=0$

(i), (ii)에서 구하는 직선의 방정식은

$x=2$ 또는 $3x-4y+10=0$

## 115

점과 직선 사이의 거리 ⊕ 꼭짓점의 좌표가 주어진 삼각형의 넓이

전략 $\triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times$(점 B와 직선 AC 사이의 거리)임을 이용한다.

풀이 두 점 A$(-2, 1)$, C$(6, -3)$ 사이의 거리는

$\overline{AC}=\sqrt{\{6-(-2)\}^2+(-3-1)^2}=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$

직선 AC의 방정식은

$y-1=\frac{-3-1}{6-(-2)}\{x-(-2)\}$

$y=-\frac{1}{2}x$ $\quad \therefore x+2y=0$

이때 점 B$(a, 5)$에서 직선 AC에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{BH}=\frac{|a+10|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{|a+10|}{\sqrt{5}}$

삼각형 ABC의 넓이가 22이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BH}=\frac{1}{2}\times4\sqrt{5}\times\frac{|a+10|}{\sqrt{5}}=22$

$|a+10|=11$

$a+10=-11$ 또는 $a+10=11$

$\therefore a=-21$ 또는 $a=1$

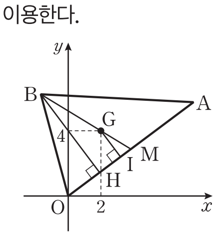
그런데 $a>0$이므로 $a=1$

## 116

점과 직선 사이의 거리

전략 삼각형의 무게중심의 성질과 삼각형의 닮음을 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 직선 BG가 선분 OA와 만나는 점을 M이라 하고, 두 점 B, G에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 각각 H, I라 하자.




두 삼각형 MBH와 MGI는 서로 닮음이고 닮음비가 $\overline{MB}:\overline{MG}=3:1$이다.

이때 $\overline{BH}=6$이므로 $\overline{BH}:\overline{GI}=3:1$에서

$6:\overline{GI}=3:1$ $\quad \therefore \overline{GI}=2$

따라서 직선 OA의 방정식이 $y=kx$, 즉 $kx-y=0$이므로

$\underline{\text{점 G}(2, 4)\text{와 직선 OA 사이의 거리는}}$

→$\overline{GI}$의 길이와 같다.

$\frac{|2k-4|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=2$

$|2k-4|=2\sqrt{k^2+1}$

양변을 제곱하면 $4k^2-16k+16=4k^2+4$

$16k=12$ $\quad \therefore k=\frac{3}{4}$

## 도전 1등급 최고난도

● 33쪽

**117** 3 **118** 43

## 117

두 직선의 평행과 수직 ⊕ 꼭짓점의 좌표가 주어진 삼각형의 넓이

1단계 삼각형 ABC의 좌표를 이용하여 네 직선 AB, BC, AH, CI의 방정식을 구한다.

직선 AB의 기울기는 $-\sqrt{3}$이고 점 B$(0, a\sqrt{3})$을 지나므로

$y=-\sqrt{3}x+a\sqrt{3}$

직선 BC의 기울기는 1이고 점 B$(0, a\sqrt{3})$을 지나므로

$y=x+a\sqrt{3}$

$\overline{BC}\perp\overline{AH}$이므로 직선 AH의 기울기는 $-1$이고 점 A$(a, 0)$을 지나므로

$y=-(x-a)$ $\quad \therefore y=-x+a$

$\overline{AB}\perp\overline{CI}$이므로 직선 CI의 기울기는 $\frac{1}{\sqrt{3}}$이고 점 C$(-a\sqrt{3}, 0)$을 지나므로

$y=\frac{1}{\sqrt{3}}(x+a\sqrt{3})$ $\quad \therefore y=\frac{1}{\sqrt{3}}x+a$

2단계 점 P의 좌표를 구하고 삼각형 APC의 넓이를 이용하여 $a$의 값을 구한다.

두 직선 AH와 CI의 방정식을 연립하여 풀면

$x=0$, $y=a$이므로 P$(0, a)$

이때 삼각형 APC의 넓이는 $6(1+\sqrt{3})$이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{OP}=\frac{1}{2}\times\{a-(-a\sqrt{3})\}\times a$

$=\frac{a^2}{2}(1+\sqrt{3})=6(1+\sqrt{3})$

$a^2=12$ $\quad \therefore a=2\sqrt{3}$ ($\because a>0$)

3단계 삼각비를 이용하여 두 삼각형 BPI, BHP의 넓이를 구한다.

$\overline{BP}=\overline{OB}-\overline{OP}=6-2\sqrt{3}$

$\overline{OA}=\overline{OP}$이므로 $\angle PAO=\angle APO=45°$

$\triangle OAB$에서 $\overline{OA}:\overline{OB}=1:\sqrt{3}$이므로

$\angle BAO=60°$, $\angle OBA=30°$

즉, $\angle BPI=60°$이므로 삼각형 BPI에서

$\overline{BP}:\overline{PI}:\overline{IB}=2:1:\sqrt{3}$

따라서 삼각형 BPI의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{PI}\times\overline{BI}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\overline{BP}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{BP}=\frac{\sqrt{3}}{8}\overline{BP}^2$

$=\frac{\sqrt{3}}{8}(6-2\sqrt{3})^2=6\sqrt{3}-9$

또, $\overline{OB}:\overline{OC}=1:1$이므로 $\angle OBC=45°$

즉, $\triangle BHP$에서 $\angle HPB=45°$, $\angle PBH=45°$

따라서 직각이등변삼각형 BHP의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{BH}\times\overline{HP}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\overline{BP}\right)^2=\frac{1}{4}\overline{BP}^2$$
$$=\frac{1}{4}(6-2\sqrt{3})^2$$
$$=12-6\sqrt{3}$$

(4단계) 사각형 BHPI의 넓이를 구한다.

따라서 사각형 BHPI의 넓이는

$\triangle BPI+\triangle BHP=(6\sqrt{3}-9)+(12-6\sqrt{3})=3$

## 118

점과 직선 사이의 거리

(1단계) 선분 PQ의 길이를 $a$라 하고, 두 삼각형 ABC, PQC의 닮음비를 이용하여 사다리꼴 PRSQ의 높이를 $a$로 나타낸다.

$\overline{AB}=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$

$\overline{PQ}=a$라 하면 사각형 PRSQ는 사다리꼴이므로

$\frac{5}{2}<a<5$ ($\because$ $\overline{AP}<\overline{PC}$)

직선 AB의 방정식은 $\frac{x}{-3}+\frac{y}{4}=1$, 즉 $4x-3y+12=0$이므로 점 $C(4, -3)$과 직선 AB 사이의 거리는

$$\frac{|4\times4-3\times(-3)+12|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{37}{5}$$

$\overline{AB}/\!/\overline{PQ}$이므로 삼각형 ABC와 삼각형 PQC는 닮음이고 닮음비가 $\overline{AB}:\overline{PQ}=5:a$이므로 점 C와 직선 PQ 사이의 거리는

$$\frac{37}{5}\times\frac{a}{5}=\frac{37}{25}a$$

따라서 사다리꼴 PRSQ의 높이는 $\frac{37}{5}-\frac{37}{25}a$이다.

(2단계) 두 사각형 BQPR, SQPA가 모두 평행사변형임을 이용하여 선분 SR의 길이를 $a$로 나타낸다.

두 사각형 BQPR, SQPA가 모두 평행사변형이므로

$\overline{BS}+\overline{SR}=a=\overline{AR}+\overline{SR}$ $\quad\therefore \overline{BS}=\overline{AR}$

$\overline{BS}+\overline{SR}+\overline{AR}=\overline{BS}+a=5$ $\quad\therefore \overline{BS}=5-a$

$\therefore \overline{SR}=5-2\overline{BS}=5-2(5-a)=2a-5$

(3단계) 사각형 PRSQ의 넓이를 $a$로 나타내고, 이차함수의 최댓값을 이용하여 넓이의 최댓값을 구한다.

사다리꼴 PRSQ의 넓이를 $S(a)$라 하면

$$S(a)=\frac{1}{2}\{(2a-5)+a\}\left(\frac{37}{5}-\frac{37}{25}a\right)$$
$$=-\frac{1}{50}(3a-5)(37a-185)$$
$$=-\frac{111}{50}\left(a-\frac{10}{3}\right)^2+\frac{37}{6}\ \left(\frac{5}{2}<a<5\right)$$

이므로 $a=\frac{10}{3}$일 때, $S(a)$의 최댓값은 $\frac{37}{6}$이다.

따라서 $p=6$, $q=37$이므로

$p+q=6+37=43$

# 03 원의 방정식

## 유형 분석 기출

36쪽 ~ 44쪽

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **119** ③ | **120** ③ | **121** $20\pi$ | | |
| **122** $(x-2)^2+(y+3)^2=13$ | | | | |
| **123** $(x+1)^2+(y-1)^2=25$ | | | **124** ③ | **125** 1 |
| **126** $x^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$ | | **127** ④ | **128** ② | **129** $\pi$ |
| **130** $2\sqrt{2}$ | **131** ② | **132** ⑤ | **133** ⑤ | **134** ⑤ |
| **135** $2\pi$ | **136** $16\pi$ | **137** 4 | **138** 2 | **139** ③ |
| **140** 2 | **141** ② | **142** ② | **143** ③ | **144** ④ |
| **145** 5, 20 | **146** $k<-3$ 또는 $k>\frac{1}{3}$ | | **147** ④ | **148** $\frac{1}{16}$ |
| **149** ⑤ | **150** ④ | **151** 4 | **152** ④ | **153** 2 |
| **154** ④ | **155** ③ | **156** ④ | **157** $\sqrt{2}$ | **158** ⑤ |
| **159** $-3$ | **160** 10 | **161** ⑤ | **162** ④ | **163** ③ |
| **164** ① | **165** ④ | **166** ③ | **167** 1 | **168** ④ |

## 119

$x^2+y^2-4x+2y-31=0$에서

$(x^2-4x+4)+(y^2+2y+1)=36$

$\therefore (x-2)^2+(y+1)^2=6^2$

따라서 중심의 좌표는 $(2, -1)$, 반지름의 길이는 6이므로

$a=2$, $b=-1$, $r=6$

$\therefore a+b+r=2+(-1)+6=7$

**1등급 비법**

원의 중심의 좌표와 반지름의 길이는 원의 방정식을 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 꼴로 고쳐서 구한다.

## 120

중심의 좌표를 $(a, 0)$, 반지름의 길이를 $r$ $(r>0)$이라 하면 원의 방정식은

$(x-a)^2+y^2=r^2$ …… ㉠

이 원이 두 점 $(0, 4)$, $(6, 2)$를 지나므로

㉠에 $x=0$, $y=4$를 대입하면

$a^2+4^2=r^2$ …… ㉡

㉠에 $x=6$, $y=2$를 대입하면

$(6-a)^2+2^2=r^2$ …… ㉢

㉡을 ㉢에 대입하면

$(6-a)^2+2^2=a^2+4^2$, $a^2-12a+40=a^2+16$

$-12a=-24$ $\quad\therefore a=2$

$a=2$를 ㉡에 대입하면

$2^2+4^2=r^2$, $r^2=20$ $\quad\therefore r=2\sqrt{5}$ ($\because$ $r>0$)

따라서 주어진 원의 방정식은 $(x-2)^2+y^2=20$

ㄱ. 중심의 좌표는 $(2, 0)$이다. (참)

ㄴ. $x=-2$, $y=-2$를 대입하면 $(-2-2)^2+(-2)^2=20$이므로 주어진 원은 점 $(-2, -2)$를 지난다. (참)

ㄷ. 원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{5}$이므로 원의 둘레의 길이는 $4\sqrt{5}\pi$이다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

## 121

원의 중심이 직선 $x+2y=0$, 즉 $y=-\frac{1}{2}x$ 위에 있으므로 중심의 좌표를 $(2a,\ -a)$라 하고, 반지름의 길이를 $r$이라 하면 원의 방정식을

$(x-2a)^2+(y+a)^2=r^2$ …… ㉠

으로 놓을 수 있다.

이 원이 두 점 $(0,\ 3)$, $(4,\ 3)$을 지나므로

㉠에 $x=0$, $y=3$을 대입하면

$(-2a)^2+(3+a)^2=r^2$ …… ㉡

㉠에 $x=4$, $y=3$을 대입하면

$(4-2a)^2+(3+a)^2=r^2$ …… ㉢

㉡$-$㉢을 하면 $4a^2-(4-2a)^2=0$

$16a-16=0 \qquad \therefore a=1$

$a=1$을 ㉡에 대입하면 $r^2=20$

따라서 구하는 원의 넓이는

$\pi r^2=20\pi$

## 122

두 점 A, B는 각각 직선 $3x-2y=a$와 $x$축, $y$축이 만나는 점이므로 두 점 A, B의 좌표는 각각 $\left(\frac{a}{3},\ 0\right)$, $\left(0,\ -\frac{a}{2}\right)$이다.

$\overline{AB}=2\sqrt{13}$이므로

$\sqrt{\left(0-\frac{a}{3}\right)^2+\left(-\frac{a}{2}-0\right)^2}=2\sqrt{13}$

양변을 제곱하면 $\frac{13}{36}a^2=52$, $a^2=144$

$\therefore a=12\ (\because a>0)$

A$(4,\ 0)$, B$(0,\ -6)$이고 선분 AB의 중점의 좌표는

$\left(\frac{4+0}{2},\ \frac{0+(-6)}{2}\right) \qquad \therefore (2,\ -3)$

따라서 중심의 좌표가 $(2,\ -3)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{13}$인 원의 방정식은

$(x-2)^2+(y+3)^2=13$

## 123

원의 중심은 선분 AB의 중점과 일치하므로 원의 중심의 좌표는

$\left(\frac{-5+3}{2},\ \frac{-2+4}{2}\right) \qquad \therefore (-1,\ 1)$

또, 원의 반지름의 길이는

$\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\sqrt{\{3-(-5)\}^2+\{4-(-2)\}^2}=\frac{1}{2}\times 10=5$

따라서 중심의 좌표가 $(-1,\ 1)$이고 반지름의 길이가 5인 원의 방정식은

$(x+1)^2+(y-1)^2=25$

## 124

외접원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$으로 놓으면 이 원이 세 점 O$(0,\ 0)$, P$(-1,\ 3)$, Q$(4,\ -2)$를 지나므로

$C=0$ …… ㉠

$-A+3B+C=-10$ …… ㉡

$4A-2B+C=-20$ …… ㉢

㉠을 ㉡, ㉢에 각각 대입하면

$-A+3B=-10$, $4A-2B=-20$

두 식을 연립하여 풀면

$A=-8$, $B=-6$

즉, 원의 방정식은

$x^2+y^2-8x-6y=0 \qquad \therefore (x-4)^2+(y-3)^2=25$

따라서 외접원의 중심의 좌표는 $(4,\ 3)$, 반지름의 길이는 5이므로

$a=4$, $b=3$, $r=5$

$\therefore a+b+r=4+3+5=12$

**1등급 비법**

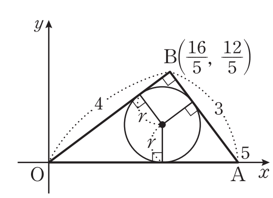
세 점을 지나는 원의 방정식을 구할 때는 원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$으로 놓고, 세 점의 좌표를 각각 대입하여 $A$, $B$, $C$의 값을 구한다.

## 125

삼각형 OAB의 세 변의 길이를 각각 구하면

$\overline{OA}=5$, $\overline{OB}=\sqrt{\left(\frac{16}{5}\right)^2+\left(\frac{12}{5}\right)^2}=4$,

$\overline{AB}=\sqrt{\left(\frac{16}{5}-5\right)^2+\left(\frac{12}{5}-0\right)^2}=3$




오른쪽 그림과 같이 삼각형 OAB의 내접원의 반지름의 길이를 $r$이라 하면

삼각형 OAB가 $\angle B=90°$인 직각삼각형이므로

$\frac{1}{2}\times 3\times 4=\frac{1}{2}\times r\times(5+4+3)$

$6=6r \qquad \therefore r=1$

삼각형 OAB의 내접원의 중심의 좌표를 $(k,\ 1)$ $\left(0<k<\frac{12}{5}\right)$이라 하면 직선 OB의 방정식이 $y=\frac{3}{4}x$이므로 점 $(k,\ 1)$과 직선 $3x-4y=0$ 사이의 거리가 1이다.

$1=\frac{|3k-4|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}$

$|3k-4|=5 \qquad \therefore k=3$

즉, 중심의 좌표가 $(3,\ 1)$이고 반지름의 길이가 1인 삼각형 OAB의 내접원의 방정식은

$(x-3)^2+(y-1)^2=1$

$\therefore x^2+y^2-6x-2y+9=0$

따라서 $a=-6$, $b=-2$, $c=9$이므로

$a+b+c=-6+(-2)+9=1$

**개념 보충**

**삼각형의 내심과 넓이**

① 삼각형의 내접원의 중심에서 세 변에 이르는 거리는 내접원의 반지름의 길이와 같다.

② 삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이를 $r$이라 하면

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}r(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA})$$

## 126

점 $\left(0, \frac{a+1}{2}\right)$은 선분 AB의 중점이므로 주어진 원은 선분 AB를 지름으로 하는 원이고, 삼각형 OAB는 $\angle BOA=90°$인 직각삼각형이다.

즉, 두 직선 OA, OB는 서로 수직이고 두 직선 OA, OB의 기울기는 각각 $\frac{1}{2}$, $-\frac{a}{2}$이므로

$\frac{1}{2}\times\left(-\frac{a}{2}\right)=-1 \qquad \therefore a=4$

$\therefore B(-2, 4)$

이때 구하는 원의 지름의 길이는

$\overline{AB}=\sqrt{(-2-2)^2+(4-1)^2}=5$

이므로 반지름의 길이는 $\frac{5}{2}$이다.

따라서 중심의 좌표가 $\left(0, \frac{5}{2}\right)$이고 반지름의 길이가 $\frac{5}{2}$인 원의 방정식은

$x^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$

**개념 보충**

**원주각의 성질**

원의 지름에 대한 원주각의 크기는 $90°$이다.

## 127

$x^2+y^2-2x-ay-b=0$에서

$(x-1)^2+\left(y-\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}+b+1$

이므로 원 $C$의 중심의 좌표는 $\left(1, \frac{a}{2}\right)$이고,

반지름의 길이는 $\sqrt{\frac{a^2}{4}+b+1}$이다.

원 $C$의 중심이 직선 $y=2x-1$ 위에 있으므로

$\frac{a}{2}=2\times1-1 \qquad \therefore a=2$

따라서 원 $C$의 중심의 좌표는 $(1, 1)$이고, 반지름의 길이는 $\sqrt{b+2}$이다.

이때 삼각형 ABP의 밑변을 선분 AB라 하면 선분 AB는 원 $C$의 지름이므로 삼각형 ABP의 넓이가 최대가 되려면 높이는 원 $C$의 반지름의 길이와 같아야 한다. 삼각형 ABP의 넓이의 최댓값이 4이므로

$\frac{1}{2}\times2\sqrt{b+2}\times\sqrt{b+2}=4$

$b+2=4 \qquad \therefore b=2$

$\therefore a+b=2+2=4$

## 128

원의 중심이 직선 $y=x-1$ 위에 있으므로 중심의 좌표를 $(a, a-1)$이라 하면 원이 $y$축에 접하므로 원의 방정식을

$(x-a)^2+(y-a+1)^2=a^2$

으로 놓을 수 있다.

이 원이 점 $(3, -1)$을 지나므로

$(3-a)^2+(-1-a+1)^2=a^2$

$(3-a)^2=0 \qquad \therefore a=3$

따라서 원의 반지름의 길이는 3이다.

## 129

점 $(2, -1)$이 제4사분면 위의 점이므로 원의 반지름의 길이를 $r$이라 하면 두 직선 $x=0$, $y=0$, 즉 $y$축, $x$축에 접하는 원의 방정식을

$(x-r)^2+(y+r)^2=r^2$

으로 놓을 수 있다.

이 원이 점 $(2, -1)$을 지나므로

$(2-r)^2+(-1+r)^2=r^2$

$r^2-6r+5=0$, $(r-1)(r-5)=0$

$\therefore r=1$ 또는 $r=5$

따라서 구하는 작은 원의 넓이는

$\pi\times1^2=\pi$

## 130

원의 중심의 좌표를 $(a, b)$라 하면 원이 $x$축에 접하므로 원의 방정식을

$(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$

으로 놓을 수 있다.

이 원이 두 점 $A(0, 1)$, $B(0, 2)$를 지나므로

$a^2+(1-b)^2=b^2 \qquad \cdots\cdots ㉠$

$a^2+(2-b)^2=b^2 \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉠−㉡을 하면 $(1-b)^2-(2-b)^2=0$

$2b-3=0 \qquad \therefore b=\frac{3}{2}$

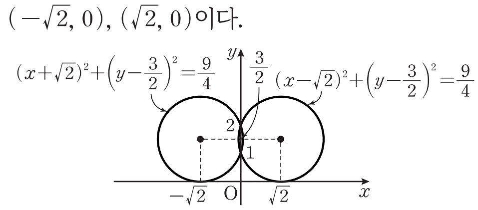
$b=\frac{3}{2}$을 ㉠에 대입하면 $a^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2$

$a^2+\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$, $a^2=2 \qquad \therefore a=-\sqrt{2}$ 또는 $a=\sqrt{2}$

즉, 두 원의 방정식은

$(x+\sqrt{2})^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$, $(x-\sqrt{2})^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$

이때 이 두 원이 $x$축에 접하여 생기는 두 접점의 좌표는 다음 그림과 같이 $(-\sqrt{2}, 0)$, $(\sqrt{2}, 0)$이다.



따라서 구하는 두 접점 사이의 거리는

$\sqrt{2}-(-\sqrt{2})=2\sqrt{2}$

## 131

$x^2+y^2-8x+2y+k=0$에서

$(x-4)^2+(y+1)^2=-k+17$

이 방정식이 원을 나타내려면

$-k+17>0 \qquad \therefore k<17$

따라서 자연수 $k$는 $1, 2, 3, \cdots, 16$의 16개이다.

## 132

$x^2+y^2-2ax+4y+2a^2-5=0$에서

$(x-a)^2+(y+2)^2=9-a^2$

이 방정식이 원을 나타내므로

$9-a^2>0,\ a^2-9<0$

$\therefore -3<a<3$

이때 원의 반지름의 길이 $\sqrt{9-a^2}$이 자연수이므로

$\sqrt{9-a^2}=1$ 또는 $\sqrt{9-a^2}=2$ 또는 $\sqrt{9-a^2}=3$

$\therefore a^2=8$ 또는 $a^2=5$ 또는 $a^2=0$

$a>0$이므로 $a=2\sqrt{2}$ 또는 $a=\sqrt{5}$

따라서 모든 양수 $a$의 값의 곱은

$2\sqrt{2}\times\sqrt{5}=2\sqrt{10}$

## 133

$x^2+y^2+(2k-4)x+4y+k+4=0$에서

$(x+k-2)^2+(y+2)^2=(k-2)^2-k$

$(x+k-2)^2+(y+2)^2=k^2-5k+4$

이 방정식이 나타내는 도형은 넓이가 $4\pi$ 이하인 원이므로

$0<k^2-5k+4\le 4$

(i) $k^2-5k+4>0$에서

$(k-1)(k-4)>0 \qquad \therefore k<1$ 또는 $k>4$ …… ㉠

(ii) $k^2-5k+4\le 4$에서

$k(k-5)\le 0 \qquad \therefore 0\le k\le 5$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$0\le k<1$ 또는 $4<k\le 5$

따라서 구하는 정수 $k$의 최댓값은 5이다.

## 134

점 P의 좌표를 $(x, y)$라 하면 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$이므로

$(x+2)^2+y^2=\{(x-2)^2+(y+2)^2\}+\{(x-4)^2+(y-2)^2\}$

$x^2+y^2-16x+24=0$

$\therefore (x-8)^2+y^2=40$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(8, 0)$이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{10}$인 원이므로 구하는 도형의 넓이는

$\pi\times(2\sqrt{10})^2=40\pi$

**1등급 비법**

점이 나타내는 도형의 방정식은 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) 조건을 만족시키는 점을 $(x, y)$로 놓는다.

(ii) 주어진 조건을 이용하여 $x$와 $y$ 사이의 관계식을 구한다.

## 135

원 $x^2+y^2=9$ 위의 점 P의 좌표를 $(a, b)$라 하면

$a^2+b^2=9$ …… ㉠

삼각형 ABP의 무게중심 G의 좌표를 $(x, y)$라 하면

$x=\dfrac{-5+2+a}{3},\ y=\dfrac{-2+5+b}{3}$

$\therefore a=3x+3,\ b=3y-3$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $(3x+3)^2+(3y-3)^2=9$

$\therefore (x+1)^2+(y-1)^2=1$

따라서 무게중심 G가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(-1, 1)$이고 반지름의 길이가 1인 원이므로 구하는 도형의 길이는

$2\pi\times 1=2\pi$

## 136

$\overline{AP}:\overline{BP}=1:2$이므로

$2\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $4\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$

점 P의 좌표를 $(x, y)$라 하면

$4\{(x-2)^2+(y-1)^2\}=\{x-(-4)\}^2+(y-1)^2$

$4(x-2)^2+3(y-1)^2=(x+4)^2$

$3x^2+3y^2-24x-6y+3=0$

$x^2+y^2-8x-2y+1=0$

$\therefore (x-4)^2+(y-1)^2=16$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(4, 1)$이고 반지름의 길이가 4인 원이므로 구하는 넓이는

$\pi\times 4^2=16\pi$

## 137

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2-4-(x^2+y^2-4x-2y)=0$

$4x+2y-4=0 \qquad \therefore 2x+y-2=0$

이 직선이 점 $(-1, k)$를 지나므로

$-2+k-2=0 \qquad \therefore k=4$

## 138

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2-2x-(x^2+y^2-2ax-3ay+8)=0$

$\therefore 2(a-1)x+3ay-8=0$

이 직선과 직선 $3x-y-3=0$이 수직이므로

$2(a-1)\times 3+3a\times(-1)=0,\ 3a=6$

$\therefore a=2$

**개념 보충**

두 직선 $ax+by+c=0,\ a'x+b'y+c'=0$이 수직이면

⇨ $aa'+bb'=0$

## 139

$x^2+y^2=4$에서 $x^2+y^2-4=0$

$(x-1)^2+(y+1)^2=8$에서 $x^2+y^2-2x+2y-6=0$

따라서 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2-4-(x^2+y^2-2x+2y-6)=0$

$2x-2y+2=0 \qquad \therefore x-y+1=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

한편, 두 원의 중심 $(0,\ 0)$, $(1,\ -1)$을 지나는 직선의 방정식은

$y=-x \qquad \cdots\cdots$ ㉡

이때 두 원의 중심을 지나는 직선은 두 원의 공통인 현을 수직이등분한다. 즉, 선분 AB의 중점은 두 직선 ㉠, ㉡의 교점과 같으므로 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$x=-\frac{1}{2},\ y=\frac{1}{2}$

따라서 선분 AB의 중점의 좌표는 $\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$이므로

$a=-\frac{1}{2},\ b=\frac{1}{2}$

$\therefore ab=\left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$

**1등급 비법**

두 원의 공통인 현의 중점은 두 원의 교점을 지나는 직선과 두 원의 중심을 지나는 직선의 교점과 같다.

## 140

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$x^2+y^2-4+k(x^2+y^2-4x+4y)=0$ (단, $k\neq-1$)

$(k+1)x^2+(k+1)y^2-4kx+4ky-4=0$

$x^2+y^2-\frac{4k}{k+1}x+\frac{4k}{k+1}y-\frac{4}{k+1}=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

방정식 $x^2+y^2-3x+Ay+B=0$과 ㉠을 비교하면

$-\frac{4k}{k+1}=-3 \qquad \therefore k=3$

㉠에 $k=3$을 대입하면

$x^2+y^2-3x+3y-1=0$

이므로 $A=3$, $B=-1$

$\therefore A+B=3+(-1)=2$

**1등급 비법**

두 원 $x^2+y^2+ax+by+c=0$, $x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0$의 교점을 지나는 원의 방정식은

$x^2+y^2+ax+by+c+k(x^2+y^2+a'x+b'y+c')=0\ (k\neq-1)$

으로 놓고, 이 원이 지나는 점의 좌표를 방정식에 대입하여 실수 $k$의 값을 구한다.

## 141

$(x+1)^2+(y-1)^2-7=0$에서 $x^2+y^2+2x-2y-5=0$

따라서 주어진 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$x^2+y^2+2x-2y-5+k(x^2+y^2-4x-6y-7)=0$ (단, $k\neq-1$)

$(k+1)x^2+(k+1)y^2+(2-4k)x-(2+6k)y-5-7k=0$

$x^2+y^2+\frac{2-4k}{k+1}x-\frac{2+6k}{k+1}y-\frac{5+7k}{k+1}=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

원 ㉠의 중심의 $x$좌표가 $\frac{1}{2}$이므로

$-\frac{2-4k}{2(k+1)}=\frac{1}{2} \qquad \therefore k=1$

㉠에 $k=1$을 대입하면

$x^2+y^2-x-4y-6=0$

$\therefore \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-2)^2=\frac{41}{4}$

따라서 구하는 원의 넓이는 $\frac{41}{4}\pi$이다.

## 142

두 원 $x^2+y^2+2ax+2y-6=0$, $x^2+y^2+2x-2y-2=0$을 각각 $O$, $O'$이라 하면

$O$: $(x+a)^2+(y+1)^2=a^2+7$

$O'$: $(x+1)^2+(y-1)^2=4$

이때 원 $O$가 원 $O'$의 둘레의 길이를 이등분하려면 두 원의 교점을 지나는 직선이 원 $O'$의 중심을 지나야 한다.

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

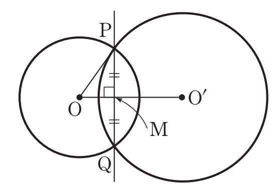
$x^2+y^2+2ax+2y-6-(x^2+y^2+2x-2y-2)=0$

$\therefore 2(a-1)x+4y-4=0$

이 직선이 원 $O'$의 중심 $(-1,\ 1)$을 지나므로

$-2(a-1)+4-4=0 \qquad \therefore a=1$

## 143




오른쪽 그림과 같이 두 원

$x^2+y^2-6=0$,

$x^2+y^2-8x-6y+4=0$

의 중심을 각각 O, O′이라 하고 두 원의 교점을 P, Q, $\overline{\mathrm{OO'}}$과 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 교점을 M이라 하면

$\overline{\mathrm{PQ}}\perp\overline{\mathrm{OM}}$, $\overline{\mathrm{PM}}=\overline{\mathrm{QM}}$

두 원의 교점을 지나는 직선 PQ의 방정식은

$x^2+y^2-6-(x^2+y^2-8x-6y+4)=0$

$8x+6y-10=0$

$\therefore 4x+3y-5=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

점 O$(0,\ 0)$과 직선 ㉠ 사이의 거리는

$\overline{\mathrm{OM}}=\frac{|-5|}{\sqrt{4^2+3^2}}=1$

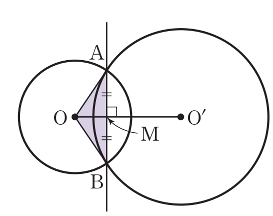
직각삼각형 POM에서

$\overline{\mathrm{PM}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OP}}^2-\overline{\mathrm{OM}}^2}=\sqrt{(\sqrt{6})^2-1^2}=\sqrt{5}$

따라서 공통인 현을 지름으로 하는 원의 넓이는

$\pi\times\overline{\mathrm{PM}}^2=\pi\times(\sqrt{5})^2=5\pi$

## 144




오른쪽 그림과 같이 두 원

$x^2+y^2-8=0$,

$x^2+y^2-6x+6y+4=0$

의 중심을 각각 O, O′이라 하고

$\overline{\mathrm{OO'}}$과 $\overline{\mathrm{AB}}$의 교점을 M이라 하면

$\overline{\mathrm{AB}}\perp\overline{\mathrm{OM}}$, $\overline{\mathrm{AM}}=\overline{\mathrm{BM}}$

두 원의 교점을 지나는 직선 AB의 방정식은

$x^2+y^2-8-(x^2+y^2-6x+6y+4)=0$에서

$6x-6y-12=0$

$\therefore x-y-2=0$ ...... ㉠

원점 O와 직선 ㉠ 사이의 거리는

$\overline{OM}=\dfrac{|-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$

직각삼각형 AOM에서

$\overline{AM}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{OM}^2}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{6}$

$\therefore \overline{AB}=2\overline{AM}=2\sqrt{6}$

따라서 삼각형 OAB의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{6}\times\sqrt{2}=2\sqrt{3}$

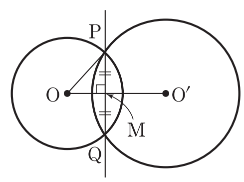
## 145

오른쪽 그림과 같이 두 원

$x^2+y^2-k=0$,

$x^2+y^2-3x+4y=0$

의 중심을 각각 O, O′이라 하고, 두 원의 교점을 P, Q, $\overline{OO'}$과 $\overline{PQ}$의 교점을 M이라 하면




$\overline{PQ}\perp\overline{OM}$, $\overline{PM}=\overline{QM}$

두 원의 교점을 지나는 직선 PQ의 방정식은

$x^2+y^2-k-(x^2+y^2-3x+4y)=0$

$\therefore 3x-4y-k=0$ ...... ㉠

점 O(0, 0)과 직선 ㉠ 사이의 거리는

$\overline{OM}=\dfrac{|-k|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\dfrac{k}{5}$ $(\because k>0)$

직각삼각형 POM에서

$\overline{PM}=\sqrt{\overline{OP}^2-\overline{OM}^2}=\sqrt{(\sqrt{k})^2-\left(\dfrac{k}{5}\right)^2}=\sqrt{k-\dfrac{k^2}{25}}$

$\therefore \overline{PQ}=2\overline{PM}=2\sqrt{k-\dfrac{k^2}{25}}$

이때 공통인 현의 길이가 4이어야 하므로

$2\sqrt{k-\dfrac{k^2}{25}}=4$, $\sqrt{k-\dfrac{k^2}{25}}=2$

양변을 제곱하면 $k-\dfrac{k^2}{25}=4$

$k^2-25k+100=0$, $(k-5)(k-20)=0$

$\therefore k=5$ 또는 $k=20$

## 146

주어진 원과 직선이 서로 만나지 않으려면

원 $(x-2)^2+(y+1)^2=10$의 중심 $(2, -1)$과

직선 $kx-y+2k+1=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 $\sqrt{10}$보다 커야 한다. 즉,

$\dfrac{|2k+1+2k+1|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}>\sqrt{10}$

$|4k+2|>\sqrt{10(k^2+1)}$

양변을 제곱하면 $16k^2+16k+4>10k^2+10$

$3k^2+8k-3>0$, $(k+3)(3k-1)>0$

$\therefore k<-3$ 또는 $k>\dfrac{1}{3}$

**1등급 비법**

원과 직선이 만나지 않을 때는

(원의 중심과 직선 사이의 거리) > (원의 반지름의 길이)

임을 이용한다.

## 147

두 점 $(-3, 0)$, $(1, 0)$을 지름의 양 끝 점으로 하는 원을 $C$라 하면

원 $C$는 중심의 좌표가 $\left(\dfrac{-3+1}{2}, 0\right)$, 즉 $(-1, 0)$이고 반지름의 길이가 2인 원이다.

원 $C$와 직선 $kx+y-2=0$이 오직 한 점에서 만나려면 원 $C$의 중심 $(-1, 0)$과 직선 $kx+y-2=0$ 사이의 거리가 2이어야 한다. 즉,

$\dfrac{|-k-2|}{\sqrt{k^2+1}}=2$

$|-k-2|=2\sqrt{k^2+1}$

양변을 제곱하면 $k^2+4k+4=4(k^2+1)$

$3k^2-4k=0$, $k(3k-4)=0$

$\therefore k=\dfrac{4}{3}$ $(\because k>0)$

## 148

직선 $ax+by+1=0$이 직선 $x-y+2=0$과 만나지 않으므로 두 직선은 평행하다.

즉, $\dfrac{a}{1}=\dfrac{b}{-1}\neq\dfrac{1}{2}$에서 $b=-a$ ...... ㉠

원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $ax-ay+1=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 4와 같아야 하므로

$\dfrac{|1|}{\sqrt{a^2+(-a)^2}}=4$

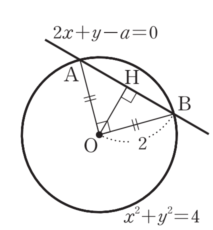
$4\sqrt{2a^2}=1$, $\sqrt{2a^2}=\dfrac{1}{4}$ $\quad\therefore a^2=\dfrac{1}{32}$

㉠에서 $b^2=a^2=\dfrac{1}{32}$

$\therefore a^2+b^2=\dfrac{1}{32}+\dfrac{1}{32}=\dfrac{1}{16}$

## 149

원의 중심이 원점 O이고 원의 반지름의 길이가 2이므로




$\overline{OA}=\overline{OB}=2$

또, $\angle AOB=90^\circ$이므로

$\angle OAB=\angle OBA=45^\circ$

따라서 원의 중심 O에서 직선 $2x+y-a=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\angle OAH=\angle AOH=45^\circ$

$\therefore \overline{OH}=2\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

즉, 원점 O와 직선 $2x+y-a=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{2}$이므로

$\dfrac{|-a|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{2}$

$|-a|=\sqrt{10}$ $\quad\therefore a^2=10$

## 150

두 점 A$(0, 6)$, B$(9, 0)$을 잇는 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점 P의 좌표는

$\left(\frac{2\times9+1\times0}{2+1}, \frac{2\times0+1\times6}{2+1}\right)$ $\quad\therefore$ P$(6, 2)$

점 P$(6, 2)$가 원 $x^2+y^2-2ax-2by=0$ 위의 점이므로

$6^2+2^2-2a\times6-2b\times2=0$

$\therefore 3a+b=10$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

원의 중심과 점 P를 지나는 직선을 $l$이라 하면 직선 $l$은 직선 AB와 서로 수직이고 직선 AB의 기울기가 $-\frac{2}{3}$이므로 직선 $l$의 기울기는 $\frac{3}{2}$이다.

직선 $l$이 점 P$(6, 2)$를 지나므로 직선 $l$의 방정식은

$y=\frac{3}{2}(x-6)+2$

원 $x^2+y^2-2ax-2by=0$에서

$(x-a)^2+(y-b)^2=a^2+b^2$

원의 중심 $(a, b)$가 직선 $l$ 위의 점이므로

$b=\frac{3}{2}(a-6)+2$ $\quad\therefore 3a-2b=14$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{34}{9}$, $b=-\frac{4}{3}$

$\therefore a+b=\frac{34}{9}+\left(-\frac{4}{3}\right)=\frac{22}{9}$

## 151

A$(1, 0)$, B$(5, 2)$라 하면 원의 중심의 좌표는

$\left(\frac{1+5}{2}, \frac{0+2}{2}\right)$ $\quad\therefore (3, 1)$

또, 원의 반지름의 길이는

$\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}=\frac{1}{2}\sqrt{(5-1)^2+(2-0)^2}=\sqrt{5}$

즉, 원의 방정식은

$(x-3)^2+(y-1)^2=5$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$y=0$을 ㉠에 대입하면 $(x-3)^2+(-1)^2=5$

$x^2-6x+5=0$, $(x-1)(x-5)=0$

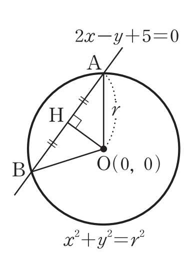
$\therefore x=1$ 또는 $x=5$

따라서 원과 $x$축이 만나는 두 점의 좌표가 $(1, 0)$, $(5, 0)$이므로 구하는 선분의 길이는

$|5-1|=4$

## 152

원 $x^2+y^2=r^2$의 중심 O$(0, 0)$에서 직선 $2x-y+5=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면




$\overline{\mathrm{OH}}=\frac{|5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$

원 $x^2+y^2=r^2$의 반지름의 길이는 $r$이므로 직각삼각형 OAH에서

$\overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{r^2-(\sqrt{5})^2}=\sqrt{r^2-5}$

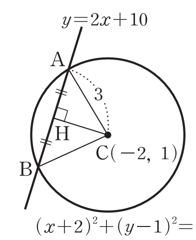
$\overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{AH}}$이고 $\overline{\mathrm{AH}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}=\frac{1}{2}\times4=2$이므로

$\sqrt{r^2-5}=2$, $r^2-5=4$, $r^2=9$

$\therefore r=3\ (\because r>0)$

## 153

원 $(x+2)^2+(y-1)^2=9$와 직선 $y=2x+10$, 즉 $2x-y+10=0$의 두 교점을 A, B라 하고, 원의 중심 C$(-2, 1)$에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면




$\overline{\mathrm{CH}}=\frac{|2\times(-2)-1+10|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}$

$=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

직각삼각형 CAH에서

$\overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{CA}}^2-\overline{\mathrm{CH}}^2}=\sqrt{3^2-(\sqrt{5})^2}=2$

$\therefore \overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{AH}}=2\times2=4$

두 점 A, B를 모두 지나는 원 중에서 넓이가 최소인 원은 선분 AB를 지름으로 하는 원이다.

따라서 구하는 원의 반지름의 길이는

$\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}=\frac{1}{2}\times4=2$

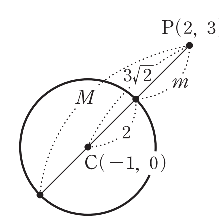
**1등급 비법**

원과 직선의 교점을 지나는 원 중에서 원과 직선이 만나서 생기는 현을 지름으로 하는 원의 넓이가 최소가 된다.

## 154

$x^2+y^2+2x-3=0$에서 $(x+1)^2+y^2=4$이므로 주어진 원은 중심의 좌표가 $(-1, 0)$이고 반지름의 길이가 2인 원이다.

이때 원의 중심 C$(-1, 0)$과 점 P$(2, 3)$ 사이의 거리는




$\overline{\mathrm{CP}}=\sqrt{\{2-(-1)\}^2+(3-0)^2}$

$=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

이므로

$M=3\sqrt{2}+2$, $m=3\sqrt{2}-2$

$\therefore Mm=(3\sqrt{2}+2)(3\sqrt{2}-2)$

$=18-4=14$

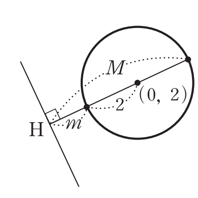
## 155

$x^2+y^2-4y=0$에서 $x^2+(y-2)^2=4$이므로 주어진 원은 중심의 좌표가 $(0, 2)$이고 반지름의 길이가 2인 원이다.

원의 중심 $(0, 2)$와 직선 $3x+4y+7=0$ 사이의 거리는

$\frac{|3\times0+4\times2+7|}{\sqrt{3^2+4^2}}=3$

이므로 선분 PH의 길이의 최댓값을 $M$, 최솟값을 $m$이라 하면




$M=3+2=5$, $m=3-2=1$

따라서 최댓값과 최솟값의 합은

$5+1=6$

## 156

원의 중심 $(-2, 1)$과 직선 $4x+3y+a=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|4\times(-2)+3\times1+a|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{|a-5|}{5}$$

원의 반지름의 길이가 3이고 점 P와 직선 $4x+3y+a=0$ 사이의 거리의 최댓값이 9이므로

$$\frac{|a-5|}{5}+3=9$$

$|a-5|=30$이므로 $a-5=-30$ 또는 $a-5=30$

$\therefore a=-25$ 또는 $a=35$

따라서 $M=35$, $m=-25$이므로

$M-m=35-(-25)=60$

## 157

중심이 직선 $y=x\ (x>0)$ 위에 있으므로 중심의 좌표를 $(a, a)\ (a>0)$, 반지름의 길이를 $r$이라 하면 원의 방정식을

$(x-a)^2+(y-a)^2=r^2$

으로 놓을 수 있다.

이 원이 점 $(2, 0)$을 지나므로

$(2-a)^2+a^2=r^2$ …… ㉠

또, 원점과 이 원 위의 점 사이의 거리의 최댓값은

(원점과 원의 중심 $(a, a)$ 사이의 거리)+(원의 반지름의 길이)

와 같으므로

$\sqrt{a^2+a^2}+r=2\sqrt{2}$

$\sqrt{2}a+r=2\sqrt{2}$ ($\because a>0$)

$\therefore r=\sqrt{2}(2-a)$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $(2-a)^2+a^2=2(2-a)^2$

$2a^2-4a+4=2a^2-8a+8$, $4a=4$

$\therefore a=1$

$a=1$을 ㉡에 대입하면 $r=\sqrt{2}$

따라서 구하는 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{2}$이다.

## 158

직선 $x-2y+5=0$, 즉 $y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$와 수직인 직선의 기울기는 $-2$이고, 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{20}=2\sqrt{5}$이므로 접선의 방정식은

$y=-2x\pm2\sqrt{5}\times\sqrt{(-2)^2+1}$ $\quad\therefore y=-2x\pm10$

따라서 두 접선이 $y$축과 만나는 점의 좌표는 각각 $(0, 10)$, $(0, -10)$이므로

$\overline{PQ}=|10-(-10)|=20$

## 159

기울기가 $-1$인 직선의 방정식을 $y=-x+k$라 하자.

원의 중심 $(2, -1)$과 직선 $y=-x+k$, 즉 $x+y-k=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 $\sqrt{2}$와 같아야 하므로

$$\frac{|2-1-k|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2}$$

$|1-k|=2$이므로 $1-k=-2$ 또는 $1-k=2$

$\therefore k=3$ 또는 $k=-1$

따라서 구하는 $y$절편의 곱은

$3\times(-1)=-3$

## 160

원의 방정식을 $x^2+y^2=r^2$이라 하면 이 원이 점 $(2, -1)$을 지나므로

$r^2=2^2+(-1)^2=5$ $\quad\therefore x^2+y^2=5$

직선 $x-y+2=0$의 기울기는 1이므로 이 직선과 평행한 직선의 기울기도 1이다.

원 $x^2+y^2=5$에 접하고 기울기가 1인 직선의 방정식은

$y=x\pm\sqrt{5}\times\sqrt{1^2+1}$ $\quad\therefore y=x\pm\sqrt{10}$

따라서 $a=1$, $b=\sqrt{10}$ 또는 $a=1$, $b=-\sqrt{10}$이므로

$ab^2=1\times10=10$

## 161

원 $x^2+y^2=5$ 위의 점 $(-1, 2)$에서의 접선의 방정식은

$-x+2y=5$ $\quad\therefore y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$

이 직선이 점 $(5, a)$를 지나므로

$a=\frac{1}{2}\times5+\frac{5}{2}=\frac{5}{2}+\frac{5}{2}=5$

## 162

원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 $(a, 4\sqrt{3})$에서의 접선의 방정식은

$ax+4\sqrt{3}y=r^2$

$\therefore ax+4\sqrt{3}y-r^2=0$

이 접선이 직선 $x-\sqrt{3}y+b=0$과 일치하므로

$$\frac{a}{1}=\frac{4\sqrt{3}}{-\sqrt{3}}=\frac{-r^2}{b}$$

$\therefore a=-4$, $r^2=4b$ …… ㉠

한편, 점 $(-4, 4\sqrt{3})$이 원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점이므로

$(-4)^2+(4\sqrt{3})^2=r^2$, $r^2=64$

$\therefore r=8$ ($\because r>0$)

㉠에서 $b=\frac{r^2}{4}=\frac{64}{4}=16$

$\therefore a+b+r=(-4)+16+8=20$

개념 보충

**두 직선의 위치 관계**

두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$ $(abc\neq0, a'b'c'\neq0)$이

① 평행하다. ⇨ $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$

② 일치한다. ⇨ $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$

③ 한 점에서 만난다. ⇨ $\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$

④ 수직이다. ⇨ $aa'+bb'=0$

## 163

$x-y-1=0$에서 $y=x-1$ …… ㉠

㉠을 $x^2+y^2=13$에 대입하면 $x^2+(x-1)^2=13$

$x^2-x-6=0$, $(x+2)(x-3)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=3$

이를 ㉠에 대입하면 $y=-3$ 또는 $y=2$

즉, 주어진 원과 직선의 두 교점의 좌표는

$(-2, -3)$, $(3, 2)$이다.

따라서 제1사분면 위의 점은 $(3, 2)$이므로 이 점에서의 접선의 방정식은

$3x+2y=13 \qquad \therefore 3x+2y-13=0$

## 164

원 $x^2+y^2=10$ 위의 점 $(a, b)$에서의 접선의 방정식은

$ax+by=10 \qquad \therefore y=-\frac{a}{b}x+\frac{10}{b}$

이때 접선의 기울기가 $-3$이므로

$-\frac{a}{b}=-3 \qquad \therefore a=3b$

즉, 점 $(3b, b)$가 원 $x^2+y^2=10$ 위의 점이므로

$(3b)^2+b^2=10$, $b^2=1 \qquad \therefore b=\pm1$

그런데 $a>0$이므로 $a=3$, $b=1$

$\therefore a+b=3+1=4$

## 165

점 $\mathrm{P}(-1, a)$가 원 $(x+2)^2+(y-2)^2=2$ 위의 점이므로

$(-1+2)^2+(a-2)^2=2$

$a^2-4a+3=0$, $(a-1)(a-3)=0$

$\therefore a=1$ 또는 $a=3$

(i) $a=1$일 때,

원의 중심 $(-2, 2)$와 점 $\mathrm{P}(-1, 1)$을 지나는 직선의 기울기는

$\frac{1-2}{-1-(-2)}=-1$이므로 접선의 기울기는 1이다.

이때 접선의 방정식은 $y-1=x+1$, 즉 $y=x+2$이다.

(ii) $a=3$일 때,

원의 중심 $(-2, 2)$와 점 $\mathrm{P}(-1, 3)$을 지나는 직선의 기울기는

$\frac{3-2}{-1-(-2)}=1$이므로 접선의 기울기는 $-1$이다.

그런데 기울기가 음수이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 직선 $l$의 방정식은 $y=x+2$

따라서 직선 $l$의 $y$절편은 2이다.

## 166

직선 $y=mx+n$이 점 $(5, 0)$을 지나므로

$0=5m+n \qquad \therefore n=-5m$ …… ㉠

즉, 접선의 방정식은 $y=mx-5m$

원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $y=mx-5m$, 즉 $mx-y-5m=0$

사이의 거리가 원의 반지름의 길이 $\sqrt{5}$와 같으므로

$\frac{|-5m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$

$|-5m|=\sqrt{5(m^2+1)}$

양변을 제곱하면 $25m^2=5(m^2+1)$

$4m^2-1=0$, $(2m+1)(2m-1)=0$

$\therefore m=-\frac{1}{2}$ 또는 $m=\frac{1}{2}$

$m=-\frac{1}{2}$일 때, ㉠에서 $n=\frac{5}{2}$

$m=\frac{1}{2}$일 때, ㉠에서 $n=-\frac{5}{2}$

$\therefore mn=-\frac{5}{4}$

**다른 풀이①** 접점의 좌표를 $(x_1, y_1)$이라 하면 점 $(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식은

$x_1x+y_1y=5$ …… ㉠

이 직선이 점 $(5, 0)$을 지나므로

$5x_1=5 \qquad \therefore x_1=1$

또, 점 $(x_1, y_1)$은 원 $x^2+y^2=5$ 위의 점이므로

${x_1}^2+{y_1}^2=5$

위의 식에 $x_1=1$을 대입하면

$1+{y_1}^2=5$, ${y_1}^2=4$

$\therefore y_1=-2$ 또는 $y_1=2$

$\therefore x_1=1$, $y_1=-2$ 또는 $x_1=1$, $y_1=2$

이를 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

$x-2y=5$ 또는 $x+2y=5$

$\therefore y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$ 또는 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$

따라서 $m=\frac{1}{2}$, $n=-\frac{5}{2}$ 또는 $m=-\frac{1}{2}$, $n=\frac{5}{2}$이므로

$mn=-\frac{5}{4}$

**다른 풀이②** 직선 $y=mx+n$이 점 $(5, 0)$을 지나므로

$0=5m+n \qquad \therefore n=-5m$ …… ㉠

즉, 접선의 방정식은 $y=mx-5m$

이 식을 $x^2+y^2=5$에 대입하면 $x^2+(mx-5m)^2=5$

$\therefore (m^2+1)x^2-10m^2x+25m^2-5=0$

이 이차방정식의 판별식을 $D$라 하면 원과 직선이 접하므로

$\frac{D}{4}=(-5m^2)^2-(m^2+1)(25m^2-5)=0$

$-20m^2+5=0$, $m^2=\frac{1}{4}$

$\therefore m=-\frac{1}{2}$ 또는 $m=\frac{1}{2}$

$m=-\frac{1}{2}$일 때, ㉠에서 $n=\frac{5}{2}$

$m=\frac{1}{2}$일 때, ㉠에서 $n=-\frac{5}{2}$

$\therefore mn=-\frac{5}{4}$

## 167

접선의 기울기를 $m$이라 하면 점 $\mathrm{P}(-1, 4)$를 지나는 접선의 방정식은

$y=m(x+1)+4$

$\therefore mx-y+m+4=0$

원의 중심 $(-2, 1)$과 직선 $mx-y+m+4=0$ 사이의 거리가 원

의 반지름의 길이 $\sqrt{2}$와 같으므로

$$\frac{|-2m-1+m+4|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$$

$|-m+3|=\sqrt{2m^2+2}$

양변을 제곱하면

$(-m+3)^2=2m^2+2,\ m^2+6m-7=0$

$(m+7)(m-1)=0$

$\therefore\ m=-7$ 또는 $m=1$

즉, 두 접선의 방정식은 각각

$y=-7x-3,\ y=x+5$

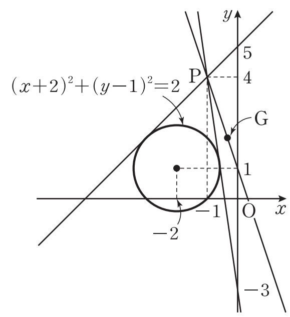
이고, 두 직선 $y=x+5$,

$y=-7x-3$이 $y$축과 만나는 점의

좌표는 각각 $(0, 5)$, $(0, -3)$이다.

$\therefore$ A$(0, 5)$, B$(0, -3)$ 또는

A$(0, -3)$, B$(0, 5)$




한편, 두 직선 PG, AB의 교점은 선분 AB의 중점과 같으므로 구하는 $y$좌표는

$$\frac{5+(-3)}{2}=1$$

**개념 보충**

**삼각형의 무게중심의 성질**

① 삼각형의 세 중선은 한 점(무게중심)에서 만난다.

② 삼각형의 무게중심은 세 중선의 길이를 각 꼭짓점으로부터 각각 2 : 1로 나눈다.

## 168

접선의 기울기를 $m$이라 하면 점 $(6, 0)$을 지나는 접선의 방정식은

$y-0=m(x-6)\qquad \therefore\ mx-y-6m=0$

원의 중심 $(2, 0)$과 직선 $mx-y-6m=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 $r$과 같으므로

$$\frac{|2m-6m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=r$$

$|-4m|=r\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하면 $16m^2=r^2(m^2+1)$

$\therefore\ (16-r^2)m^2-r^2=0$ …… ㉠

이때 두 접선이 서로 수직이므로 두 접선의 기울기의 곱은 $-1$이다.

따라서 $m$에 대한 이차방정식 ㉠의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{-r^2}{16-r^2}=-1,\ -r^2=-16+r^2$$

$r^2=8\qquad \therefore\ r=2\sqrt{2}\ (\because\ r>0)$

## 내신 적중 서술형 ● 45쪽

**169** (1) $r_1=2,\ r_2=10$ (2) $y=x+6$ (3) $2\sqrt{2}$ **170** $\frac{35}{2}$

**171** 39 **172** 3

## 169

(1) 점 A$(-2, 4)$를 지나고 $x$축과 $y$축에 동시에 접하는 원의 중심은 제2사분면 위에 있다.

원의 반지름의 길이를 $r\ (r>0)$이라 하면 원의 중심의 좌표는 $(-r, r)$이므로 원의 방정식을

$(x+r)^2+(y-r)^2=r^2$

으로 놓을 수 있다.

이 원이 점 A$(-2, 4)$를 지나므로

$(-2+r)^2+(4-r)^2=r^2$

$r^2-12r+20=0,\ (r-2)(r-10)=0$

$\therefore\ r=2$ 또는 $r=10$

$\therefore\ r_1=2,\ r_2=10\ (\because\ r_1<r_2)$ …… ㉮

(2) 두 원 $C_1$, $C_2$의 방정식이 각각

$C_1$: $(x+2)^2+(y-2)^2=4$에서 $x^2+y^2+4x-4y+4=0$

$C_2$: $(x+10)^2+(y-10)^2=100$에서

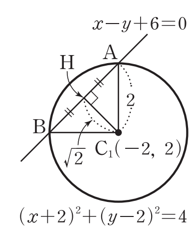
$x^2+y^2+20x-20y+100=0$

이므로 두 원 $C_1$, $C_2$의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2+4x-4y+4-(x^2+y^2+20x-20y+100)=0$

$\therefore\ y=x+6$ …… ㉯

(3) 오른쪽 그림과 같이 원 $C_1$이 직선 $y=x+6$과 만나는 점을 A, B, 원 $C_1$의 중심 $C_1(-2, 2)$에서 직선 $y=x+6$, 즉 $x-y+6=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면




$$\overline{C_1H}=\frac{|-2-2+6|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$$

직각삼각형 $C_1AH$에서

$\overline{AH}=\sqrt{2^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{2}$

따라서 구하는 공통인 현의 길이는

$\overline{AB}=2\overline{AH}=2\sqrt{2}$ …… ㉰

| | 채점 기준 | 배점 비율 |
|---|---|---|
| (1) | ㉮ $r_1$, $r_2$의 값 구하기 | 40 % |
| (2) | ㉯ 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식 구하기 | 30 % |
| (3) | ㉰ 두 원의 공통인 현의 길이 구하기 | 30 % |

## 170

구하는 원의 중심의 좌표를 $(a, b)$라 하면 $x$축에 접하므로 원의 방정식을 $(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$으로 놓을 수 있다.

이때 이 원이 점 $(4, 0)$을 지나므로

$(4-a)^2+(0-b)^2=b^2$

$(a-4)^2=0\qquad \therefore\ a=4$ …… ㉮

또, 원의 중심 $(4, b)$와 직선 $4x-3y+12=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 $|b|$와 같아야 하므로

$$\frac{|4\times4-3\times b+12|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=|b|$$

$|28-3b|=5|b|$

$28-3b=-5b$ 또는 $28-3b=5b$

$\therefore\ b=-14$ 또는 $b=\frac{7}{2}$ …… ㉯

따라서 두 원의 중심의 좌표는 각각 $(4,\ -14)$, $\left(4,\ \frac{7}{2}\right)$이므로 두 원의 중심 사이의 거리는

$\left|\frac{7}{2}-(-14)\right|=\frac{35}{2}$ …… ㉰

| 채점 기준 | 배점 비율 |
|---|---|
| ㉮ 원의 중심의 $x$좌표 구하기 | 30 % |
| ㉯ 원의 중심의 $y$좌표 구하기 | 40 % |
| ㉰ 두 원의 중심 사이의 거리 구하기 | 30 % |

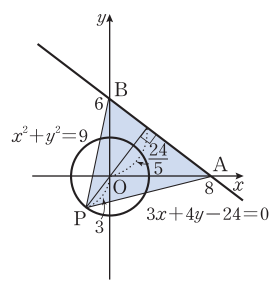
## 171

$A(8,\ 0)$, $B(0,\ 6)$이므로

$\overline{AB}=\sqrt{(0-8)^2+(6-0)^2}=10$ …… ㉮

원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $3x+4y-24=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-24|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{24}{5}$ …… ㉯




삼각형 ABP의 넓이가 최대가 되려면 밑변을 $\overline{AB}$라 할 때 높이가 최대이어야 한다.

이때 높이의 최댓값은

$\frac{24}{5}+3=\frac{39}{5}$

이므로 삼각형 ABP의 넓이의 최댓값은

$\frac{1}{2}\times10\times\frac{39}{5}=39$ …… ㉰

| 채점 기준 | 배점 비율 |
|---|---|
| ㉮ $\overline{AB}$의 길이 구하기 | 30 % |
| ㉯ 원의 중심과 직선 사이의 거리 구하기 | 30 % |
| ㉰ 삼각형 ABP의 넓이의 최댓값 구하기 | 40 % |

## 172

점 $A(a,\ b)$는 원 $x^2+y^2=6$ 위의 점이므로

$a^2+b^2=6$ …… ㉠ …… ㉮

원 $x^2+y^2=6$ 위의 점 $A(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은

$ax+by=6$

이 직선의 $x$절편은 $\frac{6}{a}$, $y$절편은 $\frac{6}{b}$이고 $a>0$, $b>0$이므로 접선과 $x$축 및 $y$축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\frac{6}{a}\times\frac{6}{b}=12$ $\therefore\ ab=\frac{3}{2}$ …… ㉡ …… ㉯

한편, $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$이므로 ㉠, ㉡에서

$(a+b)^2=6+2\times\frac{3}{2}=9$

$a>0$, $b>0$에서 $a+b>0$이므로

$a+b=3$ …… ㉰

| 채점 기준 | 배점 비율 |
|---|---|
| ㉮ 점 A가 원 위의 점임을 이용하여 $a$, $b$ 사이의 관계식 세우기 | 20 % |
| ㉯ 접선의 방정식을 구하여 삼각형의 넓이에 대한 식 세우기 | 40 % |
| ㉰ $a+b$의 값 구하기 | 40 % |

## 1등급 실력 완성

● 46쪽 ~ 48쪽

**173** ① **174** ② **175** ④ **176** $4\sqrt{2}$ **177** 80

**178** ① **179** ③ **180** $\frac{25}{2}(1+\sqrt{2})$

**181** $41-2\sqrt{37}$ **182** $\frac{8\sqrt{5}}{5}$ **183** $\frac{20}{3}$ **184** ②

**185** ③

## 173

원의 방정식

전략 선분 AB의 수직이등분선과 직선 AB가 서로 수직임을 이용한다.

풀이 선분 AB의 수직이등분선을 $l$이라 하면 직선 $l$은 선분 AB의 중점 $\left(2,\ \frac{1+a}{2}\right)$를 지난다.

또, 직선 $l$은 주어진 원의 넓이를 이등분하므로 원의 중심 $(-2,\ 5)$를 지난다.

따라서 직선 $l$의 기울기는

$\frac{\frac{1+a}{2}-5}{2-(-2)}=\frac{a-9}{8}$

직선 AB의 기울기는

$\frac{a-1}{3-1}=\frac{a-1}{2}$

직선 $l$과 직선 AB가 서로 수직이므로

$\frac{a-9}{8}\times\frac{a-1}{2}=-1$, $(a-1)(a-9)=-16$

$a^2-10a+25=0$, $(a-5)^2=0$

$\therefore\ a=5$

## 174

좌표축에 접하는 원의 방정식 ⊕ 두 원의 교점을 지나는 도형의 방정식

전략 직선 AB는 세 점 A, P, B를 지나는 원과 원 $x^2+y^2=16$의 교점을 지나는 직선임을 이용한다.

풀이 세 점 A, P, B를 지나는 원은 반지름의 길이가 4이고, 점 $(2,\ 0)$에서 $x$축에 접하므로 중심의 좌표가 $(2,\ 4)$이다.

따라서 세 점 A, P, B를 지나는 원의 방정식은

$(x-2)^2+(y-4)^2=16$

$\therefore\ x^2+y^2-4x-8y+4=0$ …… ㉠

직선 AB는 원 ㉠과 원 $x^2+y^2=16$의 교점을 지나는 직선이므로 직선의 방정식은

$x^2+y^2-16-(x^2+y^2-4x-8y+4)=0$

$4x+8y-20=0$ $\therefore\ x+2y-5=0$

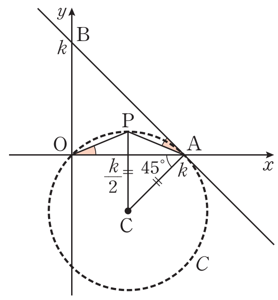
## 175

원의 방정식 ⊕ 점이 나타내는 도형의 방정식

전략 좌표평면 위에 주어진 조건에 맞게 그림을 그리고 원의 성질을 이용한다.

풀이 원의 접선과 그 접점을 지나는 현이 이루는 각의 크기는 이 각의 내부에 있는 호에 대한 원주각의 크기와 같다.

그러므로 점 O를 지나고 직선 AB와 점 A에서 접하는 원을 $C$라 할 때, 삼각형 OAB의 내부에 있으며 $\angle\mathrm{AOP}=\angle\mathrm{BAP}$를 만족시키는 점 P는 원 $C$ 위의 점이다.




원 $C$의 중심을 C라 하면 $\angle\mathrm{OAC}=45°$이므로 점 C의 좌표는 $\left(\frac{k}{2},\ \boxed{-\frac{k}{2}}\right)$이고 원 $C$의 반지름의 길이는 선분 AC의 길이와 같다.

$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{\left(k-\frac{k}{2}\right)^2+\left(0+\frac{k}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}k$

이므로 원 $C$의 반지름의 길이는 $\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}k}$이다.

점 P의 $y$좌표는 $\angle\mathrm{PCO}=45°$일 때 최대이고 점 P의 $y$좌표의 최댓값은 원 $C$의 중심의 $y$좌표와 원 $C$의 반지름의 길이의 합이므로

$M(k)=-\frac{k}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}k=\left(\boxed{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right)\times k$

이다.

따라서 $f(k)=-\frac{k}{2}$, $g(k)=\frac{\sqrt{2}}{2}k$, $p=\frac{\sqrt{2}-1}{2}$이므로

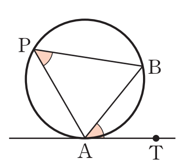
$f(p)+g\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)+g\left(\frac{1}{2}\right)$

$=-\frac{\sqrt{2}-1}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{1}{4}$

**개념 보충**

**접선과 현이 이루는 각**

원의 접선과 그 접점을 지나는 현이 이루는 각의 크기는 그 각의 내부에 있는 호에 대한 원주각의 크기와 같다. 즉, 오른쪽 그림에서 $\angle\mathrm{BAT}=\angle\mathrm{BPA}$



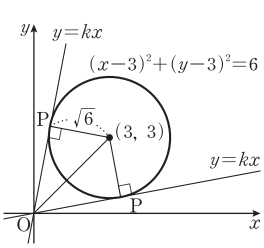

## 176

**원과 직선의 위치 관계**

전략 $\frac{y}{x}=k$ ($k$는 상수)로 놓고, $(x-3)^2+(y-3)^2=6$을 만족시키는 $k$의 값이 최대 또는 최소인 경우를 생각해 본다.

풀이 $\frac{y}{x}=k$ ($k$는 상수)라 하면 $y=kx$이므로 직선 $y=kx$는 원점 $(0,\ 0)$과 원 $(x-3)^2+(y-3)^2=6$ 위의 점 P를 지나는 직선이다.

이때 $k$는 직선 $y=kx$의 기울기이므로 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=kx$가 원 $(x-3)^2+(y-3)^2=6$에 접할 때, $k$의 값이 최대 또는 최소이다.




직선 $y=kx$가 원에 접하면 원의 중심 $(3,\ 3)$과 직선 $kx-y=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 $\sqrt{6}$과 같으므로

$\frac{|3k-3|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=\sqrt{6}$

$|3k-3|=\sqrt{6(k^2+1)}$

양변을 제곱하면 $9k^2-18k+9=6k^2+6$

$3k^2-18k+3=0$, $k^2-6k+1=0$

$\therefore\ k=3\pm2\sqrt{2}$

따라서 $M=3+2\sqrt{2}$, $m=3-2\sqrt{2}$이므로

$M-m=(3+2\sqrt{2})-(3-2\sqrt{2})=4\sqrt{2}$

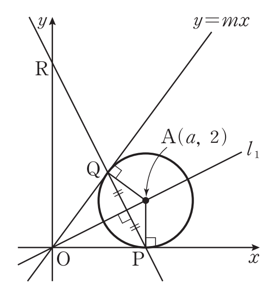
## 177

**좌표축에 접하는 원의 방정식 ⊕ 원과 직선의 위치 관계**

전략 원의 반지름의 길이를 이용하여 좌표축에 접하는 원의 중심의 좌표를 구한다.

풀이 오른쪽 그림에서 원의 중심을 A라 하고 P$(a,\ 0)$ $(a>0)$이라 하면 점 A의 좌표는 $(a,\ 2)$

원점 O와 점 A를 지나는 직선을 $l_1$이라 하면 직선 $l_1$의 방정식은




$y=\frac{2}{a}x$

직선 PQ는 점 P를 지나고 직선 $l_1$과 수직이므로 직선 PQ의 방정식은

$y=-\frac{a}{2}(x-a)$

이 식에 $x=0$을 대입하면 $y=\frac{a^2}{2}$이므로 점 R의 좌표는 $\left(0,\ \frac{a^2}{2}\right)$이다.

삼각형 ROP의 넓이가 16이므로

$\frac{1}{2}\times a\times\frac{a^2}{2}=16$, $a^3=64$ $\quad\therefore\ a=4$ ($\because\ a>0$)

점 A$(4,\ 2)$와 직선 $y=mx$, 즉 $mx-y=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 2와 같으므로

$\frac{|4m-2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2$

$|2m-1|=\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하면 $4m^2-4m+1=m^2+1$

$3m^2-4m=0$, $m(3m-4)=0$

$\therefore\ m=\frac{4}{3}$ ($\because\ m>0$)

$\therefore\ 60m=60\times\frac{4}{3}=80$

## 178

**원과 직선의 위치 관계**

전략 실수 $t$에 대하여 직선 $x-2y=t$가 원 $x^2+y^2=5$와 교점을 가짐을 이용한다.

풀이 $x-2y=t$라 하면 점 P가 원 $x^2+y^2=5$ 위의 점이므로 원 $x^2+y^2=5$와 직선 $x-2y=t$가 교점을 갖는다.

원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $x-2y=t$, 즉 $x-2y-t=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{5}$ 이하이므로

$\dfrac{|-t|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}\le\sqrt{5}$

$|t|\le 5$ $\quad\therefore -5\le t\le 5$

$k=(3+x-2y)(5-x+2y)$라 하면

$k=(3+t)(5-t)=-t^2+2t+15=-(t-1)^2+16$

$-5\le t\le 5$일 때, $k$는 $t=1$에서 최댓값 16을 갖고, $t=-5$에서 최솟값 $-20$을 갖는다.

따라서 최댓값과 최솟값의 합은

$16+(-20)=-4$

**개념 보충**

**제한된 범위에서의 이차함수의 최대, 최소**

$x$의 값의 범위가 $\alpha\le x\le\beta$일 때, 이차함수 $f(x)=a(x-m)^2+n$의 최댓값과 최솟값은 다음과 같다.

(1) $\alpha\le m\le\beta$이면

⇨ $f(\alpha)$, $f(m)$, $f(\beta)$ 중 가장 큰 값이 최댓값, 가장 작은 값이 최솟값이다.

(2) $m<\alpha$ 또는 $m>\beta$이면

⇨ $f(\alpha)$, $f(\beta)$ 중 큰 값이 최댓값, 작은 값이 최솟값이다.

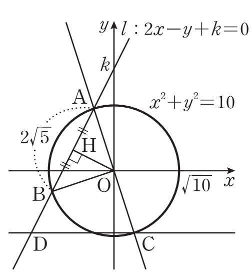
## 179

**원과 직선의 위치 관계 ⊕ 현의 길이**

전략 현의 길이를 이용하여 직선 $l$의 방정식을 먼저 구하고, 이를 이용하여 두 점 A, B를 좌표를 구한다.

풀이 직선 $l$의 방정식을 $2x-y+k=0$이라 하자.

오른쪽 그림과 같이 원점 O에서 직선 $l$에 내린 수선의 발을 H라 하면 원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 수직이등분하므로




$\overline{AH}=\dfrac{1}{2}\overline{AB}=\sqrt{5}$

$\overline{OA}=\sqrt{10}$이고 삼각형 AHO가 직각삼각형이므로

$\overline{OH}=\sqrt{(\sqrt{10})^2-(\sqrt{5})^2}=\sqrt{5}$

또, $\overline{OH}$는 원점 O와 직선 $l$ 사이의 거리와 같으므로

$\dfrac{|k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$, $|k|=5$ $\quad\therefore k=5\ (\because k>0)$

한편, 두 점 A, B는 원 $x^2+y^2=10$과 직선 $2x-y+5=0$이 만나는 점이므로

$x^2+(2x+5)^2=10$, $x^2+4x+3=0$

$(x+3)(x+1)=0$ $\quad\therefore x=-3$ 또는 $x=-1$

$\therefore A(-1, 3)$, $B(-3, -1)$

또, 점 C의 좌표를 $(p, q)$라 하면 선분 AC는 원 $x^2+y^2=10$의 지름이므로

$\dfrac{-1+p}{2}=0$, $\dfrac{3+q}{2}=0$ $\quad\therefore p=1, q=-3$

$\therefore C(1, -3)$

따라서 점 C를 지나고 $x$축과 평행한 직선은 $y=-3$이므로 직선 $l$과 만나는 점 D의 좌표는 $(-4, -3)$

따라서 $a=-4$, $b=-3$이므로

$a+b=(-4)+(-3)=-7$

## 180

**원 위의 점과 직선 사이의 거리**

전략 원의 중심과 직선 AB 사이의 거리를 구해 삼각형 ABP의 넓이의 최댓값을 구한다.

풀이 $\overline{AB}=\sqrt{(-4-1)^2+(-2-3)^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$

직선 AB의 방정식은

$y-(-2)=\dfrac{3-(-2)}{1-(-4)}\{x-(-4)\}$

$\therefore x-y+2=0$

이때 원의 중심 $C(-4, 3)$에서 변 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{CH}=\dfrac{|-4-3+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

삼각형 ABP의 넓이가 최대가 되려면 밑변을 $\overline{AB}$라 할 때 높이가 최대이어야 하므로 삼각형 ABP의 넓이의 최댓값은

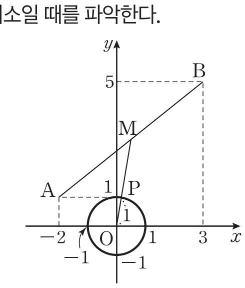
$$\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times(\overline{CH}+5)=\dfrac{1}{2}\times5\sqrt{2}\times\left(\dfrac{5\sqrt{2}}{2}+5\right)$$
$$=\dfrac{25}{2}(1+\sqrt{2})$$

## 181

**원 위의 점과 직선 사이의 거리**

전략 중선정리를 이용하여 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$의 값이 최소일 때를 파악한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 선분 AB의 중점을 M이라 하면 삼각형 PAB에서 중선정리에 의하여




$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=2(\overline{PM}^2+\overline{AM}^2)$

이때 $\overline{AM}$이 일정하므로 $\overline{PM}$이 최소일 때 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$의 값이 최소이다.

즉, 점 P가 원과 선분 OM의 교점일 때, $\overline{PM}$이 최소가 된다.

점 M의 좌표는 $\left(\dfrac{1}{2}, 3\right)$이므로

$\overline{OM}=\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+3^2}=\dfrac{\sqrt{37}}{2}$, $\overline{OP}=1$

즉, $\overline{PM}$의 최솟값은 $\overline{OM}-\overline{OP}=\dfrac{\sqrt{37}}{2}-1$이고,

$\overline{AM}=\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}+2\right)^2+(3-1)^2}=\dfrac{\sqrt{41}}{2}$

따라서 구하는 최솟값은

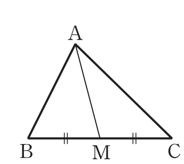
$2(\overline{PM}^2+\overline{AM}^2)=2\left\{\left(\dfrac{\sqrt{37}}{2}-1\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{41}}{2}\right)^2\right\}=41-2\sqrt{37}$

**개념 보충**

**중선정리**

삼각형 ABC에서 변 BC의 중점을 M이라 하면 다음이 성립한다.

⇨ $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$



## 182

기울기가 주어진 원의 접선의 방정식

전략 원 $x^2+y^2=4$는 정삼각형의 내접원이므로 정삼각형의 내심과 무게중심이 일치함을 이용한다.

풀이 직선 $l$의 방정식을 $y=2x+k$, 즉 $2x-y+k=0\ (k>0)$이라 하자.

원 $x^2+y^2=4$의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $l$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 2와 같으므로

$$\frac{|k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=2$$

$|k|=2\sqrt{5}\qquad \therefore k=2\sqrt{5}\ (\because k>0)$

원 $x^2+y^2=4$는 정삼각형의 내접원이므로 원 $x^2+y^2=4$의 중심 $(0,\ 0)$은 정삼각형의 무게중심과 일치한다.

따라서 두 직선 $m$, $n$의 교점은 점 $(0,\ 0)$을 지나면서 직선 $l: 2x-y+2\sqrt{5}=0$에 수직인 직선 $y=-\frac{1}{2}x$ 위의 점이다.

두 직선 $m$, $n$의 교점의 좌표를 $(2a,\ -a)\ (a>0)$라 하면 점 $(2a,\ -a)$와 직선 $l$ 사이의 거리는 $2\times3=6$이므로

정삼각형의 내심은 무게중심과 일치하고, 무게중심은 중선을 2 : 1로 내분한다.

$$\frac{|2\times2a-(-a)+2\sqrt{5}|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=6$$

$|\sqrt{5}a+2|=6$이므로

$\sqrt{5}a+2=-6$ 또는 $\sqrt{5}a+2=6$

$\therefore a=\frac{4\sqrt{5}}{5}\ (\because a>0)$

따라서 구하는 $x$좌표는

$2a=2\times\frac{4\sqrt{5}}{5}=\frac{8\sqrt{5}}{5}$

**개념 보충**

**삼각형의 무게중심의 성질**

① 이등변삼각형의 무게중심, 외심, 내심은 모두 꼭지각의 이등분선 위에 있다.

② 정삼각형의 무게중심, 외심, 내심은 모두 일치한다.

## 183

원 위의 점에서의 접선의 방정식

전략 원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은 $x_1x+y_1y=r^2$임을 이용한다.

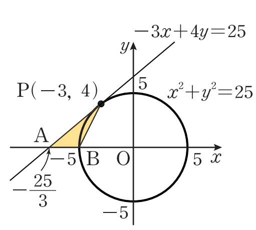
풀이 원 $x^2+y^2=25$ 위의 점 $P(-3,\ 4)$에서의 접선의 방정식은

$-3x+4y=25$

이 직선의 $x$절편은 $-\frac{25}{3}$이므로 점 A의 좌표는 $\left(-\frac{25}{3},\ 0\right)$

점 A로부터의 거리가 가장 가까운 원 위의 점 B의 좌표는

$(-5,\ 0)$




따라서 $\overline{AB}=\left|-5-\left(-\frac{25}{3}\right)\right|=\frac{10}{3}$이므로 삼각형 PAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\frac{10}{3}\times4=\frac{20}{3}$

## 184

원과 직선의 위치 관계 + 원 밖의 한 점에서 원에 그은 접선의 방정식

전략 두 접선의 접점을 지나는 직선의 방정식을 구하고, 이 직선이 원 $x^2+y^2=1$의 접선임을 이용한다.

풀이 점 P에서 원 $x^2+y^2=9$에 그은 접선의 접점의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라 하면 이 점에서의 접선의 방정식은

$x_1x+y_1y=9$ …… ㉠

직선 ㉠이 점 $P(3,\ a)$를 지나므로

$3x_1+ay_1=9$

따라서 두 접점을 지나는 직선의 방정식은

$3x+ay=9\qquad \therefore 3x+ay-9=0$ …… ㉡

이때 원 $x^2+y^2=1$과 직선 ㉡이 접하므로 원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 ㉡ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 1과 같다. 즉,

$\frac{|-9|}{\sqrt{3^2+a^2}}=1,\ 9=\sqrt{a^2+9}$

양변을 제곱하면 $81=a^2+9$

$a^2=72\qquad \therefore a=6\sqrt{2}\ (\because a>0)$

**1등급 비법**

원 $x^2+y^2=r^2$ 밖의 한 점 $P(a,\ b)$에서 이 원에 그은 두 접선의 접점을 각각 A, B라 할 때, 두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식 ⇨ $ax+by=r^2$

## 185

원 밖의 한 점에서 원에 그은 접선의 방정식

전략 접선의 기울기를 $m$이라 하고 접선의 방정식을 세운 후, $m$에 대한 이차방정식의 두 근의 곱이 −1임을 이용한다.

풀이 접선의 기울기를 $m$이라 하면 점 $(a,\ b)$를 지나는 접선의 방정식은

$y-b=m(x-a)\qquad \therefore mx-y-ma+b=0$ …… ㉠

원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 ㉠ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 $2\sqrt{2}$와 같으므로

$$\frac{|-ma+b|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2\sqrt{2}$$

$|-ma+b|=2\sqrt{2}\times\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하면

$m^2a^2-2abm+b^2=8m^2+8$

$(a^2-8)m^2-2abm+b^2-8=0$

이때 두 접선이 이루는 각의 크기가 90°이므로 두 접선의 기울기의 곱은 −1이다.

따라서 $m$에 대한 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

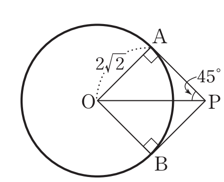
$\frac{b^2-8}{a^2-8}=-1,\ b^2-8=-a^2+8\qquad \therefore a^2+b^2=16$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심이 원점이고 반지름의 길이가 4인 원이므로 구하는 도형의 길이는

$2\pi\times4=8\pi$

다른 풀이 원 밖의 점 $P(a,\ b)$에서 원 $x^2+y^2=8$에 그은 두 접선의 접점을 각각 A, B라 하면

$\angle OAP=\angle OBP=90°$



또, $\angle APB=90^\circ$이므로

$\angle APO=\angle BPO=45^\circ$

직각삼각형 AOP에서

$\overline{OP}\times\sin 45^\circ=\overline{OA}$, $\overline{OP}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$

$\therefore \overline{OP}=4$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심이 원점이고 반지름의 길이가 4인 원이므로 구하는 도형의 길이는

$2\pi\times4=8\pi$

## 도전 1등급 최고난도

49쪽

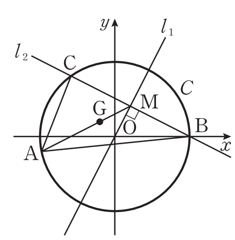
**186** 17 **187** $\frac{5}{3}$

## 186

**원의 방정식 + 현의 길이**

(1단계) 삼각형의 무게중심의 성질을 이용하여 선분 BC의 중점의 좌표를 구한다.

오른쪽 그림과 같이 삼각형 ABC에서 변 BC의 중점을 $M(a, b)$, 삼각형 ABC의 무게중심을 G라 하면 점 $G(-1, 1)$은 선분 AM을 $2:1$로 내분하는 점이다.




$\frac{2\times a+1\times(-5)}{2+1}=-1$에서

$\frac{2a-5}{3}=-1$ $\quad\therefore a=1$

$\frac{2\times b+1\times(-1)}{2+1}=1$에서

$\frac{2b-1}{3}=1$ $\quad\therefore b=2$

$\therefore M(1, 2)$

(2단계) 원의 중심과 반지름의 길이를 이용하여 직선 BC의 방정식을 구한다.

중심이 원점 O이고 세 점 $A(-5, -1)$, B, C를 지나는 원을 $C$라 하면

$\overline{OA}=\sqrt{(-5)^2+(-1)^2}=\sqrt{26}$

이므로 $C: x^2+y^2=26$

원점 O, $M(1, 2)$를 지나는 직선을 $l_1$이라 하면

$l_1: y=2x$

점 $M(1, 2)$를 지나고 직선 $l_1$과 수직인 직선을 $l_2$라 하면

$l_2: y=-\frac{1}{2}(x-1)+2=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$

원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 수직이등분하므로 삼각형 ABC의 두 점 B, C는 직선 $l_2$와 원 $C$가 만나는 점이다.

(3단계) 점과 직선 사이의 거리를 이용하여 삼각형의 넓이를 구한다.

삼각형 OMB는 직각삼각형이므로

$\overline{BM}=\sqrt{\overline{OB}^2-\overline{OM}^2}=\sqrt{(\sqrt{26})^2-(\sqrt{5})^2}=\sqrt{21}$

$\therefore \overline{BC}=2\overline{BM}=2\sqrt{21}$

점 $A(-5, -1)$과 직선 $l_2: x+2y-5=0$ 사이의 거리를 $h$라 하면

$h=\frac{|-5+2\times(-1)-5|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{12\sqrt{5}}{5}$

이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times h=\frac{1}{2}\times2\sqrt{21}\times\frac{12\sqrt{5}}{5}=\frac{12}{5}\sqrt{105}$

따라서 $p=5$, $q=12$이므로

$p+q=5+12=17$

## 187

**원 위의 점에서의 접선의 방정식**

(1단계) 원점과 원의 중심을 지나는 직선의 방정식을 구한다.

원점과 원의 중심 $(4, 2)$를 지나는 직선의 방정식은

$y=\frac{1}{2}x$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

(2단계) 두 접점 A, B에서의 접선의 방정식을 구한 후, 네 점 C, D, E, F의 좌표를 구한다.

두 점 A, B에서의 접선은 모두 직선 ㉠과 수직이므로 기울기가 $-2$이다.

점 A에서의 접선의 방정식을

$y=-2x+a\ (a>0)$, 즉 $2x+y-a=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

이라 하면

$C\left(\frac{a}{2}, 0\right)$, $D(0, a)$

점 B에서의 접선의 방정식을

$y=-2x+b\ (a<b)$, 즉 $2x+y-b=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉢

이라 하면

$E\left(\frac{b}{2}, 0\right)$, $F(0, b)$

원의 반지름의 길이를 $r$이라 하면 원의 중심 $(4, 2)$와 직선 ㉡, ㉢ 사이의 거리가 각각 원의 반지름의 길이 $r$과 같으므로

$\frac{|2\times4+2-a|}{\sqrt{2^2+1^2}}=r$, $\frac{|2\times4+2-b|}{\sqrt{2^2+1^2}}=r$

$\therefore a=10-\sqrt{5}r$, $b=10+\sqrt{5}r$ ($\because 0<a<b$)

$\therefore C\left(\frac{10-\sqrt{5}r}{2}, 0\right)$, $D(0, 10-\sqrt{5}r)$,

$E\left(\frac{10+\sqrt{5}r}{2}, 0\right)$, $F(0, 10+\sqrt{5}r)$

(3단계) 사다리꼴 DCEF의 넓이를 이용하여 $r$의 값을 구한다.

$\square DCEF=\triangle OEF-\triangle OCD$이므로

$$\frac{50\sqrt{5}}{3}=\frac{1}{2}\times\frac{10+\sqrt{5}r}{2}\times(10+\sqrt{5}r)-\frac{1}{2}\times\frac{10-\sqrt{5}r}{2}\times(10-\sqrt{5}r)$$

$\frac{50\sqrt{5}}{3}=\frac{1}{4}\{(10+\sqrt{5}r)^2-(10-\sqrt{5}r)^2\}$

$\frac{50\sqrt{5}}{3}=\frac{1}{4}\times40\sqrt{5}r$ $\quad\therefore r=\frac{5}{3}$

따라서 구하는 원의 반지름의 길이는 $\frac{5}{3}$이다.

# 04 도형의 이동

## 유형 분석 기출

● 52쪽 ~ 57쪽

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 188 ④ | 189 ① | 190 4 | 191 ① | 192 ③ |
| 193 ④ | 194 ④ | 195 10 | 196 ② | |
| 197 $-\frac{2}{5}$ | 198 9 | 199 1 | 200 ① | 201 $-1$ |
| 202 ① | 203 ⑤ | 204 ③ | 205 ④ | 206 4 |
| 207 ⑤ | 208 18 | 209 ④ | 210 ① | 211 4 |
| 212 ① | 213 14 | 214 3 | 215 ① | 216 5 |
| 217 ③ | 218 ④ | 219 3 | 220 ⑤ | 221 ① |
| 222 ① | 223 $-\frac{1}{2}$ | | | |

### 188

평행이동 $(x, y) \longrightarrow (x+2, y+3)$에 의하여 점 $(1, 2)$가 옮겨지는 점의 좌표는

$(1+2, 2+3)$ $\quad \therefore (3, 5)$

이 점이 직선 $y=ax-4$ 위의 점이므로

$5=3a-4$ $\quad \therefore a=3$

### 189

점 $(-1, 2)$를 $x$축의 방향으로 $a$만큼, $y$축의 방향으로 $b$만큼 평행이동한 점의 좌표가 $(3, -1)$이라 하면

$-1+a=3, 2+b=-1$

$\therefore a=4, b=-3$

따라서 평행이동 $(x, y) \longrightarrow (x+4, y-3)$에 의하여

점 $(1, -4)$로 옮겨지는 점의 좌표를 $(p, q)$라 하면

$p+4=1, q-3=-4$

$\therefore p=-3, q=-1$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(-3, -1)$이다.

### 190

평행이동 $(x, y) \longrightarrow (x+a, y+b)$에 의하여 점 $(1, c)$가 옮겨지는 점의 좌표는 $(1+a, c+b)$이고, 이 점이 점 $(3, 5)$와 일치하므로

$1+a=3, c+b=5$

또, 평행이동 $(x, y) \longrightarrow (x+a, y+b)$에 의하여 점 $(d, 3)$이 옮겨지는 점의 좌표는 $(d+a, 3+b)$이고, 이 점이 점 $(1, 6)$과 일치하므로

$d+a=1, 3+b=6$

$\therefore a=2, b=3, c=2, d=-1$

$\therefore ab+cd=2\times3+2\times(-1)=4$

### 191

직선 $y=2x+a$를 $x$축의 방향으로 $-5$만큼, $y$축의 방향으로 $b$만큼 평행이동하면

$y-b=2\{x-(-5)\}+a$

$\therefore 2x-y+a+b+10=0$

이 직선이 직선 $2x-y+6=0$과 일치하므로

$a+b+10=6$ $\quad \therefore a+b=-4$

### 192

원 $(x-a)^2+(y+4)^2=16$의 중심의 좌표는 $(a, -4)$이고, 원 $(x-8)^2+(y-b)^2=16$의 중심의 좌표는 $(8, b)$이다.

점 $(a, -4)$를 $x$축의 방향으로 2만큼, $y$축의 방향으로 5만큼 평행이동한 점의 좌표가 $(a+2, 1)$이고, 이 점이 점 $(8, b)$와 일치하므로

$a+2=8, b=1$ $\quad \therefore a=6, b=1$

$\therefore a+b=6+1=7$

### 193

포물선 $y=x^2+2x+5$, 즉 $y=(x+1)^2+4$를 $x$축의 방향으로 $k$만큼, $y$축의 방향으로 $-k$만큼 평행이동하면

$y+k=(x-k+1)^2+4$

$\therefore y=\{x-(k-1)\}^2+4-k$

이 포물선의 꼭짓점 $(k-1, 4-k)$의 $y$좌표가 0이므로

$4-k=0$

$\therefore k=4$

참고 포물선을 평행이동하면 포물선의 꼭짓점의 좌표는 변하고, 그래프의 모양과 폭은 변하지 않는다.

### 194

평행이동 $(x, y) \longrightarrow (x+a, y+a^2+2)$에 의하여 직선 $y=3x+1$을 평행이동하면

$y-a^2-2=3(x-a)+1$

$\therefore l: y=3x+a^2-3a+3$

직선 $y=3x+1$과 직선 $l$이 두 개 이상의 교점을 가지므로 두 직선은 일치한다.

즉, $a^2-3a+3=1$이므로

$a^2-3a+2=0, (a-1)(a-2)=0$

$\therefore a=1$ 또는 $a=2$

따라서 $a$의 최댓값은 2이다.

### 195

$x^2+y^2-2ax+2y+b=0$에서

$(x-a)^2+(y+1)^2=a^2-b+1$

이 원을 주어진 평행이동에 의하여 $x$축의 방향으로 2만큼, $y$축의 방향으로 3만큼 평행이동하면

$(x-2-a)^2+(y-3+1)^2=a^2-b+1$

$\therefore (x-2-a)^2+(y-2)^2=a^2-b+1$

이 원이 점 $(2, 2)$를 지나므로

$(-a)^2+0^2=a^2-b+1$ $\quad \therefore b=1$

이때 원의 반지름의 길이가 3이므로

$a^2-b+1=3^2$ $\quad \therefore a^2=9$

$\therefore a^2+b^2=9+1^2=10$

## 196

포물선 $y=2x^2-4x-2$를 $x$축의 방향으로 2만큼, $y$축의 방향으로 $a$만큼 평행이동하면

$y-a=2(x-2)^2-4(x-2)-2$

$\therefore y=2x^2-12x+14+a$

이 포물선이 $y=bx^2+cx+b+c$와 일치하므로

$b=2,\ c=-12,\ b+c=14+a$

$\therefore a=-24,\ b=2,\ c=-12$

$\therefore a+b+c=-24+2+(-12)=-34$

## 197

직사각형 OABC의 두 대각선의 교점을 M이라 하면 점 M은 선분 OB의 중점이다.

점 B의 좌표는 $(4, 3)$이므로 점 M의 좌표는

$\left(\frac{0+4}{2}, \frac{0+3}{2}\right)$

$\therefore \left(2, \frac{3}{2}\right)$

직선 $2x+ay+1=0$을 $x$축의 방향으로 2만큼, $y$축의 방향으로 $-1$만큼 평행이동하면

$2(x-2)+a(y+1)+1=0$

$\therefore 2x+ay+a-3=0$

이 직선이 사각형 OABC의 넓이를 이등분하려면 점 $\mathrm{M}\left(2, \frac{3}{2}\right)$을 지나야 하므로

$2\times2+a\times\frac{3}{2}+a-3=0$

$\frac{5}{2}a+1=0$

$\therefore a=-\frac{2}{5}$

## 198

원 $(x+1)^2+(y+2)^2=9$의 중심의 좌표는 $(-1,\ -2)$이고 반지름의 길이는 3이므로 원 $(x+1)^2+(y+2)^2=9$를 $x$축의 방향으로 $m$만큼, $y$축의 방향으로 $n$만큼 평행이동한 원 $C$의 중심의 좌표는 $(-1+m,\ -2+n)$이고, 반지름의 길이는 3이다.

조건 (가), (나)에서 원 $C$의 중심이 제1사분면 위에 있고 $x$축과 $y$축에 동시에 접하기 위해서는 중심의 좌표가 $(3, 3)$이어야 하므로

$-1+m=3,\ -2+n=3$

$\therefore m=4,\ n=5$

$\therefore m+n=4+5=9$

## 199

포물선 $y=x^2+4x$를 $y$축의 방향으로 $a$만큼 평행이동하면

$y=x^2+4x+a$ ⋯⋯ ㉠

포물선 ㉠과 직선 $y=2x+1$이 서로 다른 두 점에서 만나려면 이차방정식 $x^2+4x+a=2x+1$, 즉 $x^2+2x+a-1=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 $D$라 하면

$\frac{D}{4}=1^2-(a-1)>0$

$\therefore a<2$

따라서 정수 $a$의 최댓값은 1이다.

**개념 보충**

**이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계**

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 위치 관계는 이차방정식 $ax^2+bx+c=mx+n$, 즉

$ax^2+(b-m)x+c-n=0$

의 판별식 $D$의 값의 부호에 따라 결정된다.

① $D>0$일 때, 서로 다른 두 점에서 만난다.

② $D=0$일 때, 한 점에서 만난다. (접한다.)

③ $D<0$일 때, 만나지 않는다.

## 200

점 $\mathrm{A}(-5, 2)$를 $x$축에 대하여 대칭이동한 점 B의 좌표는

$(-5,\ -2)$

또, 점 A를 $y$축에 대하여 대칭이동한 점 C의 좌표는

$(5, 2)$

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{-5+(-5)+5}{3}, \frac{2+(-2)+2}{3}\right)$

$\therefore \left(-\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)$

따라서 $a=-\frac{5}{3},\ b=\frac{2}{3}$이므로

$a+b=-\frac{5}{3}+\frac{2}{3}=-1$

## 201

점 $\mathrm{A}(2a+1, b+2)$를 원점에 대하여 대칭이동한 점 A′의 좌표는

$(-2a-1,\ -b-2)$

이 점이 점 $(a-4, 2b+4)$와 일치하므로

$-2a-1=a-4,\ -b-2=2b+4$

$3a=3,\ 3b=-6 \qquad \therefore a=1,\ b=-2$

$\therefore a+b=1+(-2)=-1$

## 202

점 $\mathrm{A}(a+2, b-3)$을 $x$축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(a+2,\ -b+3)$

이 점을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(-b+3,\ a+2)$

이 점이 점 A와 일치하므로

$a+2=-b+3,\ b-3=a+2$

$a+b=1,\ a-b=-5$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-2,\ b=3$

$\therefore ab=(-2)\times3=-6$

## 203

직선 $3x-2y+a=0$을 원점에 대하여 대칭이동하면

$3\times(-x)-2\times(-y)+a=0$

$\therefore 3x-2y-a=0$

이 직선이 점 $(3, 2)$를 지나므로

$3\times3-2\times2-a=0 \qquad \therefore a=5$

## 204

ㄱ. 도형 $y=-x$를 원점에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$-y=-(-x) \qquad \therefore y=-x$

ㄴ. 도형 $x^2+y^2=2$를 원점에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$(-x)^2+(-y)^2=2 \qquad \therefore x^2+y^2=2$

ㄷ. 도형 $|x+y|=1$을 원점에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$|-x-y|=1 \qquad \therefore |x+y|=1$

ㄹ. 도형 $x^2+y^2=2(x+y)$를 원점에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$(-x)^2+(-y)^2=2(-x-y)$

$\therefore x^2+y^2=-2(x+y)$

이상에서 원점에 대하여 대칭이동하였을 때, 자기 자신과 일치하는 도형의 방정식은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

## 205

$x+2y-6=0$에서 $y=-\frac{1}{2}x+3$이므로 이 직선에 수직인 직선의 기울기는 2이다.

점 $(2, 3)$을 지나고 기울기가 2인 직선의 방정식은

$y-3=2(x-2) \qquad \therefore y=2x-1$

이 직선을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면

$x=2y-1 \qquad \therefore y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

따라서 $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{2}$이므로

$a+b=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$

**개념 보충**

두 직선 $y=mx+n$, $y=m'x+n'$이 서로 수직인 경우

⇨ (두 직선의 기울기의 곱)$=-1$, 즉 $mm'=-1$

## 206

포물선 $y=x^2-4x+a$를 $y$축에 대하여 대칭이동하면

$y=(-x)^2-4\times(-x)+a$

$\therefore y=x^2+4x+a$

이 포물선이 점 $(-3, 2)$를 지나므로

$2=(-3)^2+4\times(-3)+a \qquad \therefore a=5$

포물선 $y=x^2-4x+5$를 원점에 대하여 대칭이동하면

$-y=(-x)^2-4\times(-x)+5$

$\therefore y=-x^2-4x-5=-(x+2)^2-1$

이 포물선의 꼭짓점의 좌표는 $(-2, -1)$이므로

$k=-1$

$\therefore a+k=5+(-1)=4$

## 207

원 $x^2+y^2+2ax+by+6=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면

$x^2+y^2+bx+2ay+6=0$

$\therefore \left(x+\frac{b}{2}\right)^2+(y+a)^2=a^2+\frac{b^2}{4}-6$

즉, 원의 중심의 좌표는 $\left(-\frac{b}{2}, -a\right)$ …… ㉠

한편, $y=x^2-6x+8=(x-3)^2-1$이므로 포물선의 꼭짓점의 좌표는 $(3, -1)$ …… ㉡

㉠, ㉡이 일치하므로

$-\frac{b}{2}=3$, $-a=-1 \qquad \therefore a=1, b=-6$

$\therefore a-b=1-(-6)=7$

## 208

원 $x^2+y^2+ax+4y-4=0$을 $y$축에 대하여 대칭이동하면

$(-x)^2+y^2+a\times(-x)+4y-4=0$

$\therefore x^2+y^2-ax+4y-4=0$ …… ㉠

원 $(x+b)^2+(y-2)^2=r^2$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면

$(x-2)^2+(y+b)^2=r^2$

$\therefore x^2+y^2-4x+2by+4+b^2-r^2=0$ …… ㉡

두 원 ㉠, ㉡이 일치하므로

$-a=-4$, $4=2b$, $-4=4+b^2-r^2$

$\therefore a=4, b=2, r^2=12$

$\therefore a+b+r^2=4+2+12=18$

## 209

직선 $3x-4y+1=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면

$3y-4x+1=0 \qquad \therefore 4x-3y-1=0$

이 직선이 원 $(x-a)^2+(y-1)^2=9$의 넓이를 이등분하려면 직선이 원의 중심 $(a, 1)$을 지나야 하므로

$4a-3-1=0 \qquad \therefore a=1$

**1등급 비법**

**원의 넓이를 이등분하는 직선**

직선 $y=mx+n$이 원 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$의 넓이를 이등분하면 직선은 원의 중심 $(a, b)$를 지난다. 즉, $b=ma+n$을 만족시킨다.

## 210

포물선 $y=kx^2+6x-3$을 $y$축에 대하여 대칭이동하면

$y=k(-x)^2+6\times(-x)-3$

$\therefore y=kx^2-6x-3$

포물선 $y=kx^2-6x-3$이 직선 $y=2kx+1$보다 항상 아래쪽에 있으려면 모든 실수 $x$에 대하여

$kx^2-6x-3<2kx+1$, 즉 $kx^2-2(k+3)x-4<0$이 성립해야 하므로

$k<0$
또, 이차방정식 $kx^2-2(k+3)x-4=0$의 판별식을 $D$라 하면
$\frac{D}{4}=\{-(k+3)\}^2+4k<0$
$k^2+10k+9<0$, $(k+9)(k+1)<0$
$\therefore -9<k<-1$
따라서 $k$의 값이 될 수 없는 것은 ①이다.

**개념 보충**

**이차부등식이 항상 성립할 조건**

모든 실수 $x$에 대하여
① $ax^2+bx+c>0$이 성립 ⇨ $a>0$, $b^2-4ac<0$
② $ax^2+bx+c\ge0$이 성립 ⇨ $a>0$, $b^2-4ac\le0$
③ $ax^2+bx+c<0$이 성립 ⇨ $a<0$, $b^2-4ac<0$
④ $ax^2+bx+c\le0$이 성립 ⇨ $a<0$, $b^2-4ac\le0$

## 211

$x^2+y^2-8x-4y+19=0$에서
$(x-4)^2+(y-2)^2=1$ …… ㉠
원 $(x-4)^2+(y-2)^2=1$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면
$(x-2)^2+(y-4)^2=1$
이 원을 $y$축에 대하여 대칭이동하면
$(-x-2)^2+(y-4)^2=1$
$\therefore (x+2)^2+(y-4)^2=1$ …… ㉡
원 ㉠의 중심은 $(4, 2)$, 원 ㉡의 중심은 $(-2, 4)$이고 반지름의 길이는 1로 같으므로 구하는 선분 PQ의 길이의 최댓값은
$1+1+\sqrt{(-2-4)^2+(4-2)^2}=2+2\sqrt{10}$
따라서 $m=2$, $n=2$이므로
$m+n=2+2=4$

## 212

직선 $4x-2y+3=0$을 $y$축에 대하여 대칭이동하면
$4\times(-x)-2y+3=0$
$\therefore 4x+2y-3=0$
이 직선을 다시 $x$축의 방향으로 4만큼, $y$축의 방향으로 $-2$만큼 평행이동하면
$4(x-4)+2(y+2)-3=0$
$\therefore 4x+2y-15=0$ $\quad\therefore a=-15$
**오답 피하기** 직선 $4x-2y+3=0$을 먼저 $x$축의 방향으로 4만큼, $y$축의 방향으로 $-2$만큼 평행이동하면
$4(x-4)-2(y+2)+3=0$
$\therefore 4x-2y-17=0$
이 직선을 다시 $y$축에 대하여 대칭이동하면
$4\times(-x)-2y-17=0$
$\therefore 4x+2y+17=0$
따라서 위의 풀이와 결과가 달라진다.
즉, 평행이동과 대칭이동을 연달아 할 때 그 순서를 바꾸면 결과가 달라지므로 도형의 이동 순서에 주의하도록 한다.

## 213

직선 $y=-\frac{1}{2}x-3$을 $x$축의 방향으로 $a$만큼 평행이동하면
$y=-\frac{1}{2}(x-a)-3$
이 직선을 다시 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면
$x=-\frac{1}{2}(y-a)-3$ $\quad\therefore l: 2x+y-a+6=0$
이때 직선 $l$이 원 $(x+1)^2+(y-3)^2=5$에 접하므로 원의 중심 $(-1, 3)$과 직선 $l: 2x+y-a+6=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 $\sqrt{5}$와 같다.
즉, $\frac{|2\times(-1)+1\times3-a+6|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5}$에서
$|-a+7|=5$
$-a+7=5$ 또는 $-a+7=-5$
$\therefore a=2$ 또는 $a=12$
따라서 모든 $a$의 값의 합은
$2+12=14$

**개념 보충**

**점과 직선 사이의 거리**

점 $(x_1, y_1)$과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리 $d$는
$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

## 214

$x^2+y^2-4x+6y+9=0$에서
$(x-2)^2+(y+3)^2=4$
이 원을 원점에 대하여 대칭이동하면
$(-x-2)^2+(-y+3)^2=4$
$\therefore (x+2)^2+(y-3)^2=4$
이 원을 다시 $x$축의 방향으로 $a$만큼, $y$축의 방향으로 $b$만큼 평행이동하면
$(x-a+2)^2+(y-b-3)^2=4$
이 원이 $x$축, $y$축에 동시에 접하므로
$|-a+2|=|-b-3|=2$
$-a+2=-2$ 또는 $-a+2=2$,
$-b-3=-2$ 또는 $-b-3=2$
$\therefore a=4$ 또는 $a=0$, $b=-1$ 또는 $b=-5$
따라서 $a+b$의 값은 $a=4$, $b=-1$일 때 최댓값 3을 갖는다.

## 215

포물선 $y=x^2-3x$를 $x$축의 방향으로 $a$만큼, $y$축의 방향으로 $-1$만큼 평행이동하면
$y+1=(x-a)^2-3(x-a)$
$\therefore y=x^2-(2a+3)x+a^2+3a-1$
이 포물선과 직선 $y=x$가 만나는 두 점 A, B의 $x$좌표는 이차방정식 $x^2-(2a+3)x+a^2+3a-1=x$, 즉
$x^2-(2a+4)x+a^2+3a-1=0$의 두 실근과 같다.
이때 두 점 A, B가 원점에 대하여 서로 대칭이므로 두 점의 $x$좌표

는 절댓값이 같고 부호가 반대이다.

즉, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$2a+4=0 \qquad \therefore a=-2$

참고 이차방정식 $x^2-(2a+4)x+a^2+3a-1=0$의 두 실근을 $\alpha$, $\beta$라 하면 $\alpha$, $\beta$는 절댓값이 같고 부호가 반대이므로

$\alpha=-\beta$

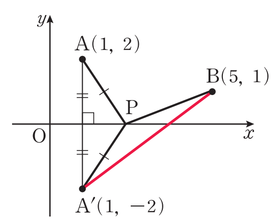
즉, $\alpha+\beta=0$이므로 $2a+4=0 \qquad \therefore a=-2$

## 216

점 A(1, 2)를 $x$축에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 하면

A′(1, −2)

$\overline{AP}=\overline{A'P}$이므로




$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{A'P}+\overline{BP}$

$\geq\overline{A'B}$

$=\sqrt{(5-1)^2+\{1-(-2)\}^2}=5$

따라서 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값은 5이다.

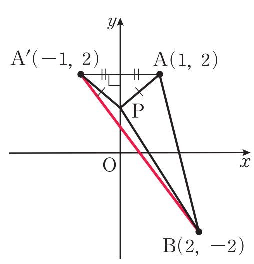
**개념 보충**

점 A와 $x$축 위의 점 P 사이의 거리는 점 A를 $x$축에 대하여 대칭이동한 점 A′과 점 P 사이의 거리와 같다.

## 217

$\overline{AB}=\sqrt{(2-1)^2+(-2-2)^2}$

$=\sqrt{17}$




로 일정하므로 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 값이 최소일 때, 삼각형 APB의 둘레의 길이도 최소가 된다.

점 A(1, 2)를 $y$축에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 하면 A′(−1, 2)

$\overline{AP}=\overline{A'P}$이므로

$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{A'P}+\overline{BP}$

$\geq\overline{A'B}$

$=\sqrt{\{2-(-1)\}^2+(-2-2)^2}=5$

따라서 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값은 5이므로 삼각형 APB의 둘레의 길이의 최솟값은 $5+\sqrt{17}$이다.

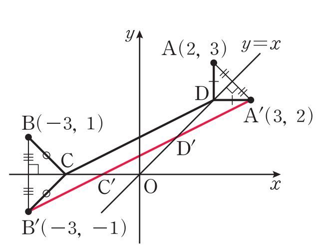
## 218

점 A(2, 3)을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 하면

A′(3, 2)

점 B(−3, 1)을 $x$축에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라 하면

B′(−3, −1)




$\overline{AD}=\overline{A'D}$, $\overline{BC}=\overline{B'C}$이므로

$\overline{AD}+\overline{CD}+\overline{BC}=\overline{A'D}+\overline{DC}+\overline{CB'}$

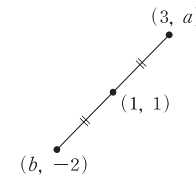
$\geq\overline{A'B'}$

$=\sqrt{\{(-3)-3\}^2+\{(-1)-2\}^2}=3\sqrt{5}$

따라서 $\overline{AD}+\overline{CD}+\overline{BC}$의 최솟값은 $3\sqrt{5}$이다.

## 219

점 (3, $a$)를 점 (1, 1)에 대하여 대칭이동한 점의 좌표가 ($b$, −2)이므로 점 (1, 1)은 두 점 (3, $a$), ($b$, −2)를 이은 선분의 중점이다. 즉,




$\frac{3+b}{2}=1$, $\frac{a+(-2)}{2}=1$

$\therefore a=4, b=-1$

$\therefore a+b=4+(-1)=3$

다른 풀이 점 (3, $a$)를 점 (1, 1)에 대하여 대칭이동한 점의 좌표가 ($b$, −2)이므로 $b=2\times1-3$에서 $b=-1$

$-2=2\times1-a$에서 $a=4$

$\therefore a+b=4+(-1)=3$

**1등급 비법**

점 P($x$, $y$)를 점 A($a$, $b$)에 대하여 대칭이동한 점을 P′($x'$, $y'$)이라 하면 점 A는 선분 PP′의 중점이므로

$\frac{x+x'}{2}=a$, $\frac{y+y'}{2}=b \qquad \therefore x'=2a-x, y'=2b-y$

$\therefore$ P′($2a-x$, $2b-y$)

## 220

직선 $l$의 방정식을 $y=ax+b$ ($a$, $b$는 상수)라 하면 두 점 (3, 1), (−1, 5)를 이은 선분의 중점 $\left(\frac{3+(-1)}{2}, \frac{1+5}{2}\right)$, 즉 점 (1, 3)이 직선 $l$ 위의 점이므로

$3=a+b \qquad \cdots\cdots ㉠$

또, 두 점 (3, 1), (−1, 5)를 지나는 직선의 기울기는

$\frac{5-1}{-1-3}=-1$이고, 이 직선이 직선 $l$과 수직이므로

$-1\times a=-1 \qquad \therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면

$3=1+b \qquad \therefore b=2$

따라서 직선 $l$의 방정식은 $y=x+2$이므로 구하는 $y$절편은 2이다.

**1등급 비법**

점 P를 직선 $l$에 대하여 대칭이동한 점을 Q라 하면

① 중점 조건: $\overline{PQ}$의 중점 M이 직선 $l$ 위에 있다.

② 수직 조건: (직선 PQ의 기울기)×(직선 $l$의 기울기)=−1

## 221

두 포물선이 점 P에 대하여 대칭이므로 두 포물선의 꼭짓점도 점 P에 대하여 대칭이다.

따라서 두 꼭짓점을 이은 선분의 중점이 점 P이다.

$y=x^2+2x-1=(x+1)^2-2$

이므로 꼭짓점의 좌표는 $(-1,\ -2)$

$y=-x^2+6x-7=-(x-3)^2+2$이므로

꼭짓점의 좌표는 $(3,\ 2)$

따라서 중점 P의 좌표는

$\mathrm{P}\left(\frac{-1+3}{2},\ \frac{-2+2}{2}\right)$ $\quad\therefore \mathrm{P}(1,\ 0)$

## 222

원 $x^2+y^2=9$의 중심을 $\mathrm{C}_1(0,\ 0)$, 원 $(x-2)^2+(y-4)^2=9$의 중심을 $\mathrm{C}_2(2,\ 4)$라 하면 두 점 $\mathrm{C}_1$, $\mathrm{C}_2$는 직선 $x+ay+b=0$에 대하여 대칭이다.

$\overline{\mathrm{C}_1\mathrm{C}_2}$의 중점 $\left(\frac{0+2}{2},\ \frac{0+4}{2}\right)$, 즉 점 $(1,\ 2)$가 직선 $x+ay+b=0$ 위의 점이므로 $1+2a+b=0$ …… ㉠

직선 $\mathrm{C}_1\mathrm{C}_2$의 기울기는 $\frac{4-0}{2-0}=2$이고, 직선 $\mathrm{C}_1\mathrm{C}_2$가 직선 $x+ay+b=0$, 즉 $y=-\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}$와 수직이므로

$2\times\left(-\frac{1}{a}\right)=-1$ $\quad\therefore a=2$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $1+2\times2+b=0$ $\quad\therefore b=-5$

$\therefore a+b=2+(-5)=-3$

## 223

점 $\mathrm{A}(4,\ -3)$을 지나는 직선 $l$의 기울기를 $m$이라 하면

$y=m(x-4)-3$ …… ㉠

직선 ㉠ 위의 임의의 점 $(x,\ y)$를 점 $(2,\ 1)$에 대하여 대칭이동한 점을 $(x',\ y')$이라 하면 점 $(2,\ 1)$은 두 점 $(x,\ y)$, $(x',\ y')$을 이은 선분의 중점이므로

$\frac{x+x'}{2}=2,\ \frac{y+y'}{2}=1$ $\quad\therefore x=4-x',\ y=2-y'$ …… ㉡

점 $(x,\ y)$는 직선 $l$ 위의 점이므로 ㉡을 ㉠에 대입하면

$2-y'=m(4-x'-4)-3$ $\quad\therefore y'=mx'+5$

즉, 직선 $l$을 점 $(2,\ 1)$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$y=mx+5$ …… ㉢

직선 ㉢을 $x$축에 대하여 대칭이동하면

$-y=mx+5$ $\quad\therefore y=-mx-5$ …… ㉣

직선 ㉣이 점 $\mathrm{A}(4,\ -3)$을 지나므로

$-3=-4m-5$ $\quad\therefore m=-\frac{1}{2}$

따라서 직선 $l$의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이다.

**1등급 비법**

방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 점 $(a,\ b)$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(2a-x,\ 2b-y)=0$

따라서 문제에서 직선 $l$의 방정식 $y=m(x-4)-3$에 $x$ 대신 $2\times2-x=4-x$를, $y$ 대신 $2\times1-y=2-y$를 대입하면

$2-y=m(4-x-4)-3$ $\quad\therefore y=mx+5$

즉, 직선 $l$을 점 $(2,\ 1)$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$y=mx+5$

## 내신 적중 서술형

● 58쪽

**224** 5 **225** (1) 중심의 좌표: $(0,\ 0)$, 반지름의 길이: $\sqrt{10}$ (2) $\sqrt{26}$
**226** $-5$ **227** $-1$

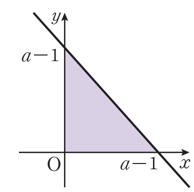
## 224

평행이동 $(x,\ y) \longrightarrow (x+a,\ y-2)$에 의하여 직선 $x+y-1=0$을 평행이동하면

$(x-a)+(y+2)-1=0$

$\therefore l: y=-x+a-1$ …… ㉮

직선 $l$의 $x$절편과 $y$절편이 모두 $a-1$이고, $a>1$에서 $a-1>0$이므로 직선 $l$과 $x$축, $y$축으로 둘러싸인 부분은 오른쪽 그림과 같다. …… ㉯




이때 둘러싸인 부분의 넓이가 8이므로

$\frac{1}{2}(a-1)^2=8,\ (a-1)^2=16$

$a^2-2a-15=0,\ (a+3)(a-5)=0$

$\therefore a=-3$ 또는 $a=5$

그런데 $a>1$이므로 $a=5$ …… ㉰

| 채점 기준 | 배점 비율 |
|---|---|
| ㉮ 평행이동한 직선 $l$의 방정식 구하기 | 40 % |
| ㉯ 직선 $l$과 $x$축, $y$축으로 둘러싸인 부분을 좌표평면 위에 나타내기 | 20 % |
| ㉰ $a$의 값 구하기 | 40 % |

## 225

(1) 두 점 B, C의 좌표를 각각 구하면

$\mathrm{B}(p,\ -q)$, $\mathrm{C}(-p,\ q)$

삼각형 ACB는 $\angle\mathrm{BAC}=90°$인 직각삼각형이므로 원 $C$의 중심은 선분 BC의 중점이다.

따라서 원 $C$의 중심의 좌표는 $(0,\ 0)$이고, 원 $C$가 점 $(\sqrt{10},\ 0)$을 지나므로 원 $C$의 반지름의 길이는 $\sqrt{10}$이다. …… ㉮

(2) 원 $C$의 방정식은 $x^2+y^2=10$이고 점 $\mathrm{A}(p,\ q)$가 원 $C$ 위의 점이므로

$p^2+q^2=10$ …… ㉠

삼각형 ABC의 넓이가 16이므로

$\frac{1}{2}\times2p\times2q=16$

$\therefore pq=8$ …… ㉡ …… ㉯

㉠, ㉡에서

$(p+q)^2=p^2+q^2+2pq=10+2\times8=26$

$\therefore p+q=\sqrt{26}$ ($\because p>0,\ q>0$) …… ㉰

| | 채점 기준 | 배점 비율 |
|---|---|---|
| (1) | ㉮ 원의 중심의 좌표와 반지름의 길이 구하기 | 40 % |
| (2) | ㉯ $p^2+q^2$, $pq$의 값 구하기 | 40 % |
| | ㉰ $p+q$의 값 구하기 | 20 % |

## 226

점 A$(1, 2)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 B의 좌표는

$(2, 1)$ …… ㉮

점 A$(1, 2)$를 $x$축의 방향으로 5만큼, $y$축의 방향으로 $a$만큼 평행이동한 점 C의 좌표는

$(6, 2+a)$ …… ㉯

세 점 A$(1, 2)$, B$(2, 1)$, C$(6, 2+a)$가 한 직선 위에 있으므로 직선 AB의 기울기와 직선 BC의 기울기가 같다.

즉, $\frac{1-2}{2-1}=\frac{(2+a)-1}{6-2}$이므로 $-1=\frac{a+1}{4}$

$\therefore a=-5$ …… ㉰

| 채점 기준 | 배점 비율 |
|---|---|
| ㉮ 점 B의 좌표 구하기 | 30 % |
| ㉯ 점 C의 좌표 구하기 | 30 % |
| ㉰ $a$의 값 구하기 | 40 % |

## 227

$x^2+y^2+4x-10y+28=0$에서

$(x+2)^2+(y-5)^2=1$

원 $(x+2)^2+(y-5)^2=1$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면

$(y+2)^2+(x-5)^2=1$

$\therefore (x-5)^2+(y+2)^2=1$ …… ㉮

이 원을 다시 $x$축의 방향으로 3만큼, $y$축의 방향으로 $-2$만큼 평행이동하면

$(x-3-5)^2+(y+2+2)^2=1$

$\therefore (x-8)^2+(y+4)^2=1$ …… ㉯

이 원의 중심 $(8, -4)$가 직선 $y=mx+4$ 위에 있으므로

$-4=8m+4 \qquad \therefore m=-1$ …… ㉰

| 채점 기준 | 배점 비율 |
|---|---|
| ㉮ 주어진 원을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식 구하기 | 30 % |
| ㉯ ㉮에서 대칭이동한 원을 $x$축의 방향으로 3만큼, $y$축의 방향으로 $-2$만큼 평행이동한 원의 방정식 구하기 | 30 % |
| ㉰ $m$의 값 구하기 | 40 % |

## 1등급 실력 완성

● 59쪽 ~ 61쪽

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **228** ③ | **229** ③ | **230** ③ | **231** 4 | **232** 5 |
| **233** $(-5, 1)$ | | **234** ② | **235** $\frac{5}{2}$ | **236** ① |
| **237** 12 | **238** ③ | **239** $3\sqrt{2}$ | **240** ③ | **241** ② |

## 228

점의 평행이동

전략 평행이동한 점의 좌표를 구한 후, $\overline{AC}$가 원의 지름임을 이용한다.

풀이 점 B는 점 A$(-2, 1)$을 $x$축의 방향으로 $m$만큼 평행이동한 점이므로

B$(-2+m, 1)$

점 C는 점 B$(-2+m, 1)$을 $y$축의 방향으로 $n$만큼 평행이동한 점이므로

C$(-2+m, 1+n)$

이때 삼각형 ABC는 빗변이 $\overline{AC}$인 직각삼각형이므로 $\overline{AC}$는 세 점 A, B, C를 지나는 원의 지름이다.

따라서 $\overline{AC}$의 중점은 원의 중심 $(3, 2)$와 일치하므로

$\frac{-2+(-2+m)}{2}=3$, $\frac{1+(1+n)}{2}=2$

$\frac{m-4}{2}=3$, $\frac{n+2}{2}=2$

$\therefore m=10$, $n=2$

$\therefore mn=10\times2=20$

다른 풀이 점 B는 점 A$(-2, 1)$을 $x$축의 방향으로 $m$만큼 평행이동한 점이므로 B$(-2+m, 1)$

점 C는 점 B$(-2+m, 1)$을 $y$축의 방향으로 $n$만큼 평행이동한 점이므로 C$(-2+m, 1+n)$

세 점 A, B, C를 지나는 원의 중심의 좌표는 $(3, 2)$이고, 반지름의 길이는

$\sqrt{\{3-(-2)\}^2+(2-1)^2}=\sqrt{26}$

이므로 세 점 A, B, C를 지나는 원의 방정식은

$(x-3)^2+(y-2)^2=26$ …… ㉠

점 B가 원 ㉠ 위의 점이므로

$(-2+m-3)^2+(1-2)^2=26$

$m^2-10m=0$

$m(m-10)=0$

$\therefore m=10$ ($\because m>0$)

또, 점 C가 원 ㉠ 위의 점이므로

$(-2+m-3)^2+(1+n-2)^2=26$

$n^2-2n=0$, $n(n-2)=0$

$\therefore n=2$ ($\because n>0$)

$\therefore mn=10\times2=20$

## 229

점의 평행이동

전략 점 P를 주어진 규칙에 맞게 이동시켜 보고, 점 P가 더 이상 이동하지 않는 점을 찾는다.

풀이 점 A$(8, 7)$에서 $7<2\times8$이므로 규칙 (나)에 의하여

점 P는 점 $(7, 7)$로 이동한다.

점 $(7, 7)$에서 $7<2\times7$이므로 규칙 (나)에 의하여

점 P는 점 $(6, 7)$로 이동한다.

점 $(6, 7)$에서 $7<2\times6$이므로 규칙 (나)에 의하여

점 P는 점 $(5, 7)$로 이동한다.

점 $(5, 7)$에서 $7<2\times5$이므로 규칙 (나)에 의하여

점 P는 점 $(4, 7)$로 이동한다.

점 $(4, 7)$에서 $7<2\times4$이므로 규칙 (나)에 의하여

점 P는 점 $(3, 7)$로 이동한다.

점 $(3, 7)$에서 $7>2\times3$이므로 규칙 (다)에 의하여
점 P는 점 $(3, 6)$으로 이동한다.
점 $(3, 6)$에서 $6=2\times3$이므로 규칙 (가)에 의하여
점 P는 이동하지 않는다.
즉, 점 B의 좌표는 $(3, 6)$이다.
따라서 점 P가 점 A$(8, 7)$에서 점 B$(3, 6)$에 이르기까지 이동한 횟수는 6회이다.

## 230

**도형의 평행이동**

전략 원을 평행이동했을 때의 원의 중심의 좌표와 반지름의 길이의 변화를 생각해 본다.

풀이 ㄱ. 원 $x^2+(y-1)^2=9$를 평행이동하여도 원의 반지름의 길이는 변하지 않으므로 원 $C$의 반지름의 길이는 3이다. (참)

ㄴ. 원 $x^2+(y-1)^2=9$의 중심의 좌표가 $(0, 1)$이므로 원 $C$의 중심의 좌표는 $(m, n+1)$이다.
이때 원 $C$가 $x$축에 접하려면
$|n+1|=3,\ n+1=\pm3$
$\therefore n=-4$ 또는 $n=2$
따라서 원 $C$가 $x$축에 접하도록 하는 실수 $n$의 값은 2개이다.
(거짓)

ㄷ. $m\neq0$일 때, 직선 $y=\dfrac{n+1}{m}x$가 원 $C$의 중심 $(m, n+1)$을 지나므로 직선 $y=\dfrac{n+1}{m}x$는 원 $C$의 넓이를 이등분한다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

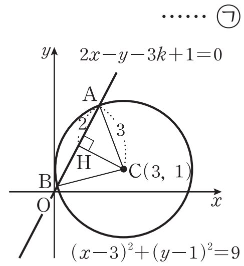
참고 원 $x^2+(y-1)^2=9$를 $x$축의 방향으로 $m$만큼, $y$축의 방향으로 $n$만큼 평행이동한 원 $C$의 방정식은 $(x-m)^2+(y-n-1)^2=9$이므로 원의 중심의 좌표는 $(m, n+1)$이고 반지름의 길이는 3이다.

## 231

**도형의 평행이동**

전략 직선을 평행이동한 후, 원의 중심과 직선 사이의 거리를 이용한다.

풀이 직선 $y=2x+1$을 $x$축의 방향으로 $k$만큼, $y$축의 방향으로 $-k$만큼 평행이동하면
$y+k=2(x-k)+1$
$\therefore 2x-y-3k+1=0$ ······ ㉠



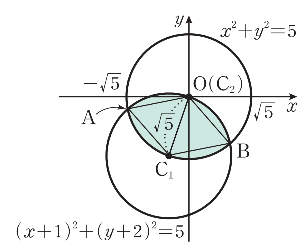

원의 중심 C$(3, 1)$에서 직선 ㉠에 내린 수선의 발을 H라 하면
$\overline{\text{AH}}=\dfrac{1}{2}\overline{\text{AB}}=\dfrac{1}{2}\times4=2$
$\overline{\text{AC}}=3$
삼각형 AHC는 직각삼각형이므로
$\overline{\text{CH}}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$
즉, 점 C$(3, 1)$과 직선 ㉠ 사이의 거리가 $\sqrt{5}$이므로
$\dfrac{|2\times3-1-3k+1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$
$|3k-6|=5$이므로
$3k-6=-5$ 또는 $3k-6=5$
$\therefore k=\dfrac{1}{3}$ 또는 $k=\dfrac{11}{3}$
따라서 모든 실수 $k$의 값의 합은
$\dfrac{1}{3}+\dfrac{11}{3}=4$

## 232

**도형의 평행이동의 활용**

전략 원 $C_1$을 평행이동한 원 $C_2$의 방정식을 구하여 두 원 $C_1$, $C_2$가 겹치는 부분의 넓이를 구한다.

풀이 $C_1$: $x^2+y^2+2x+4y=0$에서
$(x+1)^2+(y+2)^2=5$
원 $C_1$을 $x$축의 방향으로 1만큼, $y$축의 방향으로 2만큼 평행이동한 원 $C_2$의 방정식은
$(x-1+1)^2+(y-2+2)^2=5$
$\therefore x^2+y^2=5$




위의 그림과 같이 두 원 $C_1$, $C_2$의 두 교점을 A, B라 하고, 두 원 $C_1$, $C_2$의 중심을 각각 $\text{C}_1$, $\text{C}_2$라 하면 삼각형 $\text{AC}_1\text{C}_2$는 정삼각형이므로 부채꼴 $\text{AC}_1\text{C}_2$의 넓이는
$\pi\times(\sqrt{5})^2\times\dfrac{60}{360}=\dfrac{5}{6}\pi$
정삼각형 $\text{AC}_1\text{C}_2$의 넓이는
$\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times(\sqrt{5})^2=\dfrac{5\sqrt{3}}{4}$
따라서 구하는 넓이는
$4\left(\dfrac{5}{6}\pi-\dfrac{5\sqrt{3}}{4}\right)+2\times\dfrac{5\sqrt{3}}{4}=\dfrac{10}{3}\pi-\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$
즉, $a=\dfrac{10}{3}$, $b=-\dfrac{5}{2}$이므로
$3a+2b=3\times\dfrac{10}{3}+2\times\left(-\dfrac{5}{2}\right)$
$=5$

**1등급 비법**
두 원 $C_1$, $C_2$는 각각 서로 다른 원의 중심을 지나므로 두 삼각형 $\text{AC}_1\text{C}_2$, $\text{BC}_1\text{C}_2$가 정삼각형임을 이용한다.

## 233

**점의 대칭이동**

전략 주어진 조건에 따라 점을 대칭이동하여 규칙성을 찾는다.

풀이 점 $\text{P}_1(-1, 5)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면
$\text{P}_2(5, -1)$

점 $P_2(5,\ -1)$을 원점에 대하여 대칭이동하면

$P_3(-5,\ 1)$

점 $P_3(-5,\ 1)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면

$P_4(1,\ -5)$

점 $P_4(1,\ -5)$를 원점에 대하여 대칭이동하면

$P_5(-1,\ 5)$

즉, 점 $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$, $\cdots$의 좌표는

$(-1,\ 5)$, $(5,\ -1)$, $(-5,\ 1)$, $(1,\ -5)$, $\cdots$

의 순서로 반복된다. 이때 $999=4\times249+3$이므로 점 $P_{999}$의 좌표는 점 $P_3$의 좌표와 같다.

따라서 점 $P_{999}$의 좌표는 $(-5,\ 1)$이다.

## 234

**점의 대칭이동**

(전략) 직선 $y=x$에 대한 점의 대칭이동을 이용하여 $|\overline{PP'}-\overline{QQ'}|$의 최댓값을 구한다.

(풀이) 점 Q는 $P(x,\ y)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점이므로 $Q(y,\ x)$

두 점 P, Q에서 $x$축에 내린 수선의 발이 각각 $P'$, $Q'$이므로

$P'(x,\ 0)$, $Q'(y,\ 0)$

$\therefore\ \overline{PP'}=y$, $\overline{QQ'}=x$

$|\overline{PP'}-\overline{QQ'}|=|y-x|=k\ (k\geq0)$라 하면

$y-x=\pm k$

$\therefore\ y=x\pm k$

이때 $k$의 값은 직선 $y=x\pm k$가 원에 접할 때 최대이므로 $k$가 최대일 때 원 $(x-4)^2+(y-4)^2=16$의 중심 $(4,\ 4)$와 직선 $y=x\pm k$, 즉 $x-y\pm k=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 4와 같다.

$\dfrac{|4-4\pm k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=4$에서

$|\pm k|=4\sqrt{2}$

$\therefore\ k=4\sqrt{2}\ (\because\ k\geq0)$

따라서 $|\overline{PP'}-\overline{QQ'}|$의 최댓값은 $4\sqrt{2}$이다.

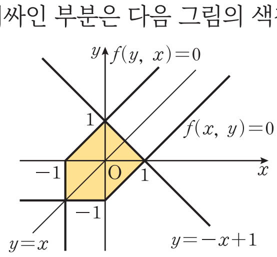
## 235

**도형의 대칭이동**

(전략) 방정식 $f(y,\ x)=0$이 나타내는 도형은 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 어떻게 이동한 것인지 생각해 본다.

(풀이) 방정식 $f(y,\ x)=0$이 나타내는 도형은 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 것이다.

방정식 $f(x,\ y)=0$, $f(y,\ x)=0$이 나타내는 도형과 직선 $y=-x+1$로 둘러싸인 부분은 다음 그림의 색칠한 부분과 같다.




따라서 구하는 넓이는

$1\times1+3\times\left(\dfrac{1}{2}\times1\times1\right)=\dfrac{5}{2}$

## 236

**도형의 대칭이동의 활용**

(전략) 점 A가 원 위의 접점임을 이용한다.

(풀이) 점 $A(3,\ 2)$는 원 $x^2+y^2=13$ 위의 점이므로 점 A는 직선 AB와 원 $x^2+y^2=13$의 접점이다.

직선 AB의 방정식은

$3x+2y=13$ $\cdots\cdots$ ㉠

점 B는 점 $A(3,\ 2)$를 $x$축의 방향으로 $a$만큼, $y$축의 방향으로 $b$만큼 평행이동한 점이므로

$B(3+a,\ 2+b)$

점 B가 직선 ㉠ 위의 점이므로

$3(3+a)+2(2+b)=13$

$3a+2b=0$ $\quad\therefore\ a=-\dfrac{2}{3}b$ $\cdots\cdots$ ㉡

$\overline{AB}=\sqrt{13}$에서 $\overline{AB}^2=13$이므로

$a^2+b^2=13$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=-2$, $b=3$ 또는 $a=2$, $b=-3$

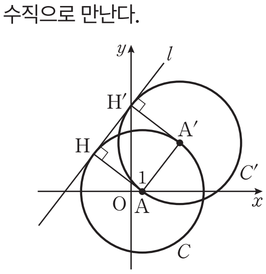
$\therefore\ ab=-6$

## 237

**도형의 평행이동과 대칭이동**

(전략) 원의 중심과 접점을 이은 선분은 접선과 수직으로 만난다.

(풀이) 오른쪽 그림과 같이 두 원 $C$, $C'$의 중심을 각각 A, $A'$이라 하자.




조건 (나)에서 직선 $4x-3y+21=0$이 원 $C$에 접하므로 원 $C$의 중심 $A(1,\ 0)$과 직선 $4x-3y+21=0$ 사이의 거리는 $r$과 같다.

$\therefore\ r=\dfrac{|4\times1-3\times0+21|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=5$

원 $C'$의 방정식은 $(x-a-1)^2+(y-b)^2=25$이고 조건 (가)에서 원 $C'$이 점 $A(1,\ 0)$을 지나므로

$(1-a-1)^2+(0-b)^2=25$

$\therefore\ a^2+b^2=25$ $\cdots\cdots$ ㉠

직선 $4x-3y+21=0$을 $l$이라 하고 두 점 A, $A'$에서 직선 $l$에 내린 수선의 발을 각각 H, $H'$이라 하면 $\overline{AH}=\overline{A'H'}$이고

$\overline{AH}\perp l$, $\overline{A'H'}\perp l$

이므로 직선 $AA'$은 직선 $l$과 평행하다.

$A'(a+1,\ b)$이고 직선 $l$의 기울기는 $\dfrac{4}{3}$이므로

$\dfrac{b-0}{(a+1)-1}=\dfrac{4}{3}$

$\therefore\ b=\dfrac{4}{3}a$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$a^2+\left(\frac{4}{3}a\right)^2=25$, $\frac{25}{9}a^2=25$

$a^2=9$ $\quad\therefore a=3\ (\because a>0)$

$\therefore b=\frac{4}{3}\times3=4$

$\therefore a+b+r=3+4+5=12$

## 238

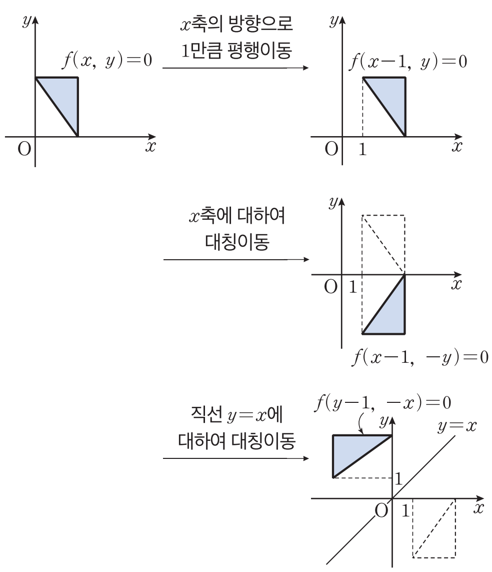
**도형의 평행이동과 대칭이동**

전략 두 방정식 $f(x, y)=0$과 $f(y-1, -x)=0$이 나타내는 도형 사이의 관계를 생각해 본다.

풀이 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형이 방정식 $f(y-1, -x)=0$이 나타내는 도형으로 이동하려면 $x$축의 방향으로 1만큼 평행이동한 후, $x$축에 대하여 대칭이동하고, 다시 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동해야 한다. 즉,

$$\begin{aligned} f(x, y)=0 &\longrightarrow f(x-1, y)=0 \\ &\longrightarrow f(x-1, -y)=0 \\ &\longrightarrow f(y-1, -x)=0 \end{aligned}$$

따라서 방정식 $f(y-1, -x)=0$이 나타내는 도형을 그리면 다음과 같다.




## 239

**선분의 길이의 최솟값**

전략 점 C의 좌표를 $(4, a)$로 놓고 대칭이동을 이용한다.

풀이 $0<a<4$인 실수 $a$에 대하여 점 C의 좌표를 $(4, a)$라 하자.
점 C를 직선 OA, 즉 $x$축에 대하여 대칭이동한 점을 $C_1$이라 하고, 점 C를 직선 OB, 즉 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 $C_2$라 하면 $C_1(4, -a)$, $C_2(a, 4)$

$\overline{PC}=\overline{PC_1}$, $\overline{QC}=\overline{QC_2}$이므로 삼각형 CQP의 둘레의 길이는

$$\begin{aligned} \overline{PC}+\overline{CQ}+\overline{QP} &= \overline{PC_1}+\overline{C_2Q}+\overline{QP} \\ &\ge \overline{C_1C_2} \\ &= \sqrt{(a-4)^2+\{4-(-a)\}^2} \\ &= \sqrt{2a^2+32} \end{aligned}$$

삼각형 CQP의 둘레의 길이의 최솟값이 6이므로

$\sqrt{2a^2+32}=6$

$2a^2+32=36$

$a^2=2$

$\therefore a=\sqrt{2}\ (\because 0<a<4)$

따라서 점 C의 좌표가 $(4, \sqrt{2})$이므로

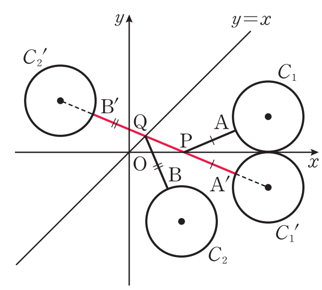
$\overline{OC}=\sqrt{4^2+(\sqrt{2})^2}=3\sqrt{2}$

## 240

**선분의 길이의 최솟값**

전략 주어진 원을 대칭이동하여 두 점 사이의 거리를 이용한다.

풀이 다음 그림과 같이 원 $C_1$을 $x$축에 대하여 대칭이동한 원을 $C_1'$, 원 $C_2$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원을 $C_2'$이라 하면




원 $C_1$의 방정식은 $(x-8)^2+(-y-2)^2=4$에서

$(x-8)^2+(y+2)^2=4$,

원 $C_2$의 방정식은 $(y-3)^2+(x+4)^2=4$에서

$(x+4)^2+(y-3)^2=4$

이므로 원 $C_1'$의 중심은 $(8, -2)$, 원 $C_2'$의 중심은 $(-4, 3)$이다.
점 A를 $x$축에 대하여 대칭이동한 점을 A′, 점 B를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라 하면 두 점 A′, B′은 각각 원 $C_1'$, 원 $C_2'$ 위의 점이다.

$\overline{AP}=\overline{A'P}$, $\overline{QB}=\overline{QB'}$이므로

$$\begin{aligned} \overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB} &= \overline{A'P}+\overline{PQ}+\overline{QB'} \\ &\ge \overline{A'B'} \end{aligned}$$

$\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}$의 값은 위의 그림과 같이 네 점 A′, P, Q, B′이 두 원 $C_1'$, $C_2'$의 중심을 이은 선분 위에 있을 때 최소이므로

$\overline{A'B'}=$(두 원 $C_1'$과 $C_2'$의 중심 사이의 거리)
$\quad-$(원 $C_1'$의 반지름의 길이)$-$(원 $C_2'$의 반지름의 길이)

$$\begin{aligned} &= \sqrt{\{8-(-4)\}^2+\{(-2)-3\}^2}-2-2 \\ &= 13-4 \\ &= 9 \end{aligned}$$

따라서 $\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}$의 최솟값은 9이다.

## 241

**점 또는 직선에 대한 대칭이동**

전략 점 A를 원 위의 임의의 점 P에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 하면 점 P는 선분 AA′의 중점임을 이용한다.

풀이 원 위의 임의의 점을 $\mathrm{P}(a, b)$, 점 $\mathrm{A}(-2, -1)$을 점 P에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{A}'(x, y)$라 하면

$a=\frac{x-2}{2}$, $b=\frac{y-1}{2}$

점 P는 원 $(x-4)^2+(y-5)^2=1$ 위의 점이므로

$\left(\frac{x-2}{2}-4\right)^2+\left(\frac{y-1}{2}-5\right)^2=1$

$\left(\frac{x-10}{2}\right)^2+\left(\frac{y-11}{2}\right)^2=1$

$\therefore (x-10)^2+(y-11)^2=4$

## 도전 1등급 최고난도

62쪽

242 ② 243 ④

### 242

도형의 평행이동의 활용

1단계 평행이동을 활용하여 직선 $y=ax+b$의 기울기를 구한다.

포물선 $y=x^2-4x+4$와 직선 $y=ax+b$의 접점을 $\mathrm{P}(p, q)$라 하면 포물선 $y=f(x)$가 직선 $y=ax+b$에 접하므로 점 P를 $x$축의 방향으로 $k$만큼, $y$축의 방향으로 $k$만큼 평행이동한 점 $\mathrm{Q}(p+k, q+k)$도 포물선 $y=f(x)$와 직선 $y=ax+b$의 접점이다.

이때 0이 아닌 $k$에 대하여 직선 PQ의 기울기는

$\frac{(q+k)-q}{(p+k)-p}=1$

이므로 $k$의 값에 관계없이 포물선 $y=f(x)$에 접하는 직선의 기울기는 1이다.

$\therefore a=1$

2단계 직선 $y=x+b$가 포물선 $y=x^2-4x+4$에 접함을 이용한다.

$k=0$일 때, 직선 $y=x+b$가 포물선 $y=x^2-4x+4$에 접하므로 이차방정식 $x^2-4x+4=x+b$, 즉 $x^2-5x+4-b=0$은 중근을 갖는다.

이차방정식 $x^2-5x+4-b=0$의 판별식을 $D$라 하면

$D=(-5)^2-4(4-b)=0$

$4b+9=0$

$\therefore b=-\frac{9}{4}$

$\therefore a+b=1+\left(-\frac{9}{4}\right)=-\frac{5}{4}$

### 243

도형의 평행이동과 대칭이동 ⊕ 점 또는 직선에 대한 대칭이동

1단계 원 $C$를 평행이동한 원의 방정식을 구한다.

$x^2+y^2-4x-14y+37=0$에서

$(x-2)^2+(y-7)^2=16$

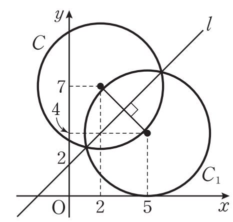
원 $C$를 $x$축의 방향으로 3만큼, $y$축의 방향으로 $-3$만큼 평행이동한 원을 $C_1$이라 하면 원 $C_1$의 방정식은

$(x-3-2)^2+(y+3-7)^2=16$

$(x-5)^2+(y-4)^2=16$

$\therefore x^2+y^2-10x-8y+25=0$

2단계 직선 $l$은 두 원 $C$, $C_1$의 교점을 지나는 직선임을 이용하여 직선 $l$의 방정식을 구한다.




직선 $l$은 두 원 $C$, $C_1$의 교점을 지나는 직선이므로 직선 $l$의 방정식은

$x^2+y^2-4x-14y+37-(x^2+y^2-10x-8y+25)=0$

$\therefore y=x+2$

3단계 두 점 $(3, 2)$, $(a, b)$가 직선 $l$에 대하여 대칭이 되도록 하는 $a$, $b$의 값을 구한다.

두 점 $(3, 2)$, $(a, b)$를 이은 선분의 중점 $\left(\frac{3+a}{2}, \frac{2+b}{2}\right)$가 직선 $l$ 위의 점이므로

$\frac{2+b}{2}=\frac{3+a}{2}+2$

$\therefore a-b=-5$ …… ㉠

두 점 $(3, 2)$, $(a, b)$를 이은 직선이 직선 $l$에 수직이므로

$\frac{2-b}{3-a}\times 1=-1$

$\therefore a+b=5$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=0$, $b=5$

$\therefore 2a+3b=2\times 0+3\times 5$

$=15$

개념 보충

**두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식**

두 점에서 만나는 두 원 $x^2+y^2+ax+by+c=0$, $x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2+y^2+ax+by+c-(x^2+y^2+a'x+b'y+c')=0$$

# Ⅱ 집합과 명제

## 05 집합

### 유형 분석 기출

65쪽 ~ 69쪽

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **244** ④, ⑤ | **245** ③ | **246** ⑤ | **247** ③ | **248** 8 |
| **249** 8 | **250** ① | **251** ⑤ | **252** ④ | **253** ⑤ |
| **254** ③ | **255** ① | **256** 9 | **257** 10 | |
| **258** $\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$ | | | | **259** 48 |
| **260** $-3$ | **261** ⑤ | **262** ② | **263** ④ | **264** ④ |
| **265** 256 | **266** ② | **267** 16 | **268** 62 | **269** ④ |
| **270** 11 | **271** ④ | **272** ③ | **273** 37 | |

### 244

①, ②, ③ '큰', '가까운', '많은'의 기준이 명확하지 않아서 그 대상을 분명하게 정할 수 없으므로 집합이 아니다.

④ $x^2-x-6=0$에서 $(x+2)(x-3)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=3$

즉, 이차방정식 $x^2-x-6=0$의 해는 $x=-2$ 또는 $x=3$이므로 $-2$, 3을 원소로 갖는 집합이다.

⑤ 15보다 크고 16보다 작은 자연수는 없으므로 공집합이다.

따라서 집합인 것은 ④, ⑤이다.

### 245

①, ②, ④, ⑤ $\{1, 3, 5, 7, 9\}$

③ $\{1, 3, 5, 7\}$

따라서 나머지 넷과 다른 하나는 ③이다.

### 246

$a\in A$, $b\in B$인 $a$, $b$에 대하여 $2a+b$의 값을 구하면 오른쪽 표와 같으므로

$C=\{-2, 0, 2, 4\}$

따라서 집합 $C$의 모든 원소의 합은

$(-2)+0+2+4=4$

| $2a$ \ $b$ | 0 | 2 |
|---|---|---|
| $-2$ | $-2$ | 0 |
| 0 | 0 | 2 |
| 2 | 2 | 4 |

### 247

① $n(\{0\})=1$

② $n(\{\varnothing\})-n(\varnothing)=1-0=1$

③ $n(\{x\,|\,x$는 18의 양의 약수$\})=n(\{1, 2, 3, 6, 9, 18\})$
$=6$

④ $n(\{50\})-n(\{49\})=1-1=0$

⑤ $n(\{0, 1, 2\})-n(\{0, 1\})=3-2=1$

따라서 옳은 것은 ③이다.

**1등급 비법**

**$\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{0\}$의 원소의 개수**

① $\varnothing$은 원소가 하나도 없는 집합이므로 $n(\varnothing)=0$

② $\{\varnothing\}$은 $\varnothing$을 원소로 갖는 집합이므로 $n(\{\varnothing\})=1$

③ $\{0\}$은 0을 원소로 갖는 집합이므로 $n(\{0\})=1$

### 248

$A=\{1, 2, 3\}$이므로 $n(A)=3$

$B=\{x\,|\,x$는 81의 양의 약수$\}=\{1, 3, 9, 27, 81\}$이므로

$n(B)=5$

$C=\{x\,|\,x^2-2x+2=0$, $x$는 실수$\}$에서

이차방정식 $x^2-2x+2=0$의 판별식을 $D$라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-2=-1<0$

이므로 이 이차방정식은 실근을 갖지 않는다.

즉, $C=\varnothing$이므로 $n(C)=0$

$\therefore n(A)+n(B)+n(C)=3+5+0=8$

**개념 보충**

**이차방정식의 근의 판별**

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 판별식 $D=b^2-4ac$라 할 때,

① $D>0$이면 서로 다른 두 실근을 갖는다.

② $D=0$이면 중근(실근)을 갖는다.

③ $D<0$이면 서로 다른 두 허근을 갖는다.

### 249

$A=\{(1, 12), (2, 9), (3, 6), (4, 3)\}$이므로

$n(A)=4$

$B=\{1, 2, 3, \cdots, k\}$이므로 $n(B)=k$

이때 $n(A)+n(B)=12$이므로

$4+k=12 \qquad \therefore k=8$

### 250

① $\varnothing$은 집합 $A$의 원소가 아니므로 $\varnothing\notin A$

따라서 옳지 않은 것은 ①이다.

### 251

$B=\{1, 2, 5, 10\}$

① 0은 집합 $A$의 원소가 아니므로 $0\notin A$

② 2는 집합 $B$의 원소이므로 $2\in B$

③ $2\in A$, $5\in A$이므로 $\{2, 5\}\subset A$

④ $6\notin B$이므로 $\{1, 6\}\not\subset B$

⑤ $8\notin B$이므로 $\{1, 5, 8\}\not\subset B$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

### 252

① $\varnothing$은 집합 $A$의 원소이므로 $\varnothing\in A$

② $\{1\}$은 집합 $A$의 원소이므로 $\{1\}\in A$

③ $\varnothing \in A$, $1 \in A$이므로 $\{\varnothing, 1\} \subset A$

④ $2 \notin A$이므로 $\{1, 2\} \not\subset A$

⑤ 집합 $A$의 원소는 $\varnothing$, $1$, $\{1\}$, $\{1, 2\}$의 4개이므로
$n(A)=4$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

**1등급 비법**

집합 $A=\{a, \{b, c\}\}$는 집합을 원소로 갖는 집합이다.
이때 집합 $A$의 원소는 $a$와 $\{b, c\}$이고, $\{a\}$와 $\{\{b, c\}\}$는 각각 $a$와 $\{b, c\}$를 원소로 갖는 $A$의 부분집합이다. 즉,
$a \in A$, $\{b, c\} \in A$, $\{a\} \subset A$, $\{\{b, c\}\} \subset A$

## 253

$A=\{4, 8, 12, 16, 20, 24, \cdots\}$

$B=\{6, 12, 18, 24, \cdots\}$

$C=\{12, 24, 36, \cdots\}$

$\therefore C \subset A$, $C \subset B$

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

## 254

집합 $S=\{x \mid x$는 양의 실수$\}$이므로

$|x|<3$에서 $-3<x<3$

$\therefore B=\{x \mid |x|<3\}=\{x \mid 0<x<3\}$

또, $x^2-x-20<0$에서 $(x+4)(x-5)<0$

$\therefore -4<x<5$

$\therefore C=\{x \mid 0<x<5\}$

따라서 세 집합 $A$, $B$, $C$ 사이의 포함 관계는

$B \subset A \subset C$

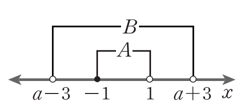
## 255

$x^2-2ax+a^2-9<0$에서

$(x-a+3)(x-a-3)<0$ $\qquad \therefore a-3<x<a+3$

$\therefore B=\{x \mid a-3<x<a+3\}$

$A \subset B$가 성립하도록 두 집합 $A$, $B$를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로




$a-3<-1$, $a+3 \geq 1$

$\therefore -2 \leq a<2$

따라서 실수 $a$의 최솟값은 $-2$이다.

## 256

$(3x-k)(x^2-16)=0$에서

$(3x-k)(x+4)(x-4)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=4$ 또는 $x=\dfrac{k}{3}$

$\therefore A=\left\{-4, 4, \dfrac{k}{3}\right\}$

이때 $B=\{3, 4\}$이므로 $B \subset A$이려면 $3 \in A$이어야 한다.

즉, $3=\dfrac{k}{3}$이므로 $k=9$

## 257

$A=\{6, 12, 18, 24, 30\}$에 대하여 집합 $X$는 원소가 2개인 집합 $A$의 부분집합이므로

$\{6, 12\}$, $\{6, 18\}$, $\{6, 24\}$, $\{6, 30\}$, $\{12, 18\}$, $\{12, 24\}$, $\{12, 30\}$, $\{18, 24\}$, $\{18, 30\}$, $\{24, 30\}$

의 10개이다.

**다른 풀이** 집합 $X$의 개수는 집합 $A$의 원소 5개 중에서 2개를 택하는 조합의 수와 같으므로

${}_5C_2=\dfrac{5\times4}{2}=10$

## 258

$X \subset A$이고 $X \neq A$인 집합 $X$는 집합 $A$의 진부분집합이다.

$x^2-4x+3 \leq 0$에서

$(x-1)(x-3) \leq 0$

$\therefore 1 \leq x \leq 3$

이때 $x$는 정수이므로 $A=\{1, 2, 3\}$

따라서 집합 $X$는

$\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$

## 259

$\sqrt{25}=5$이므로 $A_{25}=\{1, 3, 5\}$

$5 \leq \sqrt{n}<7$이면 $A_n=A_{25}$이므로

$25 \leq n<49$

따라서 자연수 $n$의 최댓값은 48이다.

## 260

$A=B$이므로 $5 \in A$이어야 한다.

$x^2-ax-20=0$에 $x=5$를 대입하면

$25-5a-20=0$ $\qquad \therefore a=1$

따라서 $x^2-x-20=0$에서

$(x+4)(x-5)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=5$

즉, $A=\{-4, 5\}$이므로 $b=-4$

$\therefore a+b=1+(-4)=-3$

## 261

$A \subset B$이고 $B \subset A$이므로 $A=B$

$A=B$이므로 $2 \in A$

즉, $a^2-a=2$에서

$a^2-a-2=0$

$(a+1)(a-2)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=2$

(i) $a=-1$일 때,

$A=\{2, 6, 10\}$, $B=\{-5, 2, 9\}$

$\therefore A \neq B$

(ⅱ) $a=2$일 때,

$A=\{2, 6, 10\}$, $B=\{2, 6, 10\}$

$\therefore A=B$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a=2$

1등급 비법

두 집합 $A$, $B$에 대하여 $A\subset B$, $B\subset A$이면

⇨ $A=B$

⇨ 두 집합 $A$, $B$의 원소가 서로 같다.

## 262

$A=B$이므로 두 집합 $A$, $B$의 원소가 서로 같다.

(ⅰ) $x-1=x-y$, $y+5=x+3y$일 때,

$y=1$, $x+2y=5$

$\therefore x=3, y=1$

(ⅱ) $x-1=x+3y$, $y+5=x-y$일 때,

$3y=-1$, $x-2y=5$

$\therefore x=\frac{13}{3}, y=-\frac{1}{3}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $x=3$, $y=1$ ($\because x>0, y>0$)

$\therefore xy=3\times1=3$

## 263

15보다 작은 소수는 2, 3, 5, 7, 11, 13

이므로 $A=\{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$

따라서 집합 $A$의 진부분집합의 개수는

$2^6-1=63$

## 264

$n(A)=x$라 하면 집합 $A$의 부분집합의 개수는 $2^x$이므로

$2^x=128=2^7 \qquad \therefore x=7$

$\therefore n(A)=7$

## 265

$P(A)=\{X|X\subset A\}$에서 $X$는 집합 $A$의 부분집합이므로 집합 $P(A)$의 원소의 개수는 집합 $A$의 부분집합의 개수와 같다.

$\therefore 2^3=8$

따라서 집합 $P(A)$의 부분집합의 개수는

$2^8=256$

참고 $P(A)$는 집합 $A$의 부분집합을 원소로 갖는 집합이므로

$P(A)=\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

## 266

집합 $X$의 모든 부분집합의 개수가 $P(X)$이므로

$P(X)=2^{n(X)}$

조건 (가)에서 $n(B)=2+n(A)$이므로 조건 (나)에서

$P(B)-P(A)=2^{n(B)}-2^{n(A)}$

$=2^{2+n(A)}-2^{n(A)}$ $\quad 2^2\times2^{n(A)}-2^{n(A)}=4\times2^{n(A)}-2^{n(A)}$

$=3\times2^{n(A)}$ $\quad =3\times2^{n(A)}$

$=96$

따라서 $2^{n(A)}=32=2^5$이므로

$n(A)=5$

## 267

$A\subset X\subset B$에서

$\{1, 2\}\subset X\subset\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

따라서 집합 $X$의 개수는 집합 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$의 부분집합 중에서 1, 2를 반드시 원소로 갖는 집합의 개수와 같으므로

$2^{6-2}=2^4=16$ 집합 $\{1, 2\}$의 원소의 개수

1등급 비법

$A\subset X\subset B$를 만족시키는 집합 $X$의 개수

⇨ 집합 $B$의 부분집합 중에서 집합 $A$의 모든 원소를 원소로 갖는 집합의 개수와 같다.

따라서 $A\subset B$이고 $n(A)=p$, $n(B)=q$일 때, $A\subset X\subset B$를 만족시키는 집합 $X$의 개수는

$2^{q-p}$ (단, $p<q$)

## 268

$\frac{27}{n}$이 정수이려면 $|n|$이 27의 약수이어야 한다.

(ⅰ) $n=-27$일 때, $x=\frac{27}{-27}=-1$

(ⅱ) $n=-9$일 때, $x=\frac{27}{-9}=-3$

(ⅲ) $n=-3$일 때, $x=\frac{27}{-3}=-9$

(ⅳ) $n=-1$일 때, $x=\frac{27}{-1}=-27$

(ⅴ) $n=1$일 때, $x=\frac{27}{1}=27$

(ⅵ) $n=3$일 때, $x=\frac{27}{3}=9$

(ⅶ) $n=9$일 때, $x=\frac{27}{9}=3$

(ⅷ) $n=27$일 때, $x=\frac{27}{27}=1$

(ⅰ)~(ⅷ)에서

$A=\{-27, -9, -3, -1, 1, 3, 9, 27\}$

$|x|=9$에서 $x=\pm9$이므로 $B=\{-9, 9\}$

$B\subset X\subset A$, $X\neq A$, $X\neq B$를 만족시키는 집합 $X$는 $-9$, 9를 반드시 원소로 갖는 집합 $A$의 부분집합 중 두 집합 $A$, $B$를 제외한 것과 같으므로 집합 $X$의 개수는

$2^{8-2}-2=2^6-2=62$

## 269

집합 $X$의 개수는 집합 $\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\}$의 부분집합 중에서 $a_1$, $a_2$, $a_3$을 반드시 원소로 갖는 집합의 개수와 같으므로

$2^{n-3}=16=2^4$

$n-3=4$

$\therefore n=7$

## 270

$n(A)=k$이므로 집합 $A$의 부분집합 중에서 1, 4를 반드시 원소로 갖고, 5, 6, 7을 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는

$2^{k-2-3}=64$, $2^{k-5}=2^6$

$k-5=6 \qquad \therefore k=11$

## 271

집합 $A$의 부분집합의 개수에서 홀수 1, 3, 5를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수를 뺀 것과 같으므로

$2^5-2^{5-3}=2^5-2^2$

$=32-4=28$

## 272

$A=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$의 부분집합 중에서 2 또는 3을 원소로 갖는 부분집합의 개수는 집합 $A$의 부분집합의 개수에서 2, 3을 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수를 뺀 것과 같으므로

$2^6-2^4=64-16=48$

## 273

1, 2를 반드시 원소로 갖고 원소의 개수가 4 이하인 집합 $A$의 부분집합을 $X$라 하면

$n(X)=2$ 또는 $n(X)=3$ 또는 $n(X)=4$

(i) $n(X)=2$일 때,

$1\in X$, $2\in X$이므로 조건을 만족시키는 집합 $X$의 개수는 1

(ii) $n(X)=3$일 때,

$1\in X$, $2\in X$이므로 집합 $X$는 3, 4, 5, ⋯, 10의 8개의 원소 중 하나를 원소를 갖는다.

따라서 조건을 만족시키는 집합 $X$의 개수는

${}_8C_1=8$

(iii) $n(X)=4$일 때,

$1\in X$, $2\in X$이므로 집합 $X$는 3, 4, 5, ⋯, 10의 8개의 원소 중 2개를 원소를 갖는다.

따라서 조건을 만족시키는 집합 $X$의 개수는

${}_8C_2=28$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 부분집합의 개수는

$1+8+28=37$

**내신 적중 서술형** ● 70쪽

**274** 6 **275** 5 **276** 15

**277** (1) 1024 (2) 128 (3) 896

## 274

$x^3=1$에서 $x^3-1=0$

$(x-1)(x^2+x+1)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

$\therefore A=\left\{1, \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}, \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right\}$ …… ㉮

$x_1\in A$, $x_2\in A$인 $x_1$, $x_2$에 대하여 $x_1+x_2$의 값을 구하면 다음 표와 같다.

| $x_1$ \ $x_2$ | $1$ | $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ | $\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ |
|---|---|---|---|
| $1$ | $2$ | $\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ | $\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$ |
| $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ | $\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ | $-1+\sqrt{3}i$ | $-1$ |
| $\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ | $\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$ | $-1$ | $-1-\sqrt{3}i$ |

따라서

$B=\left\{-1, 2, \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}, \dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}, -1+\sqrt{3}i, -1-\sqrt{3}i\right\}$ …… ㉯

이므로 $n(B)=6$ …… ㉰

| 채점 기준 | 배점 비율 |
|---|---|
| ㉮ 집합 $A$ 구하기 | 30 % |
| ㉯ 집합 $B$ 구하기 | 50 % |
| ㉰ $n(B)$의 값 구하기 | 20 % |

## 275

$A=B$에서 $A\subset B$이므로 $10\in B$

즉, $x^2-3x=10$에서

$x^2-3x-10=0$, $(x+2)(x-5)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=5$ …… ㉮

$A=B$에서 $B\subset A$이므로 $25\in A$

즉, $x^2=25$에서

$x=-5$ 또는 $x=5$ …… ㉯

따라서 $A=B$가 되도록 하는 실수 $x$의 값은 5이다. …… ㉰

| 채점 기준 | 배점 비율 |
|---|---|
| ㉮ $A\subset B$가 되도록 하는 $x$의 값 구하기 | 40 % |
| ㉯ $B\subset A$가 되도록 하는 $x$의 값 구하기 | 40 % |
| ㉰ $A=B$가 되도록 하는 $x$의 값 구하기 | 20 % |

## 276

$A_k$는 $k$의 약수의 집합이므로 $A_{12}\subset A_n$이면 $n$은 12의 배수이다.

$\therefore n=12, 24, 36, \cdots$ …… ㉮

마찬가지로 $A_n\subset A_{120}$이면 $n$은 120의 약수이다.

$\therefore n=1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120$ …… ㉯

즉, $A_{12}\subset A_n\subset A_{120}$을 만족시키는 $n$은

$n=12, 24, 60, 120$ …… ㉰

이므로 $B=\{A_{12}, A_{24}, A_{60}, A_{120}\}$

따라서 집합 $B$의 진부분집합의 개수는

$2^4-1=15$ …… ㉣

| 채점 기준 | 배점 비율 |
|---|---|
| ㉮ $A_{12}\subset A_n$인 $n$의 조건 구하기 | 20 % |
| ㉯ $A_n\subset A_{120}$인 $n$의 조건 구하기 | 20 % |
| ㉰ $A_{12}\subset A_n\subset A_{120}$인 $n$의 값 구하기 | 20 % |
| ㉱ 집합 $B$의 진부분집합의 개수 구하기 | 40 % |

## 277

(1) $A=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$이므로 집합 $A$의 부분집합의 개수는

$2^{10}=1024$ …… ㉮

(2) 구하는 부분집합의 개수는 집합 $A$의 부분집합 중에서 3, 6, 9를 원소로 갖지 않는 집합의 개수와 같으므로

$2^{10-3}=2^7=128$ …… ㉯

(3) 구하는 부분집합의 개수는 집합 $A$의 모든 부분집합의 개수에서 3, 6, 9 중에서 어떤 것도 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수를 뺀 것과 같으므로

$2^{10}-2^7=1024-128=896$ …… ㉰

| | 채점 기준 | 배점 비율 |
|---|---|---|
| (1) | ㉮ 집합 $A$의 부분집합의 개수 구하기 | 30 % |
| (2) | ㉯ 3, 6, 9 중에서 어떤 것도 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수 구하기 | 30 % |
| (3) | ㉰ 3, 6, 9 중에서 적어도 하나를 원소로 갖는 부분집합의 개수 구하기 | 40 % |

## 1등급 실력 완성

● 71쪽~72쪽

**278** ④ **279** 27 **280** ② **281** 105 **282** 114
**283** ③ **284** 48 **285** ③

## 278

집합의 뜻과 표현

전략 4는 집합 $A$의 원소이므로 조건 ㈏를 만족시키도록 집합 $A$의 원소를 차례대로 구해 본다.

풀이 조건 ㈎에서 $4\in A$이므로 조건 ㈏에 의하여

$4+4\in A$ $\therefore 8\in A$

$8+4\in A$ $\therefore 12\in A$

$12+4\in A$ $\therefore 16\in A$

⋮

$44+4\in A$ $\therefore 48\in A$

즉, 집합 $A$는 50 이하의 4의 배수를 원소로 갖는다.

따라서 4의 배수를 모두 원소로 가지면서 원소의 개수가 가장 적은 집합 $A$는 50 이하의 4의 배수의 집합이므로

$A=\{4, 8, 12, 16, \cdots, 48\}$

## 279

집합의 뜻과 표현

전략 주어진 조건을 이용하여 집합 $A$의 홀수인 원소의 개수를 생각한다.

풀이 조건 ㈎에서 $3\notin X$, $5\notin X$이고 조건 ㈏에서 $S(X)$의 값이 홀수이므로 집합 $X$는 집합 $A$의 홀수인 원소 7, 9 중에서 하나만을 원소로 가져야 한다.

$S(X)$의 값이 최대가 되려면 집합 $X$는 집합 $A$의 원소 중 짝수인 4, 6, 8을 모두 원소로 갖고, 홀수인 9도 원소로 가져야 하므로

$X=\{4, 6, 8, 9\}$

따라서 $S(X)$의 최댓값은

$4+6+8+9=27$

## 280

부분집합

전략 집합 $B$가 6, 8을 원소로 갖고, 12를 원소로 갖지 않는 집합임을 이용하여 조건 ㈎를 만족시키는 경우의 수를 구한다.

풀이 $A=\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$

조건 ㈏에서 집합 $B$는 집합 $A$의 부분집합 중에서 6, 8을 원소로 갖고, 12를 원소로 갖지 않는 집합이다.

조건 ㈎에서 집합 $B$의 원소의 개수가 4이므로 집합 $B$의 나머지 원소는 1, 2, 3, 4, 24 중 2개이다.

따라서 집합 $B$는

$\{1, 2, 6, 8\}$, $\{1, 3, 6, 8\}$, $\{1, 4, 6, 8\}$, $\{1, 6, 8, 24\}$, $\{2, 3, 6, 8\}$, $\{2, 4, 6, 8\}$, $\{2, 6, 8, 24\}$, $\{3, 4, 6, 8\}$, $\{3, 6, 8, 24\}$, $\{4, 6, 8, 24\}$

의 10개이다.

## 281

부분집합

전략 집합 $A$의 부분집합 중에서 원소의 개수가 2이면서 1을 원소로 갖는 부분집합의 개수를 구해 본다.

풀이 집합 $A$의 부분집합 중에서 원소의 개수가 2이면서 1을 원소로 갖는 부분집합은

$\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{1, 5\}$, $\{1, 6\}$

의 5개이다.

즉, $P_1$, $P_2$, $P_3$, $\cdots$, $P_{15}$ 중에서 1을 원소로 갖는 집합은 5개이고, 마찬가지로 2, 3, 4, 5, 6을 원소로 갖는 집합도 각각 5개씩이다.

$$\therefore S_1+S_2+S_3+\cdots+S_{15}=5(1+2+3+4+5+6)$$
$$=5\times 21=105$$

## 282

부분집합

전략 가장 큰 원소에 따라 경우를 나누어 집합 $A_i$의 개수를 구한다.

풀이 (i) 가장 큰 원소가 2일 때,

$n(A_i)=2$인 경우의 수는 ${}_1\mathrm{C}_1=1$이므로 집합의 가장 큰 원소를 모두 더한 값은

$2\times 1=2$

(ii) 가장 큰 원소가 3일 때,

$n(A_i)=2$인 경우의 수는 ${}_2\mathrm{C}_1=2$,

$n(A_i)=3$인 경우의 수는 ${}_2\mathrm{C}_2=1$

이므로 집합의 가장 큰 원소를 모두 더한 값은

$3\times(2+1)=9$

(iii) 가장 큰 원소가 4일 때,

$n(A_i)=2$인 경우의 수는 ${}_3C_1=3$,

$n(A_i)=3$인 경우의 수는 ${}_3C_2=3$,

$n(A_i)=4$인 경우의 수는 ${}_3C_3=1$

이므로 집합의 가장 큰 원소를 모두 더한 값은

$4\times(3+3+1)=28$

(iv) 가장 큰 원소가 5일 때,

$n(A_i)=2$인 경우의 수는 ${}_4C_1=4$,

$n(A_i)=3$인 경우의 수는 ${}_4C_2=6$,

$n(A_i)=4$인 경우의 수는 ${}_4C_3=4$,

$n(A_i)=5$인 경우의 수는 ${}_4C_4=1$

이므로 집합의 가장 큰 원소를 모두 더한 값은

$5\times(4+6+4+1)=75$

(i)~(iv)에서 구하는 값은

$2+9+28+75=114$

다른 풀이 집합 $S$의 각 부분집합에서 가장 큰 원소의 합은

$5\times2^4+4\times2^3+3\times2^2+2\times2^1+1\times1=129$

원소의 개수가 1인 부분집합의 가장 큰 원소의 합은

$1+2+3+4+5=15$

따라서 구하는 값은 $129-15=114$

## 283

부분집합의 개수

전략 특정한 원소를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수를 이용하여 $f(n)$을 구한다.

풀이 $f(n)$은 $n$을 반드시 원소로 갖고 $n$보다 작은 자연수를 원소로 갖지 않는 집합 $X$의 부분집합의 개수이므로

$f(n)=2^{10-1-(n-1)}=2^{10-n}$ (단, $1\le n<10$)

ㄱ. $f(8)=2^{10-8}=2^2=4$ (참)

ㄴ. $a=7$, $b=8$일 때, $7\in X$, $8\in X$이고 $7<8$이지만

$f(7)=2^{10-7}=2^3=8$, $f(8)=2^{10-8}=2^2=4$

이므로 $f(7)>f(8)$ (거짓)

ㄷ. $f(1)+f(3)+f(5)+f(7)+f(9)$

$=2^{10-1}+2^{10-3}+2^{10-5}+2^{10-7}+2^{10-9}$

$=2^9+2^7+2^5+2^3+2=682$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

## 284

부분집합의 개수

전략 집합 $A$의 공집합이 아닌 부분집합 중 1, 2, 4, 8을 각각 원소로 갖는 부분집합의 개수를 구하여 $f(A_1)\times f(A_2)\times f(A_3)\times\cdots\times f(A_{15})$의 규칙성을 파악한다.

풀이 집합 $A=\{1, 2, 4, 8\}$의 공집합이 아닌 부분집합 중에서 1을 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수는

$2^{4-1}=2^3=8$

2를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수는

$2^{4-1}=2^3=8$

4를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수는

$2^{4-1}=2^3=8$

8을 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수는

$2^{4-1}=2^3=8$

따라서 $f(A_1)\times f(A_2)\times f(A_3)\times\cdots\times f(A_{15})$에는 1, 2, 4, 8이 각각 8번씩 곱해져 있으므로

$f(A_1)\times f(A_2)\times f(A_3)\times\cdots\times f(A_{15})$

$=1^8\times2^8\times4^8\times8^8$

$=2^8\times2^{16}\times2^{24}$

$=2^{48}$

즉, $2^{48}=2^k$이므로 $k=48$

> **개념 보충**
>
> $m$, $n$이 자연수일 때,
>
> ① $a^m\times a^n=a^{m+n}$ ② $(a^m)^n=a^{mn}$

## 285

여러 가지 부분집합의 개수

전략 구하는 집합의 원소가 될 수 있는 것과 될 수 없는 것을 나누어 생각해 본다.

풀이 집합 $A$의 부분집합 중에서 적어도 하나의 3의 배수를 원소로 갖고, 4의 배수는 원소로 갖지 않는 집합은 4, 8을 원소로 갖지 않고 3, 6, 9 중 적어도 하나를 원소로 갖는다.

따라서 구하는 집합의 개수는 집합 $\{2, 3, 5, 6, 7, 9\}$의 부분집합의 개수에서 3, 6, 9를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수를 뺀 것과 같으므로

$2^6-2^{6-3}=64-8=56$

# 도전 1등급 최고난도

73쪽

**286** 10 **287** ①

## 286

부분집합

(1단계) 집합 $A$에 반드시 속해야 하는 원소를 찾는다.

집합 $A$의 모든 원소의 합이 100이므로 집합 $A$에 25 이상인 원소가 적어도 2개 포함되어야 한다.

집합 $U$에서 25 이상인 원소는 25, 26, 28, 29이다.

(2단계) 집합 $A$에 25 이상인 원소가 3개 속하는 경우를 구한다.

(i) 집합 $A$에 25 이상인 원소가 3개 속할 때,

집합 $A$에 26, 28, 29가 속하면 $A=\{17, 26, 28, 29\}$

집합 $A$에 25, 26, 29가 속하면 $A=\{20, 25, 26, 29\}$

집합 $A$에 25, 28, 29 또는 25, 26, 28이 속하면 모든 원소의 합이 100이 되기 위해서는 나머지 한 원소가 3의 배수가 되어야 하므로 조건을 만족시키지 않는다.

(3단계) 집합 $A$에 25 이상인 원소가 2개 속하는 경우를 구한다.

(ii) 집합 $A$에 25 이상인 원소가 2개 속할 때,

집합 $U$의 25보다 작은 원소 중 가장 큰 두 원소의 합은

$22+23=45$

즉, 네 원소의 합이 100이 되기 위해서는 25 이상인 두 원소의 합이 55 이상이어야 한다.

집합 $A$에 28, 29가 속하면 $A=\{20, 23, 28, 29\}$

집합 $A$에 26, 29가 속하면 $A=\{22, 23, 26, 29\}$

(4단계) $x_4-x_3+x_2-x_1$의 최댓값을 구한다.

(i), (ii)에서

$A=\{17, 26, 28, 29\}$ 또는 $A=\{20, 25, 26, 29\}$

또는 $A=\{20, 23, 28, 29\}$ 또는 $A=\{22, 23, 26, 29\}$

따라서 위의 네 집합에 대하여 $x_4-x_3+x_2-x_1$의 값은 각각

10, 8, 4, 4

이고 구하는 최댓값은 10이다.

다른 풀이 $x_1+x_2+x_3+x_4=100$에서

$x_1+x_3=100-(x_2+x_4)$

$x_4-x_3+x_2-x_1=x_4+x_2-(x_3+x_1)$

$=x_4+x_2-\{100-(x_2+x_4)\}$

$=2(x_2+x_4)-100$

이 값이 최대가 되기 위해서는 $x_2+x_4$의 값이 최대가 되어야 하므로

$x_4=29$

그런데 $x_4>x_3>x_2$에서 $x_2$는 28이 될 수 없으므로

$x_3=28$, $x_2=26$

따라서 구하는 최댓값은

$2\times(29+26)-100=10$

## 287

**부분집합**

(1단계) $a\in A$이면 $10-a\in A$임을 이용하여 조건 (가)를 만족시키는 집합 $A$의 부분집합을 구한다.

조건 (가)에서 1과 9, 2와 8, 3과 7, 4와 6은 어느 하나가 집합 $A$의 원소이면 나머지 하나도 반드시 집합 $A$의 원소이다.

또, $A=\{5\}$이면 조건 (가)를 만족시킨다.

즉, 집합 $A$는 집합

$\{1, 9\}$, $\{2, 8\}$, $\{3, 7\}$, $\{4, 6\}$, $\{5\}$

중 일부 또는 전부를 부분집합으로 갖는 집합이다.

(2단계) 집합 $A$의 모든 원소의 합과 곱이 홀수임을 이용하여 집합 $A$를 구한다.

이때 조건 (나), (다)에서 집합 $A$의 모든 원소는 홀수이고, 원소의 개수도 홀수이어야 하므로

집합 $A$는 두 집합 $\{1, 9\}$, $\{3, 7\}$중 1개와 집합 $\{5\}$를 부분집합으로 갖는 집합이다.

조건 (나)에서 집합 $A$의 모든 원소의 곱이 100보다 작은 홀수이려면 $A=\{1, 5, 9\}$

따라서 집합 $A$의 모든 원소의 곱은

$1\times5\times9=45$

참고 조건에서 $n(A)\geq2$이므로 집합 $A$는 집합 $\{5\}$만을 부분집합으로 가질 수 없다.

# 06 집합의 연산

## 유형 분석 기출

75쪽~81쪽

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 288 ① | 289 4 | 290 15 | 291 $\{2, 5, 6, 7\}$ | |
| 292 ⑤ | 293 ③ | 294 $\{1, 2, 3, 5\}$ | | 295 3 |
| 296 ② | 297 ④ | 298 ② | 299 ⑤ | |
| 300 $-6\leq a\leq 6$ | | 301 ⑤ | 302 64 | 303 ② |
| 304 4 | 305 ③ | 306 ④ | 307 ⑤ | 308 ② |
| 309 6 | 310 32 | 311 ⑤ | 312 ③ | 313 ② |
| 314 ② | 315 4 | 316 15 | 317 $\{2, 3, 7, 8\}$ | |
| 318 ② | 319 ④ | 320 ④ | 321 20 | 322 93 |
| 323 ③ | 324 11 | 325 ④ | 326 90 | |

## 288

$A=\{5, 10, 15\}$, $B=\{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$, $C=\{4, 5, 6, 7\}$ 이므로

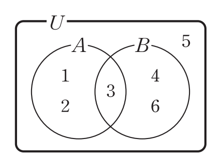
원소나열법으로 나타낸 후 연산한다.

$A\cup B=\{1, 2, 4, 5, 10, 15, 20\}$

따라서 $(A\cup B)\cap C=\{4, 5\}$이므로 집합 $(A\cup B)\cap C$의 모든 원소의 합은 $4+5=9$

## 289

$U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$이므로 주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



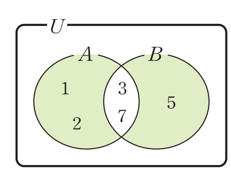

$\therefore B=\{3, 4, 6\}$

따라서 $B-A=\{4, 6\}$이므로 집합 $B-A$의 부분집합의 개수는

$2^2=4$

## 290

집합 $(A-B)\cup(B-A)$를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림의 색칠한 부분과 같고




$A=\{1, 2, 3, 7\}$이므로

$A-B=\{1, 2\}$, $B-A=\{5\}$

$\therefore B=\{3, 5, 7\}$

따라서 집합 $B$의 모든 원소의 합은

$3+5+7=15$

## 291

$U=\{1, 2, 3, \cdots, 9\}$, $A=\{1, 3, 9\}$, $B=\{4, 8\}$이므로

$A^C=\{2, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$\therefore A^C-B=\{2, 5, 6, 7\}$

## 292

$A=\{a, b, c, d\}$이므로 $B=\{a^2, b^2, c^2, d^2\}$

집합 $A\cap B$의 모든 원소의 합이 21이고
$21=1^2+2^2+4^2$
이므로 $A\cap B=\{1,\ 4,\ 16\}$ $\cdots\cdots$ ㉠
㉠에서 $4\in B$이므로 $2\in A$
㉠에서 $16\in A$이므로 $256\in B$
$\therefore\ A=\{1,\ 2,\ 4,\ 16\},\ B=\{1,\ 4,\ 16,\ 256\}$
따라서 집합 $B$의 원소 중 가장 큰 수와 가장 작은 수의 차는
$256-1=255$

## 293

$A-B=\{1,\ 4\}$이므로 $3,\ 5,\ 2a-b$는 집합 $B$의 원소이다.
$a+b=5,\ 2a-b=7$
두 식을 연립하여 풀면
$a=4,\ b=1$
$\therefore\ a-b=4-1=3$

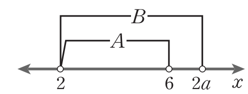
## 294

$A\cap B=\{3\}$이므로 $3\in A$
즉, $a^2-3a+5=3$이므로 $a^2-3a+2=0$
$(a-1)(a-2)=0$
$\therefore\ a=1$ 또는 $a=2$
(i) $a=1$일 때,
$A=\{1,\ 3\},\ B=\{0,\ 2,\ 4\}$
$\therefore\ A\cap B=\varnothing$
따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.
(ii) $a=2$일 때,
$A=\{1,\ 3\},\ B=\{2,\ 3,\ 5\}$
$\therefore\ A\cap B=\{3\}$
(i), (ii)에서 $A=\{1,\ 3\},\ B=\{2,\ 3,\ 5\}$
$\therefore\ A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 5\}$

다른 풀이 $A\cap B=\{3\}$이므로 $3\in B$
즉, $a^2-1=3$ 또는 $a+3=3$이므로
$a^2=4$ 또는 $a=0$
$\therefore\ a=-2$ 또는 $a=2$ 또는 $a=0$
(i) $a=-2$일 때,
$A=\{1,\ 15\},\ B=\{1,\ 2,\ 3\}$
$\therefore\ A\cap B=\{1\}$
따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.
(ii) $a=2$일 때,
$A=\{1,\ 3\},\ B=\{2,\ 3,\ 5\}$
$\therefore\ A\cap B=\{3\}$
(iii) $a=0$일 때,
$A=\{1,\ 5\},\ B=\{-1,\ 2,\ 3\}$
$\therefore\ A\cap B=\varnothing$
따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.
(i), (ii), (iii)에서 $A=\{1,\ 3\},\ B=\{2,\ 3,\ 5\}$
$\therefore\ A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 5\}$

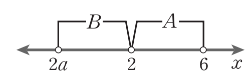
## 295

$x^2-8x+12<0$에서 $(x-2)(x-6)<0$
$\therefore\ 2<x<6$
$\therefore\ A=\{x\,|\,2<x<6\}$
$x^2-2(a+1)x+4a<0$에서 $(x-2)(x-2a)<0$
$\therefore\ B=\{x\,|\,(x-2)(x-2a)<0\}$
이때 $A\cap B=A$이므로 $A\subset B$
$A\subset B$가 성립하도록 두 집합 $A,\ B$를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로




$2a\geq 6\qquad \therefore\ a\geq 3$
따라서 실수 $a$의 최솟값은 3이다.

참고 $2a<2$인 경우는 오른쪽 그림과 같으므로 $A\subset B$일 수 없다.




## 296

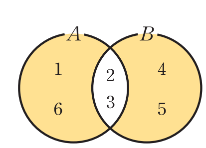
$A\cap B=\{2\}$이므로 $2\in B$
$x=2$를 $2x^2-6x+c=0$에 대입하면
$8-12+c=0\qquad \therefore\ c=4$
$2x^2-6x+4=0$에서 $x^2-3x+2=0$
$(x-1)(x-2)=0\qquad \therefore\ x=1$ 또는 $x=2$
$\therefore\ B=\{1,\ 2\}$
$A\cap B=\{2\},\ A\cup B=\{-3,\ 1,\ 2\},\ B=\{1,\ 2\}$이므로
$A=\{-3,\ 2\}$
두 수 $-3,\ 2$를 근으로 하고 $x^2$의 계수가 1인 이차방정식은
$(x+3)(x-2)=0$에서
$x^2+x-6=0\qquad \therefore\ a=1,\ b=-6$
$\therefore\ a+b+c=1+(-6)+4=-1$

개념 보충

**두 수를 근으로 하는 이차방정식**
두 수 $\alpha,\ \beta$를 근으로 하고 $x^2$의 계수가 1인 이차방정식은
$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$

## 297

$(A-B)\cup(B-A)$를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림의 색칠한 부분과 같고




$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$,
$(A-B)\cup(B-A)=\{1,\ 4,\ 5,\ 6\}$이므로
$B=\{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$
$a\in B$에서 $a$는 자연수이므로 $a<a^2+1$
(i) $b=2$일 때,
$b+1=3,\ a=4,\ a^2+1=17$이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.
(ii) $b=3$일 때,
$b+1=4,\ a=2,\ a^2+1=5$이므로 주어진 조건을 만족시킨다.

(iii) $b=4$일 때,

$b+1=5$, $a=2$, $a^2+1=5$이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 $a=2$, $b=3$이므로

$a+b=2+3=5$

## 298

두 집합 $A$, $B$가 서로소이므로

$A\cap B=\varnothing$

$\therefore A\cap(A-B)=A\cap A=A$

참고 $A\cap B=\varnothing$이면 $A-B=A$, $B-A=B$

## 299

$A$와 $B$가 서로소이므로 $A\cap B=\varnothing$

집합 $B$는 $p$의 약수의 집합이므로 $p$는 2, 3, 5를 약수로 갖지 않는 20 이하의 자연수이다.

즉, 가능한 $p$의 값은

1, 7, 11, 13, 17, 19

따라서 $p$의 최댓값은 19, 최솟값은 1이므로 구하는 합은

$19+1=20$

## 300

$A\cap B=\varnothing$이므로 집합 $A$는 집합 $B$의 원소를 원소로 갖지 않아야 한다.

즉, 모든 실수 $x$에 대하여 $x^2-ax+9\ge0$이 성립해야 한다.

이차방정식 $x^2-ax+9=0$의 판별식을 $D$라 하면

$D=(-a)^2-4\times1\times9\le0$

$a^2-36\le0$, $(a+6)(a-6)\le0$

$\therefore -6\le a\le6$

**개념 보충**

**이차부등식이 항상 성립할 조건**

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 $D$라 할 때, 모든 실수 $x$에 대하여

① 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$이 성립하려면
⇨ $a>0$, $D<0$

② 이차부등식 $ax^2+bx+c\ge0$이 성립하려면
⇨ $a>0$, $D\le0$

③ 이차부등식 $ax^2+bx+c<0$이 성립하려면
⇨ $a<0$, $D<0$

④ 이차부등식 $ax^2+bx+c\le0$이 성립하려면
⇨ $a<0$, $D\le0$

## 301

$\{b\}\cap X\ne\varnothing$이려면 $b\in X$이어야 한다.

따라서 집합 $X$는 집합 $A$의 부분집합 중 $b$를 원소로 갖는 집합이므로 집합 $X$의 개수는

$2^{5-1}=2^4=16$

## 302

$A=\{5, 7, 9, 11\}$일 때, $A\cap B=\varnothing$이려면

$5\notin B$, $7\notin B$, $9\notin B$, $11\notin B$이어야 한다.

따라서 집합 $B$는 전체집합 $U$의 부분집합 중 5, 7, 9, 11을 원소로 갖지 않는 집합이므로 집합 $B$의 개수는

$2^{10-4}=2^6=64$

## 303

$A\cup X=A$에서 $X\subset A$이고 $B\cap X=\varnothing$이므로 집합 $X$는 집합 $A-B$의 부분집합이다.

집합 $A-B$는 50 이하의 6의 배수 중 4의 배수가 아닌 수의 집합이므로

$A-B=\{6, 18, 30, 42\}$

따라서 집합 $X$의 개수는 집합 $A-B$의 부분집합의 개수인

$2^4=16$

## 304

$A\cap X=X$이므로 $X\subset A$ ...... ㉠

$(A-B)\cup X=X$이므로 $(A-B)\subset X$ ...... ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$(A-B)\subset X\subset A$

$A-B=\{-1, 0, 1\}$이므로

$\{-1, 0, 1\}\subset X\subset\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

즉, 집합 $X$는 집합 $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$의 부분집합 중 $-1$, 0, 1을 원소로 갖는 집합이다.

따라서 집합 $X$의 개수는

$2^{5-3}=2^2=4$

참고 $A\subset B$이면 $A\cup B=B$, $A\cap B=A$

## 305

$A\cap X=X$이므로 $X\subset A$ ...... ㉠

$|x-1|<8$에서 $-8<x-1<8$

$\therefore -7<x<9$

집합 $A$는 자연수 전체의 집합의 부분집합이므로

$A=\{1, 2, 3, \cdots, 8\}$

$f(x)=x^2-10x+a$라 하면 $f(x)=(x-5)^2+a-25$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=5$에 대하여 대칭이다.

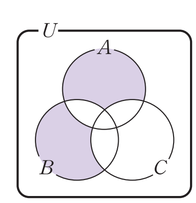
따라서 ㉠을 만족시키는 집합 $X$는

$\varnothing$, $\{5\}$, $\{4, 5, 6\}$, $\{3, 4, 5, 6, 7\}$, $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

의 5개이다.

## 306

$A\cup C=B\cup C$이려면 오른쪽 벤 다이어그램에서 색칠한 부분에 속하는 원소가 없어야 한다.




$\therefore (A-B)\subset C$, $(B-A)\subset C$

집합 $C$는 전체집합 $U$의 부분집합이므로

$\{(A-B)\cup(B-A)\}\subset C\subset U$
이때 $A-B=\{2, 4, 8\}$, $B-A=\{3, 9\}$이므로
$\{2, 3, 4, 8, 9\}\subset C\subset\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$
따라서 집합 $C$는 집합 $\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$의 부분집합 중 2, 3, 4, 8, 9를 원소로 갖는 집합이므로 집합 $C$의 개수는
$2^{10-5}=2^5=32$

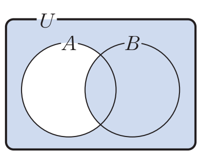
**다른 풀이** $A\cup C=B\cup C$에서
$\{2, 4, 6, 8\}\cup C=\{3, 6, 9\}\cup C$
이를 만족시키려면 $2\in C$, $3\in C$, $4\in C$, $8\in C$, $9\in C$이어야 한다.
따라서 집합 $C$는 전체집합 $U$의 부분집합 중 2, 3, 4, 8, 9를 원소로 갖는 집합이므로 집합 $C$의 개수는
$2^{10-5}=2^5=32$

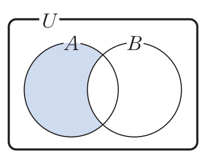
## 307

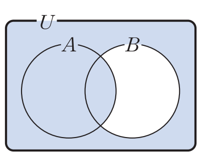
$$\begin{aligned} A-(B-C)&=A\cap(B\cap C^C)^C \\ &=A\cap(B^C\cup C) \\ &=(A\cap B^C)\cup(A\cap C) \\ &=(A-B)\cup(A\cap C) \end{aligned}$$

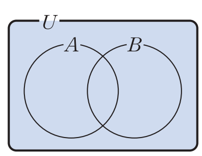
## 308

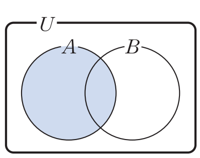
각 집합을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같다.

①



②



③



④



⑤



따라서 주어진 벤 다이어그램의 색칠한 부분을 나타내는 것은 ②이다.

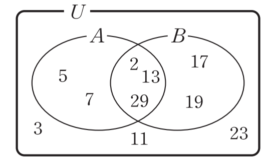
## 309

$$\begin{aligned} A-(B\cup C)^C&=A\cap(B\cup C) \\ &=(A\cap B)\cup(A\cap C) \end{aligned}$$

이때 $A\cap B=\{2, 3\}$, $A\cap C=\{1, 3\}$이므로
$(A\cap B)\cup(A\cap C)=\{1, 2, 3\}$
따라서 집합 $A-(B\cup C)^C$의 모든 원소의 합은
$1+2+3=6$

## 310

$U=\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$,
$A^C\cap B^C=(A\cup B)^C=\{3, 11, 23\}$
이므로 주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.




$\therefore A=\{2, 5, 7, 13, 29\}$
따라서 집합 $A$의 모든 부분집합의 개수는 $2^5=32$

## 311

조건 (나)에서 $A^C\cup B=\{1, 2, 8, 16\}$이고 드모르간의 법칙에 의하여 $(A^C\cup B)^C=A\cap B^C$이므로
$A\cap B^C=(A^C\cup B)^C=\{4, 32\}$

$$\begin{aligned} A&=(A\cap B)\cup(A\cap B^C)=\{2, 8\}\cup\{4, 32\} \\ &=\{2, 4, 8, 32\} \end{aligned}$$

따라서 집합 $A$의 모든 원소의 합은
$2+4+8+32=46$

## 312

$$\begin{aligned} (A^C\cup B^C)\cap(B-A)^C&=(A^C\cup B^C)\cap(B\cap A^C)^C \\ &=(A^C\cup B^C)\cap(B^C\cup A) \\ &=B^C\cup(A^C\cap A) \\ &=B^C\cup\varnothing=B^C \end{aligned}$$

이때 $B=\{3, 5, 7\}$이므로
$B^C=\{1, 2, 4, 6, 8\}$
따라서 집합 $(A^C\cup B^C)\cap(B-A)^C$의 원소가 아닌 것은 ③이다.

## 313

$A_5=\{1, 5\}$, $A_6=\{1, 2, 3, 6\}$이므로
$A_5\cup A_6=\{1, 2, 3, 5, 6\}$
$(A_5\cup A_6)\subset A_k$에서
$\{1, 2, 3, 5, 6\}\subset A_k$
이를 만족시키는 $k$는 30의 배수이므로 자연수 $k$의 최솟값은 30이다.

## 314

$A_2=\{x\,|\,x$는 2의 배수$\}=\{2, 4, 6, 8, \cdots, 20\}$
$A_3=\{x\,|\,x$는 3의 배수$\}=\{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$
$A_4=\{x\,|\,x$는 4의 배수$\}=\{4, 8, 12, 16, 20\}$
$A_4\subset A_2$이므로 $A_2\cup A_4=A_2$

$$\begin{aligned} \therefore A_3\cap(A_2\cup A_4)&=A_3\cap A_2 \\ &=A_6 \rightarrow \text{3과 2의 최소공배수} \\ &=\{6, 12, 18\} \end{aligned}$$

따라서 집합 $A_3\cap(A_2\cup A_4)$의 모든 원소의 합은
$6+12+18=36$

**1등급 비법**

자연수 $k$의 배수의 집합을 $A_k$라 할 때, 자연수 $m$, $n$에 대하여
① $m$과 $n$의 최소공배수가 $l$이면 $A_m\cap A_n=A_l$
② $m$이 $n$의 배수이면 $A_m\subset A_n$이므로 $A_m\cap A_n=A_m$, $A_m\cup A_n=A_n$

## 315
집합 $P_{72}\cap P_{60}$은 72와 60의 공약수의 집합이므로

$P_{72}\cap P_{60}=P_{12}$

$\therefore (P_{72}\cap P_{60})\cap P_{63}=P_{12}\cap P_{63}$

$=P_3$

$=\{1, 3\}$

따라서 구하는 모든 원소의 합은

$1+3=4$

## 316
집합 $A_6\cap A_9$는 6과 9의 공배수의 집합, 즉 18의 배수의 집합이므로

$A_6\cap A_9=A_{18}$

따라서 $A_m\subset A_{18}$을 만족시키는 $m$은 18의 배수이므로 자연수 $m$의 최솟값은 18이다.

$\therefore \alpha=18$

또, $(A_6\cup A_9)\subset A_n$에서 $A_6\subset A_n$, $A_9\subset A_n$이므로 $n$은 6과 9의 공약수이다. 즉, 자연수 $n$의 최댓값은 6과 9의 최대공약수인 3이다.

$\therefore \beta=3$

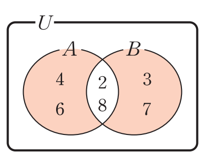
$\therefore \alpha-\beta=18-3=15$

## 317
$A*B=(A\cup B)\cap(A^C\cup B^C)$

$=(A\cup B)\cap(A\cap B)^C$

$=(A\cup B)-(A\cap B)$

이때 $(A\cup B)-(A\cap B)=\{3, 4, 6, 7\}$이고 $4\in A$, $6\in A$이므로 집합 $(A\cup B)-(A\cap B)$를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.




$3\in B$, $7\in B$, $2\in(A\cap B)$, $8\in(A\cap B)$

$\therefore B=\{2, 3, 7, 8\}$

## 318
ㄱ. $A\triangle B=(A\cup B)^C$

$A^C\triangle B^C=(A^C\cup B^C)^C=A\cap B$

$\therefore A\triangle B\neq A^C\triangle B^C$ (거짓)

ㄴ. $A\triangle U=(A\cup U)^C=U^C=\varnothing$

$A\triangle A^C=(A\cup A^C)^C=U^C=\varnothing$

$\therefore A\triangle U=A\triangle A^C$ (참)

ㄷ. $A\triangle(A\triangle B)=A\triangle(A\cup B)^C$

$=\{A\cup(A\cup B)^C\}^C$

$=A^C\cap(A\cup B)$

$=(A^C\cap A)\cup(A^C\cap B)$

$=\varnothing\cup(A^C\cap B)$

$=A^C\cap B$

$\therefore A\triangle(A\triangle B)\neq B$ (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

## 319
$n(A)=n(U)-n(A^C)=45-25=20$

$n(A\cap B)=n(A)-n(A-B)=20-15=5$

$\therefore n(A^C\cup B^C)=n((A\cap B)^C)$

$=n(U)-n(A\cap B)$

$=45-5=40$

## 320
드모르간의 법칙에 의하여

$A^C\cup B=(A\cap B^C)^C=(A-B)^C$

이때 $A=\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$이고 집합 $A\cap B$는 30의 약수 중 3의 배수를 원소로 갖는 집합이므로

$A\cap B=\{3, 6, 15, 30\}$

$\therefore n(A^C\cup B)=n\{(A-B)^C\}$

$=n(U)-n(A-B)$

$=n(U)-\{n(A)-n(A\cap B)\}$

$=50-(8-4)=46$

## 321
$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$

$=25+15-n(A\cup B)$

$=40-n(A\cup B)$

$A\subset(A\cup B)$이므로 $n(A)\le n(A\cup B)$ …… ㉠

$(A\cup B)\subset U$이므로 $n(A\cup B)\le n(U)$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $n(A)\le n(A\cup B)\le n(U)$이므로

$25\le n(A\cup B)\le 35$

$-35\le -n(A\cup B)\le -25$

$40-35\le 40-n(A\cup B)\le 40-25$

$\therefore 5\le n(A\cap B)\le 15$

따라서 $n(A\cap B)$의 최댓값은 15, 최솟값은 5이므로 그 합은

$15+5=20$

참고 $X\subset Y$, 즉 집합 $X$가 집합 $Y$의 부분집합이면 그 원소의 개수는 $n(X)\le n(Y)$

**1등급 비법**

전체집합 $U$의 두 부분집합 $A$, $B$에 대하여 $n(A)$, $n(B)$가 주어졌을 때,
$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$이므로

① $n(A\cap B)$가 최대인 경우 ⇨ $n(A\cup B)$가 최소일 때
⇨ $B\subset A$일 때 (단, $n(B)<n(A)$)

② $n(A\cap B)$가 최소인 경우 ⇨ $n(A\cup B)$가 최대일 때
⇨ $A\cup B=U$일 때

## 322
학생 전체의 집합을 $U$, 태블릿을 갖고 있는 학생의 집합을 $A$, 노트북을 갖고 있는 학생의 집합을 $B$라 하면

$n(U)=300$, $n(A)=222$, $n(B)=156$, $n((A\cup B)^C)=15$

$n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)$이므로

$15=300-n(A\cup B)$

$\therefore n(A\cup B)=285$

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$이므로

$285=222+156-n(A\cap B)$

$\therefore n(A\cap B)=93$

따라서 태블릿과 노트북을 모두 갖고 있는 학생은 93명이다.

## 323

관광지 A를 방문한 주민의 집합을 $A$, 관광지 B를 방문한 주민의 집합을 $B$, 관광지 C를 방문한 주민의 집합을 $C$라 하면

$n(A)=700$, $n(B)=600$, $n(A\cap B)=250$이므로

$n(A\cup B\cup C)=1650$

$\therefore n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
$=700+600-250=1050$

따라서 관광지 C만 방문한 주민 수는

$n(A\cup B\cup C)-n(A\cup B)=1650-1050=600$

## 324

조사한 학생 전체의 집합을 $U$, A 소설을 읽은 학생의 집합을 $A$, B 소설을 읽은 학생의 집합을 $B$라 하면

$n(U)=32$, $n(A)=16$, $n(B)=21$

B 소설만 읽은 학생의 집합은 $B-A$이므로

$n(B-A)=n(A\cup B)-n(A)$
$=n(A\cup B)-16$ ······ ㉠

이때 $n(A\cup B)$는 $A\subset B$일 때 최소, $U=A\cup B$일 때 최대이므로

$n(B)\le n(A\cup B)\le n(U)$

$\therefore 21\le n(A\cup B)\le 32$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $n(B-A)$의 범위는

$21-16\le n(B-A)\le 32-16$

$\therefore 5\le n(B-A)\le 16$

따라서 $M=16$, $m=5$이므로

$M-m=16-5=11$

## 325

조사한 학생 전체의 집합을 $U$, 책 A를 읽은 학생의 집합을 $A$, 책 B를 읽은 학생의 집합을 $B$, 책 C를 읽은 학생의 집합을 $C$라 하면

$n(U)=35$, $n(A)=14$, $n(B)=16$, $n(C)=15$,

$n(A\cap B\cap C)=0$, $n((A\cup B\cup C)^C)=3$

$\therefore n(A\cup B\cup C)=n(U)-n((A\cup B\cup C)^C)$
$=35-3=32$

A, B, C 중 두 종류의 책만 읽은 학생 수를 각각 $a$, $b$, $c$라 하면

$n(A\cup B\cup C)$
$=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)$
$-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$

에서 $32=14+16+15-a-b-c+0$

$32=45-(a+b+c)$

$\therefore a+b+c=13$

따라서 A, B, C 중 두 종류의 책만 읽은 학생은 13명이다.

## 326

학생 전체의 집합을 $U$, 방과 후 수업으로 수학을 신청한 학생의 집합을 $A$, 영어를 신청한 학생의 집합을 $B$라 하면

$n(U)=220$ ······ ㉠

$n(A)=n(B)+30$ ······ ㉡

$n((A\cup B)^C)=n(A\cup B)-80$ ······ ㉢

$n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)$이므로 ㉢에서

$n(U)-n(A\cup B)=n(A\cup B)-80$

$2\times n(A\cup B)=n(U)+80=300$ ($\because$ ㉠)

$\therefore n(A\cup B)=150$

이때 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$에서

$150=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$, 즉

$n(B)=150+n(A\cap B)-n(A)$이므로 ㉡에 대입하면

$n(A)=150+n(A\cap B)-n(A)+30$

$2\times n(A)=180+n(A\cap B)$

$\therefore n(A)=\frac{1}{2}\{180+n(A\cap B)\}$ ······ ㉣

방과 후 수업 중 수학만 신청한 학생의 집합은 $A-B$이고

$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$이므로

$n(A\cap B)=0$일 때 $n(A-B)$가 최대가 된다.

즉, $n(A-B)$의 최댓값은 $n(A)$이므로 ㉣에서

$\frac{1}{2}\times 180=90$

따라서 방과 후 수업으로 수학만 신청한 학생 수의 최댓값은 90이다.

## 내신 적중 서술형

● 82쪽

**327** $-3$ **328** (1) 3 (2) 9 **329** 4
**330** 최댓값: 24, 최솟값: 15

## 327

$A\cup B=B$이므로 $A\subset B$

$(1, 2)\in B$이므로

$1^2+2^2-2\times1+b=0$ $\therefore b=-3$ ······ ㉮

$(3, a)\in B$이므로

$3^2+a^2-2\times3-3=0$, $a^2=0$ $\therefore a=0$ ······ ㉯

$\therefore a+b=0+(-3)=-3$ ······ ㉰

| 채점 기준 | 배점 비율 |
|---|---|
| ㉮ 상수 $b$의 값 구하기 | 40 % |
| ㉯ 상수 $a$의 값 구하기 | 40 % |
| ㉰ $a+b$의 값 구하기 | 20 % |

## 328

(1) $A\cap B=\{3\}$이므로 $3\in B$

즉, $a^2-2a=3$이므로 $a^2-2a-3=0$

$(a+1)(a-3)=0 \qquad \therefore a=-1$ 또는 $a=3$ …… ㉮

(i) $a=-1$일 때,

$A=\{-3, 3, 5\}$, $B=\{2, 3\} \qquad \therefore A\cap B=\{3\}$

(ii) $a=3$일 때,

$A=\{1, 3, 5\}$, $B=\{2, 3\} \qquad \therefore A\cap B=\{3\}$

그런데 두 집합 $A$, $B$는 자연수 전체의 집합의 부분집합이므로

(i), (ii)에서 $a=3$ …… ㉯

(2) $(A\cap B^C)\cup(A^C\cup B^C)^C=(A\cap B^C)\cup(A\cap B)$

$=A\cap(B^C\cup B)=A\cap U$

$=A$ …… ㉰

(1)에서 $A=\{1, 3, 5\}$, $B=\{2, 3\}$이므로

집합 $(A\cap B^C)\cup(A^C\cup B^C)^C$의 모든 원소의 합은

$1+3+5=9$ …… ㉱

| 채점 기준 | | 배점 비율 |
|---|---|---|
| (1) | ㉮ $3\in B$를 만족시키는 $a$의 값 구하기 | 20 % |
| | ㉯ 조건을 만족시키는 $a$의 값 구하기 | 30 % |
| (2) | ㉰ 집합 $(A\cap B^C)\cup(A^C\cap B^C)^C$ 구하기 | 30 % |
| | ㉱ 집합 $(A\cap B^C)\cup(A^C\cup B^C)^C$의 모든 원소의 합 구하기 | 20 % |

## 329

$A=\{-3, -1, 1\}$, $B=\{1, 2, 4\}$이므로

$A\oplus B=\{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 5\}$ …… ㉮

또, $C=\{0, 1\}$이므로

$(A\oplus B)\oplus C=\{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ …… ㉯

따라서 $(A\oplus B)\oplus C$의 원소의 최댓값은 6, 최솟값은 $-2$이므로 그 합은

$6+(-2)=4$ …… ㉰

| 채점 기준 | 배점 비율 |
|---|---|
| ㉮ 집합 $A\oplus B$ 구하기 | 40 % |
| ㉯ 집합 $(A\oplus B)\oplus C$ 구하기 | 40 % |
| ㉰ 집합 $(A\oplus B)\oplus C$의 원소의 최댓값과 최솟값의 합 구하기 | 20 % |

## 330

영화 A를 관람한 학생의 집합을 $A$, 영화 B를 관람한 학생의 집합을 $B$라 하면

$n(A)=12$, $n(B)=15$, $n(A\cap B)\geq 3$

$(A\cap B)\subset A$, $(A\cap B)\subset B$이므로

$3\leq n(A\cap B)\leq 12$ …… ㉠ …… ㉮

두 영화 A, B 중 적어도 하나를 관람한 학생의 집합은 $A\cup B$이므로 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$에서

$n(A\cup B)=12+15-n(A\cap B)$

$\therefore n(A\cup B)=27-n(A\cap B)$

㉠에서 $-12\leq -n(A\cap B)\leq -3$이므로

$15\leq 27-n(A\cap B)\leq 24$

$\therefore 15\leq n(A\cup B)\leq 24$

따라서 $n(A\cup B)$의 최댓값은 24, $n(A\cup B)$의 최솟값은 15이다. …… ㉯

| 채점 기준 | 배점 비율 |
|---|---|
| ㉮ $n(A\cap B)$의 값의 범위 구하기 | 60 % |
| ㉯ $n(A\cup B)$의 최댓값과 최솟값 구하기 | 40 % |

## 1등급 실력 완성

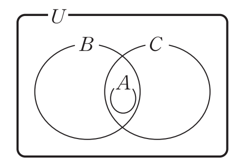
83쪽 ~ 84쪽

**331** ⑤ **332** 3 **333** ④ **334** ② **335** 22
**336** ② **337** ⑤ **338** 8

## 331

집합의 연산

전략 주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내고 세 집합 $A$, $B$, $C$ 사이의 포함 관계를 파악한다.




풀이 ㄱ. $A\subset B$, $A\subset C$이므로

$A\subset(B\cap C)$ (참)

ㄴ. $A\subset B$, $A\subset C$에서

$B^C\subset A^C$, $C^C\subset A^C$이므로

$(B^C\cap C^C)\subset A^C$ (참)

ㄷ. $X-B=X\cap B^C$이고 $(X\cap B^C)\subset B^C$

이때 $B^C\subset A^C$이므로

$(X\cap B^C)\subset B^C\subset A^C \qquad \therefore (X-B)\subset A^C$ (참)

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

## 332

집합의 연산을 이용하여 미지수 구하기

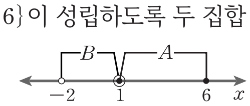
전략 집합 $A$의 조건인 이차부등식을 풀고 주어진 조건이 성립하도록 두 집합 $A$, $B$를 수직선 위에 나타낸다.

풀이 $x^2-7x+6\leq 0$에서 $(x-1)(x-6)\leq 0$

$\therefore 1\leq x\leq 6$

$\therefore A=\{x\,|\,1\leq x\leq 6\}$

이때 $A\cap B=\varnothing$, $A\cup B=\{x\,|\,-2<x\leq 6\}$이 성립하도록 두 집합 $A$, $B$를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로




$B=\{x\,|\,-2<x<1\}$

해가 $-2<x<1$이고 $x^2$의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+2)(x-1)<0$에서 $x^2+x-2<0$

$\therefore a=1$, $b=-2$

$\therefore a-b=1-(-2)=3$

## 333

집합의 연산과 부분집합의 개수

전략 $A\cap B=A$이면 $A\subset B$, $A\cup B=A$이면 $B\subset A$임을 이용한다.

풀이 $(A\cup B)\cap X=X$, $(A-B)\cup X=X$에서

$X\subset(A\cup B)$, $(A-B)\subset X$

$\therefore (A-B)\subset X\subset(A\cup B)$

이때 $A=\{1, 3, 5, 7\}$, $B=\{1, 2, 3, 6\}$이므로

$A-B=\{5, 7\}$

$A\cup B=\{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$

$\therefore \{5, 7\}\subset X\subset\{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$

즉, 집합 $X$는 집합 $\{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$의 부분집합 중 5, 7을 원소로 갖는 집합이므로 모든 원소의 합이 짝수인 집합 $X$는

$\{5, 7\}$, $\{2, 5, 7\}$, $\{5, 6, 7\}$, $\{1, 3, 5, 7\}$, $\{2, 5, 6, 7\}$,

$\{1, 2, 3, 5, 7\}$, $\{1, 3, 5, 6, 7\}$, $\{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$

의 8개이다.

**1등급 비법**

원소의 합이 짝수인 경우의 집합의 개수를 셀 때는 원소의 개수가 2, 3, 4, ⋯ 일 때와 같이 구분하여 세면 편리하다.

참고 홀수 2개를 포함한 수의 합이 짝수가 되는 경우는 수의 개수에 따라 다음과 같다.

(i) (홀수)+(홀수)=(짝수)

(ii) (홀수)+(홀수)+(짝수)=(짝수)

(iii) (홀수)+(홀수)+(홀수)+(홀수)=(짝수)

(홀수)+(홀수)+(짝수)+(짝수)=(짝수)

(iv) (홀수)+(홀수)+(홀수)+(홀수)+(짝수)=(짝수)

(홀수)+(홀수)+(짝수)+(짝수)+(짝수)=(짝수)

(v) (홀수)+(홀수)+(홀수)+(홀수)+(홀수)+(홀수)=(짝수)

(홀수)+(홀수)+(홀수)+(홀수)+(짝수)+(짝수)=(짝수)

(홀수)+(홀수)+(짝수)+(짝수)+(짝수)+(짝수)=(짝수)

## 334

**집합의 연산 법칙**

전략 분배법칙을 이용하여 주어진 조건을 간단히 한다.

풀이 $(A\cup C)\cap(B\cup C)=(C\cap A)\cup(C\cap A^C)$에서 분배법칙을 이용하면

$(A\cap B)\cup C=C\cap(A\cup A^C)=C\cap U=C$

$\therefore (A\cap B)\subset C$ ⋯⋯ ㉠

집합 $A\cap B$의 원소는 두 원 $x^2+y^2=4$, $(x-1)^2+(y-2)^2=6$의 교점의 좌표이다.

㉠에서 직선 $ax+by-3=0$은 두 원 $x^2+y^2=4$, $(x-1)^2+(y-2)^2=6$의 교점을 지나므로 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$(x^2+y^2-4)-\{(x-1)^2+(y-2)^2-6\}=0$

$\therefore 2x+4y-3=0$

따라서 직선 $2x+4y-3=0$이 점 $(2, k)$를 지나므로

$2\times2+4k-3=0$

$\therefore k=-\frac{1}{4}$

**개념 보충**

**두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식**

두 점에서 만나는 두 원 $x^2+y^2+ax+by+c=0$, $x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2+y^2+ax+by+c-(x^2+y^2+a'x+b'y+c')=0$$

## 335

**집합의 연산 법칙**

전략 드모르간의 법칙을 이용하여 주어진 집합 사이의 관계를 추론한다.

풀이 집합 $B-A$의 모든 원소의 합을 $k$라 하자.

$A\cup B^C=(A^C\cap B)^C=(B-A)^C$이고

조건 (가)에서 집합 $A\cup B^C$의 모든 원소의 합은 $6k$이므로 전체집합 $U$의 모든 원소의 합은

$6k+k=7k$

$U=\{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$이므로

$7k=1+2+4+8+16+32$

$7k=63$

$\therefore k=9$

집합 $B-A$의 모든 원소의 합이 9이므로

$B-A=\{1, 8\}$

즉, $n(B-A)=2$이고 $(B-A)^C=\{2, 4, 16, 32\}$

조건 (나)에서 $n(A\cup B)=5$이므로

$5=n(A)+2$

$\therefore n(A)=3$

따라서 집합 $A$의 모든 원소의 합이 최소가 되는 경우는 $A=\{2, 4, 16\}$일 때이고, 구하는 최솟값은

$2+4+16=22$

## 336

**여러 가지 집합의 연산**

전략 집합 $A_1$, $A_2$, $A_3$, ⋯을 차례로 구한 후, 교집합을 구한다.

풀이 $A_1=\{x\mid 2\le x\le14\}$

$A_2=\{x\mid 5\le x\le25\}$

$A_3=\{x\mid 8\le x\le36\}$

$A_4=\{x\mid 11\le x\le47\}$

$A_5=\{x\mid 14\le x\le58\}$

$A_6=\{x\mid 17\le x\le69\}$

⋮

이므로

$A_1\cap A_2=\{x\mid 5\le x\le14\}$

$A_1\cap A_2\cap A_3=\{x\mid 8\le x\le14\}$

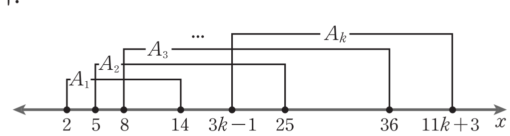
$A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4=\{x\mid 11\le x\le14\}$

$A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4\cap A_5=\{14\}$

$A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4\cap A_5\cap A_6=\varnothing$

따라서 $k$의 최댓값은 5이다.

참고 집합 $A_k$ ($k$는 자연수)를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.




이때 집합 $A_k$의 원소의 최솟값 $3k-1$이 14보다 크면

$A_1\cap A_2\cap A_3\cap\ \cdots\ \cap A_k=\varnothing$

## 337

여러 가지 집합의 연산

전략 연산 ◇의 정의에 따라 나타낸 후, 집합의 연산 법칙을 이용한다.

풀이 ㄱ. $A\diamond B=(A\cap B)\cup(A\cup B)^C$

$=(B\cap A)\cup(B\cup A)^C$ 교환법칙

$=B\diamond A$ (참)

ㄴ. $A\diamond\varnothing=(A\cap\varnothing)\cup(A\cup\varnothing)^C$

$=\varnothing\cup A^C=A^C$ (참)

ㄷ. $A^C\diamond B^C=(A^C\cap B^C)\cup(A^C\cup B^C)^C$

$=(A\cup B)^C\cup(A\cap B)$

$=(A\cap B)\cup(A\cup B)^C$ 교환법칙

$=A\diamond B$ (참)

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

## 338

집합의 연산 ⊕ 여러 가지 집합의 연산

전략 $n(B_k)$가 4의 약수임을 이용하여 $n(B_k)$의 값에 따라 경우를 나누어 생각한다.

풀이 (i) $n(B_k)=1$인 경우

$k=1$이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $n(B_k)=2$인 경우

$k$는 소수이므로 $n(C_k)=1$이고

$n(B_k)\times n(A_k\cap C_k)\neq 4$이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $n(B_k)=4$인 경우

$k$의 약수의 개수가 4이므로

$k=pq$ 또는 $k=p^3$ (단, $p$, $q$는 소수)

$k=pq$이면 $n(B_k)\times n(A_k\cap C_k)=4\times 2=8$이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

$k=p^3$이면 $n(B_k)\times n(A_k\cap C_k)=4\times 1=4$이므로 주어진 조건을 만족시킨다.

(i), (ii), (iii)에서 $k$의 최솟값은 $2^3=8$

## 도전 1등급 최고난도

85쪽

339 ①　　340 ③

## 339

집합의 연산을 이용하여 미지수 구하기

(1단계) 조건 (가), (나)를 이용하여 집합 $A$에 반드시 속하는 원소를 찾는다.

조건 (가)에서 $0\in A$이므로 조건 (나)에 의하여

$0^2-2=-2\in A$

$-2\in A$이므로 $(-2)^2-2=4-2=2\in A$

$2\in A$이므로 $2^2-2=2\in A$　　$\therefore \{-2, 0, 2\}\subset A$

(2단계) 조건 (나), (다)를 이용하여 집합 $A$의 네 번째 원소를 찾는다.

조건 (다)에서 $n(A)=4$이므로 실수 $k$에 대하여

$A=\{-2, 0, 2, k\}$ $(k\neq-2, k\neq0, k\neq2)$라 하자.

$k\in A$이면 $k^2-2\in A$이므로 $k^2-2$의 값은 $-2, 0, 2, k$ 중 하나이다.

(i) $k^2-2=-2$일 때,

$k^2=0$에서 $k=0$이 되어 $k\neq0$에 모순이다.

(ii) $k^2-2=0$일 때,

$k^2=2$　　$\therefore k=-\sqrt{2}$ 또는 $k=\sqrt{2}$

(iii) $k^2-2=2$일 때,

$k^2=4$에서 $k=-2$ 또는 $k=2$가 되어 $k\neq-2$, $k\neq2$에 모순이다.

(iv) $k^2-2=k$일 때,

$k^2-k-2=0$, $(k+1)(k-2)=0$

이때 $k\neq2$이므로 $k=-1$

(i), (ii), (iii)에서

$k=-\sqrt{2}$ 또는 $k=\sqrt{2}$ 또는 $k=-1$

(3단계) 조건을 만족시키는 집합 $A$의 개수를 구한다.

따라서 집합 $A$가 될 수 있는 것은

$\{-2, 0, 2, -\sqrt{2}\}$, $\{-2, 0, 2, \sqrt{2}\}$, $\{-2, 0, 2, -1\}$

의 3개이다.

## 340

집합의 연산 법칙

(1단계) 조건 (가)에서 두 집합 $A$, $B$ 사이의 포함 관계를 파악한다.

조건 (가)에서 $A-B=A$이므로 $A\cap B=\varnothing$　　…… ㉠

(2단계) 조건 (나)에서 집합 $A\cup B$를 구한다.

조건 (나)에서

$(A-B)^C-B=A^C-B$ ($\because$ 조건 (가))

$=A^C\cap B^C=(A\cup B)^C=\{1, 3\}$

$U=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, $(A\cup B)^C=\{1, 3\}$이므로

$A\cup B=U-(A\cup B)^C=\{2, 4, 6, 12\}$　　…… ㉡

(3단계) 조건 (가), (나)를 만족시키는 순서쌍 $(A, B)$의 개수를 구한다.

㉠, ㉡에서 순서쌍 $(A, B)$는

(i) $n(A)=0$, $n(B)=4$인 경우

$(\varnothing, \{2, 4, 6, 12\})$의 1개

(ii) $n(A)=1$, $n(B)=3$인 경우

$(\{2\}, \{4, 6, 12\})$, $(\{4\}, \{2, 6, 12\})$,

$(\{6\}, \{2, 4, 12\})$, $(\{12\}, \{2, 4, 6\})$의 4개

(iii) $n(A)=2$, $n(B)=2$인 경우

$(\{2, 4\}, \{6, 12\})$, $(\{2, 6\}, \{4, 12\})$,

$(\{2, 12\}, \{4, 6\})$, $(\{4, 6\}, \{2, 12\})$,

$(\{4, 12\}, \{2, 6\})$, $(\{6, 12\}, \{2, 4\})$의 6개

(iv) $n(A)=3$, $n(B)=1$인 경우

$(\{4, 6, 12\}, \{2\})$, $(\{2, 6, 12\}, \{4\})$,

$(\{2, 4, 12\}, \{6\})$, $(\{2, 4, 6\}, \{12\})$의 4개

(v) $n(A)=4$, $n(B)=0$인 경우

$(\{2, 4, 6, 12\}, \varnothing)$의 1개

(i)~(v)에서 순서쌍 $(A, B)$의 개수는

$1+4+6+4+1=16$

# 07 명제

## 유형 분석 기출

● 88쪽 ~ 94쪽

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **341** ㄱ, ㄷ, ㅁ | | **342** ⑤ | **343** ③ | **344** ⑤ |
| **345** ㄴ, ㄷ | **346** ③ | **347** ④ | **348** ② | **349** 5 |
| **350** ④ | **351** ④ | **352** 9 | **353** ① | **354** ⑤ |
| **355** ③ | **356** ② | **357** ② | **358** ④ | **359** ④ |
| **360** ③ | **361** $1\le a\le 3$ | | **362** ② | **363** 12 |
| **364** ⑤ | **365** ② | **366** ③ | **367** ② | **368** ③ |
| **369** $-1$ | **370** ③ | **371** ② | **372** ⑤ | **373** ④ |
| **374** ⑤ | **375** ② | **376** ⑤ | **377** 5 | **378** 4 |
| **379** ① | | | | |

### 341

ㄱ. $x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$

이므로 모든 실수 $x$에 대하여 $x^2+x+1>0$이다.

즉, 참인 명제이다.

ㄴ. $x$의 값에 따라 참이 될 수도 있고 거짓이 될 수도 있으므로 참, 거짓을 판별할 수 없다. 따라서 명제가 아니다.

ㄷ. $3x-x=2x$에서 $2x=2x$

$2x-2x=0$, 즉 $0=0$

이므로 참인 명제이다.

ㄹ. '춥다.'의 기준이 명확하지 않아서 참, 거짓을 판별할 수 없다. 따라서 명제가 아니다.

ㅁ. 일 년은 1월부터 12월까지 열두 달이므로 참인 명제이다.

이상에서 명제인 것은 ㄱ, ㄷ, ㅁ이다.

### 342

① $3+5=8$이므로 참인 명제이다.

② 4의 배수는 2의 배수이므로 참인 명제이다.

③ $\varnothing\subset\{1\}$이므로 거짓인 명제이다.

④ 모든 실수 $x$에 대하여 $x+5>x$이므로 거짓인 명제이다.

⑤ $x^2-2x+5>7$에서

$x=0$일 때 $5<7$, $x=-1$일 때 $8>7$

즉, $x$의 값에 따라 참이 될 수도 있고 거짓이 될 수도 있으므로 참, 거짓을 판별할 수 없다. 따라서 명제가 아니다.

따라서 명제가 아닌 것은 ⑤이다.

### 343

① 2는 소수이지만 짝수이므로 거짓인 명제이다.

② 한 변의 길이가 1인 정삼각형과 한 변의 길이가 2인 정삼각형은 합동이 아니므로 거짓인 명제이다.

③ 8과 12의 공약수는 1, 2, 4로 4의 약수이므로 참인 명제이다.

④ 100 이하의 자연수 중 6의 배수는 16개이므로 거짓인 명제이다.

⑤ 세 변의 길이가 2, 2, 3인 둔각삼각형에 대하여 $a=2$, $b=2$, $c=3$라 하면 $a^2+b^2=2^2+2^2<3^2$이므로 거짓인 명제이다.

따라서 참인 명제는 ③이다.

**개념 보충**

둔각삼각형이 될 조건

삼각형의 세 변의 길이를 $a, b, c\ (a<b<c)$라 하면

① $b-a<c<a+b$ ② $c^2>a^2+b^2$

### 344

조건 '$p$이고 $q$'의 부정은 '$\sim p$ 또는 $\sim q$'이다.

이때 $\sim p$: $x\le-1$ 또는 $x\ge5$, $\sim q$: $x<2$이므로

조건 '$\sim p$ 또는 $\sim q$'는

'$x<2$ 또는 $x\ge5$'

참고 $-1<x<5$는 $x>-1$이고 $x<5$이므로 그 부정은 $x\le-1$ 또는 $x\ge5$이다.

**개념 보충**

① '$\ge$'의 부정 ⇨ $<$ ② '$>$'의 부정 ⇨ $\le$

③ '$=$'의 부정 ⇨ $\ne$

### 345

ㄱ. 100 이하의 자연수 중 3의 배수의 개수는 33이다.

따라서 명제 '100 이하의 자연수 중 3의 배수의 개수는 33이다.'의 부정인 '100 이하의 자연수 중 3의 배수의 개수는 33이 아니다.'는 거짓이다.

ㄴ. $(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=1-2=-1$

즉, 유리수이므로 명제 '$(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})$는 무리수이다.'의 부정인 '$(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})$는 유리수이다.'는 참이다.

ㄷ. $72=2^3\times3^2$에서 72의 양의 약수의 합은

$(1+2+2^2+2^3)(1+3+3^2)=15\times13=195$

이므로 명제 '72의 양의 약수의 합은 195보다 크다.'의 부정인 '72의 양의 약수의 합은 195보다 작거나 같다.'는 참이다.

이상에서 부정이 참인 명제는 ㄴ, ㄷ이다.

### 346

실수 $a, b$에 대하여 조건 '$a^2+b^2>0$'의 부정은 $a^2+b^2\le0$이다.

즉, $a^2+b^2=0$이므로 $a=0$이고 $b=0$이다.

③ $|a|\ge0$, $|b|\ge0$이므로 조건 '$|a|+|b|=0$'은 '$a=0$이고 $b=0$'과 같다.

④ $ab=0$은 $a=0$ 또는 $b=0$

따라서 주어진 조건의 부정과 같은 것은 ③이다.

### 347

$U=\{1, 2, 3, 4, 5\}$

① $x^2-6x+8=0$에서 $(x-2)(x-4)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=4$

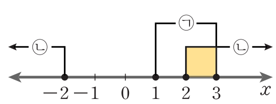
$\therefore P=\{2, 4\}$
② 전체집합 $U$의 원소 중 소수는 2, 3, 5이므로
$P=\{2, 3, 5\}$
③ 전체집합 $U$의 원소 중 홀수는 1, 3, 5이므로
$P=\{1, 3, 5\}$
④ $0<x<4$에서 $x$는 1, 2, 3이고 $x\neq 2$이므로
$P=\{1, 3\}$
⑤ 전체집합 $U$의 원소 중 6의 약수는 1, 2, 3이므로
$P=\{1, 2, 3\}$
따라서 옳게 짝 지어진 것은 ④이다.

## 348

$U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
전체집합 $U$의 원소 중 12의 약수는 1, 2, 3, 4, 6이고 이 중에서 3으로 나눈 나머지가 1인 수는 1, 4이므로 조건 $p$의 진리집합을 $P$라 하면
$P=\{1, 4\}$
따라서 조건 $p$의 진리집합의 모든 원소의 합은
$1+4=5$

## 349

주어진 조건의 부정은
'$x^2-4x+3\leq 0$이고 $|x|\geq 2$'
이므로 $x^2-4x+3\leq 0$에서 $(x-1)(x-3)\leq 0$
$\therefore 1\leq x\leq 3$ …… ㉠
$|x|\geq 2$에서
$x\leq -2$ 또는 $x\geq 2$ …… ㉡




㉠, ㉡에서 $2\leq x\leq 3$
따라서 주어진 조건의 부정의 진리집합은
$\{x|x$는 $2\leq x\leq 3$인 정수$\}=\{2, 3\}$
이므로 이 진리집합에 속하는 모든 원소의 합은
$2+3=5$

## 350

ㄱ. 모든 실수 $x$에 대하여 $x^2\geq 0$이므로 $x^2+1>0$이다. (참)
ㄴ. [반례] $x=6$이면 $x-5=1>0$이므로 $x-5<0$이 성립하지 않는다.
ㄷ. $x=3$이면 $x+3=6>5$이다. (참)
ㄹ. $x^2<0$을 만족시키는 실수 $x$는 존재하지 않는다. (거짓)
이상에서 거짓인 명제인 것은 ㄴ, ㄹ이다.

**1등급 비법**

① 명제 '모든 $x$에 대하여 …'는 명제를 만족시키지 않는 $x$가 하나라도 존재하면 거짓이 된다.
② 명제 '어떤 $x$에 대하여 …'는 명제를 만족시키는 $x$가 하나라도 존재하면 참이 된다.

## 351

① 주어진 명제의 부정은
'어떤 음수 $x$에 대하여 $x^2\leq 0$이다.'
이때 $x^2\leq 0$을 만족시키는 음수 $x$는 존재하지 않으므로 주어진 명제의 부정은 거짓이다.
② 주어진 명제의 부정은
'어떤 실수 $x$에 대하여 $x^2+1<0$이다.'
이때 $x^2+1<0$, 즉 $x^2<-1$을 만족시키는 실수 $x$는 존재하지 않으므로 주어진 명제의 부정은 거짓이다.
③ 주어진 명제의 부정은
'모든 실수 $x$, $y$에 대하여 $x+y\neq 7$이다.'
이때 $x=3$, $y=4$이면 $x+y=7$이므로 주어진 명제의 부정은 거짓이다.
④ 주어진 명제의 부정은
'어떤 실수 $x$, $y$에 대하여 $x^2+y^2\leq 0$이다.'
이때 $x=0$, $y=0$이면 $x^2+y^2=0$이므로 주어진 명제의 부정은 참이다.
⑤ 주어진 명제의 부정은
'모든 실수 $x$에 대하여 $x^2+3x+2\neq 0$이다.'
이때 $x=-1$이면 $x^2+3x+2=0$이므로 주어진 명제의 부정은 거짓이다.
따라서 명제의 부정이 참인 것은 ④이다.
**다른 풀이** ①, ② 주어진 명제가 참이므로 그 부정은 거짓이다.
③ $x=3$, $y=4$이면 주어진 명제가 참이므로 그 부정은 거짓이다.
④ $x=0$, $y=0$이면 주어진 명제가 거짓이므로 그 부정은 참이다.
⑤ $x=-1$이면 주어진 명제가 참이므로 그 부정은 거짓이다.

**1등급 비법**

명제 $p$가 거짓이면 그 부정 $\sim p$는 참임을 이용하여 부정이 참인 명제를 찾는다.

## 352

$p$: 모든 실수 $x$에 대하여 $x^2+2kx+4k+5>0$이므로 이차방정식 $x^2+2kx+4k+5=0$의 판별식을 $D$라 하면
$\frac{D}{4}=k^2-(4k+5)<0$
$k^2-4k-5<0$, $(k+1)(k-5)<0$
$\therefore -1<k<5$
$q$: 어떤 실수 $x$에 대하여 $x^2=k-2$이므로
$k-2\geq 0$
$\therefore k\geq 2$
정수 $k$에 대한 두 조건 $p$, $q$의 진리집합을 각각 $P$, $Q$라 하면
$P=\{0, 1, 2, 3, 4\}$, $Q=\{2, 3, 4, \cdots\}$
이때 $P\cap Q=\{2, 3, 4\}$이므로 두 조건 $p$, $q$가 모두 참인 명제가 되도록 하는 정수 $k$의 값은 2, 3, 4이다.
따라서 모든 정수 $k$의 값의 합은
$2+3+4=9$

## 353

ㄱ. $x^2>1$에서 $x^2-1>0$, $(x-1)(x+1)>0$

$\therefore$ $x<-1$ 또는 $x>1$

따라서 $x>1$이면 $x^2>1$이다. (참)

ㄴ. [반례] $x=1$, $y=3$이면 $x+y$는 짝수이지만 $x$와 $y$는 모두 홀수이다.

ㄷ. [반례] 1은 8의 양의 약수이지만 2의 배수가 아니다.

이상에서 참인 명제는 ㄱ뿐이다.

## 354

① [반례] $n=2$이면 $n$은 소수이지만 $n^2=4$는 짝수이다.

② [반례] $x=\sqrt{2}$, $y=\sqrt{2}$이면 $xy=2$는 유리수이지만 $x$와 $y$는 무리수이다.

③ [반례] $x=0$, $y=\sqrt{2}$이면 $x$는 유리수이고 $y$는 무리수이지만 $xy=0$은 유리수이다.

④ [반례] $a=1$, $b=i$이면 $a^2+b^2=1+(-1)=0$이지만 $a\neq0$이고 $b\neq0$이다.

⑤ 자연수 $m$, $n$에 대하여 $mn$이 짝수이면 $m$, $n$ 중 하나가 짝수이거나 $m$, $n$이 모두 짝수이므로 $m$ 또는 $n$은 짝수이다. (참)

따라서 참인 명제는 ⑤이다.

**개념 보충**

가정과 결론으로 이루어진 명제에서 가정은 만족시키지만 결론을 만족시키지 않는 예가 한 가지만 있어도 거짓인 명제가 된다.

## 355

① $x^2-4x+4=0$에서 $(x-2)^2=0$ $\qquad\therefore x=2$

$x^2-2x=0$에서 $x(x-2)=0$

$\therefore$ $x=0$ 또는 $x=2$

따라서 $x^2-4x+4=0$이면 $x^2-2x=0$이다. (참)

② $y<0$에서 $-y>0$이므로

$x\geq0$이고 $y<0$이면 $x-y>0$이다. (참)

③ [반례] $x=0$이고 $y=0$이면

$|x|+|y|=|x+y|$이지만 $xy=0$이다.

④ 실수 $x$, $y$에 대하여

(i) $x=0$이고 $y\neq0$이면

$x^2=0$이고, $y^2>0$이므로 $x^2+y^2>0$이다.

(ii) $x\neq0$이고 $y=0$이면

$x^2>0$이고, $y^2=0$이므로 $x^2+y^2>0$이다.

(iii) $x\neq0$이고 $y\neq0$이면

$x^2>0$이고, $y^2>0$이므로 $x^2+y^2>0$이다.

(i), (ii), (iii)에서 실수 $x$, $y$에 대하여 $x\neq0$ 또는 $y\neq0$이면 $x^2+y^2>0$이다. (참)

⑤ 자연수 $n$에 대하여 $n$이 3의 배수이면 $n=3k$ ($k$는 자연수)이므로

$n^2=9k^2=3\times3k^2$

즉, $n^2$도 3의 배수이다. (참)

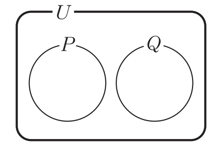
따라서 거짓인 명제는 ③이다.

## 356

명제 $p \longrightarrow \sim q$가 참이면

$P\subset Q^C$

이때 두 집합 $P$, $Q$를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.




① $P\cap Q=\varnothing$

② $P\cap Q^C=P$

③ $Q-P=Q$

④ $P\cup Q\neq U$

⑤ $P^C\cup Q=P^C$

따라서 항상 옳은 것은 ②이다.

**개념 보충**

두 집합 $A$, $B$에서 공통인 원소가 하나도 없을 때, $A$와 $B$는 서로소라 하고, 다음은 서로소인 두 집합 $A$, $B$의 모두 같은 표현이다.

① $A\cap B=\varnothing$ ② $n(A\cap B)=0$

③ $A-B=A$ ④ $B-A=B$

⑤ $A\subset B^C$ ⑥ $B\subset A^C$

## 357

ㄱ. $P^C\not\subset Q$이므로 명제 $\sim p \longrightarrow q$는 거짓이다.

ㄴ. $Q\subset R^C$이므로 명제 $q \longrightarrow \sim r$은 참이다.

ㄷ. $P\not\subset R^C$이므로 명제 $p \longrightarrow \sim r$은 거짓이다.

이상에서 참인 명제는 ㄴ뿐이다.

## 358

명제 '$\sim p$이면 $q$이다.'가 거짓임을 보이려면 집합 $P^C$의 원소 중 집합 $Q$의 원소가 아닌 것을 찾으면 된다.

따라서 구하는 집합은

$P^C\cap Q^C$

## 359

$P\cap(Q\cup R)=(P\cap Q)\cup(P\cap R)=\varnothing$이므로

$P\cap Q=\varnothing$이고 $P\cap R=\varnothing$

① $P\cap Q=\varnothing$이므로 명제 $p \longrightarrow q$는 거짓이다.

② $P\cap R=\varnothing$이므로 명제 $p \longrightarrow r$은 거짓이다.

③ 명제 $q \longrightarrow r$이 참인지 거짓인지 알 수 없다.

④ $P\cap Q=\varnothing$에서 $Q\subset P^C$이므로 명제 $q \longrightarrow \sim p$는 참이다.

⑤ $P\cap R=\varnothing$이므로 명제 $\sim r \longrightarrow p$는 거짓이다.

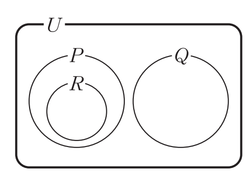
따라서 옳은 것은 ④이다.

## 360

$p \longrightarrow \sim q$, $r \longrightarrow p$가 모두 참이므로

$P\subset Q^C$, $R\subset P$

이때 세 집합 $P$, $Q$, $R$을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



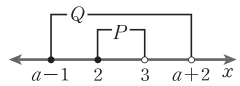

ㄱ. $P\subset Q^C$이므로 $P\cap Q=\varnothing$ (참)

ㄴ. $R\subset P$이므로 $P\cap R=R$ (참)

ㄷ. 벤 다이어그램에서 $Q\cup R\neq U$ (거짓)
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

## 361

$P=\{x\,|\,2\le x<3\}$, $Q=\{x\,|\,a-1\le x<a+2\}$라 하자.
이때 주어진 명제가 참이 되려면
$P\subset Q$
이어야 하므로 오른쪽 그림에서



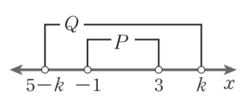

$a-1\le 2$, $a+2\ge 3$
$\therefore 1\le a\le 3$

**1등급 비법**

주어진 명제가 참이 되도록 하는 미지수의 값의 범위는 진리집합의 포함 관계를 이용하여 각 집합을 수직선 위에 나타내어 구한다.

## 362

두 조건 $p$, $q$의 진리집합을 각각 $P$, $Q$라 하면
$p$: $|x-1|<2$에서
$-2<x-1<2 \qquad \therefore -1<x<3$
$\therefore P=\{x\,|\,-1<x<3\}$
$q$: $5-k<x<k$에서 $Q=\{x\,|\,5-k<x<k\}$
명제 $p \longrightarrow q$가 참이 되려면
$P\subset Q$
이어야 하므로 오른쪽 그림에서




$5-k\le -1$, $k\ge 3$
$\therefore k\ge 6$
따라서 실수 $k$의 최솟값은 6이다.

## 363

두 조건 $p$, $q$의 진리집합을 각각 $P$, $Q$라 하자.
명제 $p \longrightarrow \sim q$가 참이 되려면
$P\subset Q^C \qquad \therefore Q\subset P^C$ ...... ㉠
또, 명제 $\sim p \longrightarrow q$가 참이 되려면
$P^C\subset Q$ ...... ㉡
㉠, ㉡에서 $Q=P^C$
$p$: $2x-a=0$에서 $P=\left\{\dfrac{a}{2}\right\}$이고, $Q=P^C$이므로
$Q=\left\{x\,\middle|\,x\neq\dfrac{a}{2}\text{인 실수}\right\}$ ...... ㉢
즉, $q$: $x^2-bx+9>0$에서 부등식 $x^2-bx+9>0$의 해가 $x\neq\dfrac{a}{2}$인 모든 실수이므로 이차함수 $y=x^2-bx+9$의 그래프는 $x$축에 접해야 한다.
이차방정식 $x^2-bx+9=0$의 판별식을 $D$라 하면
$D=(-b)^2-4\times1\times9=0$
$b^2=36 \qquad \therefore b=6\ (\because b>0)$
$b=6$을 $x^2-bx+9>0$에 대입하면
$x^2-6x+9>0$, $(x-3)^2>0$
따라서 $Q=\{x\,|\,x\neq 3\text{인 실수}\}$이므로 ㉢에서
$\dfrac{a}{2}=3 \qquad \therefore a=6$
$\therefore a+b=6+6=12$

## 364

ㄱ. 대우: $xy=xz$이면 $y=z$이다. (거짓)
[반례] $x=0$, $y=1$, $z=2$이면 $xy=xz$이지만 $y\neq z$이다.
ㄴ. 대우: 실수 $a$, $b$에 대하여 $a^3-b^3\neq0$이면 $a^2-b^2\neq0$이다. (거짓)
[반례] $a=1$, $b=-1$이면 $a^3-b^3\neq0$이지만 $a^2-b^2=0$이다.
ㄷ. 대우: 두 집합 $A$, $B$에 대하여 $A\neq B$이면 $A-B\neq\varnothing$이다. (거짓)
[반례] $A\subset B$이고 $A\neq B$이면 $A\neq B$이지만 $A-B=\varnothing$이다.
이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 대우가 거짓인 명제이다.

## 365

명제 $\sim q \longrightarrow p$의 역 $p \longrightarrow \sim q$가 참이므로
$P\subset Q^C$

## 366

① 역: $xy=0$이면 $|x|+|y|=0$이다. (거짓)
[반례] $x=0$, $y=1$이면 $xy=0$이지만 $|x|+|y|=1$이다.
대우: $xy\neq0$이면 $|x|+|y|\neq0$이다. (참)
② 역: $x=y$이면 $x^2=y^2$이다. (참)
대우: $x\neq y$이면 $x^2\neq y^2$이다. (거짓)
[반례] $x=2$, $y=-2$이면 $x\neq y$이지만 $x^2=y^2$이다.
③ 역: $x=0$ 또는 $y=0$이면 $xy=0$이다. (참)
대우: $x\neq0$이고 $y\neq0$이면 $xy\neq0$이다. (참)
④ 역: $x=0$이고 $y=0$이면 $x+y\sqrt{2}=0$이다. (참)
대우: $x\neq0$ 또는 $y\neq0$이면 $x+y\sqrt{2}\neq0$이다. (거짓)
[반례] $x=2$, $y=-\sqrt{2}$이면 $x+y\sqrt{2}=0$이다.
⑤ 역: $x>y$이면 $|x-y|=y-x$이다. (거짓)
[반례] $x=2$, $y=-1$이면 $x>y$이지만
$|2-(-1)|\neq(-1)-2$이다.
대우: $x\le y$이면 $|x-y|\neq y-x$이다. (거짓)
[반례] $x=-2$, $y=1$이면 $|(-2)-1|=1-(-2)$이다.
따라서 명제의 역과 대우가 모두 참인 것은 ③이다.

## 367

주어진 명제가 참이 되려면 대우
'$x\ge6$이고 $y\ge k-1$이면 $x+y\ge7$이다.'
가 참이어야 한다.
즉, $x\ge6$이고 $y\ge k-1$이면 $x+y\ge k+5$이므로 주어진 명제가 참이기 위해서는
$k+5\ge7 \qquad \therefore k\ge2$
따라서 실수 $k$의 최솟값은 2이다.

## 368

주어진 명제가 참이 되려면 대우

'$x=2a-1$이면 $x^3-11x+10=0$이다.'

가 참이어야 한다.

즉, $x=2a-1$이 방정식 $x^3-11x+10=0$의 한 근이므로

$(2a-1)^3-11(2a-1)+10=0$

$8a^3-12a^2-16a+20=0$

$2a^3-3a^2-4a+5=0$

$(a-1)(2a^2-a-5)=0$

이때 이차방정식 $2a^2-a-5=0$은 1이 아닌 서로 다른 두 실근을 갖고, 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은 $\frac{1}{2}$이다.

따라서 모든 실수 $a$의 값의 합은

$1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

**다른 풀이** 주어진 명제가 참이 되려면 대우

'$x=2a-1$이면 $x^3-11x+10=0$이다.'

가 참이어야 한다.

$x^3-11x+10=0$에서

$(x-1)(x^2+x-10)=0$

이차방정식 $x^2+x-10=0$은 1이 아닌 서로 다른 두 실근을 가지므로 삼차방정식 $x^3-11x+10=0$의 세 실근을 $\alpha$, $\beta$, $\gamma$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=0$

이때 $2a-1$의 값이 $\alpha$ 또는 $\beta$ 또는 $\gamma$일 때, 주어진 명제가 참이므로 가능한 실수 $a$의 값은

$\frac{\alpha+1}{2}$, $\frac{\beta+1}{2}$, $\frac{\gamma+1}{2}$

따라서 가능한 모든 실수 $a$의 값의 합은

$\frac{\alpha+1}{2}+\frac{\beta+1}{2}+\frac{\gamma+1}{2}=\frac{(\alpha+\beta+\gamma)+3}{2}=\frac{3}{2}$

## 369

명제 $q \longrightarrow p$가 참이 되려면 그 대우 $\sim p \longrightarrow \sim q$가 참이 되어야 한다.

$\sim p$: $|x+2|\le 1$이므로 $-1\le x+2\le 1$

$\therefore\ -3\le x\le -1$

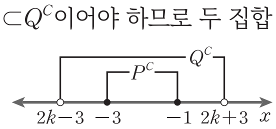
$\sim q$: $|x-2k|<3$이므로 $-3<x-2k<3$

$\therefore\ 2k-3<x<2k+3$

두 조건 $p$, $q$의 진리집합을 각각 $P$, $Q$라 하면

$P^C=\{x|-3\le x\le -1\}$, $Q^C=\{x|2k-3<x<2k+3\}$

명제 $\sim p \longrightarrow \sim q$가 참이 되려면 $P^C\subset Q^C$이어야 하므로 두 집합 $P^C$, $Q^C$을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.




즉, $2k-3<-3$, $2k+3>-1$이므로

$2k<0$, $2k>-4$

$\therefore\ -2<k<0$

따라서 조건을 만족시키는 정수 $k$는 $-1$이다.

## 370

명제 $p \longrightarrow q$, $q \longrightarrow \sim r$이 모두 참이므로 명제 $p \longrightarrow \sim r$이 참이다.

따라서 참인 명제의 대우도 항상 참이므로 명제 $r \longrightarrow \sim p$도 항상 참이다.

## 371

명제 $\sim s \longrightarrow \sim r$이 참이므로 그 대우 $r \longrightarrow s$도 참이다.

두 명제 $p \longrightarrow r$, $r \longrightarrow s$가 참이므로 명제 $p \longrightarrow s$가 참이다.

세 명제 $p \longrightarrow r$, $r \longrightarrow s$, $s \longrightarrow q$가 참이므로 명제 $p \longrightarrow q$가 참이다.

따라서 보기에서 항상 참인 명제인 것은 ㄱ, ㄹ이다.

## 372

네 조건 $p$, $q$, $r$, $s$를

$p$: 수학을 좋아한다. $q$: 물리를 좋아한다.

$r$: 영어를 좋아한다. $s$: 미술을 좋아한다.

로 정하면 진술 (가), (나)를

(가) $p \Longrightarrow q$

(나) $\sim p \Longrightarrow (r$ 또는 $s)$

와 같이 나타낼 수 있다.

(가)에서 $p \Longrightarrow q$이면 $\sim q \Longrightarrow \sim p$ …… ㉠

(나)에서 $\sim p \Longrightarrow (r$ 또는 $s)$이면 $(\sim r$이고 $\sim s) \Longrightarrow p$ …… ㉡

① '물리를 좋아하는 학생은 수학을 좋아한다.'는 명제 $q \longrightarrow p$이고, 이 명제는 (가), (나)로는 참, 거짓을 알 수 없다.

② '영어를 좋아하지 않는 학생은 수학을 좋아한다.'는 명제 $\sim r \longrightarrow p$이므로 ㉡에 의하여 항상 참이라 할 수 없다.

③ '물리를 좋아하는 학생은 영어와 미술을 좋아하지 않는다.'는 명제 $q \longrightarrow (\sim r$이고 $\sim s)$이다.
㉠과 (나)에 의하여 $\sim q \Longrightarrow (r$ 또는 $s)$
따라서 명제 $q \longrightarrow (\sim r$이고 $\sim s)$의 참, 거짓을 알 수 없다.

④ '미술을 좋아하는 학생은 수학과 물리를 좋아하지 않는다.'는 명제 $s \longrightarrow (\sim p$이고 $\sim q)$이고, 이 명제는 (가), (나)로는 참, 거짓을 알 수 없다.

⑤ '영어와 미술을 좋아하지 않는 학생은 물리를 좋아한다.'는 명제 $(\sim r$이고 $\sim s) \longrightarrow q$이므로 ㉠, ㉡에 의하여 참이다.

따라서 반드시 참인 것은 ⑤이다.

## 373

① $x>0$, $y>0$이면 $xy>0$이므로
$p \Longrightarrow q$
$xy>0$이면 $x>0$, $y>0$ 또는 $x<0$, $y<0$이므로
$q \not\Longrightarrow p$
따라서 $p$는 $q$이기 위한 충분조건이지만 필요조건이 아니다.

② $|x|<1$이면 $-1<x<1$이므로
$p \Longrightarrow q$, $q \not\Longrightarrow p$

따라서 $p$는 $q$이기 위한 충분조건이지만 필요조건이 아니다.
③ $x=1$, $y=-2$이면 $x>y$이지만 $x^2<y^2$이므로
$p \not\Longrightarrow q$
$x=-2$, $y=-1$이면 $x^2>y^2$이지만 $x<y$이므로
$q \not\Longrightarrow p$
따라서 $p$는 $q$이기 위한 충분조건도 필요조건도 아니다.
④ $x=2$, $y=0$, $z=3$이면 $xy=yz$이지만 $x\neq z$이므로
$p \not\Longrightarrow q$
$x=z$이면 $xy=yz$이므로
$q \Longrightarrow p$
따라서 $p$는 $q$이기 위한 필요조건이지만 충분조건이 아니다.
⑤ $x+y=0$, $xy=0$이면 $x=y=0$이므로
$p \Longrightarrow q$
$x=y=0$이면 $x+y=0$, $xy=0$이므로
$q \Longrightarrow p$
따라서 $p$는 $q$이기 위한 필요충분조건이다.
따라서 $p$는 $q$이기 위한 필요조건이지만 충분조건이 아닌 것은 ④이다.

**1등급 비법**

두 명제 $p \longrightarrow q$, $q \longrightarrow p$의 참, 거짓을 조사하여 본다.
이때 $p \Longrightarrow q$이고, $q \not\Longrightarrow p$이면 $p$는 $q$이기 위한 충분조건이고, $q$는 $p$이기 위한 필요조건이다.

## 374

$p$: $a^2+b^2=0$에서 $a=b=0$
$q$: $a^2b+ab^2=0$에서 $ab(a+b)=0$
$\therefore ab=0$ 또는 $a+b=0$
$r$: $|a+b|=|a-b|$의 양변을 제곱하면
$(a+b)^2=(a-b)^2$, $2ab=-2ab$
$\therefore ab=0$

- $a=b=0$이면 $ab=0$ 또는 $a+b=0$이므로
$p \Longrightarrow q$
$a=0$, $b=1$이면 $ab=0$ 또는 $a+b=0$이지만
$b\neq 0$이므로
$q \not\Longrightarrow p$
따라서 $p$는 $q$이기 위한 충분조건이다.
- $a=b=0$이면 $ab=0$이므로 $p \Longrightarrow r$
$a=1$, $b=0$이면 $ab=0$이지만 $a\neq 0$이므로 $r \not\Longrightarrow p$
즉, $p \Longrightarrow r$에서 $\sim r \Longrightarrow \sim p$이고, $r \not\Longrightarrow p$에서 $\sim p \not\Longrightarrow \sim r$이므로 $\sim p$는 $\sim r$이기 위한 필요조건이다.
- $ab=0$이면 $ab=0$ 또는 $a+b=0$이므로
$r \Longrightarrow q$
$a=1$, $b=-1$이면 $a+b=0$이지만 $ab\neq 0$이므로
$q \not\Longrightarrow r$
따라서 $q$는 $r$이기 위한 필요조건이다.

$\therefore$ (가): 충분 (나): 필요 (다): 필요

## 375

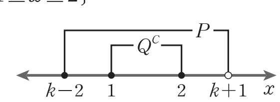
ㄱ. $P\not\subset Q$이므로 $p$는 $q$이기 위한 충분조건이 아니다. (거짓)
ㄴ. $R^C\not\subset P$이므로 $p$는 $\sim r$이기 위한 필요조건이 아니다. (거짓)
ㄷ. $R\subset Q$이므로 $q$는 $r$이기 위한 필요조건이다. (참)
이상에서 옳은 것은 ㄷ뿐이다.

## 376

$p$는 $q$이기 위한 충분조건이므로 $P\subset Q$
$q$는 $r$이기 위한 필요조건이므로 $R\subset Q$
① $P\subset Q$, $R\subset Q$이지만 $P\subset R$은 알 수 없다.
② $P\subset Q$이므로 $P\cap Q=P$
③ $R\subset Q$이므로 $R\cap Q^C=R-Q=\varnothing$
④ $P\subset Q$이므로 $P\cap Q=P$이지만
$P\subset R$은 알 수 없다.
⑤ $R\subset Q$이므로 $R\subset(P\cup Q)$
따라서 항상 옳은 것은 ⑤이다.

## 377

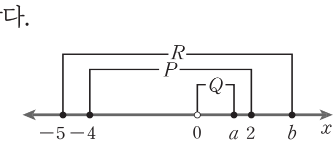
$q$: $x^2-3x+2>0$에서 $\sim q$: $x^2-3x+2\leq 0$이므로
$(x-1)(x-2)\leq 0$
$\therefore 1\leq x\leq 2$
두 조건 $p$, $q$의 진리집합을 각각 $P$, $Q$라 하면
$P=\{x|k-2\leq x<k+1\}$, $Q^C=\{x|1\leq x\leq 2\}$
$p$가 $\sim q$이기 위한 필요조건이 되려면 $Q^C\subset P$이어야 하므로 두 집합 $P$, $Q^C$을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.




$k-2\leq 1$, $k+1>2$
$\therefore 1<k\leq 3$
따라서 가능한 정수 $k$의 값은 2, 3이므로 모든 정수 $k$의 값의 합은
$2+3=5$

## 378

$P=\{x|-4\leq x\leq 2\}$,
$Q=\{x|0<x\leq a\}$,
$R=\{x|-5\leq x\leq b\}$
라 하면 $-4\leq x\leq 2$는 $0<x\leq a$이기 위한 필요조건이므로
$Q\subset P$
$-4\leq x\leq 2$는 $-5\leq x\leq b$이기 위한 충분조건이므로
$P\subset R$
주어진 조건을 만족시키는 $x$의 값의 범위를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.




$\therefore 0<a\leq 2$, $b\geq 2$
따라서 $a$의 최댓값은 2, $b$의 최솟값은 2이므로 그 합은
$2+2=4$

## 379

$p$: $x^2-6x+9\le0$에서

$(x-3)^2\le0$　　$\therefore x=3$

$q$: $|x-a|\le2$에서

$-2\le x-a\le2$　　$\therefore a-2\le x\le a+2$

두 조건 $p$, $q$의 진리집합을 각각 $P$, $Q$라 하면

$P=\{3\}$, $Q=\{x|a-2\le x\le a+2\}$

$p$가 $q$이기 위한 충분조건이 되려면 $P\subset Q$이어야 하므로

$3\in P$에서 $3\in Q$이어야 한다.

즉, $a-2\le3$, $a+2\ge3$이므로 $1\le a\le5$

따라서 실수 $a$의 최댓값과 최솟값의 합은

$5+1=6$

## 내신 적중 서술형

● 95쪽

**380** (1) $\{-1, 2\}$　(2) $\{-1, 1\}$　(3) $\{-2, -1, 0, 2\}$　**381** 7

**382** $k<0$ 또는 $k=\frac{3}{2}$　**383** 8

## 380

(1) $U=\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

　조건 $p$의 진리집합을 $P$라 하면

　$p$: $x^2-x-2=0$에서 $(x+1)(x-2)=0$이므로

　$x=-1$ 또는 $x=2$

　$\therefore P=\{-1, 2\}$ …… ㉮

(2) 조건 $q$의 진리집합을 $Q$라 하면

　$q$: $x^2=1$에서 $(x+1)(x-1)=0$이므로

　$x=-1$ 또는 $x=1$

　$\therefore Q=\{-1, 1\}$ …… ㉯

(3) 조건 '$p$ 또는 $\sim q$'의 진리집합은 $P\cup Q^C$이고

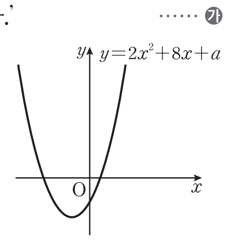
　$Q^C=\{-2, 0, 2\}$이므로

　$P\cup Q^C=\{-2, -1, 0, 2\}$ …… ㉰

| | 채점 기준 | 배점 비율 |
|---|---|---|
| (1) | ㉮ 조건 $p$의 진리집합 구하기 | 30 % |
| (2) | ㉯ 조건 $q$의 진리집합 구하기 | 30 % |
| (3) | ㉰ 조건 '$p$ 또는 $\sim q$'의 진리집합 구하기 | 40 % |

## 381

주어진 명제가 거짓이면 그 부정은 참이고, 주어진 명제의 부정은 '어떤 실수 $x$에 대하여 $2x^2+8x+a<0$이다.' …… ㉮




이차함수 $y=2x^2+8x+a$의 그래프는 $x$축과 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로 이차방정식 $2x^2+8x+a=0$의 판별식을 $D$라 하면

$\frac{D}{4}=4^2-2a>0$

$-2a>-16$　　$\therefore a<8$ …… ㉯

따라서 정수 $a$의 최댓값은 7이다. …… ㉰

| 채점 기준 | 배점 비율 |
|---|---|
| ㉮ 주어진 명제의 부정이 참임을 알고, 주어진 명제의 부정 구하기 | 30 % |
| ㉯ $a$의 값의 범위 구하기 | 50 % |
| ㉰ 정수 $a$의 최댓값 구하기 | 20 % |

## 382

두 조건 $p$, $q$의 진리집합을 각각 $P$, $Q$라 하자.

$p$: $x^2-4kx+3k^2\le0$에서 $(x-k)(x-3k)\le0$

$k<0$이면 $3k\le x\le k$　　$\therefore P=\{x|3k\le x\le k\}$

$k=0$이면 $x=0$　　$\therefore P=\{0\}$

$k>0$이면 $k\le x\le 3k$　　$\therefore P=\{x|k\le x\le 3k\}$ …… ㉮

또, $q$: $|x-3|\le k$에서

$k<0$이면 $Q=\varnothing$

$k=0$이면 $x-3=0$　　$\therefore x=3$

$\therefore Q=\{3\}$

$k>0$이면 $-k\le x-3\le k$　　$\therefore 3-k\le x\le 3+k$

$\therefore Q=\{x|3-k\le x\le 3+k\}$ …… ㉯

명제 $p \longrightarrow q$의 역 $q \longrightarrow p$가 참이 되려면 $Q\subset P$이어야 한다.

(i) $k<0$이면

　$P=\{x|3k\le x\le k\}$, $Q=\varnothing$이므로 $Q\subset P$

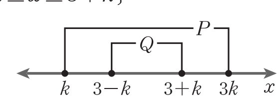
(ii) $k=0$이면

　$P=\{0\}$, $Q=\{3\}$이므로 $Q\not\subset P$

(iii) $k>0$이면

　$P=\{x|k\le x\le 3k\}$, $Q=\{x|3-k\le x\le 3+k\}$

　$Q\subset P$이기 위해서는 오른쪽 그림과 같아야 하므로




　$k\le3-k$, $3+k\le3k$

　$\therefore k=\frac{3}{2}$

(i), (ii), (iii)에서 $k<0$ 또는 $k=\frac{3}{2}$ …… ㉰

| 채점 기준 | 배점 비율 |
|---|---|
| ㉮ 조건 $p$의 진리집합 구하기 | 30 % |
| ㉯ 조건 $q$의 진리집합 구하기 | 30 % |
| ㉰ 실수 $k$의 값의 범위 구하기 | 40 % |

## 383

두 조건 $p$, $q$의 진리집합을 각각 $P$, $Q$라 하면

$p$: $2x-a\le0$에서

$2x\le a$　　$\therefore x\le\frac{a}{2}$

$\therefore P=\left\{x\,\middle|\,x\le\frac{a}{2}\right\}$ …… ㉮

$q$: $x^2-5x+4>0$에서 $\sim q$: $x^2-5x+4\le0$

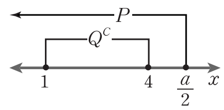
$(x-1)(x-4)\le0$　　$\therefore 1\le x\le4$

$\therefore Q^C=\{x|1\le x\le4\}$ …… ㉯

$p$가 $\sim q$이기 위한 필요조건이려면

$Q^C\subset P$

이어야 하므로 두 집합 $P$, $Q^C$을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.




이때 $\frac{a}{2} \geq 4$이어야 하므로

$a \geq 8$

따라서 실수 $a$의 최솟값은 8이다. ······ ㉰

| 채점 기준 | 배점 비율 |
|---|---|
| ㉮ 조건 $p$의 진리집합 구하기 | 20 % |
| ㉯ 조건 $\sim q$의 진리집합 구하기 | 30 % |
| ㉰ $a$의 최솟값 구하기 | 50 % |

## 1등급 실력 완성

● 96쪽 ~ 97쪽

**384** ⑤ **385** 15 **386** ④ **387** ② **388** ①
**389** ④ **390** ㄱ, ㄴ **391** ①

### 384

**명제와 조건의 부정**

전략 주어진 조건과 같은 조건을 찾아낸 후, ‘또는’, ‘그리고’를 사용하여 조건의 부정을 나타낸다.

풀이 $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=0$에서

$x-y=0$이고 $y-z=0$이고 $z-x=0$이므로

$x=y$이고 $y=z$이고 $z=x$

$\therefore x=y=z$

따라서 주어진 조건의 부정은

$x \neq y$ 또는 $y \neq z$ 또는 $z \neq x$

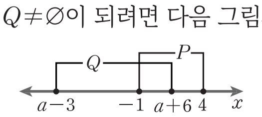
### 385

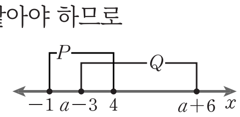
**진리집합**

전략 주어진 조건의 진리집합을 수직선 위에 나타내어 $a$의 값의 범위를 구한다.

풀이 $P=\{x \mid -1 \leq x \leq 4\}$, $Q=\{x \mid a-3 \leq x \leq a+6\}$에서

$P \cap Q \neq \varnothing$이 되려면 다음 그림과 같아야 하므로




(i) $a+6 \geq -1$에서 $a \geq -7$

(ii) $a-3 \leq 4$에서 $a \leq 7$

(i), (ii)에서 $-7 \leq a \leq 7$

따라서 정수 $a$는 $-7, -6, -5, \cdots, 5, 6, 7$의 15개이다.

### 386

**명제 $p \longrightarrow q$의 참, 거짓**

전략 주어진 그림에서 세 수 $p$, $q$, $r$ 사이의 관계를 구하고 주어진 명제의 참, 거짓을 판별한다.

풀이 $\overline{\mathrm{AB}}=1$, $\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{AE}}=\sqrt{2}$이므로 세 수 $p$, $q$, $r$ 사이의 관계는 다음과 같다.

$q=p+1$, $r=p+\sqrt{2}$, $r=q+(\sqrt{2}-1)$

ㄱ. (유리수)+(유리수)=(유리수),
(유리수)+(무리수)=(무리수)이므로
$p$가 유리수이면 $q$는 유리수, $r$은 무리수이다. (참)

ㄴ. [반례] $p=\sqrt{2}$이면 $q=\sqrt{2}+1$은 무리수이고,
$r=(\sqrt{2}+1)+(\sqrt{2}-1)=2\sqrt{2}$이므로 $r$은 무리수이다. (거짓)

ㄷ. $r=q+(\sqrt{2}-1)$에서 $\sqrt{2}-1$이 무리수이므로 $q$가 유리수이면 $r$은 무리수이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

### 387

**명제와 진리집합 사이의 관계**

전략 ‘$P-Q=P \Longleftrightarrow P \cap Q=\varnothing$’, ‘$R^C \cup Q=U \Longleftrightarrow R \subset Q$’임을 이용한다.

풀이 $P-Q \neq P$이므로 $P \cap Q \neq \varnothing$

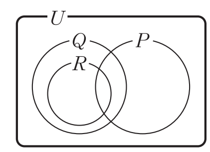
$R^C \cup Q=U$에서 $R \cap Q^C=\varnothing$, $R-Q=\varnothing$

$\therefore R \subset Q$

ㄱ. $P \cap Q \neq \varnothing$이므로 $P \not\subset Q^C$
따라서 $p \longrightarrow \sim q$는 거짓인 명제이다.

ㄴ. $R \subset Q$이므로 $Q^C \subset R^C$
따라서 $\sim q \longrightarrow \sim r$은 참인 명제이다.

ㄷ. $R \subset Q$이고 $P \cap R \neq \varnothing$인 경우, 즉 오른쪽 벤 다이어그램에서 $P-Q \neq P$이고 $R^C \cup Q=U$이지만 $P \not\subset R^C$
따라서 $p \longrightarrow \sim r$은 거짓인 명제이다.




이상에서 참인 명제는 ㄴ뿐이다.

### 388

**명제의 역과 대우의 참, 거짓**

전략 조건 (나)에서 명제 ‘$(a-2)^2 \not\in A$이면 $a \not\in A$’가 참이므로 이 명제의 대우도 참임을 이용한다.

풀이 조건 (가)에서 $0 \in A$

조건 (나)에서 명제 ‘$(a-2)^2 \not\in A$이면 $a \not\in A$’가 참이므로 이 명제의 대우인 ‘$a \in A$이면 $(a-2)^2 \in A$’도 참이다.

$0 \in A$이므로

$(0-2)^2 \in A$ $\quad \therefore 4 \in A$

또, $4 \in A$이므로 $(4-2)^2 \in A$ $\quad \therefore 4 \in A$

$\therefore \{0, 4\} \subset A$

조건 (다)에서 $n(A)=3$이므로

$A=\{0, 4, k\}$ $(k \neq 0, k \neq 4)$

라 하면 $k \in A$이면 $(k-2)^2 \in A$이므로 $(k-2)^2$의 값은 $0, 4, k$ 중 하나이다.

(i) $(k-2)^2=0$일 때, $k=2$

(ii) $(k-2)^2=4$일 때,
$k-2=2$ 또는 $k-2=-2$
$\therefore k=4$ 또는 $k=0$
따라서 $k \neq 0$, $k \neq 4$에 모순이다.

(iii) $(k-2)^2=k$일 때,
$k^2-5k+4=0$, $(k-1)(k-4)=0$

$\therefore k=1\ (\because k\neq4)$

(i), (ii), (iii)에서 $k=1$ 또는 $k=2$

따라서 집합 $A$가 될 수 있는 것은 $\{0, 1, 4\}$, $\{0, 2, 4\}$의 2개이다.

## 389

**충분조건, 필요조건, 필요충분조건**

전략 $B\subset A$를 만족시키는 집합 $A$, $B$를 수직선 위에 나타내어 본다.

풀이 $x^2-a^2>0$에서 $(x+a)(x-a)>0$

$\therefore x<-a$ 또는 $x>a$

$\therefore A=\{x\,|\,x<-a$ 또는 $x>a\}$

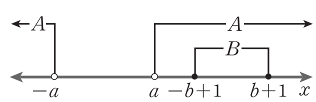
$|x-1|\le b$에서 $-b\le x-1\le b$

$\therefore -b+1\le x\le b+1$

$\therefore B=\{x\,|\,-b+1\le x\le b+1\}$

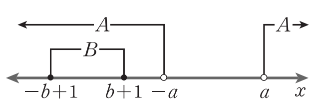
이때 $B\subset A$를 만족시키도록 수직선 위에 집합 $A$, $B$를 나타내면 다음 그림과 같다.

(i) $a<-b+1$일 때,




$\therefore a+b<1$

(ii) $b+1<-a$일 때,




$\therefore a+b<-1$

그런데 $a$, $b$는 양수이므로 $a+b<-1$을 만족시키는 양수 $a$, $b$의 값은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 $a+b<1$

## 390

**충분조건, 필요조건, 필요충분조건**

전략 세 조건 $p$, $q$, $r$을 만족시키는 $a$, $b$의 조건을 구해 본다.

풀이 ㄱ. $ab$가 홀수이면 $a$, $b$는 모두 홀수이므로 $a+b$는 짝수이다.

$\therefore p\Longrightarrow q$

한편, $a=2$, $b=4$이면 $a+b=6$이므로 $a+b$는 짝수이지만 $ab$도 짝수이다.

즉, 명제 $q\longrightarrow p$는 거짓이다.

따라서 $p$는 $q$이기 위한 충분조건이지만 필요조건이 아니다. (참)

ㄴ. $a+b$가 짝수이면 $a$, $b$는 모두 짝수이거나 모두 홀수이므로 $a^2+b^2$은 짝수이다.

$\therefore q\Longrightarrow r$

$a^2+b^2$이 짝수이면 $a$, $b$는 모두 짝수이거나 모두 홀수이므로 $a+b$는 짝수이다.

$\therefore r\Longrightarrow q$

즉, $q\Longrightarrow r$이고 $r\Longrightarrow q$이므로 $q\Longleftrightarrow r$

따라서 $q$는 $r$이기 위한 필요충분조건이다. (참)

ㄷ. ㄱ, ㄴ에서 $p\Longrightarrow q$이고 $q\Longleftrightarrow r$이므로 $p\Longrightarrow r$이다.

$\therefore \sim r\Longrightarrow \sim p$

한편, $a=2$, $b=4$이면 $a^2+b^2=2^2+4^2=20$이므로 $a^2+b^2$은 짝수이지만 $ab$는 홀수가 아니다.

즉, 명제 $r\longrightarrow p$는 거짓이므로 대우인 $\sim p\longrightarrow \sim r$도 거짓이다.

따라서 $\sim r$은 $\sim p$이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

## 391

**충분조건, 필요조건이 되도록 하는 상수 구하기**

전략 이차부등식을 포함한 두 문장이 참인 명제가 되도록 하는 진리집합을 생각한다.

풀이 실수 전체의 집합을 $U$라 하고, 두 조건 $p$, $q$의 진리집합을 각각 $P$, $Q$라 하자.

'모든 실수 $x$에 대하여 $p$이다.'가 참인 명제가 되려면 $P=U$이어야 한다.

즉, 모든 실수 $x$에 대하여 $x^2+2ax+1\ge0$이어야 하므로 이차방정식 $x^2+2ax+1=0$의 판별식을 $D_1$이라 하면

$\frac{D_1}{4}=a^2-1\le0$

$(a+1)(a-1)\le0$

$\therefore -1\le a\le1$

이때 정수 $a$는 $-1$, $0$, $1$의 3개이다.

'$p$는 $\sim q$이기 위한 충분조건이다.'가 참인 명제가 되려면 $P\subset Q^C$이어야 하고 $P=U$이므로 $Q^C=U$이다.

즉, 모든 실수 $x$에 대하여 $x^2+2bx+9>0$이어야 하므로 이차방정식 $x^2+2bx+9=0$의 판별식을 $D_2$라 하면

$\frac{D_2}{4}=b^2-9<0$

$(b+3)(b-3)<0$

$\therefore -3<b<3$

이때 정수 $b$는 $-2$, $-1$, $0$, $1$, $2$의 5개이다.

따라서 정수 $a$, $b$의 순서쌍 $(a, b)$의 개수는

$3\times5=15$

## 도전 1등급 최고난도

● 98쪽

**392** $-5$ **393** $\frac{7}{3}$ **394** ③

## 392

**명제가 참이 될 조건**

1단계 두 명제 $p\longrightarrow q$와 $p\longrightarrow \sim q$를 모두 만족시키는 실수 $a$의 값의 범위를 구한다.

세 조건 $p$, $q$, $r$의 진리집합을 각각 $P$, $Q$, $R$이라 하면 두 명제 $p\longrightarrow q$와 $p\longrightarrow \sim q$가 모두 참이 되어야 하므로 $P\subset Q$이고 $P\subset Q^C$, 즉 $P=\varnothing$이 되어야 한다.

즉, 모든 실수 $x$에 대하여 $x^2+2ax+9\ge 0$이므로 이차방정식 $x^2+2ax+9=0$의 판별식을 $D$라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-9\le 0$, $(a+3)(a-3)\le 0$

$\therefore -3\le a\le 3$ ······ ㉠

(2단계) 명제 $\sim r \longrightarrow \sim q$를 만족시키는 실수 $a$의 값의 범위를 구한다.

$\sim r$: $x=4$이므로 $R^C=\{4\}$

$\sim q$: $|x-a|>2$에서 $x-a<-2$ 또는 $x-a>2$

$\therefore x<a-2$ 또는 $x>a+2$

$\therefore Q^C=\{x|x$는 $x<a-2$ 또는 $x>a+2$인 실수$\}$

명제 $\sim r \longrightarrow \sim q$가 참이 되려면 $R^C\subset Q^C$이 되어야 하므로

$a-2>4$ 또는 $a+2<4$

$\therefore a<2$ 또는 $a>6$ ······ ㉡

(3단계) 명제 $p \longrightarrow q$, $p \longrightarrow \sim q$, $\sim r \longrightarrow \sim q$가 모두 참이 되도록 하는 정수 $a$의 값의 합을 구한다.

명제 $p \longrightarrow q$, $p \longrightarrow \sim q$, $\sim r \longrightarrow \sim q$가 모두 참이 되어야 하므로 ㉠, ㉡에서

$-3\le a<2$

따라서 모든 정수 $a$의 값의 합은

$(-3)+(-2)+(-1)+0+1=-5$

## 393

**충분조건, 필요조건이 되도록 하는 상수 구하기**

(1단계) $p$는 $\sim q$이기 위한 진리집합 사이의 포함 관계를 구한다.

두 조건 $p$, $q$의 진리집합을 각각 $P$, $Q$라 할 때, $p$는 $\sim q$이기 위한 충분조건이 되려면 $P\subset Q^C$이어야 하므로

$P\cap Q=\varnothing$

(2단계) $P\cap Q=\varnothing$이기 위한 $k$의 값의 범위를 구한다.

$p$: $3y=4x$에서 $4x-3y=0$

$q$: $(x-k)^2+(y-k+1)^2=(k-1)^2$은 중심의 좌표가 $(k,\ k-1)$이고 반지름의 길이가 $|k-1|$인 원이다.

이때 $P\cap Q=\varnothing$이기 위해서는 원의 중심 $(k,\ k-1)$과 직선 $4x-3y=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 $|k-1|$보다 커야 한다.

따라서 점 $(k,\ k-1)$과 직선 $4x-3y=0$ 사이의 거리 $d$는

$$d=\frac{|4\times k-3\times(k-1)|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{|k+3|}{5}$$

이므로

$\frac{|k+3|}{5}>|k-1|$

$|k+3|>5|k-1|$

양변을 제곱하면

$(k+3)^2>25(k-1)^2$, $24k^2-56k+16<0$

$3k^2-7k+2<0$, $(3k-1)(k-2)<0$

$\therefore \frac{1}{3}<k<2$

(3단계) $a+b$의 값을 구한다.

따라서 $a=\frac{1}{3}$, $b=2$이므로

$a+b=\frac{1}{3}+2=\frac{7}{3}$

## 394

**충분조건, 필요조건, 필요충분조건**

(1단계) 두 조건 $p$, $q$의 진리집합을 각각 좌표평면에 나타내어 본다.

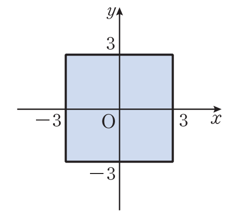
두 조건 $p$, $q$의 진리집합을 각각 $P$, $Q$라 하면

$p$: $|x|\le 3$, $|y|\le 3$에서

$-3\le x\le 3$, $-3\le y\le 3$

$\therefore P=\{(x,\ y)|-3\le x\le 3,\ -3\le y\le 3\}$

즉, 집합 $P$를 좌표평면에 나타내면 오른쪽 그림과 같이 네 점 $(3,\ 3)$, $(-3,\ 3)$, $(-3,\ -3)$, $(3,\ -3)$을 꼭짓점으로 하는 정사각형의 경계와 내부이다.



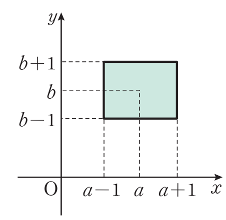

$q$: $|x-a|\le 1$, $|y-b|\le 1$에서

$-1\le x-a\le 1$, $-1\le y-b\le 1$

$\therefore a-1\le x\le a+1$, $b-1\le y\le b+1$

$\therefore Q=\{(x,\ y)|a-1\le x\le a+1,\ b-1\le y\le b+1\}$

즉, 집합 $Q$를 좌표평면에 나타내면 오른쪽 그림과 같이 네 점 $(a-1,\ b-1)$, $(a+1,\ b-1)$, $(a+1,\ b+1)$, $(a-1,\ b+1)$을 꼭짓점으로 하는 정사각형의 경계와 내부이다.




(2단계) $p$는 $q$이기 위한 필요조건이 되도록 하는 $a$, $b$의 값의 범위를 구한다.

$p$는 $q$이기 위한 필요조건이려면 $Q\subset P$이어야 하므로

$-3\le a-1$, $a+1\le 3$, $-3\le b-1$, $b+1\le 3$

이어야 한다.

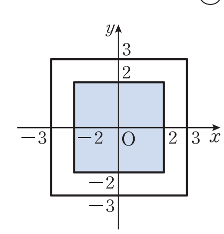
$-3\le a-1$, $a+1\le 3$에서

$-2\le a\le 2$ ······ ㉠

$-3\le b-1$, $b+1\le 3$에서

$-2\le b\le 2$ ······ ㉡

따라서 좌표평면에서 ㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 점 $(a,\ b)$가 나타내는 영역은 오른쪽 그림과 같이 네 점 $(2,\ 2)$, $(-2,\ 2)$, $(-2,\ -2)$, $(2,\ -2)$를 꼭짓점으로 하는 정사각형의 경계와 내부이다.




따라서 구하는 영역의 넓이는

$4\times 4=16$

# 08 명제의 증명

## 유형 분석 기출

● 100쪽 ~ 103쪽

**395** (가) $3k$ (나) $k^2+k$ (다) 9
**396** 풀이 참조
**397** (가) 유리수 (나) 무리수 (다) 0
**398** (가) 1 (나) 서로소
**399** (가) $ab+bc+ca$ (나) $\ge$ (다) $a=b=c$
**400** ③
**401** 2
**402** ②
**403** $\frac{\sqrt{10}}{4}$
**404** ④
**405** ①
**406** $-15$
**407** ④
**408** ①
**409** 8
**410** $-10\sqrt{13}$
**411** 5
**412** ④
**413** 4
**414** ②
**415** ④

### 395

주어진 명제의 대우는 '자연수 $n$에 대하여 $n$이 3의 배수이면 $n^2+3n$은 9의 배수이다.'이다.

$n=\boxed{3k}$ ($k$는 자연수)라 하면

$n^2+3n=(\boxed{3k})^2+3\times\boxed{3k}$

$=9(\boxed{k^2+k})$

이때 $\boxed{k^2+k}$는 자연수이므로 $n^2+3n$은 $\boxed{9}$의 배수이다.

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

$\therefore$ (가) $3k$, (나) $k^2+k$, (다) 9

### 396

주어진 명제의 대우는 '자연수 $x$, $y$에 대하여 $xy$가 홀수이면 $x^2+y^2$은 짝수이다.'이다.

$xy$가 홀수이면 $x$, $y$는 모두 홀수이므로

$x=2m-1$, $y=2n-1$ ($m$, $n$은 자연수)

로 나타낼 수 있다. 이때

$x^2+y^2=(2m-1)^2+(2n-1)^2$

$=4m^2-4m+1+4n^2-4n+1$

$=2(2m^2-2m+2n^2-2n+1)$

이므로 $x^2+y^2$은 짝수이다.

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

### 397

$b\neq0$이라 가정하면

$b\sqrt{2}=-a$

$\therefore \sqrt{2}=-\frac{a}{b}$

이때 $a$, $b$는 유리수이므로 $-\frac{a}{b}$도 $\boxed{유리수}$가 되어 $\sqrt{2}$가 $\boxed{유리수}$가 된다.

이것은 $\sqrt{2}$가 $\boxed{무리수}$라는 사실에 모순되므로 $b=0$이다.

$b=0$을 $a+b\sqrt{2}=0$에 대입하여 정리하면 $a=\boxed{0}$이 성립한다.

따라서 유리수 $a$, $b$에 대하여 $a+b\sqrt{2}=0$이면 $a=0$이고 $b=0$이다.

$\therefore$ (가) 유리수, (나) 무리수, (다) 0

### 398

소수의 개수가 유한하다고 가정하면 모든 소수를 크기 순으로 나열하여 $p_1$, $p_2$, $\cdots$, $p_n$과 같이 쓸 수 있다.

이제 $P=p_1\times p_2\times\cdots\times p_n+\boxed{1}$이라는 새로운 수 $P$를 생각해 보자.

$P$를 $p_1$으로 나누었을 때의 나머지는 1이다.

$P$를 $p_2$로 나누었을 때의 나머지는 1이다.

$\vdots$

$P$를 $p_n$으로 나누었을 때의 나머지는 1이다.

즉, $P$는 어떤 소수로도 나누어떨어지지 않으므로 모든 소수와 $\boxed{서로소}$이다.

이것은 $P$가 $p_1$, $p_2$, $\cdots$, $p_n$과 서로 다른 소수이거나 다른 소수의 곱으로 되어 있음을 의미하므로 $p_1$, $p_2$, $\cdots$, $p_n$이 모든 소수를 나열한 것이라는 가정에 모순이다.

따라서 소수는 무한히 많다.

$\therefore$ (가) 1, (나) 서로소

### 399

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=\frac{1}{2}\{2a^2+2b^2+2c^2-2(\boxed{ab+bc+ca})\}$

$=\frac{1}{2}\{(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)\}$

$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

$a$, $b$, $c$가 실수이므로

$(a-b)^2\ge0$, $(b-c)^2\ge0$, $(c-a)^2\ge0$

따라서 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\ \boxed{\ge}\ 0$이므로

$a^2+b^2+c^2\ \boxed{\ge}\ ab+bc+ca$

이때 등호는 $a-b=0$, $b-c=0$, $c-a=0$, 즉 $\boxed{a=b=c}$일 때 성립한다.

$\therefore$ (가) $ab+bc+ca$, (나) $\ge$, (다) $a=b=c$

**1등급 비법**

부등식 $A\ge B$를 증명할 때
① $A$, $B$가 다항식이면 $A-B\ge0$임을 보인다.
② $A$, $B$가 절댓값 기호나 근호를 포함한 식이면 $A^2-B^2\ge0$임을 보인다.

### 400

ㄱ. $(|a|+|b|)^2-|a-b|^2$

$=(|a|^2+2|a||b|+|b|^2)-(a-b)^2$

$=(a^2+2|ab|+b^2)-(a^2-2ab+b^2)$

$=2(|ab|+ab)\ge0$ ($\because$ $|ab|\ge ab$)

$\therefore (|a|+|b|)^2\ge|a-b|^2$

그런데 $|a|+|b|\ge0$, $|a-b|\ge0$이므로

$|a|+|b|\ge|a-b|$ (단, 등호는 $|ab|=-ab$일 때 성립) (참)

ㄴ. (i) $|a| \ge |b|$일 때,

$(|a|-|b|)^2-|a-b|^2$

$=(|a|^2-2|a||b|+|b|^2)-(a-b)^2$

$=(a^2-2|ab|+b^2)-(a^2-2ab+b^2)$

$=2(ab-|ab|) \le 0$ ($\because ab \le |ab|$)

$\therefore (|a|-|b|)^2 \le |a-b|^2$

그런데 $|a|-|b| \ge 0$, $|a-b| \ge 0$이므로

$|a|-|b| \le |a-b|$

(ii) $|a| < |b|$일 때,

$|a|-|b|<0$, $|a-b|>0$이므로

$|a|-|b|<|a-b|$

(i), (ii)에서

$|a|-|b| \le |a-b|$ (단, 등호는 $|ab|=ab$일 때 성립) (참)

ㄷ. [반례] $a=1$, $b=-1$이면

$|a+b|=0$, $|a-b|=2$

$\therefore |a+b|<|a-b|$

이상에서 항상 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

**1등급 비법**

절댓값 기호를 포함한 식의 대소 관계를 구할 때는

$A>0$, $B>0$일 때, $A^2-B^2>0 \Longleftrightarrow A>B$

임을 이용한다.

## 401

$\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{a+2b}{ab}=\dfrac{4}{ab}$ …… ㉠

한편, $a>0$, $2b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a+2b \ge 2\sqrt{2ab}$

이때 $a+2b=4$이므로

$4 \ge 2\sqrt{2ab}$

$\therefore \sqrt{2ab} \le 2$ (단, 등호는 $a=2b$일 때 성립)

양변을 제곱하면

$2ab \le 4$

$\therefore ab \le 2$

즉, $\dfrac{1}{ab} \ge \dfrac{1}{2}$이므로

$\dfrac{4}{ab} \ge 2$

따라서 ㉠에서 $\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}$의 최솟값은 2이다.

다른 풀이 $a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$(a+2b)\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\right)=2+\frac{a}{b}+\frac{4b}{a}+2$$
$$=4+\frac{a}{b}+\frac{4b}{a}$$
$$\ge 4+2\sqrt{\frac{a}{b}\times\frac{4b}{a}}$$
$$=4+2\times 2$$
$$=8 \left(\text{단, 등호는 } \frac{a}{b}=\frac{4b}{a}\text{일 때 성립}\right)$$

이때 $a+2b=4$이므로

$4\left(\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}\right) \ge 8$

$\therefore \dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b} \ge 2$

따라서 $\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}$의 최솟값은 2이다.

## 402

$5a>0$, $b>0$이므로

$5a+b \ge 2\sqrt{5ab}$

그런데 $5a+b=10$이므로

$10 \ge 2\sqrt{5ab}$

$\therefore \sqrt{5ab} \le 5$

양변을 제곱하면

$5ab \le 25$

$\therefore ab \le 5$

이때 등호는 $5a=b$일 때 성립하고 $ab$는 최댓값 5를 갖는다.

$\therefore M=5$

$b=5a$를 $5a+b=10$에 대입하면

$5a+5a=10$ $\qquad \therefore a=1$

$\therefore b=5a=5$

따라서 $\alpha=1$, $\beta=5$이므로

$M+\alpha+\beta=5+1+5=11$

**1등급 비법**

$A>0$, $B>0$이라는 조건이 주어지고, $A+B$의 값이 일정할 때 $AB$의 최댓값을 구하는 문제나, $AB$의 값이 일정할 때 $A+B$의 최솟값을 구하는 문제는 대부분 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 해결한다.

## 403

$x^2>0$, $y^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$3x^2+12y^2 \ge 2\sqrt{3x^2 \times 12y^2}$$
$$=2\times 6xy=12xy$$

그런데 $3x^2+12y^2=15$이므로

$15 \ge 12xy$

$\therefore xy \le \dfrac{5}{4}$

이때 $x>0$, $y>0$이므로 등호는 $3x^2=12y^2$, 즉 $x=2y$일 때 성립하고 $3x^2+12y^2=15$이므로

$3x^2=\dfrac{15}{2}$, $12y^2=\dfrac{15}{2}$

$\therefore x=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$, $y=\dfrac{\sqrt{10}}{4}$

따라서 $xy$는 $x=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$, $y=\dfrac{\sqrt{10}}{4}$일 때 최댓값 $\dfrac{5}{4}$를 가지므로

$\alpha=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$, $\beta=\dfrac{\sqrt{10}}{4}$

$\therefore \alpha-\beta=\dfrac{\sqrt{10}}{2}-\dfrac{\sqrt{10}}{4}=\dfrac{\sqrt{10}}{4}$

## 404

$a>0$, $b>0$에서 $ab>0$, $\frac{1}{ab}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{4}{a}+b\right)=4+ab+\frac{4}{ab}+1$$
$$=5+ab+\frac{4}{ab}$$
$$\geq 5+2\sqrt{ab\times\frac{4}{ab}}$$
$$=5+2\times 2$$
$$=9\ \left(\text{단, 등호는 } ab=\frac{4}{ab}\text{일 때 성립}\right)$$

따라서 $\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{4}{a}+b\right)$의 최솟값은 9이다.

**오답 피하기** 주어진 식을 전개하지 않고 각각 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 풀지 않도록 주의한다.

$a+\frac{1}{b}\geq 2\sqrt{a\times\frac{1}{b}}$에서는 $a=\frac{1}{b}$, 즉 $ab=1$일 때 등호가 성립하고,

$\frac{4}{a}+b\geq 2\sqrt{\frac{4}{a}\times b}$에서는 $\frac{4}{a}=b$, 즉 $ab=4$일 때 등호가 성립한다.

이것을 동시에 만족시키는 양수 $a$, $b$는 존재하지 않으므로 최솟값 8을 만족시키는 양수 $a$, $b$가 존재하지 않는다.

## 405

$x>0$에서 $x^2+4>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x+\frac{4}{x}+\frac{25x}{x^2+4}=\frac{x^2+4}{x}+\frac{25x}{x^2+4}$$
$$\geq 2\sqrt{\frac{x^2+4}{x}\times\frac{25x}{x^2+4}}$$
$$=2\times 5$$
$$=10\ \left(\text{단, 등호는 } \frac{x^2+4}{x}=\frac{25x}{x^2+4}\text{일 때 성립}\right)$$

따라서 $x+\frac{4}{x}+\frac{25x}{x^2+4}$의 최솟값은 10이다.

## 406

$a^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\left(a-\frac{5}{a}\right)\left(5a-\frac{1}{a}\right)=5a^2-1-25+\frac{5}{a^2}$$
$$=-26+5a^2+\frac{5}{a^2}$$
$$\geq -26+2\sqrt{5a^2\times\frac{5}{a^2}}$$
$$=-26+2\times 5$$
$$=-16$$

따라서 $\left(a-\frac{5}{a}\right)\left(5a-\frac{1}{a}\right)$의 최솟값은 $-16$이므로

$m=-16$

이때 등호는 $5a^2=\frac{5}{a^2}$, 즉 $a^4=1$일 때 성립하므로

$a=1$ ($\because a>0$)

따라서 $k=1$이므로

$m+k=-16+1=-15$

## 407

$a>0$, $b>0$, $c>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\geq 2\sqrt{\frac{b}{a}\times\frac{c}{b}}$$
$$=2\sqrt{\frac{c}{a}} \quad \cdots\cdots ㉠$$
$$\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\geq 2\sqrt{\frac{c}{b}\times\frac{a}{c}}$$
$$=2\sqrt{\frac{a}{b}} \quad \cdots\cdots ㉡$$
$$\frac{a}{c}+\frac{b}{a}\geq 2\sqrt{\frac{a}{c}\times\frac{b}{a}}$$
$$=2\sqrt{\frac{b}{c}} \quad \cdots\cdots ㉢$$

㉠, ㉡, ㉢을 변끼리 곱하면

$$\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\right)\left(\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right)\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{a}\right)\geq 8\sqrt{\frac{c}{a}\times\frac{a}{b}\times\frac{b}{c}}$$
$$=8\ (\text{단, 등호는 } a=b=c\text{일 때 성립})$$

따라서 $\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\right)\left(\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right)\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{a}\right)$의 최솟값은 8이다.

## 408

$x\neq 0$이므로

$$\frac{x}{x^2+8x+16}=\frac{1}{x+8+\frac{16}{x}} \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $x>0$이므로

$$x+8+\frac{16}{x}=x+\frac{16}{x}+8$$
$$\geq 2\sqrt{x\times\frac{16}{x}}+8$$
$$=2\times 4+8$$
$$=16\ \left(\text{단, 등호는 } x=\frac{16}{x}\text{, 즉 } x=4\text{일 때 성립}\right)$$

㉠에서 $\frac{1}{x+8+\frac{16}{x}}\leq\frac{1}{16}$

따라서 $\frac{x}{x^2+8x+16}$의 최댓값은 $\frac{1}{16}$이다.

## 409

두 직선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 기울기가 각각 $\frac{a}{2}$, $\frac{1}{b}$이고

두 직선이 서로 평행하므로

$\frac{a}{2}=\frac{1}{b}$에서 $ab=2$

$2a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$(a+1)(b+2)=ab+2a+b+2$$
$$=4+2a+b$$
$$\geq 4+2\sqrt{2ab}$$
$$=4+2\times 2$$
$$=8\ (\text{단, 등호는 } 2a=b\text{일 때 성립})$$

따라서 $(a+1)(b+2)$의 최솟값은 8이다.

## 410
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(2^2+3^2)(a^2+b^2)\ge(2a+3b)^2$

이때 $a^2+b^2=100$이므로

$13\times100\ge(2a+3b)^2$

$(2a+3b)^2\le1300$

$\therefore -10\sqrt{13}\le2a+3b\le10\sqrt{13}$ $\left(\text{단, 등호는 } \frac{a}{2}=\frac{b}{3}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $2a+3b$의 최솟값은 $-10\sqrt{13}$이다.

## 411
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(1^2+2^2)\{(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2\}\ge(\sqrt{a}+2\sqrt{b})^2$

$5(a+b)\ge(\sqrt{a}+2\sqrt{b})^2$

이때 $a+b=5$이므로

$5\times5\ge(\sqrt{a}+2\sqrt{b})^2$, $(\sqrt{a}+2\sqrt{b})^2\le25$

그런데 $\sqrt{a}\ge0$, $2\sqrt{b}\ge0$이므로

$0\le\sqrt{a}+2\sqrt{b}\le5$ $\left(\text{단, 등호는 } \sqrt{a}=\frac{\sqrt{b}}{2}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $\sqrt{a}+2\sqrt{b}$의 최댓값은 5이다.

## 412
직사각형 전체의 가로의 길이를 $x$ cm, 세로의 길이를 $y$ cm라 하면 철사의 길이는 12 cm이므로

(철사의 길이)$=2x+5y=12$ (cm)

(직사각형 전체의 넓이)$=xy$ (cm$^2$)

$x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2x+5y\ge2\sqrt{2x\times5y}$

$\quad=2\sqrt{10xy}$ (단, 등호는 $2x=5y$일 때 성립)

이때 $2x+5y=12$이므로

$12\ge2\sqrt{10xy}$, $36\ge10xy$

$\therefore xy\le\frac{18}{5}$

따라서 직사각형 전체의 넓이의 최댓값은 $\frac{18}{5}$ cm$^2$이다.

## 413
직각삼각형에서 직각을 낀 두 변의 길이를 $x$, $y$라 하면 $x>0$, $y>0$

직각삼각형의 빗변의 길이가 4이므로 피타고라스 정리에 의하여

$\sqrt{x^2+y^2}=4 \qquad \therefore x^2+y^2=16$

$x^2>0$, $y^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x^2+y^2\ge2\sqrt{x^2y^2}$

$\quad=2xy$

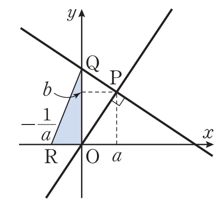
이때 $x^2+y^2=16$이므로

$16\ge2xy \qquad \therefore xy\le8$

직각삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}xy$이고

$\frac{1}{2}xy\le\frac{1}{2}\times8=4$

이므로 넓이의 최댓값은 4이다.

## 414



직선 OP의 기울기는 $\frac{b}{a}$이므로 점 P$(a, b)$를 지나고 직선 OP에 수직인 직선의 방정식은

$y-b=-\frac{a}{b}(x-a)$

$\therefore y=-\frac{a}{b}x+\frac{a^2}{b}+b$

$\therefore$ Q$\left(0, \frac{a^2}{b}+b\right)$

삼각형 OQR의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\frac{1}{a}\times\left(\frac{a^2}{b}+b\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)$

$a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\ge\frac{1}{2}\times2\sqrt{\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}}$

$\quad=1$ $\left(\text{단, 등호는 } \frac{a}{b}=\frac{b}{a}\text{, 즉 } a=b\text{일 때 성립}\right)$

따라서 삼각형 OQR의 넓이의 최솟값은 1이다.

**개념 보충**

수직인 두 직선의 기울기의 곱은 항상 $-1$이다.

## 415
직사각형의 가로, 세로의 길이를 각각 $x$, $y$라 하면 직사각형의 대각선의 길이가 3이므로

$x^2+y^2=9$

$x$, $y$가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(1^2+1^2)(x^2+y^2)\ge(x+y)^2$

$2(x^2+y^2)\ge(x+y)^2$

이때 $x^2+y^2=9$이므로

$2\times9\ge(x+y)^2$, $(x+y)^2\le18$

그런데 $x>0$, $y>0$이므로

$0<x+y\le3\sqrt{2}$ (단, 등호는 $x=y$일 때 성립)

직사각형의 둘레의 길이는 $2(x+y)$이므로

$0<2(x+y)\le6\sqrt{2}$

따라서 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값은 $6\sqrt{2}$이다.

## 내신 적중 서술형
104쪽

**416** 풀이 참조 **417** 풀이 참조 **418** 6

**419** (1) $(a+x)(b+y)$ m$^2$ (2) 54 m$^2$

## 416

주어진 명제의 대우는 '$x$, $y$가 모두 유리수이면 $x+y$는 유리수이다.'이다. …… ㉮

$x$, $y$가 모두 유리수이면

$x=\frac{b}{a}$, $y=\frac{d}{c}$ ($a$, $b$, $c$, $d$는 정수, $a\neq0$, $c\neq0$)

로 나타낼 수 있으므로

$x+y=\frac{b}{a}+\frac{d}{c}=\frac{ad+bc}{ac}$

이때 $ad+bc$와 $ac$는 정수이고, $ac\neq0$이므로 $x+y$는 유리수이다. …… ㉯

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다. …… ㉰

| 채점 기준 | 배점 비율 |
|---|---|
| ㉮ 주어진 명제의 대우 구하기 | 30 % |
| ㉯ $x$, $y$가 모두 유리수일 때, $x+y$가 유리수임을 보이기 | 50 % |
| ㉰ 대우가 참임을 이용하여 주어진 명제가 참임을 보이기 | 20 % |

## 417

$$\left(\sqrt{\frac{a+b}{2}}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)^2=\frac{a+b}{2}-\frac{a+2\sqrt{ab}+b}{4}$$
$$=\frac{a-2\sqrt{ab}+b}{4}$$
$$=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{4}\geq0$$ …… ㉮

$\therefore \left(\sqrt{\frac{a+b}{2}}\right)^2\geq\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)^2$ …… ㉯

그런데 $\sqrt{\frac{a+b}{2}}>0$, $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}>0$이므로

$\sqrt{\frac{a+b}{2}}\geq\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}$ …… ㉰

| 채점 기준 | 배점 비율 |
|---|---|
| ㉮ $\left(\sqrt{\frac{a+b}{2}}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)^2$의 부호 알아보기 | 40 % |
| ㉯ $\left(\sqrt{\frac{a+b}{2}}\right)^2$과 $\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)^2$의 대소 비교하기 | 30 % |
| ㉰ 주어진 부등식이 성립함을 보이기 | 30 % |

## 418

$x-1+\frac{4}{x-3}=(x-3)+2+\frac{4}{x-3}$ …… ㉮

이때 $x>3$에서 $x-3>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x-1+\frac{4}{x-3}=2+(x-3)+\frac{4}{x-3}$$
$$\geq2+2\sqrt{(x-3)\times\frac{4}{x-3}}$$ …… ㉯
$$=2+2\times2$$
$$=6\ \left(\text{단, 등호는 } x-3=\frac{4}{x-3}\text{일 때 성립}\right)$$

따라서 $x-1+\frac{4}{x-3}$의 최솟값은 6이다. …… ㉰

| 채점 기준 | 배점 비율 |
|---|---|
| ㉮ 주어진 식을 변형하기 | 30 % |
| ㉯ 산술평균과 기하평균의 관계 이용하기 | 40 % |
| ㉰ 주어진 식의 최솟값 구하기 | 30 % |

## 419

(1) 큰 직사각형의 가로의 길이는 $(a+x)$ m, 세로의 길이는 $(b+y)$ m이므로 넓이는
$(a+x)(b+y)$ $\text{m}^2$ …… ㉮

(2) $ab=6$, $xy=24$이고 $a+x>0$, $b+y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$(a+x)(b+y)=ab+ay+bx+xy$$
$$=6+ay+bx+24$$
$$=30+ay+bx$$
$$\geq30+2\sqrt{abxy}$$
$$=30+2\sqrt{6\times24}$$
$$=30+24$$
$$=54\ (\text{단, 등호는 } ay=bx\text{일 때 성립})$$

따라서 큰 직사각형의 넓이의 최솟값은 54 $\text{m}^2$이다. …… ㉯

| | 채점 기준 | 배점 비율 |
|---|---|---|
| (1) | ㉮ 큰 직사각형의 넓이를 $a$, $b$, $x$, $y$에 대한 식으로 나타내기 | 30 % |
| (2) | ㉯ 큰 직사각형의 넓이의 최솟값 구하기 | 70 % |

## 1등급 실력 완성

● 105쪽

**420** ③ **421** 25 **422** 154 **423** ⑤

## 420

귀류법

전략 귀류법을 이용하여 $\sqrt{n^2-1}$이 무리수임을 증명한다.

풀이 $\sqrt{n^2-1}$이 유리수라고 가정하면

$\sqrt{n^2-1}=\frac{q}{p}$ ($p$, $q$는 서로소인 자연수)

로 놓을 수 있다.

이 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$p^2(n^2-1)=q^2$

에서 $p$는 $q^2$의 약수이고 $p$, $q$는 서로소인 자연수이므로

$p=1$

따라서 $1^2\times(n^2-1)=q^2$이므로

$n^2=\boxed{q^2+1}$

자연수 $k$에 대하여

(i) $q=2k$일 때,
$n^2=(2k)^2+1=4k^2+1$이고
$(2k)^2<4k^2+1<\boxed{(2k+1)^2}$이므로

$(2k)^2 < n^2 < (2k+1)^2$

$\therefore 2k < n < 2k+1$

그런데 위의 부등식을 만족시키는 자연수 $n$은 존재하지 않는다.

(ii) $q=2k+1$일 때,

$n^2=(2k+1)^2+1=4k^2+2k+2$이고

$(2k+1)^2 < 4k^2+4k+2 < (2k+2)^2$이므로

$(2k+1)^2 < n^2 < (2k+2)^2$

$\therefore 2k+1 < n < 2k+2$

그런데 위의 부등식을 만족시키는 자연수 $n$은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에 의하여 $\sqrt{n^2-1}=\dfrac{q}{p}$ ($p$, $q$는 서로소인 자연수)를 만족시키는 자연수 $n$은 존재하지 않는다.

따라서 $\sqrt{n^2-1}$은 무리수이다.

$f(q)=q^2+1$, $g(k)=(2k+1)^2$이므로

$f(2)+g(3)=5+49=54$

## 421

**산술평균과 기하평균의 관계; 식의 전개, 식의 변형**

(전략) 산술평균과 기하평균의 관계를 이용할 수 있도록 식을 변형한다.

(풀이) $x>2$, $y>3$에서 $x-2>0$, $y-3>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$(x+y-5)\left(\dfrac{9}{x-2}+\dfrac{4}{y-3}\right)$

$=\{(x-2)+(y-3)\}\left(\dfrac{9}{x-2}+\dfrac{4}{y-3}\right)$

$=9+\dfrac{4(x-2)}{y-3}+\dfrac{9(y-3)}{x-2}+4$

$=13+\dfrac{4(x-2)}{y-3}+\dfrac{9(y-3)}{x-2}$

$\geq 13+2\sqrt{\dfrac{4(x-2)}{y-3}\times\dfrac{9(y-3)}{x-2}}$

$=13+2\times6$

$=25$ $\left(\text{단, 등호는 } \dfrac{4(x-2)}{y-3}=\dfrac{9(y-3)}{x-2}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $(x+y-5)\left(\dfrac{9}{x-2}+\dfrac{4}{y-3}\right)$의 최솟값은 25이다.

## 422

**산술평균과 기하평균의 관계**

(전략) 주어진 이차방정식이 허근을 가짐을 이용하여 $a$의 값의 범위를 구하고, 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

(풀이) 이차방정식 $x^2-4x+a=0$이 허근을 가지므로 이차방정식 $x^2-4x+a=0$의 판별식을 $D$라 하면

$\dfrac{D}{4}=4-a<0$

$\therefore a>4$

$a-4>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a-4+\dfrac{49}{a-4} \geq 2\sqrt{(a-4)\times\dfrac{49}{a-4}}$

$=2\times7$

$=14$

이때 등호는 $a-4=\dfrac{49}{a-4}$, 즉 $(a-4)^2=49$일 때 성립하므로

$a-4=\pm7$

$\therefore a=11$ ($\because a>4$)

따라서 $m=14$, $p=11$이므로

$mp=14\times11=154$

## 423

**절대부등식의 활용**

(전략) 상자의 밑면의 세로의 길이를 $x$ cm, 높이를 $y$ cm로 놓고 부피의 식을 세워서 비용의 최솟값을 구한다.

(풀이) 직육면체 모양의 상자의 밑면의 세로의 길이를 $x$ cm, 높이를 $y$ cm라 하면

$16xy=6400$

$\therefore xy=400$

상자를 한 개 만드는 데 필요한 종이의 넓이는

(밑면의 넓이)$=16x$

(옆면의 넓이)$=2(16y+xy)$

$=32y+2xy$

이므로 종이를 구입하는 데 드는 비용은

$4\times16x+8(32y+2xy)=64x+256y+16xy$

$=64(x+4y)+16\times400$

$=64(x+4y)+6400$

$x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x+4y\geq2\sqrt{4xy}$

$=2\sqrt{4\times400}=80$ (단, 등호는 $x=4y$일 때 성립)

따라서 상자를 한 개 만드는 데 드는 비용의 최솟값은

$64\times80+6400=11520$(원)

## 도전 1등급 최고난도

106쪽

**424** ③ **425** 12

## 424

**절대부등식의 활용**

(1단계) 두 점 A, M의 좌표를 각각 $a$에 대한 식으로 나타낸다.

점 A는 이차함수 $f(x)=x^2-2ax$의 그래프와 직선 $g(x)=\dfrac{2}{a}x$가 만나는 점이므로

$x^2-2ax=\dfrac{2}{a}x$

$x^2-\left(2a+\dfrac{2}{a}\right)x=0$

$x\left(x-2a-\dfrac{2}{a}\right)=0$

$\therefore x=2a+\frac{2}{a}\ (\because x>0),\ y=\frac{2}{a}\times\left(2a+\frac{2}{a}\right)=4+\frac{4}{a^2}$

$\therefore \mathrm{A}\left(2a+\frac{2}{a},\ 4+\frac{4}{a^2}\right)$

즉, 선분 OA의 중점 M의 좌표는

$\left(\frac{2a+\frac{2}{a}+0}{2},\ \frac{4+\frac{4}{a^2}+0}{2}\right)$에서 $\left(a+\frac{1}{a},\ 2+\frac{2}{a^2}\right)$

(2단계) 선분 MH의 길이는 점 M의 $x$좌표와 같음을 알고, 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

이때 점 H는 점 M에서 $y$축에 내린 수선의 발이므로 선분 MH의 길이는 점 M의 $x$좌표와 같다.

$a>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\overline{\mathrm{MH}}=a+\frac{1}{a} \geq 2\sqrt{a\times\frac{1}{a}} =2 \ \left(\text{단, 등호는 } a=\frac{1}{a},\ \text{즉 } a=1\text{일 때 성립}\right)$$

따라서 선분 MH의 길이의 최솟값은 2이다.

## 425

절대부등식의 활용

(1단계) 피타고라스 정리를 이용하여 $\overline{\mathrm{AC}}$의 길이를 구한다.

직각삼각형 ABC에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{AC}}^2=3^2+4^2$

$\therefore \overline{\mathrm{AC}}=5\ (\because \overline{\mathrm{AC}}>0)$

(2단계) 삼각형의 넓이를 이용하여 식을 구한다.

직각삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times3\times\overline{\mathrm{PH_1}}+\frac{1}{2}\times4\times\overline{\mathrm{PH_2}}+\frac{1}{2}\times5\times\overline{\mathrm{PH_3}}=\frac{1}{2}\times3\times4$

$\therefore 3\overline{\mathrm{PH_1}}+4\overline{\mathrm{PH_2}}+5\overline{\mathrm{PH_3}}=12$ …… ㉠

(3단계) 코시-슈바르츠의 부등식을 활용한다.

$$\{(\sqrt{3})^2+(\sqrt{4})^2+(\sqrt{5})^2\}\times\{(\sqrt{3}\times\overline{\mathrm{PH_1}})^2+(\sqrt{4}\times\overline{\mathrm{PH_2}})^2+(\sqrt{5}\times\overline{\mathrm{PH_3}})^2\}\geq(3\overline{\mathrm{PH_1}}+4\overline{\mathrm{PH_2}}+5\overline{\mathrm{PH_3}})^2$$

$\therefore 12(3\overline{\mathrm{PH_1}}^2+4\overline{\mathrm{PH_2}}^2+5\overline{\mathrm{PH_3}}^2)\geq(3\overline{\mathrm{PH_1}}+4\overline{\mathrm{PH_2}}+5\overline{\mathrm{PH_3}})^2$

(단, 등호는 $\overline{\mathrm{PH_1}}=\overline{\mathrm{PH_2}}=\overline{\mathrm{PH_3}}$일 때 성립) …… ㉡

(4단계) 주어진 식의 최솟값을 구한다.

㉠을 ㉡에 대입하면

$12(3\overline{\mathrm{PH_1}}^2+4\overline{\mathrm{PH_2}}^2+5\overline{\mathrm{PH_3}}^2)\geq12^2$

$\therefore 3\overline{\mathrm{PH_1}}^2+4\overline{\mathrm{PH_2}}^2+5\overline{\mathrm{PH_3}}^2\geq12$

따라서 $3\overline{\mathrm{PH_1}}^2+4\overline{\mathrm{PH_2}}^2+5\overline{\mathrm{PH_3}}^2$의 최솟값은 12이다.

# III 함수와 그래프

## 09 함수

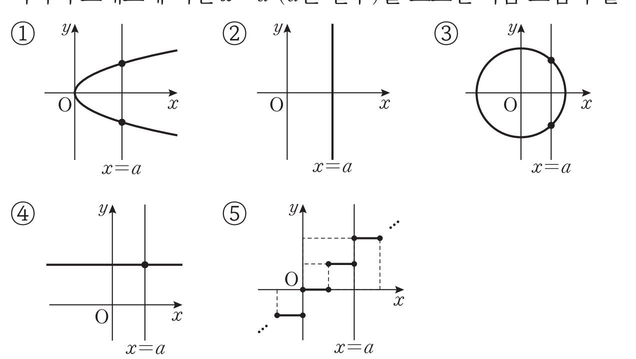
### 유형 분석 기출

● 109쪽~115쪽

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 426 ④ | 427 ⑤ | 428 ④ | 429 ① | 430 1 |
| 431 ④ | 432 ③ | 433 ④ | 434 10 | 435 2 |
| 436 ③ | 437 ③ | 438 2 | 439 ④ | |
| 440 ㄷ, ㅁ | 441 4 | 442 ⑤ | 443 ① | 444 ④ |
| 445 5 | 446 12 | 447 ④ | 448 2 | 449 ③ |
| 450 ④ | 451 ⑤ | 452 30 | 453 ⑤ | 454 ③ |
| 455 125 | 456 96 | 457 12 | 458 $-36$ | 459 ② |
| 460 ③ | | | | |

## 426

각각의 그래프에 직선 $x=a$ ($a$는 실수)를 그으면 다음 그림과 같다.




①, ②, ③, ⑤ 주어진 그래프와 직선 $x=a$의 교점이 1개가 아닌 경우가 존재하므로 함수가 아니다.

④ 주어진 그래프와 직선 $x=a$의 교점이 1개이므로 함수이다.

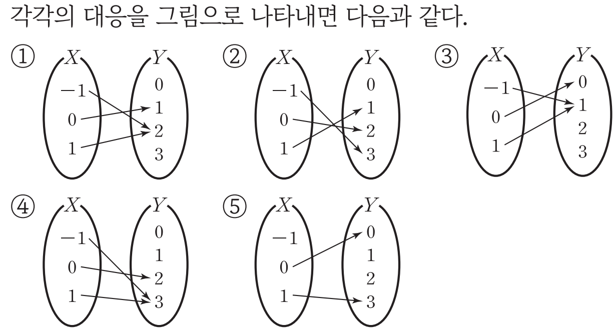
따라서 함수의 그래프인 것은 ④이다.

**1등급 비법**

정의역의 각 원소 $a$에 대하여 $x$축에 수직인 직선 $x=a$를 그래프 위에 그었을 때, 교점의 개수가 1이면 함수의 그래프이다.

## 427

각각의 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



①, ②, ③, ④ 함수이다.

⑤ 집합 $X$의 원소 $-1$에 대응하는 집합 $Y$의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

따라서 $X$에서 $Y$로의 함수가 아닌 것은 ⑤이다.

## 428

① $-1\le x\le 1$에서 $-1\le f(x)\le 1$

② $-1\le x\le 1$에서 $-2\le -2x\le 2$

$-1\le -2x+1\le 3$ $\quad\therefore -1\le f(x)\le 3$

③ $-1\le x\le 1$에서 $0\le |x|\le 1$

$0\le 2|x|\le 2$, $-1\le 2|x|-1\le 1$

$\therefore -1\le f(x)\le 1$

④ $-1\le x\le 1$에서 $0\le |x|\le 1$

$-3\le -3|x|\le 0$, $-2\le -3|x|+1\le 1$

$\therefore -2\le f(x)\le 1$

⑤ $-1\le x\le 1$에서 $0\le x^2\le 1$

$0\le 3x^2\le 3$, $-1\le 3x^2-1\le 2$

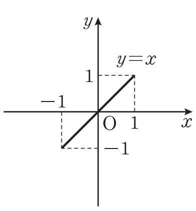
$\therefore -1\le f(x)\le 2$

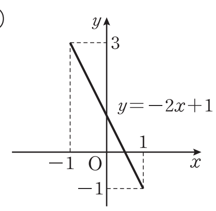
①, ②, ③, ⑤ $f(x)$의 치역이 공역 $Y$에 포함되므로 함수이다.

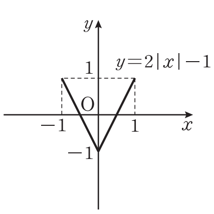
④ $f(x)$의 치역이 공역 $Y$에 포함되지 않으므로 함수가 아니다.

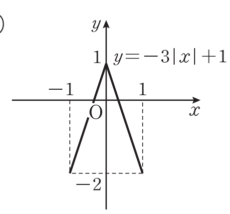
따라서 $X$에서 $Y$로의 함수가 아닌 것은 ④이다.

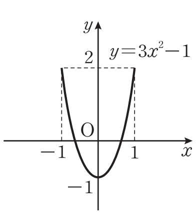
참고 $-1\le x\le 1$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.

①



②



③



④



⑤



## 429

$f\left(\dfrac{x+3}{2}\right)$에서 $f(4)$의 값을 구하려면 $\dfrac{x+3}{2}=4$를 만족시키는 $x$의 값을 구해야 한다.

$\dfrac{x+3}{2}=4$에서 $x+3=8$ $\quad\therefore x=5$

$f\left(\dfrac{x+3}{2}\right)=-x^2+4x$에 $x=5$를 대입하면

$f(4)=-5^2+4\times 5=-5$

## 430

$f(3)=3-2=1$

$f(17)=f(17-5)=f(12-5)=f(7-5)$

$=f(2)=2-2=0$

$\therefore f(3)+f(17)=1+0=1$

## 431

조건 (나)에서 $f(2n-1)=n+1$이므로

$f(99)=f(2\times 50-1)=50+1=51$

조건 (가)에서 $f(2n)=f(n)$이므로

$f(100)=f(50)=f(25)$

$=f(2\times 13-1)$ ($\because$ 조건 (나))

$=13+1=14$

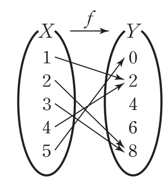
$\therefore f(99)+f(100)=51+14=65$

## 432

$f(x)=(2x^2$의 일의 자리의 숫자$)$이므로

$f(1)=2$, $f(2)=8$, $f(3)=8$, $f(4)=2$, $f(5)=0$

이고, 대응을 그림으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.




함숫값이 2인 정의역 $X$의 원소는 1과 4이므로 $f(a)=2$인 $X$의 원소 $a$는

$a=1$ 또는 $a=4$

함숫값이 8인 정의역 $X$의 원소는 2와 3이므로 $f(b)=8$인 $X$의 원소 $b$는

$b=2$ 또는 $b=3$

이때 $a$, $b$의 순서쌍 $(a, b)$로 가능한 것은

$(1, 2)$, $(1, 3)$, $(4, 2)$, $(4, 3)$

이므로 $a+b$의 값은 3, 4, 6, 7이다.

따라서 $a+b$의 최댓값은 7이다.

## 433

$f(-2)=(-2)\times(-2)+1=5$

$f(-1)=(-2)\times(-1)+1=3$

$f(0)=2$

$f(1)=1^2+1=2$

$f(2)=2^2+1=5$

따라서 함수 $f$의 치역은 $\{2, 3, 5\}$이므로 치역의 모든 원소의 합은

$2+3+5=10$

## 434

$f(-1)=-4$, $f(1)=2$, $f(3)=8$, $f(a)=3a-1$이므로 치역은

$\{-4, 2, 8, 3a-1\}$

이것이 $\{-4, 2, 5, b\}$와 같아야 하므로

$3a-1=5$, $b=8$

$3a-1=5$에서 $3a=6$ $\quad\therefore a=2$

$\therefore a+b=2+8=10$

## 435

(i) $a>0$일 때,

$f(-3)=-3$, $f(1)=1$이므로

$-3a+b=-3$, $a+b=1$

두 식을 연립하여 풀면

$a=1$, $b=0$

그런데 $ab=0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a<0$일 때,

$f(-3)=1$, $f(1)=-3$이므로

$-3a+b=1$, $a+b=-3$

두 식을 연립하여 풀면

$a=-1$, $b=-2$

$\therefore ab=(-1)\times(-2)=2$

(i), (ii)에서 $ab=2$

## 436

ㄱ. $f(x)=x$, $g(x)=x^3$에서

$f(-1)=-1$, $g(-1)=-1$이므로 $f(-1)=g(-1)$

$f(1)=1$, $g(1)=1$이므로 $f(1)=g(1)$

$\therefore f=g$

ㄴ. $f(x)=|-x|$, $g(x)=x^2$에서

$f(-1)=1$, $g(-1)=1$이므로 $f(-1)=g(-1)$

$f(1)=1$, $g(1)=1$이므로 $f(1)=g(1)$

$\therefore f=g$

ㄷ. $f(x)=2$, $g(x)=|x+1|$에서

$f(-1)=2$, $g(-1)=0$이므로 $f(-1)\neq g(-1)$

$\therefore f\neq g$

이상에서 $f=g$인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

## 437

$f(x)=g(x)$이므로

$f(-1)=g(-1)$에서

$-a+3=-1+2+b \qquad \therefore a+b=2 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$f(2)=g(2)$에서

$2a+3=8-4+b \qquad \therefore 2a-b=1 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=1$

$\therefore a-b=1-1=0$

## 438

$f(x)=g(x)$이므로

$f(a)=g(a)$에서

$a^3-4a=a^2-2a$

$a^3-a^2-2a=0$, $a(a+1)(a-2)=0$

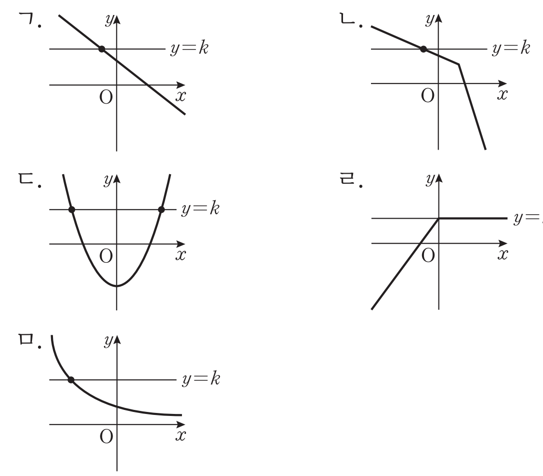
$\therefore a=-1$ 또는 $a=0$ 또는 $a=2$

이때 집합 $X$의 원소가 3개이려면 $a\neq 0$, $a\neq -1$이어야 하므로

$a=2$

## 439

각각의 그래프에 직선 $y=k$ ($k$는 실수)를 그으면 다음 그림과 같다.




ㄱ, ㄴ. 주어진 그래프와 직선 $y=k$의 교점이 1개이고, 치역과 공역이 같으므로 일대일대응이다.

ㄷ, ㄹ. 주어진 그래프와 직선 $y=k$의 교점이 1개가 아닌 경우가 존재하므로 일대일함수가 아니다.

ㅁ. 주어진 그래프와 직선 $y=k$의 교점이 1개이므로 일대일함수이지만 치역과 공역이 같지 않으므로 일대일대응은 아니다.

이상에서 일대일함수의 그래프인 것은 ㄱ, ㄴ, ㅁ의 3개, 일대일대응의 그래프인 것은ㄱ, ㄴ의 2개이므로

$a=3$, $b=2$

$\therefore a+b=3+2=5$

참고 ㅁ. 공역은 실수 전체의 집합, 치역은 $\{y|y>0\}$이므로 (공역)$\neq$(치역)

## 440

ㄱ. $f(x)=4$라 하면 $x_1=1$, $x_2=2$일 때 $x_1\neq x_2$이지만

$f(x_1)=4$, $f(x_2)=4 \qquad \therefore f(x_1)=f(x_2)$

따라서 함수 $y=4$는 일대일대응이 아니다.

ㄴ. $f(x)=-|x|$라 하면 $x_1=-1$, $x_2=1$일 때 $x_1\neq x_2$이지만

$f(x_1)=-1$, $f(x_2)=-1 \qquad \therefore f(x_1)=f(x_2)$

따라서 함수 $y=-|x|$는 일대일대응이 아니다.

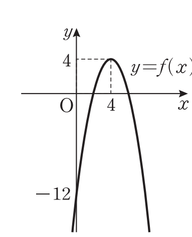
ㄹ. $f(x)=-x^2+x$라 하면 $x_1=0$, $x_2=1$일 때 $x_1\neq x_2$이지만

$f(x_1)=0$, $f(x_2)=0 \qquad \therefore f(x_1)=f(x_2)$

따라서 함수 $y=-x^2+x$는 일대일대응이 아니다.

이상에서 일대일대응인 것은 ㄷ, ㅁ이다.

## 441




$f(x)=-x^2+8x-12$

$\quad\;\; =-(x-4)^2+4$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

이때 정의역이 $\{x|x\leq a$인 실수$\}$이므로 함수 $f(x)$가 일대일함수가 되려면 $a\leq 4$이어야

한다.
따라서 $a$의 최댓값은 4이다.

## 442

$f(x)=3x+a|x|+2$에서
(i) $x\geq 0$일 때,
$f(x)=3x+ax+2=(a+3)x+2$
(ii) $x<0$일 때,
$f(x)=3x-ax+2=(3-a)x+2$
(i), (ii)에서 함수 $f(x)$가 일대일대응이려면 직선 $y=f(x)$의 기울기의 부호가 서로 같아야 하므로
$(a+3)(3-a)>0 \qquad \therefore -3<a<3$
따라서 정수 $a$는 $-2, -1, 0, 1, 2$의 5개이다.

**1등급 비법**

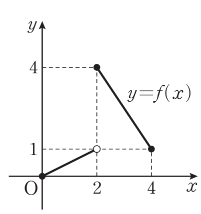
함수 $f(x)$가 일대일대응이 되려면
① $x$의 값이 증가할 때 $f(x)$의 값은 항상 증가하거나 항상 감소해야 한다.
② 정의역의 양 끝 값에서의 함숫값이 공역의 양 끝 값과 같아야 한다.

## 443

함수 $f$가 일대일대응이려면 $x<1$일 때와 $x\geq 1$일 때의 함수 $y=f(x)$의 그래프의 기울기의 부호가 서로 같아야 하므로
$m(m-4)>0 \qquad \therefore m<0$ 또는 $m>4$ ······ ㉠
또, 일대일대응이려면 치역과 공역이 같아야 하므로 두 직선 $y=mx+1$, $y=(m-4)x+m^2$이 $x=1$인 점에서 만나야 한다. 즉,
$m+1=m-4+m^2$, $m^2=5$
$\therefore m=-\sqrt{5}$ ($\because$ ㉠)

## 444

$0\leq x<2$에서 $f(x)=\frac{1}{2}x$의 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같고, 함수 $f(x)$가 일대일대응이므로 $2\leq x\leq 4$에서 $f(x)=ax+b$ $(a<0)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 두 점 $(2, 4)$, $(4, 1)$을 지나야 한다.




두 점 $(2, 4)$, $(4, 1)$을 지나는 직선의 방정식은
$y-1=-\frac{3}{2}(x-4) \qquad \therefore y=-\frac{3}{2}x+7$

$$\therefore f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x & (0\leq x<2) \\ -\frac{3}{2}x+7 & (2\leq x\leq 4) \end{cases}$$

따라서 $a=-\frac{3}{2}$, $b=7$, $f(3)=\frac{5}{2}$이므로
$a+b+f(3)=-\frac{3}{2}+7+\frac{5}{2}=8$

**오답 피하기** 이 문제의 경우에는 함수가 일대일대응이 되려면 기울기의 부호가 같아야 한다는 조건을 이용하여 $a>0$으로 잘못 생각하여 두 점 $(2, 1)$, $(4, 4)$를 지나는 직선의 방정식을 구하면 안된다. 문제의 조건에서 $a<0$이므로 주어진 풀이와 같이 풀어야 한다.

## 445

함수 $f$가 일대일대응이므로 함숫값은 모두 다르다.
조건 (나)에서 $f(1)f(6)=\{f(4)\}^2$이므로
$1\times 4=2^2$에서 $f(4)=2$이고
$f(1)=1, f(6)=4$ 또는 $f(1)=4, f(6)=1$
(i) $f(1)=1, f(6)=4$이면
조건 (다)에서 $f(5)=2f(2)$
이때 $f(2)\neq 1$, $f(2)\neq 2$이므로
$f(2)=3$, $f(5)=6$
$\therefore f(3)=5$
(ii) $f(1)=4, f(6)=1$이면
조건 (다)에서 $4f(5)=2f(2)$
$\therefore f(2)=2f(5)$
이때 $f(5)\neq 1$, $f(5)\neq 2$이므로
$f(5)=3$, $f(2)=6$
$\therefore f(3)=5$
(i), (ii)에서 $f(3)=5$

## 446

$3\leq n\leq 5$인 모든 자연수 $n$에 대하여 $f(n)f(n+2)$의 값이 짝수이므로 $f(3)f(5)$, $f(4)f(6)$, $f(5)f(7)$은 모두 짝수이다.
$f(4)$ 또는 $f(6)$은 적어도 하나가 짝수이고, 집합 $X$의 원소 중 짝수인 것은 4, 6뿐이므로 $f(3)f(5)$와 $f(5)f(7)$이 모두 짝수이려면 $f(5)$는 짝수가 되어야 한다.
즉, $f(3)$, $f(7)$은 모두 홀수이므로 $f(3)+f(7)$의 값이 최대가 되는 것은
$f(3)=5$, $f(7)=7$ 또는 $f(3)=7$, $f(7)=5$
일 때이다.
따라서 $f(3)+f(7)$의 최댓값은
$5+7=12$

## 447

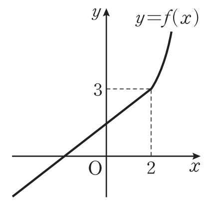
$f(x)\neq x$를 만족시키는 일대일대응인 함수 $f$는 다음과 같다.

| $f(1)$ | $f(2)$ | $f(3)$ | $f(4)$ |
|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 4 | 3 |
| | 3 | 4 | 1 |
| | 4 | 1 | 3 |
| 3 | 1 | 4 | 2 |
| | 4 | 1 | 2 |
| | 4 | 2 | 1 |
| 4 | 1 | 2 | 3 |
| | 3 | 1 | 2 |
| | 3 | 2 | 1 |

따라서 구하는 함수 $f$의 개수는 9이다.

## 448

함수 $f$가 일대일대응이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.




직선 $y=ax-3x+b$, 즉

$y=(a-3)x+b$의 기울기가 양수이어야 하므로

$a-3>0 \qquad \therefore a>3 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

또, 직선 $y=(a-3)x+b$가 점 $(2, 3)$을 지나야 하므로

$3=2(a-3)+b \qquad \therefore a=\dfrac{9-b}{2}$

이때 ㉠에서 $\dfrac{9-b}{2}>3$이므로

$9-b>6 \qquad \therefore b<3$

따라서 정수 $b$의 최댓값은 2이다.

## 449

$f(x)$가 항등함수가 되려면 $f(x)=x$이어야 한다.

$x^2-30=x$, $x^2-x-30=0$

$(x+5)(x-6)=0$

$\therefore x=-5$ 또는 $x=6$

따라서 집합 $X$는 집합 $\{-5, 6\}$의 공집합이 아닌 부분집합이어야 하므로

$\{-5\}$, $\{6\}$, $\{-5, 6\}$

의 3개이다.

참고 원소의 개수가 $n$인 집합의 부분집합의 개수는 $2^n$이므로 집합 $\{-5, 6\}$의 공집합이 아닌 부분집합의 개수는

$2^2-1=3$

## 450

$f(x)$는 상수함수이므로 $f(0)=f(2)=f(4)$

$f(0)=f(2)$에서 $2=4+2a+b$

$\therefore 2a+b=-2 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$f(0)=f(4)$에서 $2=16+4a+b$

$\therefore 4a+b=-14 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-6$, $b=10$

$\therefore a+b=-6+10=4$

## 451

$g(x)$는 항등함수이므로 $g(4)=4$

$\therefore f(4)=h(4)=4$ ($\because$ 조건 (가))

한편, $f(x)$가 일대일대응이고 $f(4)=4$이므로

$f(2)=2$, $f(8)=8$ 또는 $f(2)=8$, $f(8)=2$

그런데 $f(2)=2$, $f(8)=8$이면 $f(8)f(4)\neq f(2)$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

$\therefore f(2)=8$, $f(8)=2$

또, $h(x)$는 상수함수이므로 $h(2)=4$

$\therefore f(2)+h(2)=8+4=12$

## 452

구하는 함수의 개수는 $X$에서 $Y$로의 함수의 개수에서 치역이 $\{a\}$ 또는 $\{b\}$의 함수의 개수를 뺀 것과 같다.

집합 $X$에서 집합 $Y$로의 함수의 개수는

$2^5=32$

이 중에서 치역이 $\{a\}$ 또는 $\{b\}$인 함수의 개수는 2이다.

따라서 공역과 치역이 같은 함수의 개수는

$32-2=30$

**1등급 비법**

**여러 가지 함수의 개수**

두 집합 $X$, $Y$의 원소의 개수가 각각 $m$, $n$일 때, $X$에서 $Y$로의

① 함수의 개수 ⇨ $n^m$

② 일대일함수의 개수

⇨ $n\times(n-1)\times(n-2)\times \cdots \times(n-m+1)$ (단, $n\geq m$)

③ 일대일대응의 개수

⇨ $n\times(n-1)\times(n-2)\times \cdots \times 3\times2\times1$ (단, $m=n$)

④ 상수함수의 개수 ⇨ $n$

## 453

집합 $Y$의 원소의 개수를 $n$이라 하면 집합 $X=\{a, b, c\}$에서 집합 $Y$로의 일대일함수의 개수가 210이므로

$n(n-1)(n-2)=210=7\times6\times5 \qquad \therefore n=7$

이때 $X$에서 $Y$로의 상수함수의 개수는 집합 $Y$의 원소의 개수와 같으므로 7이다.

## 454

조건 (가)에서 함수 $f$는 일대일함수이다.

조건 (나)에서 $f(x)$의 값이 될 수 있는 것은 $-2$, $-1$, 0, 1, 2이다.

(i) $f(-1)$의 값이 될 수 있는 것은

$-2$, $-1$, 0, 1, 2 중 하나이므로 5개

(ii) $f(0)$의 값이 될 수 있는 것은

$f(-1)$의 값을 제외한 4개

(iii) $f(1)$의 값이 될 수 있는 것은

$f(-1)$, $f(0)$의 값을 제외한 3개

(i), (ii), (iii)에서 주어진 조건을 만족시키는 함수 $f$의 개수는

$5\times4\times3=60$

## 455

$f(x)-f(-x)=0$에서 $f(x)=f(-x)$

$f(2)$의 값이 될 수 있는 것은 $-2$, $-1$, 0, 1, 2 중 하나이므로 5개이고, $f(-2)=f(2)$에서 $f(-2)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(2)$의 값과 같으므로 1개이다.

같은 방법으로 $f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 $-2$, $-1$, 0, 1, 2 중 하나이므로 5개이고, $f(-1)=f(1)$에서 $f(-1)$의 값이 될 수 있는 것은 1개이다.

또, $f(0)$의 값이 될 수 있는 것은 $-2$, $-1$, 0, 1, 2 중 하나이므로 5개이다. 따라서 함수 $f$의 개수는

$5\times1\times5\times1\times5=125$

## 456

(i) $x=1$일 때,

$1+f(1)\geq 4 \qquad \therefore f(1)\geq 3$

따라서 $f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 3, 4 중 하나이므로 2개이다.

(ii) $x=2$일 때,

$2+f(2)\geq 4 \qquad \therefore f(2)\geq 2$

따라서 $f(2)$의 값이 될 수 있는 것은 2, 3, 4 중 하나이므로 3개이다.

(iii) $x=3$일 때,

$3+f(3)\geq 4 \qquad \therefore f(3)\geq 1$

따라서 $f(3)$의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3, 4 중 하나이므로 4개이다.

(iv) $x=4$일 때,

$4+f(4)\geq 4 \qquad \therefore f(4)\geq 0$

따라서 $f(4)$의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3, 4 중 하나이므로 4개이다.

(i)~(iv)에서 조건을 만족시키는 함수의 개수는

$2\times 3\times 4\times 4=96$

## 457

$\{f(-1)+1\}\{f(1)-1\}\neq 0$에서

$f(-1)\neq -1$이고 $f(1)\neq 1$

(i) $f(-1)$의 값이 될 수 있는 것은 0, 1 중 하나이므로 2개

(ii) $f(0)$의 값이 될 수 있는 것은 $-1$, 0, 1 중 하나이므로 3개

(iii) $f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 $-1$, 0 중 하나이므로 2개

(i), (ii), (iii)에서 주어진 조건을 만족시키는 함수 $f$의 개수는

$2\times 3\times 2=12$

## 458

$y=|x-4|-|x+2|$에서

(i) $x<-2$일 때,

$y=-(x-4)+(x+2)=6$

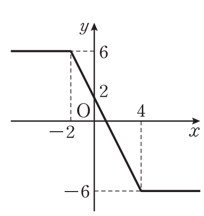
(ii) $-2\leq x<4$일 때,

$y=-(x-4)-(x+2)=-2x+2$

(iii) $x\geq 4$일 때,

$y=(x-4)-(x+2)=-6$

(i), (ii), (iii)에서 주어진 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로




$M=6$, $m=-6$

$\therefore Mm=6\times(-6)=-36$

**1등급 비법**

$y=|x-a|+|x-b|$ $(a<b)$와 같이 절댓값 기호를 2개 포함한 함수는 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 $x$의 값, 즉 $x=a$, $x=b$를 경계로 다음과 같이 $x$의 값의 범위를 나누어 그래프를 그린다.

(i) $x<a$ (ii) $a\leq x<b$ (iii) $x\geq b$

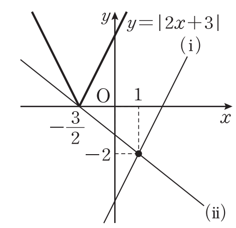
## 459

$y=f(|x|)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프에서 $x\geq 0$인 부분만 남기고, $x<0$인 부분을 없앤 다음, $x\geq 0$인 부분을 $y$축에 대하여 대칭이동한 것이다.

따라서 $y=f(|x|)$의 그래프의 개형은 ②이다.

## 460

$y=|2x+3|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 직선




$y=a(x-1)-2 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

는 $a$의 값에 관계없이 점 $(1, -2)$를 지난다.

(i) $a=2$일 때,

직선 ㉠이 $y=|2x+3|$ $\left(x>-\frac{3}{2}\right)$의 그래프와 평행하므로 $a>2$

(ii) 직선 ㉠이 점 $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$을 지날 때,

두 점 $(1, -2)$, $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$을 지나는 직선의 기울기가

$\dfrac{0-(-2)}{-\frac{3}{2}-1}=-\dfrac{4}{5}$ 이므로 $a\leq -\dfrac{4}{5}$

(i), (ii)에서 $a>2$ 또는 $a\leq -\dfrac{4}{5}$

따라서 $a$의 값으로 적당하지 않은 것은 ③이다.

**1등급 비법**

$y=a(x-1)-2$에서 $(x-1)a-y-2=0$이고, 이 식이 임의의 $a$에 대하여 성립하려면 항등식의 성질에 의하여 $x-1=0$, $-y-2=0$이어야 한다. 따라서 직선 $y=a(x-1)-2$는 $a$의 값에 관계없이 점 $(1, -2)$를 지난다.

## 내신 적중 서술형

● 116쪽

**461** 15 **462** $\{1\}$, $\{4\}$, $\{1, 4\}$ **463** 36

**464** (1) 풀이 참조 (2) 28

## 461

주어진 식에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0) \qquad \therefore f(0)=0$

주어진 식에 $x=1$, $y=-1$을 대입하면

$f(0)=f(1)+f(-1)$이므로

$0=3+f(-1) \qquad \therefore f(-1)=-3 \qquad \cdots\cdots$ ㉮

이때 $f(-2)$, $f(-3)$, $\cdots$을 $f(-1)$을 이용하여 나타내면

$f(-2)=f(-1)+f(-1)=2f(-1)$

$f(-3)=f(-2)+f(-1)=2f(-1)+f(-1)=3f(-1)$

$\vdots$

$\therefore f(-10)=10f(-1)$

같은 방법으로 $f(2), f(3), \cdots$을 $f(1)$을 이용하여 나타내면

$f(15)=15f(1)$ …… ㉯

$\therefore\ f(-10)+f(15)=10f(-1)+15f(1)$

$=10\times(-3)+15\times3$

$=15$ …… ㉰

| 채점 기준 | 배점 비율 |
|---|---|
| ㉮ $f(-1)$의 값 구하기 | 30 % |
| ㉯ $f(-10), f(15)$를 각각 $f(-1), f(1)$을 이용하여 나타내기 | 50 % |
| ㉰ $f(-10)+f(15)$의 값 구하기 | 20 % |

다른 풀이 $f(-10)+f(15)=f(5)=f(1)+f(4)$

$=f(1)+f(1)+f(3)$

$=f(1)+f(1)+f(1)+f(2)$

$=f(1)+f(1)+f(1)+f(1)+f(1)$

$=5f(1)$

$=5\times3=15$

## 462

$f(x)=g(x)$에서

$x^2+2x-3=2x^2-3x+1$

$x^2-5x+4=0,\ (x-1)(x-4)=0$

$\therefore\ x=1$ 또는 $x=4$ …… ㉮

따라서 구하는 집합 $X$는 집합 $\{1, 4\}$의 공집합이 아닌 부분집합이어야 하므로

$\{1\}, \{4\}, \{1, 4\}$ …… ㉯

| 채점 기준 | 배점 비율 |
|---|---|
| ㉮ $f(x)=g(x)$를 만족시키는 $x$의 값 구하기 | 40 % |
| ㉯ 집합 $X$ 구하기 | 60 % |

## 463

(i) 함수의 개수

1에 대응할 수 있는 집합 $X$의 원소는 1, 2, 3의 3개이고, 2와 3에 대응할 수 있는 집합 $X$의 원소도 각각 1, 2, 3의 3개이므로

$a=3\times3\times3=27$ …… ㉮

(ii) 일대일대응의 개수

1에 대응할 수 있는 집합 $X$의 원소는 1, 2, 3의 3개,

2에 대응할 수 있는 집합 $X$의 원소는 1에 대응한 원소를 제외한 2개,

3에 대응할 수 있는 집합 $X$의 원소는 1, 2에 대응한 원소를 제외한 1개이므로

$b=3\times2\times1=6$ …… ㉯

(iii) 상수함수의 개수

1, 2, 3 모두에 대응할 수 있는 집합 $X$의 원소는 1, 2, 3의 3개이므로

$c=3$ …… ㉰

(i), (ii), (iii)에서

$a+b+c=27+6+3=36$ …… ㉱

| 채점 기준 | 배점 비율 |
|---|---|
| ㉮ $a$의 값 구하기 | 30 % |
| ㉯ $b$의 값 구하기 | 30 % |
| ㉰ $c$의 값 구하기 | 30 % |
| ㉱ $a+b+c$의 값 구하기 | 10 % |

## 464

(1) $f(x)=|x+3|+|x-2|$에서

(i) $x<-3$일 때,

$y=-(x+3)-(x-2)=-2x-1$

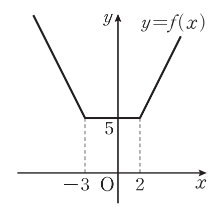
(ii) $-3\le x<2$일 때,

$y=(x+3)-(x-2)=5$

(iii) $x\ge2$일 때,

$y=(x+3)+(x-2)=2x+1$

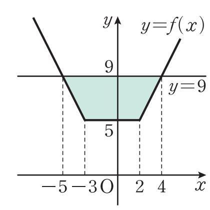
(i), (ii), (iii)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. …… ㉮




(2) $-2x-1=9$에서 $x=-5$

$2x+1=9$에서 $x=4$ …… ㉯

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=9$의 두 교점의 좌표는 $(-5, 9)$, $(4, 9)$이므로 구하는 넓이는




$\frac{1}{2}\times[\{2-(-3)\}+\{4-(-5)\}]\times(9-5)$

$=\frac{1}{2}\times(5+9)\times4=28$ …… ㉰

| | 채점 기준 | 배점 비율 |
|---|---|---|
| (1) | ㉮ $x$의 값의 범위를 나누어 $y=\lvert x+3\rvert+\lvert x-2\rvert$의 그래프 그리기 | 40 % |
| (2) | ㉯ $y=\lvert x+3\rvert+\lvert x-2\rvert$의 그래프와 직선 $y=9$의 교점의 $x$좌표 구하기 | 30 % |
| | ㉰ $y=\lvert x+3\rvert+\lvert x-2\rvert$의 그래프와 직선 $y=9$로 둘러싸인 도형의 넓이 구하기 | 30 % |

## 1등급 실력 완성

● 117쪽~118쪽

| | | | |
|---|---|---|---|
| **465** $-1$ | **466** 4 | **467** ② | **468** 17 |
| **469** $-32$ | **470** ⑤ | **471** ④ | **472** $0<m<\frac{1}{2}$ |

## 465

함수의 정의역, 공역, 치역

전략 정의역의 범위에 따라 치역의 범위가 어떻게 변하는지 알아본다.

풀이 (i) $x<1$일 때,

$x^2\ge0$이므로 $f(x)=x^2+2\ge2$

치역 $\{-8, 0, 6, 11\}$의 원소 중 2보다 크거나 같은 수는 6과 11이므로

$x^2+2=6$에서 $x^2=4$ $\quad\therefore x=-2\ (\because x<1)$

$x^2+2=11$에서 $x^2=9$ $\quad\therefore x=-3\ (\because x<1)$

(ii) $x\geq1$일 때,

$x^2\geq1$이므로 $-x^2\leq-1$ $\quad\therefore -x^2+1\leq0$

치역 $\{-8, 0, 6, 11\}$의 원소 중 0보다 작거나 같은 수는 $-8$과 0이므로

$-x^2+1=-8$에서 $x^2=9$ $\quad\therefore x=3\ (\because x\geq1)$

$-x^2+1=0$에서 $x^2=1$ $\quad\therefore x=1\ (\because x\geq1)$

(i), (ii)에서 함수 $f$의 정의역은 $\{-3, -2, 1, 3\}$이다.

따라서 함수 $f$의 정의역의 모든 원소의 합은

$(-3)+(-2)+1+3=-1$

## 466

함수의 정의역, 공역, 치역

전략 조건 (가)에서 치역의 원소의 개수가 5이므로 정의역의 원소 2개에 대응하는 공역의 원소가 1개 있고, 정의역의 원소에 대응하지 않는 공역의 원소가 1개 있음을 생각한다.

풀이 조건 (가)에서 함수 $f$의 치역의 원소의 개수가 5이므로 집합 $X$의 서로 다른 두 원소 $a$, $b$에 대하여 $f(a)=f(b)=n$을 만족시키는 집합 $X$의 원소 $n$이 1개 있다.

이때 집합 $X$의 원소 중 함숫값으로 사용되지 않은 원소를 $m$이라 하면 $1+2+3+4+5+6=21$이므로 조건 (나)에서

$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)=21+n-m=24$

$\therefore n-m=3$

집합 $X$의 원소 $n$, $m$에 대하여 $n-m=3$인 경우는 다음과 같다.

(i) $n=6$, $m=3$일 때,

함수 $f$의 치역은 $\{1, 2, 4, 5, 6\}$이고, 치역의 원소 중 최댓값은 6, 최솟값은 1이므로 그 차는

$6-1=5$

따라서 조건 (다)를 만족시키지 않는다.

(ii) $n=5$, $m=2$일 때,

함수 $f$의 치역은 $\{1, 3, 4, 5, 6\}$이고, 치역의 원소 중 최댓값은 6, 최솟값은 1이므로 그 차는

$6-1=5$

따라서 조건 (다)를 만족시키지 않는다.

(iii) $n=4$, $m=1$일 때,

함수 $f$의 치역은 $\{2, 3, 4, 5, 6\}$이고, 치역의 원소 중 최댓값은 6, 최솟값은 2이므로 그 차는

$6-2=4$

따라서 조건 (다)를 만족시킨다.

(i), (ii), (iii)에서 조건을 만족시키는 $n$의 값은 4이다.

## 467

서로 같은 함수

전략 $f(x)=g(x)$를 이용하여 조건을 만족시키는 $a$의 값을 구하고, 집합 $X$의 개수를 생각한다.

풀이 $f(x)=g(x)$에서

$x^3-3x^2+2x=ax^2-3ax+2a$

$x^3-(a+3)x^2+(3a+2)x-2a=0$

$(x-1)\{x^2-(a+2)x+2a\}=0$

$(x-1)(x-2)(x-a)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=a$

$a=1$ 또는 $a=2$이면 $n(X)$의 값이 최대인 집합 $X$는 $X=\{1, 2\}$이고, 이때 $X$의 모든 원소의 합은 $1+2=3$이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 $a\neq1$, $a\neq2$이므로 $X=\{1, 2, a\}$

$X$의 모든 원소의 합이 2이므로

$1+2+a=2$ $\quad\therefore a=-1$

$\therefore X=\{-1, 1, 2\}$

따라서 $f=g$를 만족시키는 집합 $X$의 개수는 공집합을 제외한 집합 $X$의 부분집합의 개수이므로

$n=2^3-1=7$

$\therefore a+n=(-1)+7=6$

참고 $h(x)=x^3-(a+3)x^2+(3a+2)x-2a$라 하면

$h(1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $h(x)$를 인수분해 하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -a-3 & 3a+2 & -2a \\ & & 1 & -a-2 & 2a \\ \hline & 1 & -a-2 & 2a & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore h(x)=(x-1)\{x^2-(a+2)x+2a\}$

## 468

일대일함수와 일대일대응

전략 이차함수가 일대일대응이 되기 위한 $a$, $b$의 조건을 구한 후 $a-b$의 최솟값을 구한다.

풀이 $f(x)=x^2-4x+3=(x-2)^2-1$

함수 $f(x)$가 일대일대응이 되기 위해서는 $a\geq2$이어야 한다.

$a\geq2$에서 함수 $f(x)$의 치역은 $\{y\,|\,y\geq f(a)\}$이고 치역이 집합 $Y=\{y\,|\,y\geq b\}$와 같아야 하므로 $b=f(a)$

$\therefore a-b=a-f(a)=a-(a^2-4a+3)$

$=-a^2+5a-3=-\left(a-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{13}{4}$

따라서 $a\geq2$에서 $a-b$의 최댓값은 $a=\frac{5}{2}$일 때 $\frac{13}{4}$이므로

$p=4$, $q=13$

$\therefore p+q=4+13=17$

## 469

일대일함수와 일대일대응

전략 조건 (나)를 이용하여 $f(x)$를 구하고, 조건 (나), (다)를 이용하여 함숫값을 구한다.

풀이 조건 (나)에서 $\{f(x)+x^2-5\}\{f(x)+4x\}=0$이므로

$f(x)+x^2-5=0$ 또는 $f(x)+4x=0$

$\therefore f(x)=-x^2+5$ 또는 $f(x)=-4x$

(i) $x=-2$일 때,

$f(-2)=1$ 또는 $f(-2)=8$

(ii) $x=-1$일 때,

$f(-1)=4$

(iii) $x=0$일 때,

$f(0)=5$ 또는 $f(0)=0$

조건 (다)에서 $f(0)f(1)f(2)<0$이므로

$f(0)\neq0$ $\quad\therefore f(0)=5$ …… ㉠

(iv) $x=1$일 때,

$f(1)=4$ 또는 $f(1)=-4$

조건 (가)에서 $f(x)$는 일대일함수이고 (ii)에서 $f(-1)=4$이므로 $f(1)=-4$ …… ㉡

(v) $x=2$일 때,

$f(2)=1$ 또는 $f(2)=-8$

㉠, ㉡에서 $f(0)>0$, $f(1)<0$이므로 조건 (다)에 의하여 $f(2)>0$이어야 한다.

$\therefore f(2)=1$

조건 (가)에서 $f(x)$는 일대일함수이므로 (i)에서

$f(-2)=8$

$\therefore f(-2)f(1)=8\times(-4)=-32$

## 470

**함숫값 ⊕ 항등함수와 상수함수**

전략 $X=\{1, 2, 3\}$이므로 주어진 조건을 이용할 수 있도록 $f(2)$, $f(3)$의 함숫값의 범위를 생각한다.

풀이 1은 집합 $X$의 원소 중 가장 작은 수이므로

$f(2)\geq1$

주어진 조건에서 $f(a)\geq b$이면 $f(a)\geq f(b)$이므로

$f(2)\geq1$이면 $f(2)\geq f(1)$ …… ㉠

한편, $f(1)=3$이므로

$f(1)\geq2$이면 $f(1)\geq f(2)$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $f(2)=f(1)=3$

같은 방법으로 $f(3)\geq1$이면 $f(3)\geq f(1)$ …… ㉢

한편, $f(1)=3$이므로

$f(1)\geq3$이면 $f(1)\geq f(3)$ …… ㉣

㉢, ㉣에서 $f(3)=f(1)=3$

따라서 함수 $f(x)$는 $f(x)=3$인 상수함수이므로

$f(2)+f(3)=3+3=6$

## 471

**함수의 개수**

전략 조건 (가)를 이용하여 $f(x)$의 값을 구하고, 조건 (나)를 만족시키는 값을 찾는다.

풀이 조건 (가)에서 $x$의 값이 0, 1, 2, 3일 때, $f(x)$는 1, 2, 3의 값을 갖는다. …… ㉠

조건 (나)에서 $f(x)+f(-x)=-2$ 또는 $f(x)+f(-x)=2$

(i) $x=0$일 때,

$f(0)+f(0)=2$ ($\because f(0)>0$)

이므로 $f(0)=1$의 1가지이다.

(ii) $x=1$, $x=2$, $x=3$일 때,

ⓐ $f(x)=2-f(-x)>0$인 경우

| $f(-x)$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $5$ | $4$ | $3$ | $2$ | $1$ | $0$ | $-1$ |

위의 표에서 ㉠을 만족시키는 것은 3가지이다.

ⓑ $f(x)=-2-f(-x)>0$인 경우

| $f(-x)$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $1$ | $0$ | $-1$ | $-2$ | $-3$ | $-4$ | $-5$ |

위의 표에서 ㉠을 만족시키는 것은 1가지이다.

따라서 ⓐ, ⓑ를 만족시키는 경우는 $3+1=4$(가지)

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 함수의 개수는

$1\times4\times4\times4=64$

## 472

**절댓값 기호를 포함한 함수의 그래프**

전략 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 $x$의 값을 경계로 범위를 나누어 $y=|x|-|x-2|$의 그래프를 그리고, 직선 $y=m+1$을 그린다.

풀이 $y=|x|-|x-2|$에서

$x<0$일 때,

$y=|x|-|x-2|=-x+(x-2)=-2$

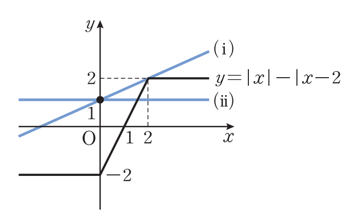
$0\leq x<2$일 때,

$y=|x|-|x-2|=x+(x-2)=2x-2$

$x\geq2$일 때,

$y=|x|-|x-2|=x-(x-2)=2$

이상에서 $y=|x|-|x-2|$의 그래프는 다음 그림과 같다.




한편, 직선 $y=mx+1$은 $m$의 값에 관계없이 점 $(0, 1)$을 지난다.

(i) 직선 $y=mx+1$이 점 $(2, 2)$를 지날 때,

$2=2m+1$ $\quad\therefore m=\frac{1}{2}$

(ii) 직선 $y=mx+1$이 $x$축에 평행할 때,

$m=0$

(i), (ii)에서 함수 $y=|x|-|x-2|$의 그래프와 직선 $y=mx+1$이 서로 다른 세 점에서 만나려면

$0<m<\frac{1}{2}$

**도전 1등급 최고난도** ● 119쪽

**473** ① **474** ⑤

## 473

서로 같은 함수

(1단계) $f(x)=g(x)=1$인 경우와 $f(x)=g(x)=0$인 경우로 나누어 $x$의 값의 범위를 구한다.

$x^2+x-12\le 0$에서 $(x+4)(x-3)\le 0$이므로

$P=\{x\,|\,-4\le x\le 3\}$

$|x-2|>3$에서 $x-2>3$ 또는 $x-2<-3$이므로

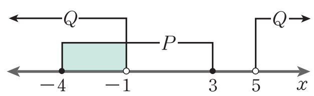
$Q=\{x\,|\,x<-1$ 또는 $x>5\}$

$f(x)=g(x)$에서

$f(x)=g(x)=1$ 또는 $f(x)=g(x)=0$

(i) $f(x)=g(x)=1$일 때,

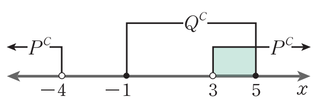
$x\in(P\cap Q)$이어야 한다.




$\therefore\ -4\le x<-1$

(ii) $f(x)=g(x)=0$일 때,

$x\in(P^C\cap Q^C)$이어야 한다.




$\therefore\ 3<x\le 5$

(2단계) 조건을 만족시키는 정수 $x$의 값을 구한다.

(i), (ii)에서 $-4\le x<-1$ 또는 $3<x\le 5$

따라서 구하는 모든 정수 $x$의 값의 합은

$(-4)+(-3)+(-2)+4+5=0$

## 474

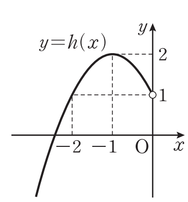
일대일함수와 일대일대응

(1단계) $a=0$일 때, $h(x)$가 일대일대응인지 확인한다.

ㄱ. $a=0$일 때,

$f(x)=-x^2-2x+1=-(x+1)^2+2$

이고 $x<0$에서 $h(x)=f(x)$이므로 $x<0$에서 함수 $y=h(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




따라서 함수 $h(x)$는 일대일대응이 아니므로 $(0,\ k)\in A$를 만족시키는 실수 $k$는 존재하지 않는다. (참)

(2단계) $a=-1,\ b=4$일 때, $h(x)$가 일대일대응인지 확인한다.

ㄴ. $a=-1,\ b=4$일 때,

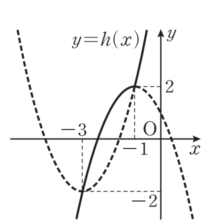
$g(x)=x^2-2x-1=(x-1)^2-2$이므로

$g(x+4)=(x+4-1)^2-2=(x+3)^2-2$

$$\therefore\ h(x)=\begin{cases}-(x+1)^2+2 & (x<-1)\\ (x+3)^2-2 & (x\ge -1)\end{cases}$$

따라서 함수 $y=h(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $h(x)$는 일대일대응이다.

$\therefore\ (-1,\ 4)\in A$ (참)




(3단계) $a=m$일 때, $h(x)$가 일대일대응이 되도록 하는 조건을 이용한다.

ㄷ. $a=m$일 때,

$$h(x)=\begin{cases}f(x) & (x<m)\\ g(x+b) & (x\ge m)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}-(x+1)^2+2 & (x<m)\\ (x+b-1)^2-2 & (x\ge m)\end{cases}$$

이므로 함수 $h(x)$가 일대일대응이려면

$m\le -1,\ 1-b\le m$ ······ ㉠

이어야 한다.

또, $x<m$에서 $h(x)<f(m)$이고,

$x\ge m$에서 $h(x)\ge g(m+b)$이므로

$f(m)=g(m+b)$ ······ ㉡

이때 $g(m+b)\ge -2$이므로 $f(m)\ge -2$

$-m^2-2m+1\ge -2,\ m^2+2m-3\le 0$

$(m+3)(m-1)\le 0$ $\quad\therefore\ -3\le m\le 1$

그런데 $m\le -1$이므로

$-3\le m\le -1$

따라서 정수 $m$의 값은 $-3,\ -2,\ -1$이다.

(i) $m=-3$일 때,

㉠에서 $1-b\le -3$ $\quad\therefore\ b\ge 4$

㉡에서 $f(-3)=g(-3+b)$이므로

$-2=(b-4)^2-2,\ (b-4)^2=0$ $\quad\therefore\ b=4$

$\therefore\ m+b=-3+4=1$

(ii) $m=-2$일 때,

㉠에서 $1-b\le -2$ $\quad\therefore\ b\ge 3$

㉡에서 $f(-2)=g(-2+b)$이므로

$1=(b-3)^2-2,\ b^2-6b+6=0$ $\quad\therefore\ b=3\pm\sqrt{3}$

그런데 $b\ge 3$이므로 $b=3+\sqrt{3}$

$\therefore\ m+b=-2+(3+\sqrt{3})=1+\sqrt{3}$

(iii) $m=-1$일 때,

㉠에서 $1-b\le -1$ $\quad\therefore\ b\ge 2$

㉡에서 $f(-1)=g(-1+b)$이므로

$2=(b-2)^2-2,\ b^2-4b=0$

$b(b-4)=0$ $\quad\therefore\ b=0$ 또는 $b=4$

그런데 $b\ge 2$이므로 $b=4$

$\therefore\ m+b=-1+4=3$

(i), (ii), (iii)에서

$\{m+b\,|\,(m,\ b)\in A$이고 $m$은 정수$\}=\{1,\ 1+\sqrt{3},\ 3\}$

이므로 모든 원소의 합은

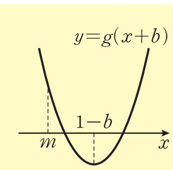
$1+(1+\sqrt{3})+3=5+\sqrt{3}$ (참)

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

**1등급 비법**

$g(x+b)=(x+b-1)^2-2$에서 $y=g(x+b)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

이때 $m<1-b$이면 $x\ge m$에서 $g(x+b)$가 일대일대응이 아니므로 $1-b\ge m$이어야 한다.



# 10 합성함수와 역함수

## 유형 분석 기출

● 121쪽 ~ 125쪽

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **475** 7 | **476** $-9$ | **477** ④ | **478** 4 | **479** 1 |
| **480** ③ | **481** ① | **482** 2 | **483** ① | **484** 2 |
| **485** 6 | **486** ① | **487** 5 | **488** 4 | **489** $-1$ |
| **490** ② | **491** 4 | **492** 4 | **493** 13 | **494** ③ |
| **495** 6 | **496** ⑤ | **497** 4 | **498** 9 | **499** ⑤ |
| **500** ⑤ | **501** 2 | **502** 5 | **503** $2\sqrt{2}$ | **504** ③ |

### 475

$(f\circ f)(3)=f(f(3))=f(5)=2$

$(f\circ f\circ f)(4)=f(f(f(4)))=f(f(1))$

$=f(3)=5$

$\therefore (f\circ f)(3)+(f\circ f\circ f)(4)=2+5=7$

### 476

$\sqrt{3}$은 무리수이므로 $f(\sqrt{3})=(\sqrt{3})^2=3$

또, 3은 유리수이므로 $f(3)=-3^2=-9$

$\therefore (f\circ f)(\sqrt{3})=f(f(\sqrt{3}))=f(3)=-9$

### 477

$(f\circ g)(2)=f(g(2))=f(2a-1)$

$=3(2a-1)-2=6a-5$

$(f\circ g)(2)=7$이므로

$6a-5=7 \qquad \therefore a=2$

따라서 $g(x)=2x-1$이므로

$g(1)=2\times1-1=1$

### 478

함수 $g\circ f$가 항등함수이므로

$(g\circ f)(2)=2$, $(g\circ f)(3)=3$

$(g\circ f)(2)=2$에서

$g(f(2))=g(-a)=2 \qquad \therefore a^2-2a+b=2$ …… ㉠

$(g\circ f)(3)=3$에서

$g(f(3))=g(0)=3 \qquad \therefore b=3$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $a^2-2a+1=0$

$(a-1)^2=0 \qquad \therefore a=1$

$\therefore a+b=1+3=4$

### 479

$(g\circ f)(1)=g(f(1))=g(a+1)=(a+1)^2$

$(f\circ g)(3)=f(g(3))$이므로

(i) $a\le3$일 때,

$(f\circ g)(3)=f(g(3))=f(9)=a+9$

$\therefore (g\circ f)(1)+(f\circ g)(3)=(a+1)^2+a+9$

$=a^2+3a+10=20$

$a^2+3a-10=0$, $(a+5)(a-2)=0$

$\therefore a=-5$ 또는 $a=2$

(ii) $a>3$일 때,

$(f\circ g)(3)=f(g(3))=f(-9)=a-9$

$\therefore (g\circ f)(1)+(f\circ g)(3)=(a+1)^2+a-9$

$=a^2+3a-8=20$

$a^2+3a-28=0$, $(a+7)(a-4)=0$

$\therefore a=4\ (\because a>3)$

(i), (ii)에서 모든 $a$의 값의 합은

$-5+2+4=1$

### 480

$f(x)=x^2-6x+12=(x-3)^2+3$이므로 $f(x)\ge3$

$g(x)=-x^2+4x+k$이므로

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=-\{f(x)\}^2+4f(x)+k$

$=-\{f(x)-2\}^2+k+4$

이때 $f(x)\ge3$이므로 $f(x)=3$일 때, 함수 $(g\circ f)(x)$는 최댓값 $k+3$을 갖는다.

함수 $(g\circ f)(x)$의 최댓값이 6이므로

$k+3=6 \qquad \therefore k=3$

### 481

$(f\circ h)(x)=f(h(x))=2h(x)-4$

$(f\circ h)(x)=g(x)$이므로

$2h(x)-4=-4x+2$, $2h(x)=-4x+6$

$\therefore h(x)=-2x+3$

### 482

$(h\circ(g\circ f))(x)=((h\circ g)\circ f)(x)$

$=(h\circ g)(f(x))$

$=2f(x)-1$

$(h\circ(g\circ f))(x)=2x-5$이므로

$2f(x)-1=2x-5$

$2f(x)=2x-4 \qquad \therefore f(x)=x-2$

$\therefore f(4)=4-2=2$

### 483

$(h\circ g\circ f)(x)=(h\circ g)(f(x))$

$=(h\circ g)(x+2)$

$=h(g(x+2))$

$=h(3(x+2)-1)$

$=h(3x+5)$

$(h\circ g\circ f)(x)=f(x)$이므로

$h(3x+5)=x+2$ …… ㉠

$3x+5=t$로 놓으면 $x=\dfrac{t-5}{3}$

이것을 ㉠에 대입하면

$h(t)=\frac{t-5}{3}+2=\frac{1}{3}t+\frac{1}{3}$

$\therefore\ h(2)=\frac{1}{3}\times2+\frac{1}{3}=1$

다른 풀이 $(h\circ g\circ f)(x)=h(3x+5)$

$(h\circ g\circ f)(x)=f(x)$이므로

$h(3x+5)=x+2$ …… ㉠

$3x+5=2$가 되는 $x$의 값은

$3x=-3$ $\therefore\ x=-1$

$x=-1$을 ㉠에 대입하면

$h(2)=-1+2=1$

## 484

$f^1(1)=f(1)=3$

$f^2(1)=(f\circ f)(1)=f(f(1))=f(3)=2$

$f^3(1)=(f\circ f^2)(1)=f(f^2(1))=f(2)=4$

$f^4(1)=(f\circ f^3)(1)=f(f^3(1))=f(4)=3$

$f^5(1)=(f\circ f^4)(1)=f(f^4(1))=f(3)=2$

$f^6(1)=(f\circ f^5)(1)=f(f^5(1))=f(2)=4$

⋮

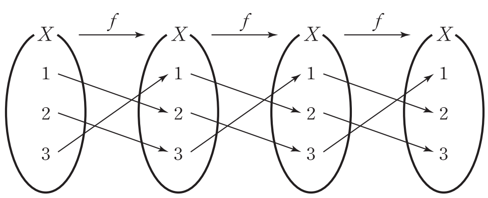
따라서 $f^n(1)$의 값은 3, 2, 4가 이 순서대로 반복된다.

이때 $98=3\times32+2$이므로

$f^{98}(1)=f^2(1)=2$

## 485

$f^1$, $f^2$, $f^3$의 대응 관계를 그림으로 나타내면 다음과 같다.




즉, $f^3(x)=x$이므로

$f^{200}(1)=f^{3\times66+2}(1)=f^2(1)=3$

$f^{201}(2)=f^{3\times67}(2)=f^3(2)=2$

$f^{202}(3)=f^{3\times67+1}(3)=f^1(3)=1$

$\therefore\ f^{200}(1)+f^{201}(2)+f^{202}(3)=3+2+1=6$

다른 풀이 $f^1(1)=f(1)=2$

$f^2(1)=(f\circ f)(1)=f(f(1))=f(2)=3$

$f^3(1)=(f\circ f^2)(1)=f(f^2(1))=f(3)=1$

$f^4(1)=(f\circ f^3)(1)=f(f^3(1))=f(1)=2$

⋮

즉, $f^n(1)$은 2, 3, 1이 이 순서대로 반복된다.

이때 $200=3\times66+2$이므로

$f^{200}(1)=f^2(1)=3$

같은 방법으로 하면 $f^n(2)$는 3, 1, 2가 이 순서대로 반복되고,

$201=3\times67$이므로

$f^{201}(2)=f^3(2)=2$

또, $f^n(3)$은 1, 2, 3이 이 순서대로 반복되고, $202=3\times67+1$이므로

$f^{202}(3)=f^1(3)=1$

$\therefore\ f^{200}(1)+f^{201}(2)+f^{202}(3)=3+2+1=6$

## 486

$f^{-1}(1)=2$에서 $f(2)=1$이므로

$f(2)=3\times2+k=1$

$\therefore\ k=-5$

따라서 $f(x)=3x-5$이므로

$f(1)=3\times1-5=-2$

## 487

$f^{-1}(a)+f^{-1}(b)=5$이므로

$f^{-1}(a)=1$, $f^{-1}(b)=4$ 또는 $f^{-1}(a)=4$, $f^{-1}(b)=1$ 또는

$f^{-1}(a)=2$, $f^{-1}(b)=3$ 또는 $f^{-1}(a)=3$, $f^{-1}(b)=2$

(i) $f^{-1}(a)=1$, $f^{-1}(b)=4$일 때,

$f(1)=a$, $f(4)=b$

주어진 함수 $f$에서 $f(1)=2$, $f(4)=3$이므로

$a=2$, $b=3$

$\therefore\ a+b=2+3=5$

(ii) $f^{-1}(a)=4$, $f^{-1}(b)=1$일 때,

$f(4)=a$, $f(1)=b$

주어진 함수 $f$에서 $f(1)=2$, $f(4)=3$이므로

$a=3$, $b=2$

$\therefore\ a+b=3+2=5$

(iii) $f^{-1}(a)=2$, $f^{-1}(b)=3$일 때,

$f(2)=a$, $f(3)=b$

주어진 함수 $f$에서 $f(2)=1$, $f(3)=4$이므로

$a=1$, $b=4$

$\therefore\ a+b=1+4=5$

(iv) $f^{-1}(a)=3$, $f^{-1}(b)=2$일 때,

$f(3)=a$, $f(2)=b$

주어진 함수 $f$에서 $f(2)=1$, $f(3)=4$이므로

$a=4$, $b=1$

$\therefore\ a+b=4+1=5$

(i)~(iv)에서

$a+b=5$

## 488

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(bx+2)$

$=\frac{1}{2}(bx+2)+a$

$=\frac{b}{2}x+1+a$

$(f\circ g)(x)=x+2$이므로

$\frac{b}{2}x+1+a=x+2$ …… ㉠

㉠은 $x$에 대한 항등식이므로

$\frac{b}{2}=1,\ 1+a=2$

$\therefore\ a=1,\ b=2$

$\therefore\ f(x)=\frac{1}{2}x+1$

이때 $f^{-1}(3)=t$라 하면 $f(t)=3$이므로

$f(t)=\frac{1}{2}t+1=3 \qquad \therefore\ t=4$

$\therefore\ f^{-1}(3)=4$

다른 풀이 $b=2$이므로 $g(x)=2x+2$

$(f\circ g)(x)=x+2$의 양변에 $f^{-1}$를 합성하면

$(f^{-1}\circ f\circ g)(x)=f^{-1}(x+2)$

$\therefore\ f^{-1}(x+2)=g(x)=2x+2$

여기에 $x=1$을 대입하면

$f^{-1}(3)=2\times1+2=4$

## 489

$\frac{x-1}{2}=t$로 놓으면 $x=2t+1$

따라서 $f(t)=-2(2t+1)+1=-4t-1$이므로

$f(x)=-4x-1$

$f^{-1}(3)=k$라 하면 $f(k)=3$이므로

$-4k-1=3,\ -4k=4$

$\therefore\ k=-1$

$\therefore\ f^{-1}(3)=-1$

다른 풀이 $-2x+1=3$에서 $x=-1$

$x=-1$을 $f\left(\frac{x-1}{2}\right)=-2x+1$에 대입하면

$f(-1)=3 \qquad \therefore\ f^{-1}(3)=-1$

## 490

$(f^{-1}\circ g)(3)=f^{-1}(g(3))=f^{-1}(-3)$이므로

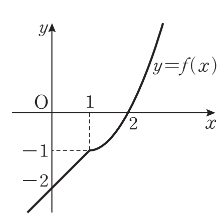
$f^{-1}(-3)=k$라 하면 $f(k)=-3$

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $k<1$이고

$f(k)=k-2=-3$

$\therefore\ k=-1$

$\therefore\ (f^{-1}\circ g)(3)=f^{-1}(-3)=-1$




## 491

함수 $f(x)$의 역함수가 존재하므로 $f(x)$는 일대일대응이다.

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프의 기울기가 양수이므로 $x$의 값이 증가하면 $y$의 값도 증가한다.

즉, $f(-8)=b,\ f(a)=1$이므로

$-4+3=b,\ \frac{1}{2}a+3=1$

$\therefore\ a=-4,\ b=-1$

$\therefore\ ab=(-4)\times(-1)=4$

## 492

함수 $f(x)$의 역함수가 존재하므로 $f(x)$는 일대일대응이다.

따라서 직선 $y=x-2$와 곡선 $y=2x^2-x+a$가 $x=1$인 점에서 만나야 하므로

$1-2=2-1+a$

$\therefore\ a=-2$

$\therefore\ f(x)=\begin{cases} x-2 & (x\geq1) \\ 2x^2-x-2 & (x<1) \end{cases}$

이때 $f(-2)=2\times(-2)^2-(-2)-2=8$이므로

$f(f(-2))=f(8)=8-2=6$

$\therefore\ a+f(f(-2))=-2+6=4$

## 493

함수 $f$의 역함수가 존재하므로 $f$는 일대일대응이다.

조건 (가)에 의하여 $(f\circ f)(-1)=2,\ f^{-1}(-2)=2$이므로

$(f\circ f)(-1)=f(f(-1))=2,\ f(2)=-2$ ...... ㉠

$f(-1)=a$라 하면 $f(a)=2$에서

$a\neq-1,\ a\neq2$

또, ㉠에서 $f(2)=-2$이므로 $a\neq-2$

$\therefore\ a=0$ 또는 $a=1$

(i) $f(-1)=0$일 때,

$f(f(-1))=f(0)=2$

조건 (나)에서 $f(0)\times f(-2)\leq0$이고 $f(1)\times f(-1)\leq0$이므로

$f(-2)=-1,\ f(1)=1$

(ii) $f(-1)=1$일 때,

$f(f(-1))=f(1)=2$

이때 $f(1)\times f(-1)>0$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

$\therefore\ 6f(0)+5f(1)+2f(2)=6\times2+5\times1+2\times(-2)$

$=13$

## 494

$y=\frac{2}{3}x-1$을 $x$에 대하여 풀면

$x=\frac{3}{2}y+\frac{3}{2}$

$x$와 $y$를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}$

따라서 $a=\frac{3}{2},\ b=\frac{3}{2}$이므로

$a-b=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}=0$

## 495

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(ax+b)$

$=-(ax+b)-3$

$=-ax-b-3$

$y=-ax-b-3$이라 하면

$ax=-y-b-3 \qquad \therefore x=-\frac{1}{a}y-\frac{b+3}{a}$

따라서 역함수는 $y=-\frac{1}{a}x-\frac{b+3}{a}$

즉, $-\frac{1}{a}=-\frac{1}{2}$, $-\frac{b+3}{a}=-\frac{11}{2}$이므로

$a=2$, $b=8$

$\therefore b-a=8-2=6$

## 496

① $g(2)=3$

② $(f\circ g)(1)=f(g(1))=f(2)=1$

③ $(f\circ g)^{-1}(3)=(g^{-1}\circ f^{-1})(3)=g^{-1}(f^{-1}(3))$
$=g^{-1}(1)=3$

④ $(g\circ g)(4)=g(g(4))=g(4)=4$

⑤ $(f\circ g^{-1})(4)=f(g^{-1}(4))=f(4)=2$

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

## 497

$(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$이므로

$$\begin{aligned}(f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(-1)&=(f\circ f^{-1}\circ g^{-1}\circ f)(-1)\\&=(g^{-1}\circ f)(-1)\\&=g^{-1}(f(-1))\\&=g^{-1}(-2)\end{aligned}$$

$g^{-1}(-2)=k$라 하면 $g(k)=-2$이므로

$g(k)=-2k+6=-2 \qquad \therefore k=4$

$\therefore (f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(-1)=g^{-1}(-2)=4$

다른 풀이 $g(x)=-2x+6$에서

$g^{-1}(x)=-\frac{1}{2}x+3$

$$\begin{aligned}\therefore (f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(-1)&=g^{-1}(-2)\\&=-\frac{1}{2}\times(-2)+3\\&=4\end{aligned}$$

## 498

$g^{-1}\circ f^{-1}=(f\circ g)^{-1}$이고,

$$\begin{aligned}(f\circ g)(x)&=f(g(x))\\&=-2\left(\frac{1}{3}x-5\right)+1\\&=-\frac{2}{3}x+11\end{aligned}$$

$y=-\frac{2}{3}x+11$로 놓고 $x$에 대하여 풀면

$x=-\frac{3}{2}y+\frac{33}{2}$

$x$와 $y$를 서로 바꾸면

$y=-\frac{3}{2}x+\frac{33}{2}$

$\therefore (f\circ g)^{-1}(x)=-\frac{3}{2}x+\frac{33}{2}$

$$\begin{aligned}\therefore (g^{-1}\circ f^{-1}\circ h)(x)&=((f\circ g)^{-1}\circ h)(x)\\&=(f\circ g)^{-1}(h(x))\\&=-\frac{3}{2}h(x)+\frac{33}{2}\end{aligned}$$

즉, $-\frac{3}{2}h(x)+\frac{33}{2}=f(x)$이므로 양변에 $x=-1$을 대입하면

$-\frac{3}{2}h(-1)+\frac{33}{2}=f(-1)$

$-\frac{3}{2}h(-1)+\frac{33}{2}=3$

$\therefore h(-1)=9$

다른 풀이 $(g^{-1}\circ f^{-1}\circ h)(x)=f(x)$에서 양변에 $f\circ g$를 합성하면

$((f\circ g)\circ(f\circ g)^{-1}\circ h)(x)=((f\circ g)\circ f)(x)$

$\therefore h(x)=(f\circ g\circ f)(x)$

$$\begin{aligned}\therefore h(-1)&=f(g(f(-1)))\\&=f(g(3))\\&=f(-4)=9\end{aligned}$$

## 499

$f=f^{-1}$이면 $(f\circ f)(x)=x$

$\therefore f(f(x))=x$

ㄱ. $f(x)=x$에서
$f(f(x))=f(x)=x$

ㄴ. $f(x)=x+1$에서
$f(f(x))=f(x+1)=(x+1)+1=x+2$

ㄷ. $f(x)=-x$에서
$f(f(x))=f(-x)=-(-x)=x$

ㄹ. $f(x)=-x+1$에서
$f(f(x))=f(-x+1)=-(-x+1)+1=x$

따라서 $f=f^{-1}$를 만족시키는 함수 $f$는 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

다른 풀이 ㄴ. $y=x+1$이라 하면 $x=y-1$
$x$와 $y$를 서로 바꾸면 $y=x-1$
즉, $f^{-1}(x)=x-1$이므로 $f\neq f^{-1}$

ㄷ. $y=-x$라 하면 $x=-y$
$x$와 $y$를 서로 바꾸면 $y=-x$
즉, $f^{-1}(x)=-x$이므로 $f=f^{-1}$

ㄹ. $y=-x+1$이라 하면 $x=1-y$
$x$와 $y$를 서로 바꾸면 $y=1-x$
즉, $f^{-1}(x)=-x+1$이므로 $f=f^{-1}$

따라서 $f=f^{-1}$를 만족시키는 함수 $f$는 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

### 1등급 비법

**$f=f^{-1}$를 만족시키는 일차함수 $f(x)$ 꼴**

$f(x)=ax+b\ (a\neq 0)$라 하면 $f^{-1}(x)=\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}$

이때 $f=f^{-1}$이므로 $a=\frac{1}{a}$, $b=-\frac{b}{a}$

$\therefore a^2=1$, $b(a+1)=0$

(i) $a=1$, $b=0$이면 $y=x$

(ii) $a=-1$, $b$가 모든 실수이면 $y=-x+b$

## 500

$(f \circ f)(x)=x$에서 $f=f^{-1}$이므로

$f^{-1}(2)=f(2)=1$

또, $(f \circ f)(2)=f(f(2))=2$에서 $f(1)=2$이므로

$f^{-1}(2)+f(1)=1+2=3$

## 501

$f=f^{-1}$이면 $(f \circ f)(x)=x$

$f(f(x))=f(ax+3)$

$\quad=a(ax+3)+3$

$\quad=a^2x+3a+3$

즉, $a^2x+3a+3=x$이므로

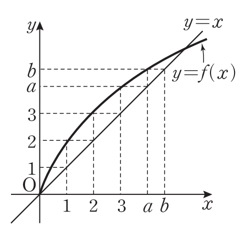
$a^2=1$, $3a+3=0$

$\therefore a=-1$

따라서 $f(x)=-x+3$이므로

$f(1)=-1+3=2$

## 502




$(f \circ f)^{-1}(a)=(f^{-1} \circ f^{-1})(a)$

$\quad=f^{-1}(f^{-1}(a))$

$f^{-1}(a)=m$이라 하면

$f(m)=a$

이므로 오른쪽 그래프에서

$m=3$

$\therefore f^{-1}(f^{-1}(a))=f^{-1}(3)$

또, $f^{-1}(3)=n$이라 하면 $f(n)=3$이므로

$n=2$

$\therefore (f \circ f)^{-1}(a)=f^{-1}(f^{-1}(a))$

$\quad=f^{-1}(3)$

$\quad=2$

이때 $f(2)=3$이므로

$f(2)+(f \circ f)^{-1}(a)=3+2$

$\quad=5$

## 503

함수 $f(x)=\frac{1}{4}(x^2+3)$ $(x \ge 0)$의 그래프는 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=g(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.

$\frac{1}{4}(x^2+3)=x$에서

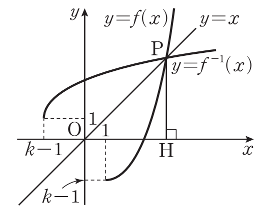
$x^2-4x+3=0$, $(x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=3$

따라서 두 교점의 좌표는 $(1, 1)$, $(3, 3)$이므로 두 점 사이의 거리는

$\sqrt{(3-1)^2+(3-1)^2}=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$

## 504




$f(x)=x^2-2x+k$

$\quad=(x-1)^2+k-1$ $(k \ge 1)$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같고, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.

따라서 점 P는 직선 $y=x$ 위의 점이므로 점 P의 좌표를 $(t, t)$라 하면 삼각형 POH의 넓이가 8이므로

$\frac{1}{2} \times t \times t=8$, $t^2=16$

$\therefore t=4$ $(\because t \ge 1)$

$\therefore$ P$(4, 4)$

한편, 점 P$(4, 4)$는 함수 $f(x)=x^2-2x+k$의 그래프 위의 점이므로

$f(4)=4^2-2 \times 4+k=4$

$\therefore k=-4$

## 내신 적중 서술형

● 126쪽

**505** (1) $-2$ (2) $1$ **506** $7$ **507** $a<-1$ 또는 $a>1$ **508** $3$

## 505

(1) $f(x)=ax-3$, $g(x)=2x+1$이므로

$(f \circ g)(x)=f(g(x))=f(2x+1)$

$\quad=a(2x+1)-3$

$\quad=2ax+a-3$ …… ㉮

$(g \circ f)(x)=g(f(x))=g(ax-3)$

$\quad=2(ax-3)+1$

$\quad=2ax-5$ …… ㉯

$(f \circ g)(x)=(g \circ f)(x)$이므로

$2ax+a-3=2ax-5$

$a-3=-5$

$\therefore a=-2$ …… ㉰

(2) $f(x)=-2x-3$이므로

$f(-2)=(-2) \times (-2)-3=1$ …… ㉱

| 채점 기준 | | 배점 비율 |
|---|---|---|
| (1) | ㉮ $f \circ g$ 구하기 | 30 % |
| | ㉯ $g \circ f$ 구하기 | 30 % |
| | ㉰ $a$의 값 구하기 | 30 % |
| (2) | ㉱ $f(-2)$의 값 구하기 | 10 % |

## 506

$f(1)=3$, $f(2)=9$, $f(3)=7$, $f(4)=1$,
$f(5)=3$, $f(6)=9$, $f(7)=7$, $f(8)=1$, $f(9)=3$
이므로
$f^2(2)=f(f(2))=f(9)=3$,
$f^3(2)=f(f^2(2))=f(3)=7$,
$f^4(2)=f(f^3(2))=f(7)=7, \cdots$ …… ㉮
따라서 $n\geq 3$인 자연수 $n$에 대하여 $f^n(2)=7$ …… ㉯
$\therefore f^{1000}(2)=7$ …… ㉰

| 채점 기준 | 배점 비율 |
|---|---|
| ㉮ $f^2(2), f^3(2), f^4(2), \cdots$의 값 구하기 | 60 % |
| ㉯ $f^n(2)$의 값 구하기 | 30 % |
| ㉰ $f^{1000}(2)$의 값 구하기 | 10 % |

## 507

$f(x)=|x|+ax+4$
$$=\begin{cases}(1+a)x+4 & (x\geq 0)\\(-1+a)x+4 & (x<0)\end{cases} \quad \cdots\cdots ㉮$$
이므로 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하기 위해서는 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 일대일대응이어야 한다.
따라서 $x\geq 0$일 때와 $x<0$일 때의 직선의 기울기의 부호가 서로 같아야 하므로 …… ㉯
$(1+a)(-1+a)>0$, $(a+1)(a-1)>0$
$\therefore a<-1$ 또는 $a>1$ …… ㉰

| 채점 기준 | 배점 비율 |
|---|---|
| ㉮ $x=0$을 기준으로 구간을 나누어 함수 $f(x)$ 구하기 | 30 % |
| ㉯ 함수 $f$의 역함수가 존재하기 위한 조건 구하기 | 40 % |
| ㉰ 실수 $a$의 값의 범위 구하기 | 30 % |

## 508

$2x-1=t$로 놓으면 $x=\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}$
이것을 $f(2x-1)=4x+3$에 대입하면
$f(t)=4\left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\right)+3=2t+5$
$t$를 $x$로 바꾸면
$f(x)=2x+5$ …… ㉮
$y=2x+5$로 놓고 $x$에 대하여 풀면
$x=\frac{1}{2}y-\frac{5}{2}$
$x$와 $y$를 서로 바꾸면
$y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$
$\therefore f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$ …… ㉯
따라서 $a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{5}{2}$이므로
$a-b=\frac{1}{2}-\left(-\frac{5}{2}\right)=3$ …… ㉰

| 채점 기준 | 배점 비율 |
|---|---|
| ㉮ $f(x)$ 구하기 | 40 % |
| ㉯ $f^{-1}(x)$ 구하기 | 40 % |
| ㉰ $a-b$의 값 구하기 | 20 % |

## 1등급 실력 완성

● 127쪽 ~ 128쪽

**509** 6 **510** ⑤ **511** ④ **512** 0 **513** ②
**514** 12 **515** 10 **516** ④ **517** 36

## 509

합성함수

전략 $f(a)=t$라 하고 $t$의 값을 구해 본다.

풀이 $f(a)=t$로 놓으면 $(f\circ f)(a)=f(a)$에서
$f(f(a))=f(a)$
$\therefore f(t)=t$
$t<2$일 때, $2t+2=t$에서
$t=-2$
$t\geq 2$일 때, $t^2-7t+16=t$에서
$t^2-8t+16=0$, $(t-4)^2=0$
$\therefore t=4$
(i) $t=-2$, 즉 $f(a)=-2$인 경우
㉠ $a<2$일 때,
$2a+2=-2$
$\therefore a=-2$
㉡ $a\geq 2$일 때,
$a^2-7a+16=-2$
$\therefore a^2-7a+18=0$
이차방정식 $a^2-7a+18=0$의 판별식을 $D$라 하면
$D=(-7)^2-4\times 1\times 18=-23<0$
이므로 $f(a)=-2$를 만족시키는 실수 $a$의 값은 존재하지 않는다.
(ii) $t=4$, 즉 $f(a)=4$인 경우
㉠ $a<2$일 때,
$2a+2=4$
$\therefore a=1$
㉡ $a\geq 2$일 때,
$a^2-7a+16=4$
$a^2-7a+12=0$
$(a-3)(a-4)=0$
$\therefore a=3$ 또는 $a=4$
(i), (ii)에서 $(f\circ f)(a)=f(a)$를 만족시키는 모든 실수 $a$의 값의 합은
$-2+1+3+4=6$

## 510

**합성함수**

전략 $(f\circ f\circ f)(x)=f((f\circ f)(x))$임을 이용한다.

풀이 $(f\circ f\circ f)(x)=0$에서

$(f\circ f\circ f)(x)=f((f\circ f)(x))$

$=|(f\circ f)(x)-3|=0$

$\therefore (f\circ f)(x)=3$

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=|f(x)-3|=3$

$f(x)-3=\pm3$

$\therefore f(x)=0$ 또는 $f(x)=6$

즉, $|x-3|=0$ 또는 $|x-3|=6$이므로

$x-3=0$ 또는 $x-3=\pm6$

$\therefore x=3$ 또는 $x=-3$ 또는 $x=9$

따라서 모든 실수 $x$의 값의 합은

$3+(-3)+9=9$

## 511

**합성함수**

전략 주어진 이차함수의 그래프가 직선 $x=3$에 대하여 대칭임을 이용한다.

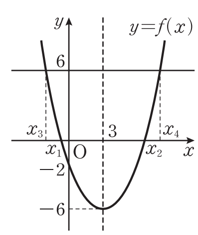
풀이 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $x=3$에 대하여 대칭이므로

$f(6)=f(0)=-2$

$f(f(x))=-2$에서

$f(x)=0$ 또는 $f(x)=6$

오른쪽 그림과 같이 $f(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값을 $x_1$, $x_2$라 하고, $f(x)=6$을 만족시키는 $x$의 값을 $x_3$, $x_4$라 하면 $x_1$과 $x_2$, $x_3$과 $x_4$는 각각 직선 $x=3$에 대하여 대칭이므로




$\dfrac{x_1+x_2}{2}=3,\ \dfrac{x_3+x_4}{2}=3$

$\therefore x_1+x_2=6,\ x_3+x_4=6$

$\therefore x_1+x_2+x_3+x_4=6+6=12$

## 512

**합성함수를 이용하여 상수 구하기**

전략 $f\circ g=g\circ f$임을 이용하여 $a$, $b$ 사이의 관계식을 구하고, $a$의 값에 관계없이 함수 $y=g(x)$의 그래프가 지나는 점의 좌표를 구한다.

풀이 $f(x)=3x-2$, $g(x)=ax+b$이므로

$(f\circ g)(x)=f(g(x))$

$=f(ax+b)$

$=3(ax+b)-2$

$=3ax+3b-2$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))$

$=g(3x-2)$

$=a(3x-2)+b$

$=3ax-2a+b$

$(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$이므로

$3ax+3b-2=3ax-2a+b$

$3b-2=-2a+b$

$\therefore b=-a+1$ …… ㉠

㉠을 $g(x)=ax+b$에 대입하면

$g(x)=ax-a+1=a(x-1)+1$

이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 $a$의 값에 관계없이 항상 점 $(1, 1)$을 지난다.

따라서 $p=1$, $q=1$이므로

$p-q=1-1=0$

## 513

**역함수가 존재하기 위한 조건**

전략 함수 $f$의 역함수가 존재하면 $f$는 일대일대응임을 이용한다.

풀이 함수 $f$의 역함수가 존재하므로 함수 $f$는 일대일대응이다.

$f(1)+2f(3)=12$이고 함수 $f$는 일대일대응이므로

$f(1)=2,\ f(3)=5$ …… ㉠

$f^{-1}(1)-f^{-1}(3)=2$에서 $f^{-1}(1)\in X$, $f^{-1}(3)\in X$이므로

$f^{-1}(1)=3,\ f^{-1}(3)=1$ 또는 $f^{-1}(1)=4,\ f^{-1}(3)=2$

또는 $f^{-1}(1)=5,\ f^{-1}(3)=3$

㉠에서 $f^{-1}(2)=1$, $f^{-1}(5)=3$이고, 함수 $f^{-1}$도 일대일대응이므로 $f^{-1}(1)=4$, $f^{-1}(3)=2$이어야 한다.

$\therefore f(4)=1,\ f(2)=3$

함수 $f$는 일대일대응이므로

$f(5)=4 \qquad \therefore f^{-1}(4)=5$

$\therefore f(4)+f^{-1}(4)=1+5=6$

## 514

**역함수의 성질**

전략 조건 (가), (나)에서 함수 $f$가 일대일대응임을 알고, 역함수의 성질을 이용하여 조건 (다)를 만족시키는 함수 $f$의 개수를 구한다.

풀이 조건 (가), (나)에서 함수 $f(x)$는 일대일대응이고,

조건 (다)에서 $f(f(a))=a$ …… ㉠

(i) $f(a)=a$일 때,

$f(b)$의 값이 될 수 있는 것은 $b$, $c$, $d$의 3개

$f(c)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(a)$, $f(b)$의 값을 제외한 2개

$f(d)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$의 값을 제외한 1개

따라서 함수 $f$의 개수는

$3\times2\times1=6$

(ii) $f(a)=b$일 때,

$f(f(a))=f(b)$이므로 ㉠에서 $f(b)=a$

$f(c)$의 값이 될 수 있는 것은 $c$, $d$의 2개

$f(d)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$의 값을 제외한 1개

따라서 함수 $f$의 개수는

$2\times1=2$

(iii) $f(a)=c$일 때,

$f(f(a))=f(c)$이므로 ㉠에서 $f(c)=a$

(ii)와 같은 방법으로 하면 함수 $f$의 개수는

$2\times1=2$

(ⅳ) $f(a)=d$일 때,

$f(f(a))=f(d)$이므로 ㉠에서 $f(d)=a$

(ⅱ)와 같은 방법으로 하면 함수 $f$의 개수는

$2\times1=2$

(ⅰ)~(ⅳ)에서 함수 $f$의 개수는

$6+2+2+2=12$

## 515

**합성함수를 이용하여 상수 구하기 ⊕ 역함수의 성질**

전략 합성함수와 역함수의 성질을 이용하여 $g\circ f$와 $f\circ g$의 관계를 파악한다.

풀이 $(f^{-1}\circ(g^{-1}\circ f)\circ g)(x)=x$에서

$((f^{-1}\circ g^{-1})\circ f\circ g)(x)=x$

$((g\circ f)^{-1}\circ(f\circ g))(x)=x$

양변에 $g\circ f$를 합성하면

$((g\circ f)\circ(g\circ f)^{-1}\circ(f\circ g))(x)=(g\circ f)(x)$

$(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$

$\therefore f(g(x))=g(f(x))$

즉, $f(-x+a)=g(2x-5)$이므로

$2(-x+a)-5=-(2x-5)+a$

$-2x+2a-5=-2x+5+a$

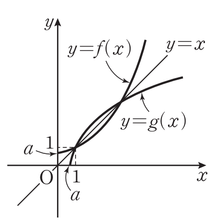
$2a-5=5+a \qquad \therefore a=10$

## 516

**역함수의 그래프**

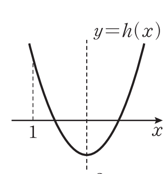
전략 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 서로 다른 두 점에서 만남을 이용하여 $a$의 값의 범위를 구한다.

풀이 함수 $f(x)=\frac{1}{4}x^2+a\,(x\geq1)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$도 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.




따라서 이차방정식 $\frac{1}{4}x^2+a=x$, 즉 $x^2-4x+4a=0$이 1보다 크거나 같은 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$h(x)=x^2-4x+4a$라 하면 이차함수 $y=h(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




(ⅰ) 이차방정식 $h(x)=0$의 판별식을 $D$라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-4a>0$

$\therefore a<1$

(ⅱ) $h(1)\geq0$에서

$1-4+4a\geq0$

$\therefore a\geq\frac{3}{4}$

(ⅲ) $h(x)=x^2-4x+4a=(x-2)^2+4a-4$에서 $y=h(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=2$이므로 $2>1$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $\frac{3}{4}\leq a<1$

> **개념 보충**
>
> **이차방정식의 두 근이 모두 $p$보다 크거나 작을 조건**
>
> 계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0\,(a>0)$의 판별식을 $D$라 하고 $f(x)=ax^2+bx+c$라 할 때,
>
> ① 두 근이 모두 $p$보다 크다.
>
> ⇨ $D\geq0,\ f(p)>0,\ -\frac{b}{2a}>p$
>
> ② 두 근이 모두 $p$보다 작다.
>
> ⇨ $D\geq0,\ f(p)>0,\ -\frac{b}{2a}<p$

## 517

**역함수의 그래프**

전략 $x$의 값의 범위를 나누어 $f(x)$를 구한 후, $y=f(x)$의 그래프를 그려 본다.

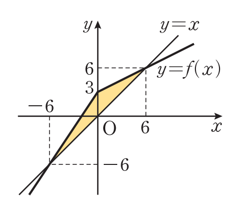
풀이 $x<0$일 때,

$f(x)=\frac{2x+x}{2}+3=\frac{3}{2}x+3$

$x\geq0$일 때,

$f(x)=\frac{2x-x}{2}+3=\frac{1}{2}x+3$

$\therefore f(x)=\begin{cases}\frac{3}{2}x+3 & (x<0)\\ \frac{1}{2}x+3 & (x\geq0)\end{cases}$




따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 함수 $y=f(x)$와 함수 $y=g(x)$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이의 2배이다.

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 좌표를 구하면

(ⅰ) $x<0$일 때,

$\frac{3}{2}x+3=x \qquad \therefore x=-6$

(ⅱ) $x\geq0$일 때,

$\frac{1}{2}x+3=x \qquad \therefore x=6$

따라서 구하는 넓이는

$2\times\left(\frac{1}{2}\times3\times6+\frac{1}{2}\times3\times6\right)=36$

**도전 1등급 최고난도** ● 129쪽

**518** 20 **519** 4 **520** ①

## 518

**합성함수**

(1단계) 조건 (나)를 만족시키는 집합 $A$를 구한다.

조건 (나)에서 집합 $A$의 원소가 2개이므로 집합 $A$는

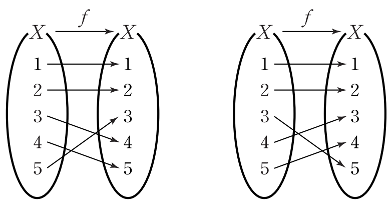
$\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{1, 5\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$, $\{2, 5\}$,

$\{3, 4\}$, $\{3, 5\}$, $\{4, 5\}$

의 10개이다.

(2단계) (1단계)에서 구한 집합 $A$를 이용하여 조건 (가), (다)를 만족시키는 함수 $f$의 개수를 구한다.

$A=\{1, 2\}$일 때, 조건 (가), (다)를 모두 만족시키는 함수 $f$는 다음과 같이 2가지뿐이다.




같은 방법으로 집합 $A$의 각 경우에 따라 조건 (가), (다)를 모두 만족시키는 함수는 2가지씩이다.

따라서 구하는 함수 $f$의 개수는

$10\times2=20$

**오답 피하기** 집합 $A=\{x\,|\,f(x)=x,\ x\in X\}$의 원소가 아닌 $x$에 대하여 조건 (가), (다)를 모두 만족시키는 함수 $f$의 개수도 조사해 보아야 한다. 이때 $A$의 원소가 아닌 $x$에 대하여 $f(x)\neq x$임에 주의한다.

## 519

**합성함수**

(1단계) 주어진 그래프에서 $f(x)$를 구한 후, $x$의 값의 범위를 나누어 $(f\circ f)(x)$를 구한다.

$f(x)=\begin{cases}-2x+2 & (0\le x<1)\\ 2x-2 & (1\le x\le 2)\end{cases}$이므로

(i) $0\le x\le\frac{1}{2}$일 때,

$$\begin{aligned}(f\circ f)(x)&=f(f(x))=f(-2x+2)\\&=2(-2x+2)-2\ (\because\ 1\le -2x+2\le 2)\\&=-4x+2\end{aligned}$$

(ii) $\frac{1}{2}<x\le1$일 때,

$$\begin{aligned}(f\circ f)(x)&=f(f(x))=f(-2x+2)\\&=-2(-2x+2)+2\ (\because\ 0\le -2x+2<1)\\&=4x-2\end{aligned}$$

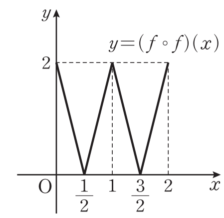
(iii) $1<x<\frac{3}{2}$일 때,

$$\begin{aligned}(f\circ f)(x)&=f(f(x))=f(2x-2)\\&=-2(2x-2)+2\ (\because\ 0<2x-2<1)\\&=-4x+6\end{aligned}$$

(iv) $\frac{3}{2}\le x\le2$일 때,

$$\begin{aligned}(f\circ f)(x)&=f(f(x))=f(2x-2)\\&=2(2x-2)-2\ (\because\ 1\le 2x-2\le 2)\\&=4x-6\end{aligned}$$

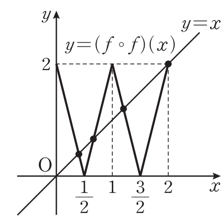
(i)~(iv)에서 함수 $y=(f\circ f)(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




(2단계) $y=(f\circ f)(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 개수를 구하여 주어진 방정식을 만족시키는 실수 $x$의 개수를 구한다.

방정식 $(f\circ f)(x)=x$를 만족시키는 실수 $x$의 개수는 함수 $y=(f\circ f)(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 개수와 같다.

따라서 오른쪽 그림에서 방정식 $(f\circ f)(x)=x$를 만족시키는 실수 $x$의 개수는 4이다.




## 520

**합성함수 ⊕ 역함수의 성질**

(1단계) $X\cap Y$를 구하고, 조건 (나)를 이용하여 $f(x)$의 값의 범위를 구한다.

ㄱ. 조건 (나)에서 집합 $X\cap Y=\{2, 3, 4\}$의 모든 원소 $x$에 대하여 $g(x)-f(x)=1$이므로 $f(x)=5$인 $x$가 존재하면 $g(x)=6$이 되어 모순이다.

즉, 집합 $X\cap Y=\{2, 3, 4\}$의 모든 원소 $x$에 대하여 $f(x)\le4$이고, 조건 (가)에서 함수 $f$는 일대일대응이므로

$\{f(2), f(3), f(4)\}=\{2, 3, 4\}$

$g(x)=f(x)+1$이므로

$\{g(2), g(3), g(4)\}=\{3, 4, 5\}$

따라서 함수 $g\circ f$의 치역은 $Z$이다. (참)

(2단계) ㄱ을 이용하여 $f(1)$의 값을 구한다.

ㄴ. ㄱ에서 $\{f(2), f(3), f(4)\}=\{2, 3, 4\}$이고 함수 $f$는 일대일대응이므로

$f(1)=5\qquad\therefore\ f^{-1}(5)=1$ (거짓)

(3단계) ㄴ과 $f(3)<g(2)<f(1)$을 이용하여 $f(4)$, $g(2)$의 값을 구한다.

ㄷ. ㄴ에서 $f(1)=5$이므로

$f(3)<g(2)<f(1)$이면

$f(3)<g(2)<5$ …… ㉠

(i) $g(2)=3$인 경우

조건 (나)에서

$f(2)=g(2)-1=3-1=2$

함수 $f$는 일대일대응이므로 $f(3)=3$ 또는 $f(3)=4$가 되어 ㉠을 만족시키지 않는다.

(ii) $g(2)=4$인 경우

조건 (나)에서

$f(2)=g(2)-1=4-1=3$ …… ㉡

이것은 ㉠을 만족시킨다.

㉠, ㉡에서 $f(3)<3$이므로 $f(3)=2$

함수 $f$는 일대일대응이므로 $f(4)=4$

$\therefore\ f(4)+g(2)=4+4=8$ (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

# 11 유리함수

## 유형 분석 기출

● 131쪽 ~ 135쪽

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **521** ③ | **522** 13 | **523** ③ | **524** 42 | **525** ② |
| **526** $-2$ | **527** ③ | **528** ④ | **529** $-1$ | **530** 1 |
| **531** ⑤ | **532** ⑤ | **533** ② | **534** 3 | **535** ③ |
| **536** ④ | **537** ③ | **538** $-3$ | **539** 9 | **540** ⑤ |
| **541** $2\sqrt{6}$ | **542** ⑤ | **543** 12 | **544** 1 | **545** ⑤ |
| **546** ③ | **547** 5 | **548** ① | **549** 25 | |

### 521

$\dfrac{x^2+x-2}{x^2-9}\div\dfrac{x^2-3x+2}{x+3}\times\dfrac{x-2}{x^2+2x}$

$=\dfrac{(x+2)(x-1)}{(x+3)(x-3)}\times\dfrac{x+3}{(x-1)(x-2)}\times\dfrac{x-2}{x(x+2)}$

$=\dfrac{1}{x(x-3)}$

### 522

주어진 등식의 우변을 통분하면

$\dfrac{a}{x}-\dfrac{b}{x^2}-\dfrac{c}{x+1}=\dfrac{ax(x+1)-b(x+1)-cx^2}{x^2(x+1)}$

$=\dfrac{ax^2+ax-bx-b-cx^2}{x^2(x+1)}$

$=\dfrac{(a-c)x^2+(a-b)x-b}{x^2(x+1)}$

이므로

$\dfrac{2x-3}{x^2(x+1)}=\dfrac{(a-c)x^2+(a-b)x-b}{x^2(x+1)}$

위의 등식은 $x$에 대한 항등식이므로

$a-c=0,\ a-b=2,\ -b=-3$

$\therefore\ a=5,\ b=3,\ c=5$

$\therefore\ a+b+c=5+3+5=13$

### 523

$\dfrac{1}{a(a+1)}+\dfrac{2}{(a+1)(a+3)}+\dfrac{3}{(a+3)(a+6)}$

$=\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a+1}\right)+\left(\dfrac{1}{a+1}-\dfrac{1}{a+3}\right)+\left(\dfrac{1}{a+3}-\dfrac{1}{a+6}\right)$

$=\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a+6}=\dfrac{6}{a(a+6)}$

**1등급 비법**

분모가 두 인수의 곱의 꼴인 분수식의 합은 부분분수로의 변형을 이용한다.

① $\dfrac{1}{AB}=\dfrac{1}{B-A}\left(\dfrac{1}{A}-\dfrac{1}{B}\right)$ (단, $A\neq B$)

② $\dfrac{k}{AB}=\dfrac{k}{B-A}\left(\dfrac{1}{A}-\dfrac{1}{B}\right)$ (단, $A\neq B$, $k$는 상수이다.)

### 524

$\dfrac{33}{13}=2+\dfrac{7}{13}=2+\dfrac{1}{\dfrac{13}{7}}$

$=2+\dfrac{1}{1+\dfrac{6}{7}}=2+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\dfrac{7}{6}}}$

$=2+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{6}}}$

따라서 $a=2,\ b=1,\ c=1,\ d=6$이므로

$a^2+b^2+c^2+d^2=4+1+1+36=42$

### 525

$x^2+x+1=0$에서 $x\neq0$이므로 양변을 $x$로 나누면

$x+1+\dfrac{1}{x}=0$

$\therefore\ x+\dfrac{1}{x}=-1$

$\therefore\ 3x^2+5x-1+\dfrac{5}{x}+\dfrac{3}{x^2}$

$=3\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)+5\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-1$

$=3\left\{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2\right\}+5\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-1$

$=3\{(-1)^2-2\}+5\times(-1)-1$

$=-3-5-1=-9$

**개념 보충**

곱셈 공식을 변형하여 분수식의 값 구하기

① $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2$

② $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+4$

③ $x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$

④ $x^3-\dfrac{1}{x^3}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$

### 526

$y=\dfrac{bx-5}{x+2a}=\dfrac{b(x+2a)-2ab-5}{x+2a}$

$=\dfrac{-2ab-5}{x+2a}+b$

이므로 정의역은 $\{x\,|\,x\neq-2a$인 실수$\}$, 치역은 $\{y\,|\,y\neq b$인 실수$\}$이다.

따라서 $-2a=3,\ b=-\dfrac{1}{2}$이므로

$a=-\dfrac{3}{2},\ b=-\dfrac{1}{2}$

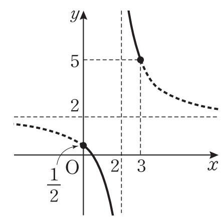
$\therefore\ a+b=-\dfrac{3}{2}+\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-2$

## 527

$y=\dfrac{2x-1}{x-2}=\dfrac{2(x-2)+3}{x-2}=\dfrac{3}{x-2}+2$

이므로 주어진 함수의 그래프는 함수 $y=\dfrac{3}{x}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 2만큼, $y$축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $0\le x<2$ 또는 $2<x\le 3$에서 함수 $y=\dfrac{2x-1}{x-2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 치역은




$\left\{y \,\middle|\, y\le\dfrac{1}{2} \text{ 또는 } y\ge 5\right\}$

## 528

함수 $y=\dfrac{b}{x-a}$의 그래프의 한 점근선의 방정식이 $x=4$이므로

$a=4$

함수 $y=\dfrac{b}{x-4}$의 그래프가 점 $(2, 4)$를 지나므로

$4=\dfrac{b}{2-4}\qquad \therefore b=-8$

$\therefore a-b=4-(-8)=12$

## 529

$f(x)=\dfrac{6x+4}{2x+a}=\dfrac{3(2x+a)-3a+4}{2x+a}=\dfrac{-3a+4}{2x+a}+3$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-\dfrac{a}{2}$, $y=3$이고 두 점근선의 교점의 좌표는 $\left(-\dfrac{a}{2}, 3\right)$이다.

$g(x)=\dfrac{bx+6}{3x+c}=\dfrac{\dfrac{b}{3}(3x+c)-\dfrac{bc}{3}+6}{3x+c}=\dfrac{-\dfrac{bc}{3}+6}{3x+c}+\dfrac{b}{3}$

이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-\dfrac{c}{3}$, $y=\dfrac{b}{3}$이고 두 점근선의 교점의 좌표는 $\left(-\dfrac{c}{3}, \dfrac{b}{3}\right)$이다.

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 두 점근선의 교점이 일치하므로

$-\dfrac{a}{2}=-\dfrac{c}{3}$, $3=\dfrac{b}{3}\qquad \therefore a=\dfrac{2}{3}c,\ b=9$

이때 $g(x)=\dfrac{9x+6}{3x+c}$이고 $g(3)=11$이므로

$\dfrac{27+6}{9+c}=11$, $9+c=3\qquad \therefore c=-6$

$\therefore a=\dfrac{2}{3}\times(-6)=-4$

$\therefore a+b+c=-4+9+(-6)=-1$

## 530

주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=-2$, $y=3$이므로 함수의 식을

$y=\dfrac{k}{x+2}+3\ (k\ne 0)$ …… ㉠

으로 놓을 수 있다.

이때 ㉠의 그래프가 점 $(0, 0)$을 지나므로

$0=\dfrac{k}{2}+3\qquad \therefore k=-6$

$k=-6$을 ㉠에 대입하면

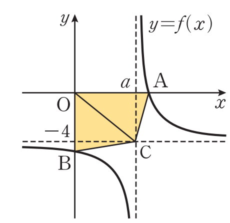
$y=\dfrac{-6}{x+2}+3=\dfrac{-6+3(x+2)}{x+2}=\dfrac{3x}{x+2}$

따라서 $a=3$, $b=0$, $c=-2$이므로

$a+b+c=3+0+(-2)=1$

## 531

함수 $y=\dfrac{4}{x-a}-4\ (a>1)$의 그래프의 두 점근선의 방정식은 $x=a$, $y=-4$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




이때 $A(a+1, 0)$, $B\left(0, -\dfrac{4}{a}-4\right)$,

$C(a, -4)$이고, 사각형 OBCA의 넓이는

삼각형 OCA의 넓이와 삼각형 OBC의 넓이의 합과 같으므로

$\dfrac{1}{2}\times(a+1)\times 4+\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{4}{a}+4\right)\times a=24$

$4a+4=24\qquad \therefore a=5$

## 532

① $y=\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{(x+1)-1}{x+1}=-\dfrac{1}{x+1}+1$

이므로 $y=-\dfrac{1}{x}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $-1$만큼, $y$축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

② $y=\dfrac{2x}{x+1}=\dfrac{2(x+1)-2}{x+1}=-\dfrac{2}{x+1}+2$

이므로 함수 $y=-\dfrac{2}{x}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $-1$만큼, $y$축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

③ $y=\dfrac{x-2}{x-1}=\dfrac{(x-1)-1}{x-1}=-\dfrac{1}{x-1}+1$

이므로 함수 $y=-\dfrac{1}{x}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 1만큼, $y$축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

④ $y=\dfrac{x+3}{x+1}=\dfrac{(x+1)+2}{x+1}=\dfrac{2}{x+1}+1$

이므로 함수 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $-1$만큼, $y$축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

⑤ $y=\dfrac{2-x}{x-1}=\dfrac{-(x-1)+1}{x-1}=\dfrac{1}{x-1}-1$

이므로 함수 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 1만큼, $y$축의 방향으로 $-1$만큼 평행이동한 것이다.

따라서 평행이동에 의하여 함수 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프와 완전히 겹쳐질 수 있는 것은 ⑤이다.

## 533

$$y=\frac{3x+4}{x+2}=\frac{3(x+2)-2}{x+2}=-\frac{2}{x+2}+3 \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

㉠의 그래프를 $x$축의 방향으로 $m$만큼, $y$축의 방향으로 $n$만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=-\frac{2}{x+2-m}+3+n \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$

이때

$$y=-\frac{2x}{x-1}=\frac{-2(x-1)-2}{x-1}=-\frac{2}{x-1}-2 \quad \cdots\cdots \text{㉢}$$

이고, ㉡과 ㉢이 일치해야 하므로

$2-m=-1,\ 3+n=-2 \quad \therefore m=3,\ n=-5$

$\therefore m+n=3+(-5)=-2$

## 534

$$y=\frac{2x}{x-a}=\frac{2(x-a)+2a}{x-a}=\frac{2a}{x-a}+2$$

이므로 그래프의 점근선의 방정식은 $x=a$, $y=2$이고, 그래프는 점 $(a, 2)$에 대하여 대칭이다.

$\therefore a=4$

$y=\dfrac{2x}{x-4}$의 그래프를 $y$축의 방향으로 $b$만큼 평행이동하면

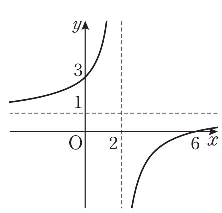
$$y=\frac{2x}{x-4}+b$$

이 그래프가 점 $(0, -1)$을 지나므로 $b=-1$

$\therefore a+b=4+(-1)=3$

## 535

함수 $y=-\dfrac{4}{x-2}+1$의 그래프는 함수 $y=-\dfrac{4}{x}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 2만큼, $y$축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.




①, ②, ④ 그래프는 점 $(0, 3)$을 지나고, 그래프의 점근선의 방정식은 $x=2$, $y=1$이며, 치역은 $y\neq1$인 실수 전체의 집합이다.

③ 그래프는 제1, 2, 4사분면을 지나고 제3사분면을 지나지 않는다.

⑤ 함수 $y=-\dfrac{4}{x-2}+1$의 그래프는 두 점근선의 교점 $(2, 1)$을 지나면서 기울기가 1 또는 $-1$인 직선에 대하여 대칭이다.
이때 직선의 방정식은
$y-1=x-2$ 또는 $y-1=-(x-2)$
즉, 직선 $y=x-1$ 또는 직선 $y=-x+3$에 대하여 대칭이다.

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

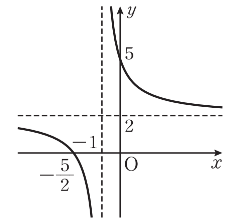
## 536

$$y=\frac{2x+5}{x+1}=\frac{2(x+1)+3}{x+1}=\frac{3}{x+1}+2$$

ㄱ. 정의역은 $\{x\,|\,x\neq-1$인 실수$\}$이다. (거짓)

ㄴ. 그래프는 점 $(-1, 2)$에 대하여 대칭이다. (참)

ㄷ. 함수 $y=\dfrac{2x+5}{x+1}$의 그래프는 함수 $y=\dfrac{3}{x}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $-1$만큼, $y$축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다. (참)




ㄹ. 그래프는 제1, 2, 3사분면을 지나고 제4사분면을 지나지 않는다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

## 537

주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=1$, $y=1$이므로

$a=-1$, $c=1$

또, 함수의 그래프가 제1, 2, 4사분면을 지나므로

$b<0$

ㄱ. $a+b+c=-1+b+1=b<0$ (참)

ㄴ. $bc=b<0$ (거짓)

ㄷ. $abc+b=(-1)\times b\times1+b=0$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

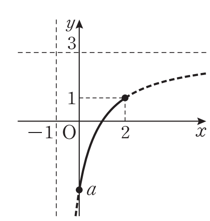
## 538

$$y=\frac{3x+a}{x+1}=\frac{3(x+1)+a-3}{x+1}=\frac{a-3}{x+1}+3$$

이고 $0\le x\le2$에서 최댓값이 1이므로

$a-3<0$

즉, 주어진 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

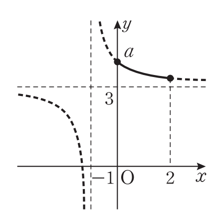



따라서 $x=2$일 때 최댓값이 1이므로

$1=\dfrac{3\times2+a}{2+1}$, $6+a=3$

$\therefore a=-3$

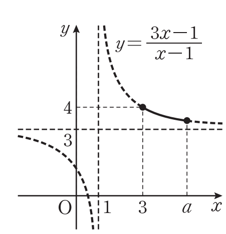
참고 $a-3>0$이면 $0\le x\le2$에서 함수 $y=\dfrac{3x+a}{x+1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 최댓값이 3보다 크게 된다.
그런데 문제에서 최댓값이 1로 주어졌으므로 $a-3>0$인 경우는 성립하지 않는다.




## 539

$$y=\frac{3x-1}{x-1}=\frac{3(x-1)+2}{x-1}=\frac{2}{x-1}+3$$

$3\le x\le a$에서 함수 $y=\dfrac{3x-1}{x-1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




함수 $y=\dfrac{3x-1}{x-1}$이 $x=3$에서 최댓값 4를 가지므로

$b=4$

$x=a$에서 최솟값 $\frac{7}{2}$을 가지므로

$\frac{3a-1}{a-1}=\frac{7}{2}$, $6a-2=7a-7$ $\quad\therefore a=5$

$\therefore a+b=5+4=9$

## 540

함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=3$, $y=2$이므로

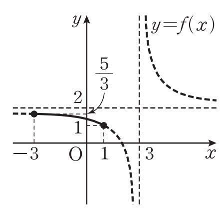
함수의 식을 $f(x)=\frac{k}{x-3}+2\ (k\neq0)$로 놓을 수 있다.

또, 함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(4, 4)$를 지나므로

$4=\frac{k}{4-3}+2$ $\quad\therefore k=2$

$\therefore f(x)=\frac{2}{x-3}+2$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $y=\frac{2}{x}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 3만큼, $y$축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.




$-3\le x\le1$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=-3$일 때 최댓값 $\frac{5}{3}$, $x=1$일 때 최솟값 1을 갖는다.

따라서 구하는 합은

$\frac{5}{3}+1=\frac{8}{3}$

## 541

함수 $y=\frac{2}{x}$의 그래프와 직선 $y=-3x+k$가 한 점에서 만나므로

$\frac{2}{x}=-3x+k$에서 $2=x(-3x+k)$, $2=-3x^2+kx$

$\therefore 3x^2-kx+2=0$

위의 이차방정식의 판별식을 $D$라 하면

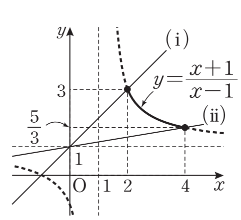
$D=(-k)^2-4\times3\times2=0$

$k^2=24$ $\quad\therefore k=2\sqrt{6}\ (\because k>0)$

**1등급 비법**

유리함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$가 한 점에서 만나면 방정식 $f(x)=g(x)$가 이차방정식일 때, (판별식)$=0$임을 이용한다.

## 542




$y=\frac{x+1}{x-1}=\frac{(x-1)+2}{x-1}=\frac{2}{x-1}+1$

이므로 정의역이 $\{x|2\le x\le4\}$인 함수 $y=\frac{x+1}{x-1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 직선 $y=ax+1$은 $a$의 값에 관계없이 항상 점 $(0, 1)$을 지난다.

(i) 직선 $y=ax+1$이 점 $(2, 3)$을 지날 때,

$3=2a+1$ $\quad\therefore a=1$

(ii) 직선 $y=ax+1$이 점 $\left(4, \frac{5}{3}\right)$를 지날 때,

$\frac{5}{3}=4a+1$ $\quad\therefore a=\frac{1}{6}$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 $a$의 값의 범위는

$\frac{1}{6}\le a\le1$

따라서 $a$의 최댓값은 1, 최솟값은 $\frac{1}{6}$이므로 구하는 합은

$1+\frac{1}{6}=\frac{7}{6}$

## 543

$A\cap B=\varnothing$이 성립하려면 함수 $y=\frac{x+2}{x-1}$의 그래프와 직선 $y=ax+1$이 만나지 않아야 한다.

$y=\frac{x+2}{x-1}=\frac{(x-1)+3}{x-1}=\frac{3}{x-1}+1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

(i) $a=0$이면

직선 $y=1$은 ㉠의 그래프의 점근선이므로 만나지 않는다.

(ii) $a\neq0$이면

$\frac{x+2}{x-1}=ax+1$에서 $x+2=(ax+1)(x-1)$

$x+2=ax^2+(1-a)x-1$

$\therefore ax^2-ax-3=0$

이때 위의 이차방정식의 실근이 존재하지 않아야 하므로 이차방정식의 판별식을 $D$라 하면

$D=(-a)^2-4\times a\times(-3)<0$

$a^2+12a<0$, $a(a+12)<0$

$\therefore -12<a<0$

(i), (ii)에서 $-12<a\le0$

따라서 정수 $a$는 $-11, -10, -9, \cdots, -1, 0$의 12개이다.

## 544

$y=\frac{ax+1}{x-1}$로 놓고 $x$에 대하여 풀면

$y(x-1)=ax+1$ $\quad\therefore x=\frac{y+1}{y-a}$

$x$와 $y$를 서로 바꾸면 $y=\frac{x+1}{x-a}$ $\quad\therefore f^{-1}(x)=\frac{x+1}{x-a}$

이때 $f(x)=f^{-1}(x)$이므로

$\frac{ax+1}{x-1}=\frac{x+1}{x-a}$ $\quad\therefore a=1$

**다른 풀이** $f(x)=f^{-1}(x)$에서 $(f\circ f)(x)=x$

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=\frac{af(x)+1}{f(x)-1}$

$$=\frac{a\times\frac{ax+1}{x-1}+1}{\frac{ax+1}{x-1}-1}=\frac{a(ax+1)+x-1}{ax+1-x+1}$$

$$=\frac{(a^2+1)x+a-1}{(a-1)x+2}=x$$

$(a^2+1)x+a-1=(a-1)x^2+2x$

$\therefore (a-1)x^2-(a^2-1)x-(a-1)=0$

위의 등식이 $x$에 대한 항등식이므로
$a-1=0,\ -a^2+1=0,\ -a+1=0$
$\therefore\ a=1$

**1등급 비법**

유리함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$의 역함수는 $y=\dfrac{-dx+b}{cx-a}$
즉, $a$, $d$의 위치와 부호만 바뀐다.

## 545

함수 $f(x)=\dfrac{ax+b}{x+2}$의 그래프가 점 $(3,\ 1)$을 지나므로

$1=\dfrac{3a+b}{3+2}\quad\therefore\ 3a+b=5$ ...... ㉠

함수 $f(x)=\dfrac{ax+b}{x+2}$의 역함수의 그래프가 점 $(3,\ 1)$을 지나므로

함수 $f(x)=\dfrac{ax+b}{x+2}$의 그래프는 점 $(1,\ 3)$을 지난다.

즉, $3=\dfrac{a+b}{1+2}\quad\therefore\ a+b=9$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a=-2,\ b=11$
$\therefore\ b-a=11-(-2)=13$

**개념 보충**

**함수와 그 역함수의 그래프 사이의 관계**

함수 $y=f(x)$의 역함수 $y=f^{-1}(x)$가 존재할 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(a,\ b)$를 지나면 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 점 $(b,\ a)$를 지난다.

$f(a)=b \Longleftrightarrow f^{-1}(b)=a$

## 546

$$(f\circ f\circ f)(a)=f(f(f(a)))=f\left(f\left(\frac{1}{a+1}\right)\right)$$
$$=f\left(\frac{1}{\frac{1}{a+1}+1}\right)=f\left(\frac{a+1}{a+2}\right)$$
$$=\frac{1}{\frac{a+1}{a+2}+1}=\frac{a+2}{2a+3}$$

따라서 $\dfrac{a+2}{2a+3}=\dfrac{2}{5}$이므로

$5a+10=4a+6\quad\therefore\ a=-4$

**다른 풀이** $y=\dfrac{1}{x+1}$로 놓고 $x$에 대하여 풀면

$xy+y=1\quad\therefore\ x=\dfrac{1-y}{y}$

$x$와 $y$를 서로 바꾸면

$y=\dfrac{1-x}{x}\quad\therefore\ f^{-1}(x)=\dfrac{1-x}{x}$

$$\therefore\ a=f^{-1}\left(f^{-1}\left(f^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)\right)\right)=f^{-1}\left(f^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)\right)$$
$$=f^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)=-4$$

## 547

$f^{-1}(1)=2$에서 $f(2)=1$이므로

$(f\circ f)(2)=f(f(2))=f(1)=\dfrac{1}{2}$

즉, $f(1)=\dfrac{1}{2}$, $f(2)=1$이므로

$f(1)=\dfrac{a-1}{b+1}=\dfrac{1}{2}\quad\therefore\ 2a-b=3$ ...... ㉠

$f(2)=\dfrac{2a-1}{2b+1}=1\quad\therefore\ a-b=1$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2,\ b=1$

따라서 $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$이므로

$f(-2)=\dfrac{-4-1}{-2+1}=5$

## 548

$$y=\frac{bx-4}{ax+3}=\frac{\frac{b}{a}(ax+3)-\frac{3b}{a}-4}{ax+3}=\frac{-\frac{3b}{a}-4}{ax+3}+\frac{b}{a}$$

이므로 함수 $y=\dfrac{bx-4}{ax+3}$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-\dfrac{3}{a},\ y=\dfrac{b}{a}$

$f(f(x))=x$에서 $f(x)=f^{-1}(x)$이므로 주어진 함수와 그 역함수가 일치한다.
즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.
따라서 두 점근선의 방정식은 $x=-3,\ y=-3$이므로

$-\dfrac{3}{a}=-3,\ \dfrac{b}{a}=-3\quad\therefore\ a=1,\ b=-3$

$\therefore\ a+b=1+(-3)=-2$

## 549

함수 $g(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이고 조건 (가)에서 $g(1)=-2$이므로 $f(-2)=1$

즉, $\dfrac{-8+a}{-2+b}=1$이므로 $a=b+6$ ...... ㉠

$$f(x)=\frac{4x+a}{x+b}=\frac{4(x+b)-4b+a}{x+b}=\frac{a-4b}{x+b}+4$$

에서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-b,\ y=4$이므로 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=4$, $y=-b$이다.
조건 (나)에서 $g(x)=f(x+1)+1$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $-1$만큼, $y$축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.
즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프의 두 점근선 $x=-b,\ y=4$를 $x$축의 방향으로 $-1$만큼, $y$축의 방향으로 1만큼 평행이동하면 함수 $y=g(x)$의 그래프의 두 점근선과 일치해야 하므로
$-b-1=4$에서 $b=-5$
$b=-5$를 ㉠에 대입하면 $a=-5+6=1$

따라서 $f(x)=\dfrac{4x+1}{x-5}$이므로 $f(6)=\dfrac{24+1}{6-5}=25$

## 내신 적중 서술형

● 136쪽

**550** 3　**551** 7　**552** $k<0$ 또는 $0<k\le 2$
**553** (1) 7　(2) 7

## 550

$\frac{2x+y}{7}=\frac{y}{5}=\frac{6z+x}{4}=k\ (k\neq 0)$로 놓으면 …… ㉮

$2x+y=7k$, $y=5k$, $6z+x=4k$

$y=5k$를 $2x+y=7k$에 대입하면

$2x+5k=7k$　　$\therefore x=k$

$x=k$를 $6z+x=4k$에 대입하면

$6z+k=4k$　　$\therefore z=\frac{1}{2}k$ …… ㉯

$$\therefore \frac{-2x+5y-4z}{x+y+2z}=\frac{-2k+5\times 5k-4\times\frac{1}{2}k}{k+5k+2\times\frac{1}{2}k}=\frac{-2k+25k-2k}{k+5k+k}=\frac{21k}{7k}=3$$ …… ㉰

| 채점 기준 | 배점 비율 |
|---|---|
| ㉮ $\frac{2x+y}{7}=\frac{y}{5}=\frac{6z+x}{4}=k\ (k\neq 0)$로 놓기 | 20 % |
| ㉯ $x$, $y$, $z$를 $k$에 대한 식으로 나타내기 | 50 % |
| ㉰ 식의 값 구하기 | 30 % |

## 551

$$y=\frac{bx-2}{x-a}=\frac{b(x-a)+ab-2}{x-a}=\frac{ab-2}{x-a}+b$$

이므로 점근선의 방정식은 $x=a$, $y=b$

따라서 주어진 함수의 그래프는 두 점근선의 교점 $(a, b)$에 대하여 대칭이다.

이때 이 그래프가 두 직선 $y=x+2$, $y=-x+4$에 대하여 대칭이므로 두 직선은 점 $(a, b)$를 지나야 한다. 즉,

$b=a+2$, $b=-a+4$ …… ㉮

두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=3$ …… ㉯

$\therefore a+2b=1+2\times 3=7$ …… ㉰

| 채점 기준 | 배점 비율 |
|---|---|
| ㉮ $a$, $b$ 사이의 관계식 구하기 | 60 % |
| ㉯ $a$, $b$의 값 구하기 | 20 % |
| ㉰ $a+2b$의 값 구하기 | 20 % |

**다른 풀이** 두 직선 $y=x+2$, $y=-x+4$의 교점의 $x$좌표는

$x+2=-x+4$에서 $2x=2$　　$\therefore x=1$

$x=1$일 때, $y=3$

이때 두 직선의 교점 $(1, 3)$은 함수 $y=\frac{bx-2}{x-a}$의 그래프의 두 점근선의 교점 $(a, b)$와 일치하므로

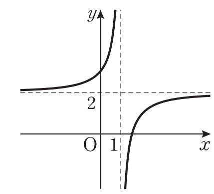
$a=1$, $b=3$

$\therefore a+2b=1+2\times 3=7$

## 552

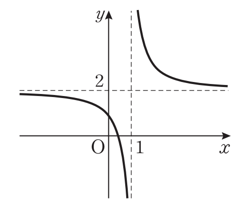
(i) $k<0$일 때,

오른쪽 그림과 같이 $k$의 값에 관계없이 함수 $y=\frac{k}{x-1}+2$의 그래프는 제3사분면을 지나지 않는다. …… ㉮




(ii) $k>0$일 때,

오른쪽 그림과 같이 함수 $y=\frac{k}{x-1}+2$의 그래프가 제3사분면을 지나지 않으려면 $x=0$일 때, $y\ge 0$이어야 하므로




$\frac{k}{0-1}+2\ge 0$　　$\therefore k\le 2$

$\therefore 0<k\le 2\ (\because k>0)$ …… ㉯

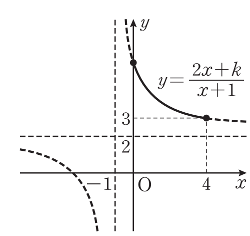
(i), (ii)에서 $k<0$ 또는 $0<k\le 2$ …… ㉰

| 채점 기준 | 배점 비율 |
|---|---|
| ㉮ $k<0$일 때, $k$의 값의 범위 구하기 | 40 % |
| ㉯ $k>0$일 때, $k$의 값의 범위 구하기 | 40 % |
| ㉰ $k$의 값의 범위 구하기 | 20 % |

## 553

(1) $y=\frac{2x+k}{x+1}=\frac{2(x+1)+k-2}{x+1}=\frac{k-2}{x+1}+2$

이때 $0\le x\le 4$에서 함수 $y=\frac{2x+k}{x+1}$의 최솟값이 3이려면 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.




함수 $y=\frac{2x+k}{x+1}$가 $x=4$에서 최솟값 3을 가지므로

$\frac{8+k}{5}=3$

$\therefore k=7$ …… ㉮

(2) $0\le x\le 4$에서 함수 $y=\frac{2x+7}{x+1}$은 $x=0$에서 최댓값을 가지므로 구하는 최댓값은 7이다. …… ㉯

| | 채점 기준 | 배점 비율 |
|---|---|---|
| (1) | ㉮ $k$의 값 구하기 | 70 % |
| (2) | ㉯ 주어진 함수의 최댓값 구하기 | 30 % |

## 1등급 실력 완성

● 137쪽 ~ 138쪽

**554** 100　**555** 8　**556** $\sqrt{2}$　**557** ④　**558** $\frac{5}{4}$
**559** $-3$　**560** ②　**561** ④

## 554

유리식의 계산

전략 주어진 조건을 변형하여 식의 값을 구한다.

풀이 $f(n)f(51-n)=1$에서 $f(n)=\dfrac{1}{f(51-n)}$이므로

$$\frac{1}{1+f(n)}=\frac{1}{1+\dfrac{1}{f(51-n)}}=\frac{f(51-n)}{1+f(51-n)} \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

$$\therefore \frac{1}{1+f(n)}+\frac{1}{1+f(51-n)}=\frac{f(51-n)+1}{1+f(51-n)}=1 \ (\because \text{㉠})$$

따라서

$$\frac{1}{1+f(1)}+\frac{1}{1+f(2)}+\frac{1}{1+f(3)}+\cdots+\frac{1}{1+f(50)}$$

$=1\times 25=25$

이므로

$$\frac{4}{1+f(1)}+\frac{4}{1+f(2)}+\frac{4}{1+f(3)}+\cdots+\frac{4}{1+f(50)}$$

$=4\times 25=100$

## 555

유리함수의 그래프의 점근선

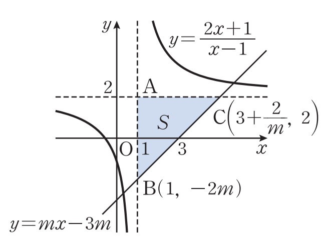
전략 세 점 A, B, C의 좌표를 구한 후, 삼각형 ABC의 넓이를 구해 본다.

풀이 $y=\dfrac{2x+1}{x-1}=\dfrac{2(x-1)+3}{x-1}=\dfrac{3}{x-1}+2$

에서 점근선의 방정식은 $x=1$, $y=2$이므로 두 점근선의 교점 A의 좌표는 $(1, 2)$이다.

한편, 직선 $y=mx-3m$, 즉 $y=m(x-3)$은 $m$의 값에 관계없이 항상 점 $(3, 0)$을 지난다.

두 직선 $x=1$, $y=mx-3m$의 교점 B의 좌표는 $(1, -2m)$, 두 직선 $y=2$, $y=mx-3m$의 교점 C의 좌표는 $\left(3+\dfrac{2}{m}, 2\right)$ 이다.




삼각형 ABC의 넓이를 $S$라 하면

$S=\dfrac{1}{2}\left(3+\dfrac{2}{m}-1\right)\{2-(-2m)\}=\dfrac{1}{2}\left(2+\dfrac{2}{m}\right)(2+2m)$

$=2\left(1+\dfrac{1}{m}\right)(1+m)$

$=2\left(2+m+\dfrac{1}{m}\right)$

이때 $m>0$, $\dfrac{1}{m}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$S\geq 2\left(2+2\sqrt{m\times\dfrac{1}{m}}\right)=2\times(2+2)=8$

(단, 등호는 $m=1$일 때 성립)

따라서 삼각형 ABC의 넓이의 최솟값은 8이다.

## 556

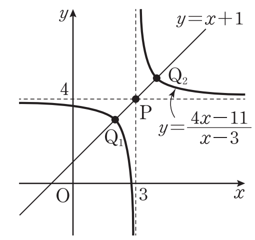
유리함수의 그래프의 평행이동과 대칭성

전략 함수 $y=\dfrac{4x-11}{x-3}$의 그래프를 그린 후, 두 점 P, Q 사이의 관계를 생각한다.

풀이 $y=\dfrac{4x-11}{x-3}=\dfrac{4(x-3)+1}{x-3}=\dfrac{1}{x-3}+4$

이므로 점근선의 방정식은 $x=3$, $y=4$

즉, 점 P(3, 4)는 두 점근선의 교점이므로 $\overline{PQ}$의 길이가 최소일 때의 점 Q는 오른쪽 그림과 같이 $Q_1$, $Q_2$로 두 개가 존재한다.




한편, 곡선 $y=\dfrac{4x-11}{x-3}$은 점 P(3, 4)에 대하여 대칭이므로 직선 $y-4=x-3$, 즉 $y=x+1$에 대하여 대칭이다.

$\dfrac{4x-11}{x-3}=x+1$에서 $4x-11=(x+1)(x-3)$

$x^2-6x+8=0$, $(x-2)(x-4)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=4$

따라서 두 점 $Q_1$, $Q_2$의 좌표는 각각 $(2, 3)$, $(4, 5)$이고

$\overline{PQ_1}=\overline{PQ_2}$이므로 선분 PQ의 최솟값은

$\overline{PQ_1}=\sqrt{(2-3)^2+(3-4)^2}=\sqrt{2}$

## 557

유리함수의 그래프의 평행이동과 대칭성

전략 네 점 P, Q, R, S의 좌표를 $a$로 나타낸 후, 사각형 PQRS가 어떤 사각형인지 알아본다.

풀이 $P\left(a, \dfrac{k}{a}\right)$, $Q\left(a+2, \dfrac{k}{a+2}\right)$이므로 조건 (가)에 의하여

$\dfrac{\dfrac{k}{a+2}-\dfrac{k}{a}}{a+2-a}=-1$, $\dfrac{k}{a+2}-\dfrac{k}{a}=-2$

$\dfrac{-2k}{a(a+2)}=-2 \qquad \therefore k=a(a+2)$

$f(x)=\dfrac{k}{x}$에서

$f(a)=\dfrac{k}{a}=\dfrac{a(a+2)}{a}=a+2$,

$f(a+2)=\dfrac{k}{a+2}=\dfrac{a(a+2)}{a+2}=a$

이므로 $P(a, a+2)$, $Q(a+2, a)$

조건 (나)에 의하여

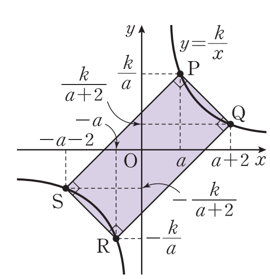
$R(-a, -a-2)$, $S(-a-2, -a)$

직선 PS의 기울기는

$\dfrac{a+2-(-a)}{a-(-a-2)}=1$,

직선 RS의 기울기는

$\dfrac{-a-2-(-a)}{-a-(-a-2)}=-1$,




직선 QR의 기울기는

$\dfrac{a-(-a-2)}{a+2-(-a)}=1$이므로 사각형 PQRS는 직사각형이다.

$\overline{PQ}=\sqrt{(a+2-a)^2+\{a-(a+2)\}^2}=2\sqrt{2}$,

$\overline{PS}=\sqrt{\{-(a+2)-a\}^2+\{-a-(a+2)\}^2}=2\sqrt{2}(a+1)$

이므로 사각형 PQRS의 넓이는

$2\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}(a+1)=8(a+1)=8\sqrt{5}$

따라서 $a+1=\sqrt{5}$, 즉 $a=\sqrt{5}-1$이므로
$k=a(a+2)=(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)=4$

**개념 보충**

점 $(x, y)$를
① $x$축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(x, -y)$
② $y$축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-x, y)$
③ 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-x, -y)$
④ 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(y, x)$

## 558

**유리함수의 최대, 최소**

전략 주어진 유리함수의 그래프가 대칭인 점의 좌표를 구하여 점근선의 방정식을 구한다.

풀이 함수 $f(x)=\dfrac{bx+c}{x+a}$가 $f(5-x)+f(5+x)=2$를 만족시키므로 함수 $y=\dfrac{bx+c}{x+a}$의 그래프는 점 $(5, 1)$에 대하여 대칭이다.

즉, 두 점근선의 방정식이 $x=5$, $y=1$이므로

$y=\dfrac{bx+c}{x+a}=\dfrac{b(x+a)+c-ab}{x+a}=\dfrac{c-ab}{x+a}+b$

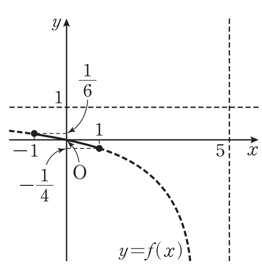
에서 $-a=5$, $b=1$ $\quad\therefore a=-5$, $b=1$

$\therefore f(x)=\dfrac{x+c}{x-5}$

$f(6)=6$이므로 $\dfrac{6+c}{6-5}=6$ $\quad\therefore c=0$

$\therefore f(x)=\dfrac{x}{x-5}=\dfrac{(x-5)+5}{x-5}=\dfrac{5}{x-5}+1$

$-1\le x\le 1$에서 함수 $y=\dfrac{x}{x-5}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=-1$일 때 최댓값 $\dfrac{1}{6}$, $x=1$일 때 최솟값 $-\dfrac{1}{4}$을 갖는다.




따라서 $M=\dfrac{1}{6}$, $m=-\dfrac{1}{4}$이므로

$6M-m=6\times\dfrac{1}{6}-\left(-\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{5}{4}$

## 559

**유리함수의 합성함수와 역함수**

전략 $f^1(x)$, $f^2(x)$, $f^3(x)$, $f^4(x)$, $\cdots$에서 규칙을 찾아 $f^{200}(f^{300}(3))$의 값을 구한다.

풀이 $f^1(x)=f(x)=\dfrac{x-3}{x+1}$

$f^2(x)=f(f(x))=\dfrac{f(x)-3}{f(x)+1}$

$=\dfrac{\dfrac{x-3}{x+1}-3}{\dfrac{x-3}{x+1}+1}=\dfrac{\dfrac{-2x-6}{x+1}}{\dfrac{2x-2}{x+1}}$

$=\dfrac{-x-3}{x-1}$

$f^3(x)=f(f^2(x))=\dfrac{f^2(x)-3}{f^2(x)+1}$

$=\dfrac{\dfrac{-x-3}{x-1}-3}{\dfrac{-x-3}{x-1}+1}=\dfrac{\dfrac{-4x}{x-1}}{\dfrac{-4}{x-1}}$

$=x$

$f^4(x)=f(f^3(x))=\dfrac{f^3(x)-3}{f^3(x)+1}=\dfrac{x-3}{x+1}=f(x)$

즉, $f^{3n-2}(x)=\dfrac{x-3}{x+1}$, $f^{3n-1}(x)=\dfrac{-x-3}{x-1}$,

$f^{3n}(x)=x$ ($n$은 자연수)이므로

$f^{200}(f^{300}(3))=f^{200}(f^{3\times100}(3))=f^{200}(3)=f^{3\times67-1}(3)$

$=\dfrac{-3-3}{3-1}=-3$

## 560

**유리함수의 합성함수와 역함수**

전략 함수 $f$가 역함수를 가지려면 $f$는 일대일대응이어야 함을 이용한다.

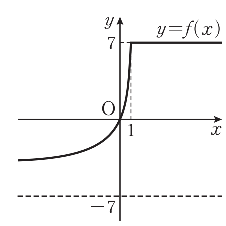
풀이 (i) $x\ge1$일 때,

$f(x)=\dfrac{7x}{1+x-1}=7$

(ii) $x<1$일 때,

$f(x)=\dfrac{7x}{1-x+1}=\dfrac{7x}{2-x}=\dfrac{7(x-2)+14}{-(x-2)}=-\dfrac{14}{x-2}-7$

(i), (ii)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




함수 $f(x)$가 역함수를 갖기 위해서는 함수 $f(x)$가 일대일대응이어야 하므로 함수 $y=f(x)$는 증가 또는 감소이어야 한다.
따라서 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하기 위한 $x$의 값의 범위는

$x\le1$

$y=\dfrac{7x}{2-x}$를 $x$에 대하여 풀면

$y(2-x)=7x$, $(y+7)x=2y$

$\therefore x=\dfrac{2y}{y+7}$

$x$와 $y$를 서로 바꾸면 $y=\dfrac{2x}{x+7}$

$\therefore f^{-1}(x)=\dfrac{2x}{x+7}$ $(-7<x\le7)$

## 561

**유리함수의 합성함수와 역함수**

전략 함수 $y=g(x)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 평행이동한 것이므로 점근선도 평행이동함을 이용한다.

풀이 $g(x)=f(x+3)-5$에서 $g(2)=f(5)-5$

이때 $g(2)=3$이므로

$f(5)-5=3$ $\quad\therefore f(5)=8$

$f(5)=8$에서 $\dfrac{8}{5a+b}=8$ $\quad\therefore 5a+b=1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$$f(x)=\frac{x+3}{ax+b}=\frac{\left(x+\frac{b}{a}\right)+3-\frac{b}{a}}{a\left(x+\frac{b}{a}\right)}$$

$$=\frac{3-\frac{b}{a}}{a\left(x+\frac{b}{a}\right)}+\frac{1}{a}$$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-\frac{b}{a}$, $y=\frac{1}{a}$

$g(x)=f(x+3)-5$에서 $y=g(x)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $-3$만큼, $y$축의 방향으로 $-5$만큼 평행이동한 것이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-\frac{b}{a}-3$, $y=\frac{1}{a}-5$

$y=g(x)$의 역함수 $y=g^{-1}(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=\frac{1}{a}-5$, $y=-\frac{b}{a}-3$

이때 $g=g^{-1}$이므로

$-\frac{b}{a}-3=\frac{1}{a}-5$, $\frac{b+1}{a}=2$

$\therefore 2a=b+1$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{2}{7}$, $b=-\frac{3}{7}$

$\therefore a+b=\frac{2}{7}+\left(-\frac{3}{7}\right)=-\frac{1}{7}$

## 도전 1등급 최고난도

● 139쪽

**562** $\frac{1}{2}$ **563** ①

## 562

유리함수의 그래프의 성질

(1단계) 함수 $y=\frac{x+1}{x-1}$의 그래프와 두 이차함수 $y=ax^2-2ax+a+1$, $y=bx^2-2bx+b+1$의 그래프를 그려 부등식이 성립하는 경우를 파악한다.

$y=\frac{x+1}{x-1}=\frac{(x-1)+2}{x-1}=\frac{2}{x-1}+1$

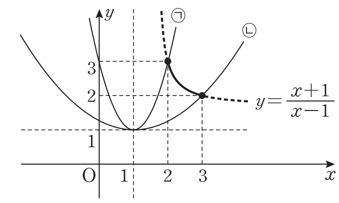
이므로 함수 $y=\frac{x+1}{x-1}$의 그래프는 함수 $y=\frac{2}{x}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 1만큼, $y$축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

또, $y=ax^2-2ax+a+1$, $y=bx^2-2bx+b+1$이라 하면

$y=a(x-1)^2+1$, $y=b(x-1)^2+1$

이므로 두 이차함수의 그래프는 $a$, $b$의 값에 관계없이 항상 점 $(1, 1)$을 지난다.

즉, $2\le x\le 3$에서 주어진 부등식이 항상 성립하려면 함수 $y=\frac{x+1}{x-1}$의 그래프와 두 이차함수의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.




(2단계) 그래프를 이용하여 $a$의 최댓값과 $b$의 최솟값을 구한다.

위의 그림에서 $a$가 최댓값을 갖도록 하는 함수의 그래프는 ㉡, $b$가 최솟값을 갖도록 하는 함수의 그래프는 ㉠임을 알 수 있다.

(i) 함수 $y=b(x-1)^2+1$의 그래프가 점 $(2, 3)$을 지날 때,

$3=b\times 1+1$ $\therefore b=2$

(ii) 함수 $y=a(x-1)^2+1$의 그래프가 점 $(3, 2)$를 지날 때,

$2=a\times 4+1$ $\therefore a=\frac{1}{4}$

(i), (ii)에서 $a$의 최댓값은 $\frac{1}{4}$, $b$의 최솟값은 2이다.

(3단계) $a$의 최댓값과 $b$의 최솟값의 곱을 구한다.

따라서 $a$의 최댓값과 $b$의 최솟값의 곱은

$\frac{1}{4}\times 2=\frac{1}{2}$

## 563

유리함수의 합성함수와 역함수

(1단계) 조건 (가)를 이용하여 곡선 $y=f(x)$의 점근선을 구한다.

조건 (가)에서 곡선 $y=f(x)$가 직선 $y=2$와 만나는 점의 개수와 곡선 $y=f(x)$가 직선 $y=-2$와 만나는 점의 개수의 합은 1이다.

곡선 $y=f(x)$가 $x$축에 평행한 직선과 만나는 점의 개수는 점근선을 제외하면 모두 1이므로 두 직선 $y=2$, $y=-2$ 중에서 하나는 곡선 $y=f(x)$의 점근선이다.

(2단계) $a$, $b$의 값을 구하여 $f(x)$의 식을 완성하고, $f(8)$의 값을 구한다.

$f(x)=\frac{a}{x}+b$에서 곡선 $y=f(x)$의 점근선이 직선 $y=b$이므로

$b=2$ 또는 $b=-2$ ······ ㉠

$y=\frac{a}{x}+b$를 $x$에 대하여 풀면

$\frac{a}{x}=y-b$, $x=\frac{a}{y-b}$

$x$와 $y$를 서로 바꾸면 $y=\frac{a}{x-b}$

$\therefore f^{-1}(x)=\frac{a}{x-b}$

조건 (나)에서 $f^{-1}(2)=f(2)-1$이므로

$\frac{a}{2-b}=\frac{a}{2}+b-1$ ······ ㉡

이때 $b\ne 2$이므로 ㉠에서 $b=-2$

$b=-2$를 ㉡에 대입하면

$\frac{a}{4}=\frac{a}{2}-3$ $\therefore a=12$

따라서 $f(x)=\frac{12}{x}-2$이므로

$f(8)=\frac{12}{8}-2=-\frac{1}{2}$

# 12 무리함수

## 유형 분석 기출

141쪽 ~ 145쪽

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **564** ④ | **565** $-\frac{1}{4}$ | **566** ① | **567** ③ | **568** 8 |
| **569** $\frac{3+\sqrt{3}}{3}$ | | **570** 6 | **571** ⑤ | **572** ① |
| **573** $\{y\mid y\geq 1\}$ | | **574** ② | **575** 3 | **576** ③ |
| **577** $-3$ | **578** ③ | **579** ④ | **580** 3 | **581** ③ |
| **582** ① | **583** 2 | **584** ② | **585** $k\geq\frac{1}{2}$ | **586** ④ |
| **587** 4 | **588** ② | **589** ⑤ | **590** $\frac{15}{2}$ | **591** ④ |
| **592** 1 | | | | |

### 564

$\sqrt{2-x}$에서 $2-x\geq 0$

$\therefore x\leq 2$ ...... ㉠

$\frac{1}{\sqrt{x+4}}$에서 $x+4>0$

$\therefore x>-4$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $-4<x\leq 2$

따라서 정수 $x$는 $-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$의 6개이다.

### 565

$8x^2+2x-3\geq 0$에서

$(4x+3)(2x-1)\geq 0$

$\therefore x\leq -\frac{3}{4}$ 또는 $x\geq\frac{1}{2}$

따라서 $a=-\frac{3}{4},\ b=\frac{1}{2}$이므로

$a+b=-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$

### 566

$$\frac{x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}-\frac{x}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$$
$$=\frac{x(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})-x(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}$$
$$=\frac{x\sqrt{x+1}-x\sqrt{x}-x\sqrt{x+1}-x\sqrt{x}}{x+1-x}$$
$$=-2x\sqrt{x}$$

### 567

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}=\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)+\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$
$$=\frac{x+\sqrt{x}+x-\sqrt{x}}{x-1}$$
$$=\frac{2x}{x-1}=\frac{2(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}+1)-1}$$
$$=\frac{2(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}}$$
$$=\sqrt{2}+2$$

### 568

$$\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$$
$$=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x}-\sqrt{x+1})}$$
$$=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{x-(x+1)}$$
$$=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$$

$$\therefore \frac{1}{f(1)}+\frac{1}{f(2)}+\frac{1}{f(3)}+\cdots+\frac{1}{f(80)}$$
$$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{81}-\sqrt{80})$$
$$=-1+\sqrt{81}$$
$$=-1+9$$
$$=8$$

### 569

$$x=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=2+\sqrt{3},$$
$$y=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=2-\sqrt{3}$$

이므로 $x-y=2\sqrt{3},\ xy=1$

$$\therefore \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}+\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y})+\sqrt{y}(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}$$
$$=\frac{x+\sqrt{xy}+\sqrt{xy}-y}{x-y}$$
$$=\frac{x-y+2\sqrt{xy}}{x-y}$$
$$=\frac{2\sqrt{3}+2}{2\sqrt{3}}$$
$$=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}$$
$$=\frac{3+\sqrt{3}}{3}$$

### 570

$6-3x\geq 0$이므로 $x\leq 2$

즉, 주어진 함수의 정의역이 $\{x\mid x\leq 2\}$이므로

$a=2$

또, $y=\sqrt{6-3x}+3+b$에서 $\sqrt{6-3x}\geq 0$이므로

치역은 $\{y\mid y\geq 3+b\}$, 즉

$3+b=7$

$\therefore b=4$

$\therefore a+b=2+4=6$

## 571

함수 $y=\sqrt{ax+3a}+b=\sqrt{a(x+3)}+b$의 정의역이 $\{x|x\geq-3\}$이므로 $a>0$

또, 치역이 $\{y|y\geq2\}$이므로 $b=2$

함수 $y=\sqrt{ax+3a}+2$의 그래프가 $y$축과 만나는 점의 $y$좌표가 5이므로 점 $(0, 5)$를 지난다.

$5=\sqrt{3a}+2$

$\sqrt{3a}=3$, $3a=9$ $\quad\therefore a=3$

$\therefore a+b=3+2=5$

## 572

함수 $y=-\sqrt{x-a}+a+2$의 그래프가 점 $(a, -a)$를 지나므로

$-a=-\sqrt{a-a}+a+2$

$2a=-2$ $\quad\therefore a=-1$

따라서 $y=-\sqrt{x+1}+1$에서 $-\sqrt{x+1}\leq0$이므로 구하는 함수의 치역은 $\{y|y\leq1\}$

## 573

조건 (가)에서

$y=\dfrac{-5x+7}{x-2}=\dfrac{-5(x-2)-3}{x-2}=-\dfrac{3}{x-2}-5$

이므로 점근선의 방정식은

$x=2$, $y=-5$ $\quad\therefore a=2$, $b=-5$

조건 (나)에서 함수 $y=\sqrt{2x-5}+c$의 그래프가 점 $(7, 4)$를 지나므로

$4=\sqrt{2\times7-5}+c$, $4=3+c$ $\quad\therefore c=1$

따라서 $f(x)=\sqrt{2x-5}+1$에서 $\sqrt{2x-5}\geq0$이므로 구하는 함수의 치역은 $\{y|y\geq1\}$

## 574

주어진 유리함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=3$, $y=2$이므로 함수의 식을

$y=\dfrac{k}{x-3}+2\ (k\neq0)$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

로 놓을 수 있다.

이때 ㉠의 그래프가 점 $(1, 0)$을 지나므로

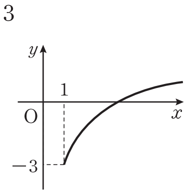
$0=\dfrac{k}{-2}+2$ $\quad\therefore k=4$

$k=4$를 ㉠에 대입하면 $y=\dfrac{4}{x-3}+2=\dfrac{2x-2}{x-3}$이므로

$a=2$, $b=-2$, $c=-3$

$\therefore y=\sqrt{ax+b}+c=\sqrt{2x-2}-3=\sqrt{2(x-1)}-3$

따라서 함수 $y=\sqrt{2x-2}-3$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 1만큼, $y$축의 방향으로 $-3$만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.




## 575

$y=\sqrt{-4x+12}-2=\sqrt{-4(x-3)}-2=2\sqrt{-(x-3)}-2$

따라서 함수 $y=\sqrt{-4x+12}-2$의 그래프는 함수 $y=2\sqrt{-x}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 3만큼, $y$축의 방향으로 $-2$만큼 평행이동한것이므로

$a=2$, $b=3$, $c=-2$

$\therefore a+b+c=2+3+(-2)=3$

## 576

ㄱ. 함수 $y=-\sqrt{-x}$의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{x}$의 그래프를 $y$축에 대하여 대칭이동한 것이다.

ㄴ. 함수 $y=\sqrt{x+1}-2$의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{x}$의 그래프를 $x$축에 대하여 대칭이동한 후, $x$축의 방향으로 $-1$만큼, $y$축의 방향으로 $-2$만큼 평행이동한 것이다.

ㄷ. $y=\sqrt{-x+1}=\sqrt{-(x-1)}$
이므로 주어진 함수의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{x}$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 후, $x$축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

ㄹ. 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐지지 않는다.

이상에서 평행이동 또는 대칭이동에 의하여 함수 $y=-\sqrt{x}$의 그래프와 겹쳐지는 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

**개념 보충**

**무리함수 $y=\sqrt{ax}\ (a\neq0)$의 그래프의 대칭이동**

무리함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를
① $x$축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $y=-\sqrt{ax}$
② $y$축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $y=\sqrt{-ax}$
③ 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $y=-\sqrt{-ax}$

## 577

함수 $y=\sqrt{x+2}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 1만큼, $y$축의 방향으로 $-3$만큼 평행이동하면

$y-(-3)=\sqrt{(x-1)+2}$ $\quad\therefore y=\sqrt{x+1}-3$

이 그래프를 $y$축에 대하여 대칭이동하면

$y=\sqrt{-x+1}-3$

이것이 $y=\sqrt{ax+b}-c$의 그래프와 일치하므로

$a=-1$, $b=1$, $c=3$

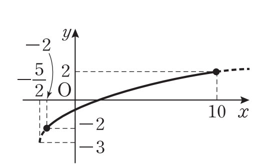
$\therefore abc=(-1)\times1\times3=-3$

## 578

$y=\sqrt{2x+5}-3=\sqrt{2\left(x+\dfrac{5}{2}\right)}-3$

이므로 주어진 함수의 그래프는 함수 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $-\dfrac{5}{2}$만큼, $y$축의 방향으로 $-3$만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-2\leq x\leq10$에서 주어진 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로




$x=10$일 때 최댓값

$\sqrt{2\times10+5}-3=2$,

$x=-2$일 때 최솟값

$\sqrt{2\times(-2)+5}-3=-2$

를 갖는다.

따라서 $a=2$, $b=-2$이므로

$a+b=2+(-2)=0$

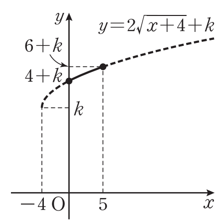
**1등급 비법**

무리함수의 그래프는 $x$의 값이 증가할 때, $y$의 값이 계속 증가하거나 감소하는 형태이므로 무리함수는 주어진 $x$의 값의 범위의 양 끝 값에서 최댓값과 최솟값을 갖는다.

## 579

함수 $y=2\sqrt{x+4}+k$의 그래프는 $y=2\sqrt{x}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $-4$만큼, $y$축의 방향으로 $k$만큼 평행이동한 것이다.

$0\le x\le 5$에서 주어진 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로




$x=5$일 때 최댓값 $2\sqrt{5+4}+k=6+k$,

$x=0$일 때 최솟값 $2\sqrt{0+4}+k=4+k$

를 갖는다.

따라서 $M=6+k$, $m=4+k$이므로

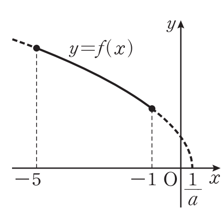
$6+k+(4+k)=36$

$10+2k=36$

$\therefore k=13$

## 580

$a>0$이므로 $-5\le x\le -1$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




따라서 $f(x)=\sqrt{-ax+1}$은 $x=-5$일 때 최댓값 4를 가지므로

$\sqrt{5a+1}=4$

$5a+1=16$

$\therefore a=3$

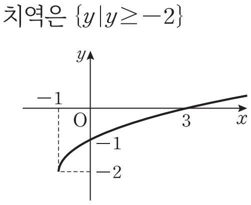
## 581

① 함수 $y=\sqrt{x+1}-2$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $-1$만큼, $y$축의 방향으로 $-2$만큼 평행이동한 것이다.

② $x+1\ge 0$에서 정의역은 $\{x\,|\,x\ge -1\}$

③ $\sqrt{x+1}\ge 0$에서 $\sqrt{x+1}-2\ge -2$이므로 치역은 $\{y\,|\,y\ge -2\}$

④ 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제2사분면을 지나지 않는다.




⑤ 그래프가 $x$축과 만나는 점의 $x$좌표는 $0=\sqrt{x+1}-2$에서

$x=3$

그래프가 $y$축과 만나는 점의 $y$좌표는 $y=\sqrt{0+1}-2$에서

$y=-1$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

## 582

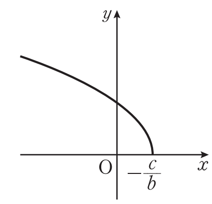
ㄱ. $bx+c\ge 0$에서 $bx\ge -c$ $\quad\therefore x\ge -\frac{c}{b}$ ($\because b>0$)

따라서 주어진 함수의 정의역은 $\left\{x\,\middle|\,x\ge -\frac{c}{b}\right\}$이다. (참)

ㄴ. $y=a\sqrt{bx+c}=a\sqrt{b\left(x+\frac{c}{b}\right)}$

$b<0$, $c>0$이면 $-\frac{c}{b}>0$

이때 $a>0$이면 $y=a\sqrt{bx+c}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 제1사분면과 제2사분면을 지난다. (거짓)




ㄷ. 그래프는 $y=-a\sqrt{bx+c}$의 그래프와 $x$축에 대하여 대칭이다. (거짓)

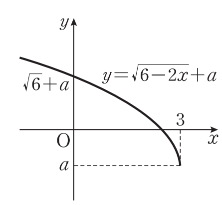
이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

## 583

$y=\sqrt{6-2x}+a=\sqrt{-2(x-3)}+a$

이므로 주어진 함수의 그래프는 함수 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 3만큼, $y$축의 방향으로 $a$만큼 평행이동한 것이다.

함수 $y=\sqrt{6-2x}+a$의 그래프가 제1, 2, 4사분면을 지나려면 오른쪽 그림과 같이 $a<0$이고, $x=0$일 때 $y>0$이어야 하므로




$\sqrt{6}+a>0$ $\quad\therefore a>-\sqrt{6}$

따라서 $-\sqrt{6}<a<0$이므로 정수 $a$는 $-2$, $-1$의 2개이다.

**오답 피하기** $x=0$일 때 $y=0$이면 제1, 3사분면을 지나지 않고, $y<0$이면 제1사분면을 지나지 않으므로 $x=0$일 때, $y>0$이어야 한다.

## 584

함수 $y=\sqrt{2x+k}$의 그래프와 직선 $y=x$가 접하므로

$\sqrt{2x+k}=x$의 양변을 제곱하면

$2x+k=x^2$

$\therefore x^2-2x-k=0$

위의 이차방정식의 판별식을 $D$라 하면

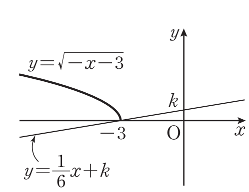
$\frac{D}{4}=(-1)^2-(-k)=0$

$1+k=0$ $\quad\therefore k=-1$

## 585

$A\cap B\ne\varnothing$이 성립하려면 함수 $y=\sqrt{-x-3}$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{6}x+k$가 만나야 한다.

함수 $y=\sqrt{-x-3}=\sqrt{-(x+3)}$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $-3$만큼 평행이동한 것이고,




직선 $y=\frac{1}{6}x+k$는 기울기가 $\frac{1}{6}$이고 $y$절편이 $k$이다.

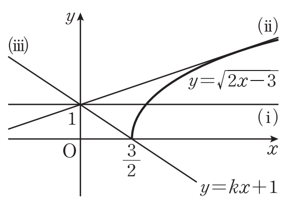
직선 $y=\frac{1}{6}x+k$가 점 $(-3, 0)$을 지날 때,

$0=\frac{1}{6}\times(-3)+k \qquad \therefore k=\frac{1}{2}$

따라서 실수 $k$의 값의 범위는 $k\ge\frac{1}{2}$

## 586

함수 $y=\sqrt{2x-3}=\sqrt{2\left(x-\frac{3}{2}\right)}$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $\frac{3}{2}$만큼 평행이동한 것이고, 직선 $y=kx+1$은 $k$의 값에 관계없이 항상 점 $(0, 1)$을 지나는 직선이다.




(i) $k=0$일 때,

함수 $y=\sqrt{2x-3}$의 그래프와 직선 $y=1$은 한 점에서 만난다.

(ii) 함수 $y=\sqrt{2x-3}$의 그래프와 직선 $y=kx+1\ (k\ne0)$이 접할 때,

$\sqrt{2x-3}=kx+1$의 양변을 제곱하면

$2x-3=k^2x^2+2kx+1$

$\therefore k^2x^2+2(k-1)x+4=0$

위의 이차방정식의 판별식을 $D$라 하면

$\frac{D}{4}=(k-1)^2-4k^2=0$

$3k^2+2k-1=0,\ (k+1)(3k-1)=0$

$\therefore k=-1$ 또는 $k=\frac{1}{3}$

그런데 위의 그림에서 $k>0$이므로

$k=\frac{1}{3}$

(iii) 직선 $y=kx+1\ (k\ne0)$이 점 $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$을 지날 때,

$0=\frac{3}{2}k+1 \qquad \therefore k=-\frac{2}{3}$

(i), (ii), (iii)에서 $-\frac{2}{3}\le k\le\frac{1}{3}$

따라서 $a=-\frac{2}{3},\ b=\frac{1}{3}$ 이므로

$a+b=-\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}$

## 587

$(f^{-1}\circ f^{-1}\circ f)(3)=f^{-1}(3)$

$f^{-1}(3)=a$라 하면 $f(a)=3$이므로 $\sqrt{4a-7}=3$에서

$4a-7=9$

$\therefore a=4$

$\therefore (f^{-1}\circ f^{-1}\circ f)(3)=f^{-1}(3)=4$

개념 보충

**역함수의 성질**

두 함수 $f, g$의 역함수를 각각 $f^{-1}, g^{-1}$라 할 때,

① $f^{-1}\circ f=I,\ f\circ f^{-1}=I$ (단, $I$는 항등함수)

② $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$

## 588

곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=g(x)$가 점 $(2, 4)$에서 만나므로

$f(2)=4$이고 $g(2)=4$이다.

이때 함수 $g(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이므로

$g(2)=4$에서 $f(4)=2$

$f(2)=\sqrt{2a+b}+2=4$에서 $\sqrt{2a+b}=2$

$\therefore 2a+b=4$ …… ㉠

$f(4)=\sqrt{4a+b}+2=2$에서 $\sqrt{4a+b}=0$

$\therefore 4a+b=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2,\ b=8$

$\therefore f(x)=\sqrt{-2x+8}+2$

$g(6)=k$라 하면 $f(k)=6$이므로

$\sqrt{-2k+8}+2=6$에서 $\sqrt{-2k+8}=4$

$-2k+8=16 \qquad \therefore k=-4$

$\therefore g(6)=-4$

## 589

$f^{-1}(g(x))=3x$의 양변에 $f$를 합성하면

$f(f^{-1}(g(x)))=f(3x)$

$\therefore g(x)=f(3x)$

$\therefore g(3)=f(9)=\sqrt{2\times9-9}=3$

## 590

$(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$이므로

$$\begin{aligned}(f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(2)&=(f\circ f^{-1}\circ g^{-1}\circ f)(2)\\&=(g^{-1}\circ f)(2)\\&=g^{-1}(f(2))\end{aligned}$$

이때 $f(2)=\frac{2+2}{2-1}=4$이므로

$g^{-1}(f(2))=g^{-1}(4)$

$g^{-1}(4)=t$라 하면 $g(t)=4$이므로

$g(t)=\sqrt{2t+1}=4$에서 $2t+1=16$

$\therefore t=\frac{15}{2}$

$\therefore (f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(2)=g^{-1}(4)=\frac{15}{2}$

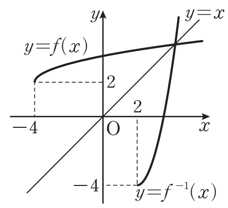
## 591

주어진 함수의 그래프는 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $-4$만큼, $y$축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로

$f(x)=\sqrt{x+4}+2$

$\therefore a=4,\ b=2$

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.




$\sqrt{x+4}+2=x$에서 $\sqrt{x+4}=x-2$

위의 등식의 양변을 제곱하면

$x+4=x^2-4x+4$

$x^2-5x=0,\ x(x-5)=0 \qquad \therefore x=5\ (\because x\geq 2)$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 $(5, 5)$이므로

$p=5,\ q=5$

$\therefore p+q=5+5=10$

참고 함수 $f(x)=\sqrt{x+4}+2$의 치역이 $\{y\,|\,y\geq 2\}$이므로 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 정의역은 $\{x\,|\,x\geq 2\}$이다.
즉, 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점의 $x$좌표는 $x\geq 2$이어야 한다.

## 592

$(g\circ f)(a)=g(f(a))=g\left(\dfrac{a}{a+1}\right)=\sqrt{\dfrac{a}{a+1}}$이므로

$\sqrt{\dfrac{a}{a+1}}=\dfrac{1}{3}$

위의 등식의 양변을 제곱하면

$\dfrac{a}{a+1}=\dfrac{1}{9},\ 9a=a+1 \qquad \therefore a=\dfrac{1}{8}$

$(f\circ g)^{-1}(4a)=(f\circ g)^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)=k$라 하면

$(f\circ g)(k)=\dfrac{1}{2}$이므로

$(f\circ g)(k)=f(g(k))=f(\sqrt{k})=\dfrac{\sqrt{k}}{\sqrt{k}+1}=\dfrac{1}{2}$

$2\sqrt{k}=\sqrt{k}+1,\ \sqrt{k}=1 \qquad \therefore k=1$

$\therefore (f\circ g)^{-1}(4a)=1$

## 내신 적중 서술형

146쪽

**593** 14 **594** 5 **595** $2\leq k<\dfrac{9}{4}$

**596** (1) $(2, 2)$, $(4, 4)$ (2) $2\sqrt{2}$

## 593

주어진 함수의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{ax}\ (a<0)$의 그래프를 $x$축의 방향으로 4만큼, $y$축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 함수의 식을

$y=-\sqrt{a(x-4)}+2 \quad \cdots\cdots$ ㉠

로 놓을 수 있다. …… ㉮

이때 ㉠의 그래프가 점 $(0, -2)$를 지나므로

$-2=-\sqrt{-4a}+2,\ \sqrt{-4a}=4$

$-4a=16 \qquad \therefore a=-4$ …… ㉯

$a=-4$를 ㉠에 대입하면

$y=-\sqrt{-4(x-4)}+2=-\sqrt{-4x+16}+2$

이므로 $b=16,\ c=2$ …… ㉰

$\therefore a+b+c=-4+16+2=14$ …… ㉱

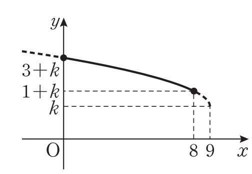
| 채점 기준 | 배점 비율 |
|---|---|
| ㉮ 평행이동을 이용하여 함수의 식 세우기 | 30 % |
| ㉯ $a$의 값 구하기 | 30 % |
| ㉰ $b$, $c$의 값 구하기 | 30 % |
| ㉱ $a+b+c$의 값 구하기 | 10 % |

## 594

$y=\sqrt{9-x}+k=\sqrt{-(x-9)}+k$

이므로 주어진 함수의 그래프는 함수 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 9만큼, $y$축의 방향으로 $k$만큼 평행이동한 것이다.

$0\leq x\leq 8$에서 주어진 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로




$x=0$일 때 최댓값 $\sqrt{9-0}+k=3+k$,

$x=8$일 때 최솟값 $\sqrt{9-8}+k=1+k$

를 갖는다. …… ㉮

즉, $1+k=3$이므로 $k=2$ …… ㉯

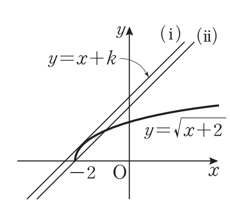
따라서 구하는 최댓값은

$3+2=5$ …… ㉰

| 채점 기준 | 배점 비율 |
|---|---|
| ㉮ 함수의 최댓값과 최솟값을 $k$에 대한 식으로 나타내기 | 50 % |
| ㉯ $k$의 값 구하기 | 30 % |
| ㉰ 함수의 최댓값 구하기 | 20 % |

## 595

함수 $y=\sqrt{x+2}$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $-2$만큼 평행이동한 것이고, 직선 $y=x+k$는 기울기가 1이고 $y$절편이 $k$이다.




(i) 함수 $y=\sqrt{x+2}$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 접할 때,

$\sqrt{x+2}=x+k$의 양변을 제곱하면

$x+2=x^2+2kx+k^2$

$\therefore x^2+(2k-1)x+k^2-2=0$

위의 이차방정식의 판별식을 $D$라 하면

$D=(2k-1)^2-4(k^2-2)=0$

$-4k+9=0 \qquad \therefore k=\dfrac{9}{4}$ …… ㉮

(ii) 직선 $y=x+k$가 점 $(-2, 0)$을 지날 때,

$0=-2+k \qquad \therefore k=2$ …… ㉯

(i), (ii)에서 $2\le k<\frac{9}{4}$ …… ㉰

| 채점 기준 | 배점 비율 |
|---|---|
| ㉮ 함수의 그래프와 직선이 접할 때 $k$의 값 구하기 | 40 % |
| ㉯ 직선이 점 $(-2, 0)$을 지날 때 $k$의 값 구하기 | 40 % |
| ㉰ $k$의 값의 범위 구하기 | 20 % |

## 596

(1) 함수 $y=\sqrt{2x-4}+2$의 그래프와 그 역함수의 그래프의 교점은 함수 $y=\sqrt{2x-4}+2$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다. …… ㉮

$\sqrt{2x-4}+2=x$에서 $\sqrt{2x-4}=x-2$

위의 등식의 양변을 제곱하면

$2x-4=x^2-4x+4$

$x^2-6x+8=0,\ (x-2)(x-4)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=4$

두 교점의 좌표는 $(2, 2), (4, 4)$이다. …… ㉯

(2) 두 점 $(2, 2), (4, 4)$ 사이의 거리는

$\sqrt{(4-2)^2+(4-2)^2}=2\sqrt{2}$ …… ㉰

| | 채점 기준 | 배점 비율 |
|---|---|---|
| (1) | ㉮ 구하는 교점이 주어진 함수의 그래프와 직선 $y=x$의 교점임을 알기 | 40 % |
| | ㉯ 두 교점의 좌표 구하기 | 40 % |
| (2) | ㉰ 두 점 사이의 거리 구하기 | 20 % |

## 1등급 실력 완성

● 147쪽 ~ 148쪽

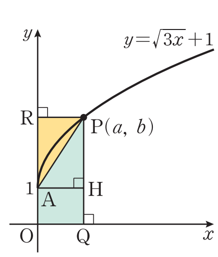
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **597** 4 | **598** ⑤ | **599** ④ | **600** 3 | **601** ⑤ |
| **602** $\frac{9}{2}$ | **603** $-\frac{7}{4}<a<2$ | | **604** $\frac{3}{4}$ | **605** ① |

## 597

무리함수의 그래프

전략 점 A를 지나고 $x$축에 평행한 직선을 그린 후 직사각형의 성질과 $S_2=2S_1$임을 이용하여 점 P의 좌표를 구한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 $x$축에 평행하고 점 A를 지나는 직선과 선분 PQ가 만나는 점을 H라 하면 사각형 AHPR은 직사각형이다.




이때 $S_1=\triangle APR=\triangle AHP$이고

$S_2=2S_1$이므로 $S_1=\square AOQH$

$\therefore \square AHPR=2\square AOQH$

따라서 $\overline{AR}=2\overline{OA}=2\times1=2$이므로

$b=3$

점 $P(a, 3)$이 곡선 $y=\sqrt{3x}+1$ 위의 점이므로

$3=\sqrt{3a}+1,\ \sqrt{3a}=2$

$3a=4 \qquad \therefore a=\frac{4}{3}$

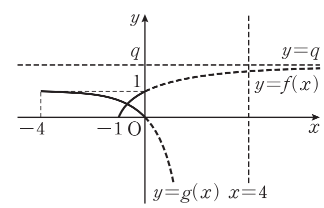
$\therefore ab=\frac{4}{3}\times3=4$

## 598

무리함수의 그래프

전략 두 집합 $A$, $B$가 서로 같으므로 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$의 치역이 서로 같음을 이용한다.

풀이 $A=B$이려면 $-1\le x\le0$에서 $f(x)$의 함숫값의 범위와 $-4\le x\le0$에서 $g(x)$의 함숫값의 범위가 같아야 한다.




함수 $f(x)=\sqrt{x+1}$의 정의역은 $\{x|x\ge-1\}$이고 $y=f(x)$의 그래프는 위의 그림과 같으므로

$A=\{f(x)|-1\le x\le0\}=\{y|0\le y\le1\}$

또, 함수 $g(x)=\frac{p}{x-4}+q$에서 $p>0,\ q>0$이고 $y=g(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=4,\ y=q$이므로 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 위의 그림과 같다.

이때 $A=B$이므로 $g(-4)=1,\ g(0)=0$이어야 한다.

즉, $\frac{p}{-8}+q=1,\ \frac{p}{-4}+q=0$이므로

$p-8q=-8,\ p-4q=0$

두 식을 연립하여 풀면 $p=8,\ q=2$

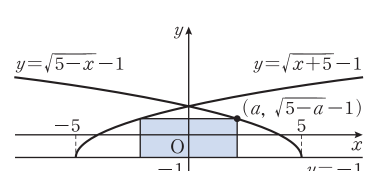
$\therefore p+q=8+2=10$

## 599

무리함수의 그래프의 평행이동과 대칭이동

전략 주어진 두 무리함수의 그래프가 $y$축에 대하여 대칭임을 이용한다.

풀이 두 함수 $y=\sqrt{x+5}-1,\ y=\sqrt{5-x}-1$의 그래프는 $y$축에 대하여 대칭이므로 세 함수 $y=\sqrt{x+5}-1,\ y=\sqrt{5-x}-1,\ y=-1$의 그래프로 둘러싸인 부분에 내접한 직사각형도 $y$축에 대하여 대칭이다.




위의 그림과 같이 함수 $y=\sqrt{5-x}-1$의 그래프 위에 놓인 직사각형의 한 꼭짓점의 좌표를 $(a,\ \sqrt{5-a}-1)\ (0<a<5)$이라 하고, 직사각형의 둘레의 길이를 $l$이라 하면

$l=2[2a+\{\sqrt{5-a}-1-(-1)\}]=2\sqrt{5-a}+4a$ …… ㉠

$\sqrt{5-a}=t$로 놓으면 $0<t<\sqrt{5}$이고, 양변을 제곱하면

$5-a=t^2 \qquad \therefore a=5-t^2$

위의 식을 ㉠에 대입하면

$l=2t+4(5-t^2)=-4t^2+2t+20=-4\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{81}{4}$

이때 $0<t<\sqrt{5}$이므로 $l$은 $t=\frac{1}{4}$일 때 최댓값 $\frac{81}{4}$을 갖는다.

## 600

**무리함수의 그래프의 평행이동과 대칭이동**

전략 함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 평행이동한 그래프와 함수 $y=\frac{-x+1}{x+2}$의 그래프가 제2사분면에서 만나도록 두 그래프를 그려 본다.

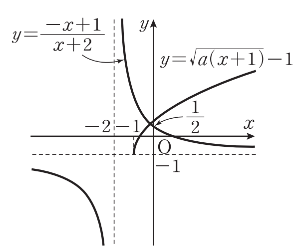
풀이 함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $-1$만큼, $y$축의 방향으로 $-1$만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{a(x+1)}-1$

$y=\frac{-x+1}{x+2}=\frac{-(x+2)+3}{x+2}=\frac{3}{x+2}-1$

이므로 함수 $y=\frac{-x+1}{x+2}$의 그래프는 함수 $y=\frac{3}{x}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $-2$만큼, $y$축의 방향으로 $-1$만큼 평행이동한 것이다.

즉, 함수 $y=\frac{-x+1}{x+2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 함수 $y=\sqrt{a(x+1)}-1$의 그래프가 함수 $y=\frac{-x+1}{x+2}$의 그래프와 제2사분면에서 만나려면




$y=\sqrt{a(x+1)}-1$의 값이 $x=0$일 때 $y>\frac{1}{2}$이어야 하므로

$\sqrt{a}-1>\frac{1}{2}, \sqrt{a}>\frac{3}{2} \qquad \therefore a>\frac{9}{4}$

따라서 정수 $a$의 최솟값은 3이다.

## 601

**무리함수의 그래프**

전략 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$의 길이를 $k$에 대한 식으로 나타낸 후 $k$에 대한 방정식을 세워 $k$의 값을 구한다.

풀이 $A(k, 0)$이므로 $B(k, \sqrt{k})$, $C(k, k)$

삼각형 OBC의 넓이가 삼각형 OAB의 넓이의 2배이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{BC}=2\times\left(\frac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{AB}\right)$

$\therefore \overline{BC}=2\overline{AB}$

$\therefore \overline{AC}=\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AB}+2\overline{AB}=3\overline{AB}$

이때 $\overline{AB}=\sqrt{k}$, $\overline{AC}=k$이므로

$k=3\sqrt{k}$에서 $k^2=9k$, $k^2-9k=0$

$k(k-9)=0 \qquad \therefore k=9\ (\because k>1)$

$\therefore \overline{AB}=3, \overline{AC}=9$

따라서 삼각형 OBC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{BC}=\frac{1}{2}\times9\times(9-3)=27$

## 602

**무리함수의 그래프와 직선의 위치 관계**

전략 삼각형 ABP의 넓이는 점 P가 직선 AB와 평행한 접선 위의 접점일 때 최대가 됨을 이용한다.

풀이 삼각형 ABP의 넓이는 점 P가 직선 AB와 평행한 접선 위의 접점일 때 최대이다.

직선 AB의 방정식은

$y-0=\frac{6-0}{7-1}(x-1) \qquad \therefore y=x-1$

직선 AB와 평행한 접선의 방정식을 $y=x+k$ ($k$는 상수)라 하면

$\sqrt{6x-6}=x+k$

위의 등식의 양변을 제곱하면

$6x-6=x^2+2kx+k^2$

$\therefore x^2+2(k-3)x+k^2+6=0$

위의 이차방정식의 판별식을 $D$라 하면

$\frac{D}{4}=(k-3)^2-(k^2+6)=0$

$-6k+3=0 \qquad \therefore k=\frac{1}{2}$

이때 평행한 두 직선 $y=x-1$, $y=x+\frac{1}{2}$ 사이의 거리는 직선 $y=x-1$ 위의 점 $(1, 0)$과 직선 $y=x+\frac{1}{2}$, 즉 $2x-2y+1=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\frac{|2+1|}{\sqrt{2^2+(-2)^2}}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$

두 점 $A(1, 0)$, $B(7, 6)$에서 $\overline{AB}=\sqrt{(7-1)^2+(6-0)^2}=6\sqrt{2}$

따라서 삼각형 ABP의 넓이의 최댓값은

$\frac{1}{2}\times6\sqrt{2}\times\frac{3\sqrt{2}}{4}=\frac{9}{2}$

**1등급 비법**

평행한 두 직선 $l$, $l'$ 사이의 거리는 직선 $l$ 위의 임의의 한 점 P와 직선 $l'$ 사이의 거리 $d$와 같음을 이용하여 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) 직선 $l$ 위의 한 점 P의 좌표 $(x_1, y_1)$을 구한다.

(ii) 점 $(x_1, y_1)$과 직선 $l'$ 사이의 거리를 구한다.

## 603

**무리함수의 그래프와 직선의 위치 관계**

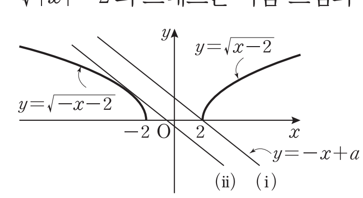
전략 함수 $y=\sqrt{|x|-2}$의 그래프를 그리고 직선 $y=-x+a$를 움직여 본다.

풀이 $y=\sqrt{|x|-2}$에서

$x\geq0$일 때, $y=\sqrt{x-2}$

$x<0$일 때, $y=\sqrt{-x-2}$

이므로 함수 $y=\sqrt{|x|-2}$의 그래프는 다음 그림과 같다.




(i) 직선 $y=-x+a$가 점 $(2, 0)$을 지날 때,

$0=-2+a \qquad \therefore a=2$

(ii) 함수 $y=\sqrt{-x-2}$의 그래프와 직선 $y=-x+a$가 접할 때,

$\sqrt{-x-2}=-x+a$의 양변을 제곱하면

$-x-2=x^2-2ax+a^2$

$\therefore\ x^2+(1-2a)x+a^2+2=0$

위의 이차방정식의 판별식을 $D$라 하면

$D=(1-2a)^2-4(a^2+2)=0$

$-4a-7=0$

$\therefore\ a=-\dfrac{7}{4}$

(i), (ii)에서 $-\dfrac{7}{4}<a<2$

## 604

무리함수의 합성함수와 역함수

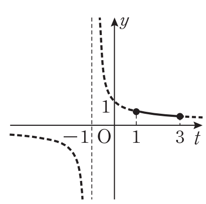
(전략) $\sqrt{x}+1=t$로 놓고 $t$의 값의 범위를 구한 후, $f(t)$의 최댓값과 최솟값을 구한다.

(풀이) $g(x)=\sqrt{x}+1=t$라 하면 $0\le x\le 4$에서 $1\le g(x)\le 3$이므로 $1\le t\le 3$

$y=(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(t)=\dfrac{1}{t+1}$이므로

$y=\dfrac{1}{t+1}\ (1\le t\le 3)$

$1\le t\le 3$에서 함수 $y=\dfrac{1}{t+1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로




$t=1$일 때, 최댓값 $\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$,

$t=3$일 때, 최솟값 $\dfrac{1}{3+1}=\dfrac{1}{4}$

을 갖는다.

따라서 최댓값과 최솟값의 합은

$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$

## 605

무리함수의 합성함수와 역함수

(전략) $f(x)$의 역함수 $g(x)$를 구해 점 $Q_n$의 좌표를 $n$에 대하여 나타낸 후 두 점 $P_n$, $Q_n$은 직선 $y=x$에 대하여 대칭임을 이용한다.

(풀이) $y=\sqrt{2x+n^2}-n$을 $x$에 대하여 풀면

$y+n=\sqrt{2x+n^2}$, $y^2+2ny+n^2=2x+n^2$

$\therefore\ x=\dfrac{1}{2}y^2+ny$

$x$와 $y$를 서로 바꾸면

$y=\dfrac{1}{2}x^2+nx$

$\therefore\ g(x)=\dfrac{1}{2}x^2+nx\ (x\ge 0)$

이때 점 $Q_n$은 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=-x+2n+4$가 만나는 점이므로 점 $Q_n$의 $x$좌표를 구하면

$\dfrac{1}{2}x^2+nx=-x+2n+4$

$x^2+(2n+2)x-4n-8=0$

$(x-2)(x+2n+4)=0$

$\therefore\ x=2\ (\because\ x\ge 0)$

따라서 $Q_n(2,\ 2n+2)$이고 점 $P_n$은 점 $Q_n$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점이므로 $P_n(2n+2,\ 2)$

$\therefore\ l_n=\overline{P_nQ_n}$

$=\sqrt{(2n+2-2)^2+(2-2n-2)^2}$

$=\sqrt{4n^2+4n^2}=2\sqrt{2}n\ (\because\ n$은 자연수$)$

$\therefore\ l_1+l_2+l_3+l_4+l_5=2\sqrt{2}\times(1+2+3+4+5)$

$=30\sqrt{2}$

## 도전 1등급 최고난도

● 149쪽

**606** $\dfrac{9}{2}$ **607** $\dfrac{21}{8}$

## 606

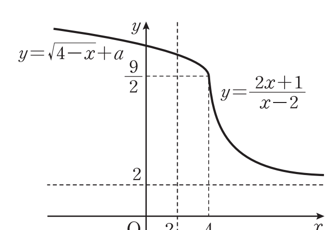
무리함수의 그래프의 성질

(1단계) 조건 (나)에서 함수 $f(x)$가 일대일함수임을 이용하여 함수 $f$의 그래프를 그려 본다.

$y=\dfrac{2x+1}{x-2}=\dfrac{2(x-2)+5}{x-2}=\dfrac{5}{x-2}+2$

이므로 함수 $y=\dfrac{2x+1}{x-2}$의 그래프는 함수 $y=\dfrac{5}{x}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 2만큼, $y$축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

또, 조건 (가)에서 함수 $f$의 치역이 $\{y\,|\,y>2\}$이고, 조건 (나)에서 함수 $f$는 일대일함수이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.




(2단계) $f(4)$의 값을 이용하여 상수 $a$의 값을 구한다.

위의 그래프에서 $f(4)=\dfrac{9}{2}$이므로

$\sqrt{4-4}+a=\dfrac{9}{2}\qquad\therefore\ a=\dfrac{9}{2}$

(3단계) $f(3)f(k)=22$임을 이용하여 $k$의 값을 구한다.

$f(3)=\sqrt{4-3}+\dfrac{9}{2}=\dfrac{11}{2}$이므로

$f(3)f(k)=22$에서 $\dfrac{11}{2}f(k)=22$

$\therefore\ f(k)=4$

즉, $\dfrac{2k+1}{k-2}=4$이므로 $2k+1=4k-8$

$-2k=-9\qquad\therefore\ k=\dfrac{9}{2}$

## 607

**무리함수의 합성함수와 역함수**

(1단계) 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 역함수 관계임을 알아내고, 두 점 A, C의 좌표를 구한다.

$y=\sqrt{2x+3}$으로 놓고 양변을 제곱하면

$y^2=2x+3$

$x$에 대하여 풀면 $x=\frac{y^2-3}{2}$ $(y\geq 0)$

$x$와 $y$를 서로 바꾸면 $y=\frac{x^2-3}{2}$ $(x\geq 0)$

$\therefore g(x)=\frac{1}{2}(x^2-3)$ $(x\geq 0)$

즉, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 서로 역함수 관계에 있으므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.

$\frac{1}{2}(x^2-3)=x$에서 $x^2-3=2x$

$x^2-2x-3=0$, $(x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=3$ $(\because x\geq 0)$

따라서 두 함수의 그래프의 교점 A의 좌표는 $(3, 3)$이다.

또, 점 C는 점 $\mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, 2\right)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점과 같으므로

$\mathrm{C}\left(2, \frac{1}{2}\right)$

(2단계) 직선 $l$의 방정식을 구한다.

점 $\mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, 2\right)$를 지나고 기울기가 $-1$인 직선 $l$의 방정식은

$y-2=-\left(x-\frac{1}{2}\right)$

$\therefore 2x+2y-5=0$

(3단계) 삼각형 ABC의 높이와 밑변의 길이를 구하여 넓이를 구한다.

점 A$(3, 3)$에서 직선 $l : 2x+2y-5=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{\mathrm{AH}}=\frac{|2\times 3+2\times 3-5|}{\sqrt{2^2+2^2}}=\frac{7\sqrt{2}}{4}$

두 점 $\mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, 2\right)$, $\mathrm{C}\left(2, \frac{1}{2}\right)$에서

$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{\left(2-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-2\right)^2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BC}}\times\overline{\mathrm{AH}}=\frac{1}{2}\times\frac{3\sqrt{2}}{2}\times\frac{7\sqrt{2}}{4}=\frac{21}{8}$

**개념 보충**

① 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$을 지나고 기울기가 $m$인 직선의 방정식
⇨ $y-y_1=m(x-x_1)$

② 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리 $d$
⇨ $d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

# MEMO