

THE FIRST CLASS MATHEMATICS

상위 1% 도전을 위한 최고의 명품 일등급 문제

일등급 수학

공통수학 1



구성과 특징

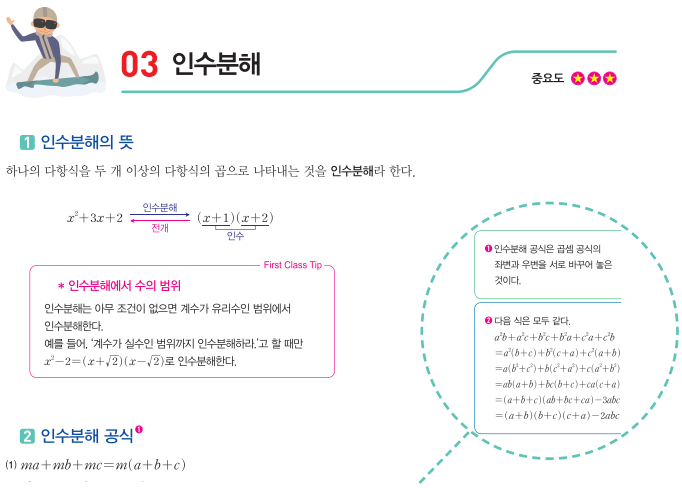
학교 시험, 수능 1등급을 위한
최고의 명품 수학 문제집!

일등급 수학

1 개념 정리 – 1등급을 위한 핵심 개념과 Tip

중단원 핵심 내용을 정리하여 혹시 잊을 수 있는 개념을 다시 한 번 최종 점검해 볼 수 있습니다.

- **중요도** ★★★
  시험에 자주 나오는 단원의 중요도 제시
- **First Class Tip**
  일등급 수학만의 명품 Tip을 제시하여 시험에서 요긴하게 사용할 수 있습니다.

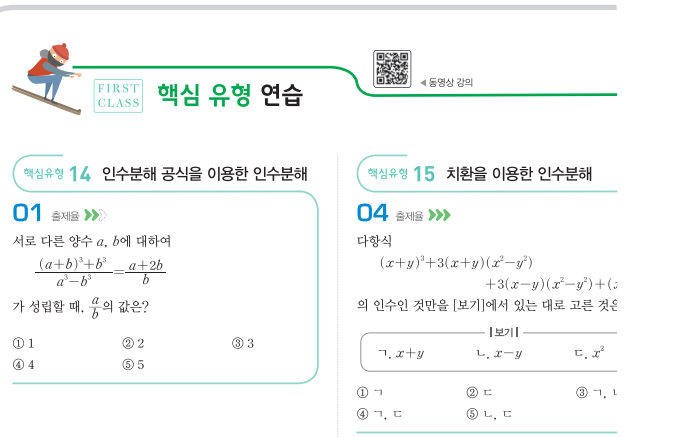


공식이 유도되는 과정이나 확장 개념을 보조단에 제시하였습니다.

2 핵심 유형 연습 – 가장 중요한 유형 연습

대표 문제 ➡ 유제 ➡ 발전 문제가 하나의 세트로 구성되어 있어서 핵심 유형을 효과적으로 정복할 수 있습니다.
일등급 실력으로 가는 입문 과정이므로 스스로 충분히 풀 수 있다면 수학 실력이 한층 더 업그레이드될 것입니다.

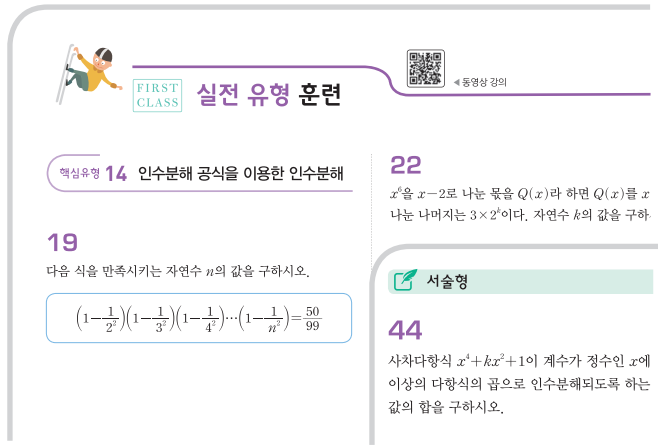
- 출제율 ❯❯❯
  학교시험과 학력평가, 수능에서 출제되는 정도를 표시하였습니다.



3 실전 유형 훈련 – 실전 유형을 단계적으로 파악

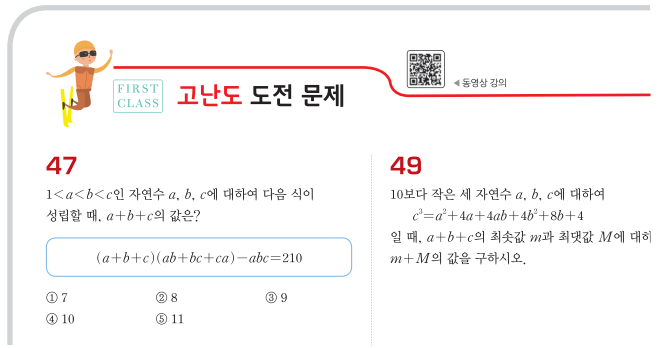
핵심 유형 연습에서 배운 것을 학교시험이나 수능에 어떻게 적용하는지 훈련하는 단계입니다. 단순 반복이 아닌 확장된 개념과 유형을 학습할 수 있는 문제로 구성되어 있습니다.

- **서술형**
  학교시험에서 출제되는 서술형 유형을 완벽히 분석해 구성한 문제입니다.



4 고난도 도전 문제 – 일등급을 위한 고난도 명품 문제

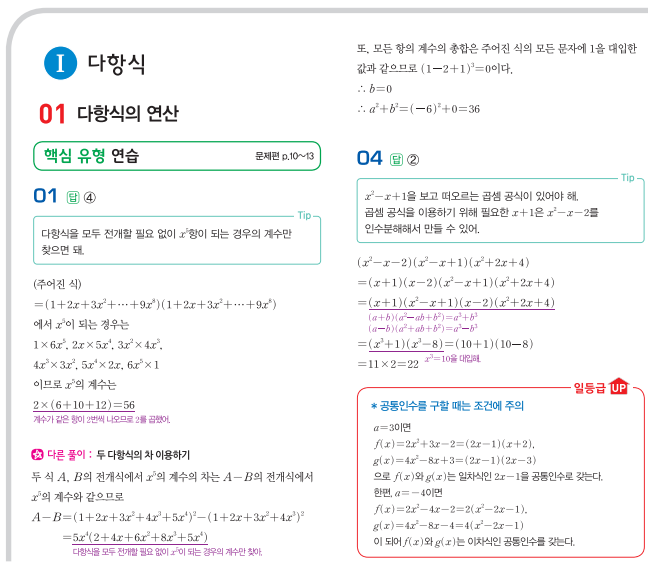
여러 개념을 종합적으로 이해하고 적용해야 풀 수 있는 명품 문제로 구성되어 있습니다. 종합적 사고력을 키울 수 있어 수학시험에서 완벽한 1등급을 받을 수 있습니다.



5 정답 및 해설 – 정확하고 명쾌한 해설

일등급 수학만의 접근 방법으로 쉽고 간단하게 고난도 문제의 해답을 구하는 방법을 습득할 수 있습니다.

- **Tip**
  핵심 유형 문제의 풀이 전략에 필요한 Tip을 제시하였습니다.
- **다른 풀이**
  단순한 풀이가 아닌 사고를 전환하여 여러 관점에서 접근하는 방법을 배울 수 있습니다.
- **일등급 UP**
  개념을 확장시켜 문제에 더 쉽게 접근할 수 있는 스킬 등을 자세히 설명하였습니다.





차 례

Ⅰ 다항식

01 다항식의 연산

- 핵심 유형 연습 10
  - 01 다항식의 전개 10
  - 02 곱셈 공식 10
  - 03 곱셈 공식의 변형 – 두 문자 11
  - 04 곱셈 공식의 변형 – 세 문자 11
  - 05 다항식의 나눗셈 12
  - 06 조립제법 13
  - 07 다항식의 연산의 활용 13
- 실전 유형 훈련 14
- 고난도 도전 문제 20

02 나머지정리

- 핵심 유형 연습 24
  - 08 항등식과 미정계수법 24
  - 09 다항식의 나눗셈과 항등식 24
  - 10 나머지정리–이차 이하 다항식 25
  - 11 나머지정리–삼차 이상 다항식 26
  - 12 인수정리 26
  - 13 인수정리의 활용 27
- 실전 유형 훈련 28
- 고난도 도전 문제 35

03 인수분해

- 핵심 유형 연습 40
  - 14 인수분해 공식을 이용한 인수분해 40
  - 15 치환을 이용한 인수분해 40
  - 16 복이차식의 인수분해 41
  - 17 문자가 여러 개인 식의 인수분해 41
  - 18 인수정리를 이용한 인수분해 42
  - 19 공통인수 42
- 실전 유형 훈련 43
- 고난도 도전 문제 48

Ⅱ 방정식과 부등식

04 복소수

- 핵심 유형 연습 54
  - 01 복소수의 연산 54
  - 02 두 복소수가 서로 같을 조건 54
  - 03 켤레복소수 55
  - 04 복소수의 거듭제곱 55
  - 05 음의 실수의 제곱근의 계산 56
  - 06 복소수의 성질 56
- 실전 유형 훈련 57
- 고난도 도전 문제 64

05 이차방정식

- 핵심 유형 연습 68
  - 07 이차방정식의 풀이 68
  - 08 이차방정식의 근의 판별 68
  - 09 이차방정식의 근과 계수의 관계 69
  - 10 이차방정식의 켤레근 69
  - 11 이차방정식의 실근의 부호 70
  - 12 이차방정식 세우기 70
- 실전 유형 훈련 71
- 고난도 도전 문제 77

06 이차방정식과 이차함수

- 핵심 유형 연습 82
  - 13 이차함수의 그래프 82
  - 14 이차함수의 그래프와 이차방정식 82
  - 15 이차함수의 그래프와 직선의 교점 83
  - 16 이차함수의 활용 83
  - 17 이차함수의 최대·최소 84
  - 18 이차함수의 최대·최소의 활용 84
- 실전 유형 훈련 85
- 고난도 도전 문제 92

FIRST CLASS

07 여러 가지 방정식

• 핵심 유형 연습 96
19 삼차·사차방정식의 풀이 96
20 복이차방정식·상반방정식의 풀이 96
21 고차방정식의 근과 계수의 관계 97
22 방정식의 켤레근 97
23 $x^3=\pm1$의 한 허근 98
24 연립방정식의 풀이 98
25 여러 가지 방정식의 활용 99
26 부정방정식 99
• 실전 유형 훈련 100
• 고난도 도전 문제 106

08 여러 가지 부등식

• 핵심 유형 연습 110
27 부등식의 성질 110
28 (연립)일차부등식의 풀이 110
29 절댓값을 포함한 부등식의 풀이 111
30 이차부등식의 풀이 111
31 이차함수와 이차부등식의 관계 112
32 항상 성립하는 이차부등식 112
33 연립부등식의 풀이 113
34 여러 가지 부등식의 활용 113
• 실전 유형 훈련 114
• 고난도 도전 문제 119

Ⅲ 경우의 수

09 순열과 조합

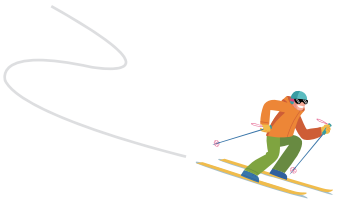
• 핵심 유형 연습 124
01 합의 법칙 124
02 곱의 법칙 124
03 경우 나누기, 수형도 125
04 순열의 수 125
05 조합의 수 126
06 여러 가지 순열과 조합의 수 126
• 실전 유형 훈련 127
• 고난도 도전 문제 133

Ⅳ 행렬

10 행렬의 뜻과 연산

• 핵심 유형 연습 138
01 행렬의 연산 138
02 행렬의 곱셈의 변형 138
03 행렬의 곱셈의 성질 139
04 케일리–해밀턴의 정리 139
05 행렬의 거듭제곱 140
06 행렬의 곱셈의 활용 140
• 실전 유형 훈련 141
• 고난도 도전 문제 149





I 다항식

01 다항식의 연산
02 나머지정리
03 인수분해

수학의 눈부신 발전은 자연 현상과
사회 현상을 수식으로 표현하기
시작하면서부터라 해도 과언이
아닙니다.
점점 복잡해지는 수를
대신하여 사용된 문자가
그 대표적인 예일 것입니다.
수를 문자로 표현하면
그 성질들을 쉽게 파악
할 수 있습니다.





01 다항식의 연산

개념 강의▶

중요도 ★○○

1 다항식의 정리

두 개 이상의 문자에 대한 다항식은 어떤 문자에 주목하는가에 따라 차수와 동류항, 항의 계수 등이 달라진다.

즉, $x^3-3xy^2+y^2-2$에 대하여 다음과 같다.

문자	차수	동류항	상수항 ❶
x에 대한 식	3차	y^2과 -2	y^2-2
y에 대한 식	2차	$-3xy^2$과 y^2, x^3과 -2	x^3-2
x, y에 대한 식	3차	없다.	-2

❶ 한 문자에 대하여 내림차순 또는 오름차순으로 정리할 때, 그 문자를 제외한 다른 문자는 모두 상수로 생각한다.

2 다항식의 덧셈, 뺄셈, 곱셈

(1) 다항식의 덧셈과 뺄셈

① 세 다항식 A, B, C에 대하여 다음 법칙이 성립한다.

- 교환법칙 : $A+B=B+A$
- 결합법칙 : $(A+B)+C=A+(B+C)$

② 더하는 식은 그대로 더하고, 빼는 식은 각 항의 부호를 바꾸어서 더한 후 동류항끼리 모아서 정리한다.

(2) 다항식의 곱셈

① 세 다항식 A, B, C에 대하여 다음 법칙이 성립한다.

- 교환법칙 : $AB=BA$
- 결합법칙 : $(AB)C=A(BC)$
- 분배법칙 : $A(B+C)=AB+AC$

② 다항식의 곱셈은 지수법칙과 분배법칙을 이용하여 간단히 한다.

3 곱셈 공식

① $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ ❷

② $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

③ $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

④ $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

⑤ $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)=a^4+a^2b^2+b^4$

⑥ $(x+a)(x+b)(x+c)$

$=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc$

❷ $(a-b)^3$

$=\{a+(-b)\}^3$

$=a^3+3a^2(-b)$

$\quad+3a(-b)^2+(-b)^3$

$=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

4 곱셈 공식의 변형

(1) a, b에 대한 식의 변형

① $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(a-b)^2+2ab$

$(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$

② $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

$a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

(2) a, b, c에 대한 식의 변형

① $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

② $(a+b)(b+c)(c+a)=(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$ ❸

③ $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$ ❹

(3) 기타 식의 변형

① $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2$

② $x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$

❸ $a+b+c=0$이면 $(a+b)(b+c)(c+a)=-abc$

❹ '라그랑주 항등식'이라 한다.

First Class Tip

*** 대칭식**

① x^3+y^3, x^2-xy+y^2, $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$와 같이 x, y의 자리를 서로 맞바꾸어도 변하지 않는 식을 **대칭식**이라 한다.

② 두 문자 x, y에 대한 기본 대칭식

$\Rightarrow x+y$, xy

세 문자 x, y, z에 대한 기본 대칭식

$\Rightarrow x+y+z$, $xy+yz+zx$, xyz

③ 다항식인 대칭식은 모두 기본 대칭식에 대한 식으로 나타낼 수 있다.

5 다항식의 나눗셈

(1) 다항식의 나눗셈

다항식 A를 다항식 $B(B\neq0)$로 나누었을 때의 몫을 Q, 나머지를 R라 하면

$A=BQ+R$ (단, (R의 차수)<(B의 차수))

특히 $R=0$일 때, A는 B로 **나누어떨어진다**고 한다.

(2) 조립제법 ❺

어떤 다항식을 일차식으로 나눌 때, 그 다항식의 계수만을 이용하여 몫과 나머지를 구하는 방법

주의 조립제법을 사용할 때 주의할 점

① 다항식을 내림차순으로 정리하고 모든 항의 계수를 빠짐없이 적는다.

② 어떤 차수의 항이 없을 때는 그 항의 계수를 0으로 적는다.

❺ 조립제법은 일차식으로 나눌 때만 사용한다.
일차식의 곱의 꼴로 나타낸 다항식(특히, 완전제곱식)으로 나눌 때는 연조립제법을 사용하면 편리하다.



FIRST CLASS

핵심 유형 연습

◀ 동영상 강의

핵심유형 01 다항식의 전개

01 출제율 ❯❯❯

다항식 $(1+2x+3x^2+\cdots+9x^8)^2$의 전개식에서 x^5의 계수는?

① 28 ② 36 ③ 42
✓④ 56 ⑤ 72

해 (주어진 식)$=(1+2x+3x^2+\cdots+9x^8)(1+2x+3x^2+\cdots+9x^8)$에서 x^5이 되는 경우는
$1\times6x^5$, $2x\times5x^4$, $3x^2\times4x^3$, $4x^3\times3x^2$, $5x^4\times2x$, $6x^5\times1$
이므로 x^5의 계수는 $2\times(6+10+12)=56$

02 출제율 ❯❯❯

두 다항식
$(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4)^2$, $(1+2x+3x^2+4x^3)^2$
의 전개식에서 x^5의 계수를 각각 a, b라 할 때, $a-b$의 값은?

① 0 ② 10 ✓③ 20
④ 30 ⑤ 40

해 $A=(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4)^2$, $B=(1+2x+3x^2+4x^3)^2$이라 할 때, 두 식의 차이는 $5x^4$의 유무이므로 두 식에서 x^5의 계수의 차는 A에서 $5x^4$을 이용하여 만들 수 있는 항의 계수이다. 즉,
$A=1+\cdots+2x\times5x^4+3x^2\times4x^3+4x^3\times3x^2+5x^4\times2x+\cdots+25x^8$
$B=1+\cdots+3x^2\times4x^3+4x^3\times3x^2+\cdots+16x^6$
$\therefore a-b=2\times5+5\times2=20$

03 출제율 ❯❯❯

다항식 $(x-2y+z)^3$의 전개식에서 x^2y의 계수를 a, 모든 항의 계수의 총합을 b라 할 때, a^2+b^2의 값을 구하시오.

해 $(x-2y+z)^3=(x-2y+z)(x-2y+z)(x-2y+z)$에서 x^2y항은 $x\times x\times(-2y)+x\times(-2y)\times x+(-2y)\times x\times x$
즉, x^2y의 계수는 $-2-2-2=-6$이므로 $a=-6$
또, 모든 항의 계수의 총합은 주어진 식의 모든 문자에 1을 대입한 값과 같다. 즉, $(1-2+1)^3=0$이므로 $b=0$
$\therefore a^2+b^2=(-6)^2+0=36$ 답 36

핵심유형 02 곱셈 공식

04 출제율 ❯❯❯

$x^3=10$일 때, 다음 식의 값은?

$$(x^2-x-2)(x^2-x+1)(x^2+2x+4)$$

① 20 ✓② 22 ③ 24
④ 26 ⑤ 28

해 $(x+1)(x-2)(x^2-x+1)(x^2+2x+4)$
$=(x+1)(x^2-x+1)(x-2)(x^2+2x+4)$
$=(x^3+1)(x^3-8)=(10+1)(10-8)=22$

05 출제율 ❯❯❯

두 다항식 $A=x^3+x+4$, $B=x+4$에 대하여 A^3-B^3의 전개식에서 x^3의 계수는?

① 16 ② 32 ✓③ 48
④ 60 ⑤ 72

해 주어진 조건에서 $A=x^3+B$이므로
$A^3-B^3=(x^3+B)^3-B^3$
$=x^9+3x^6B+3x^3B^2+B^3-B^3$
$=x^9+3x^6B+3x^3B^2$
여기서 x^3항은 $3x^3B^2$에만 존재한다.
$3x^3B^2=3x^3(x+4)^2=3x^3(x^2+8x+16)$이므로 x^3의 계수는 $3\times16=48$이다.

06 출제율 ❯❯❯

다항식 $(a+b-c+d)(a-b+c+d)$의 전개식에서 ab의 계수를 p, 다항식 $(a-b+c)^3+(a+b-c)^3$의 전개식에서 ab^2의 계수를 q라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오. 답 6

해 $(a+b-c+d)(a-b+c+d)$
$=\{(a+d)+(b-c)\}\{(a+d)-(b-c)\}=(a+d)^2-(b-c)^2$
에서 ab의 계수는 0이므로 $p=0$이다.
$(a-b+c)^3+(a+b-c)^3=\{a-(b-c)\}^3+\{a+(b-c)\}^3$
$=2\{a^3+3a(b-c)^2\}$
$=2\{a^3+3a(b^2-2bc+c^2)\}$
$=2a^3+6ab^2-12abc+6ac^2$
에서 ab^2의 계수는 6이므로 $q=6$이다.
$\therefore p+q=0+6=6$

핵심유형 03 곱셈 공식의 변형 – 두 문자

07 출제율 ❯❯❯

양수 x, y에 대하여 $x-y=2$, $x^3-y^3=14$일 때, x^3+y^3의 값은?

① 10 ✓② $10\sqrt{2}$ ③ $10\sqrt{3}$
④ 20 ⑤ $10\sqrt{5}$

해 $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)=14$에서
$x-y=2$이므로 $x^2+xy+y^2=7$
즉, $x^2+xy+y^2=(x-y)^2+3xy=4+3xy=7$
$\therefore xy=1$
한편, $(x+y)^2=(x-y)^2+4xy=2^2+4=8$에서
$x+y=2\sqrt{2}$ ($\because x$, y는 양수)
$\therefore x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$
$=(2\sqrt{2})^3-3\times2\sqrt{2}=10\sqrt{2}$

08 출제율 ❯❯❯

실수 a, b, x, y에 대하여
$x+y=xy=5$, $a+b=ab=-1$
일 때, $(ax+by)(bx+ay)$의 값은?

① -5 ② -1 ✓③ 0
④ 1 ⑤ 5

해 $(ax+by)(bx+ay)$
$=abx^2+aby^2+a^2xy+b^2xy=ab(x^2+y^2)+xy(a^2+b^2)$
$=-(x^2+y^2)+5(a^2+b^2)$
$=-\{(x+y)^2-2xy\}+5\{(a+b)^2-2ab\}$
$=-(25-10)+5(1+2)=-15+15=0$

09 출제율 ❯❯❯

양수 x가 $x^4-7x^2+1=0$을 만족시킬 때, $x^3+\frac{1}{x^3}$의 값은?

① 12 ② 14 ③ 16
✓④ 18 ⑤ 20

해 $x\neq0$이므로 $x^4-7x^2+1=0$의 양변을 x^2으로 나누면
$x^2-7+\frac{1}{x^2}=0$, $x^2+\frac{1}{x^2}+2=9$, $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=9$
$\therefore x+\frac{1}{x}=3$ ($\because x>0$)
$\therefore x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)=3^3-3\times3=18$

핵심유형 04 곱셈 공식의 변형 – 세 문자

10 출제율 ❯❯❯

$a+b+c=5$, $a^2+b^2+c^2=21$, $abc=-8$일 때, $ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$의 값은?

① 33 ✓② 34 ③ 35
④ 36 ⑤ 37

해 $a^2+b^2+c^2=21$이므로
$2(ab+bc+ca)=(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)=5^2-21=4$
$\therefore ab+bc+ca=2$
$a+b+c=5$에서 $a+b=5-c$, $b+c=5-a$, $c+a=5-b$이므로
(주어진 식)$=ab(5-c)+bc(5-a)+ca(5-b)$
$=5(ab+bc+ca)-3abc$
$=5(ab+bc+ca)+24$ ($\because abc=-8$)
$=5\times2+24=34$

11 출제율 ❯❯❯

$x+y+z=3$, $xy+yz+zx=1$, $xyz=-2$일 때, $(xy+yz)(yz+zx)(zx+xy)$의 값을 구하시오. 답 -10

해 $(xy+yz)(yz+zx)(zx+xy)$
$=y(x+z)\cdot z(y+x)\cdot x(z+y)$
$=xyz(x+y)(y+z)(z+x)$
$=xyz(3-x)(3-y)(3-z)$
$=xyz\{3^3-(x+y+z)\cdot3^2+(xy+yz+zx)\cdot3-xyz\}$
$=-2\times(3^3-3\cdot3^2+1\cdot3+2)$
$=-2\times(27-27+3+2)$
$=-10$

12 출제율 ❯❯❯

실수 a, b, c가
$a+b+c=2$, $a^2+b^2+c^2=ab-bc-ca$
를 만족시킬 때, abc의 값은?

✓① -8 ② -4 ③ 1
④ 4 ⑤ 8

해 $a^2+b^2+c^2=ab-bc-ca$에서
$a^2+b^2+c^2-ab+bc+ca=0$
$\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab+2bc+2ca)=0$
$\frac{1}{2}\{(a^2-2ab+b^2)+(b^2+2bc+c^2)+(c^2+2ca+a^2)\}=0$
$\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2\}=0$
$\therefore a=b=-c$
한편, $a+b+c=2$이므로 $a=2$, $b=2$, $c=-2$
$\therefore abc=-8$

정답 및 해설 5~7p

핵심유형 05 다항식의 나눗셈

13 출제율 ›››

다항식 $f(x)$를 x^2-x+1로 나누었을 때의 몫은 $g(x)$, 나머지는 $4x+2$이고, $g(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는 2이다. $f(x)$를 x^3+1로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(1)$의 값은?

① 0 ② 2 ③ 4
④ 6 ✓⑤ 8

해 $f(x)$를 x^2-x+1로 나눈 몫이 $g(x)$, 나머지가 $4x+2$이므로
$f(x)=(x^2-x+1)g(x)+4x+2$
또, $g(x)$를 $x+1$로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지는 2이므로
$g(x)=(x+1)Q(x)+2$
$\therefore f(x)=(x^2-x+1)\{(x+1)Q(x)+2\}+4x+2$
$=(x^2-x+1)(x+1)Q(x)+2(x^2-x+1)+4x+2$
$=(x^3+1)Q(x)+2x^2+2x+4$
이때, $2x^2+2x+4$는 x^3+1보다 차수가 낮으므로 $f(x)$를 x^3+1로 나누었을 때의 나머지가 $R(x)=2x^2+2x+4$이다.
$\therefore R(1)=2+2+4=8$

14 출제율 ›››

다항식 $f(x)$를 x^2-1로 나누었을 때의 몫이 $x-2$이고 나머지가 $3x+1$이다. $f(x)$를 x^2+1로 나누었을 때의 나머지가 $ax+b$일 때, 상수 a, b에 대하여 a^2+b^2의 값은?

① 5 ② 10 ③ 13
④ 25 ✓⑤ 26

해 다항식 $f(x)$를 x^2-1로 나눈 몫이 $x-2$이고 나머지가 $3x+1$이므로
$f(x)=(x^2-1)(x-2)+3x+1$
$=\{(x^2+1)-2\}(x-2)+3x+1$
$=(x^2+1)(x-2)-2(x-2)+3x+1$
$=(x^2+1)(x-2)+x+5$
이때, $x+5$는 x^2+1보다 차수가 낮은 다항식이므로 $f(x)$를 x^2+1로 나눈 나머지는 $x+5$이다.
따라서 $a=1$, $b=5$이므로 $a^2+b^2=26$

15 출제율 ›››

상수가 아닌 두 다항식 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(x)$를 $g(x)$로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)$라 할 때, [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $f(x)$의 차수는 $g(x)$의 차수보다 작지 않다.)

| 보기 |
ㄱ. $f(x)-R(x)$는 $g(x)$로 나누어떨어진다.
ㄴ. $f(x)+R(x)$를 $g(x)$로 나눈 나머지는 $R(x)$이다.
ㄷ. $\{f(x)\}^2$을 $g(x)$로 나눈 나머지는 $\{R(x)\}^2$을 $g(x)$로 나눈 나머지와 같다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ✓③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해 $f(x)=g(x)Q(x)+R(x)$
ㄱ. $f(x)-R(x)=g(x)Q(x)$이므로 $f(x)-R(x)$는 $g(x)$로 나누어떨어진다. (참)
ㄴ. $2R(x)$의 차수는 $g(x)$의 차수보다 낮으므로 $f(x)+R(x)=g(x)Q(x)+2R(x)$를 $g(x)$로 나눈 나머지는 $2R(x)$이다. (거짓)
ㄷ. $\{f(x)\}^2=\{g(x)Q(x)\}^2+2g(x)Q(x)R(x)+\{R(x)\}^2$에서 $\{f(x)\}^2$을 $g(x)$로 나눈 나머지는 $\{R(x)\}^2$을 $g(x)$로 나눈 나머지와 같다. (참)

16 출제율 ›››

다항식 $P(x)$를 $(x+2)^3$으로 나누었을 때의 나머지는 $2x^2+ax+3$이고, $(x+2)^2$으로 나누었을 때의 나머지는 $3x+b$이다. 이때, 상수 a, b의 합 $a+b$의 값을 구하시오. 답 6

해 $P(x)$를 $(x+2)^3$으로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 $2x^2+ax+3$이므로
$P(x)=(x+2)^3Q(x)+2x^2+ax+3$
이때, $(x+2)^3Q(x)$는 $(x+2)^2$으로 나누어떨어지므로
$2x^2+ax+3$을 $(x+2)^2$으로 나눈 나머지는 $3x+b$이다.

$$\begin{array}{r} 2 \\ x^2+4x+4\overline{)\,2x^2+ax+3} \\ \underline{2x^2+8x+8} \\ (a-8)x-5 \end{array}$$

$(a-8)x-5=3x+b$이므로 $a=11$, $b=-5$
$\therefore a+b=11+(-5)=6$

핵심유형 06 조립제법

17 출제율 ❯❯❯

실수 a, b, c가 다음 조건을 만족시킨다.

$$x^3+2x^2+3x+2=(x+2)^3+a(x+2)^2+b(x+2)+c$$

$a^2+b^2+c^2$의 값을 구하시오. 답 81

해 조립제법을 연이어 사용하면

$$\begin{array}{r|cccc} -2 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ & & -2 & 0 & -6 \\ \hline -2 & 1 & 0 & 3 & -4 \\ & & -2 & 4 & \\ \hline -2 & 1 & -2 & 7 & \\ & & -2 & & \\ \hline & 1 & -4 & & \end{array}$$

$-4 \Leftarrow c$, $7 \Leftarrow b$, $-4 \Leftarrow a$

따라서 $a=-4$, $b=7$, $c=-4$이므로

$a^2+b^2+c^2=(-4)^2+7^2+(-4)^2=16+49+16=81$

18 출제율 ❯❯❯

다항식 $f(x)=x^3+ax^2-x+b$가 $(x-1)^2$으로 나누어떨어질 때, 상수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하시오. 답 -1

해 $f(x)=x^3+ax^2-x+b$를 $(x-1)^3+p(x-1)^2+q(x-1)+r$의 꼴로 나타냈을 때, $q=r=0$이 되어야 한다.

조립제법을 연이어 사용하면

$$\begin{array}{r|cccc} 1 & 1 & a & -1 & b \\ & & 1 & a+1 & a \\ \hline 1 & 1 & a+1 & a & a+b \\ & & 1 & a+2 & \\ \hline & 1 & a+2 & 2a+2 & \end{array}$$

$a+b \Leftarrow r$, $2a+2 \Leftarrow q$

$q=2a+2=0$에서 $a=-1$

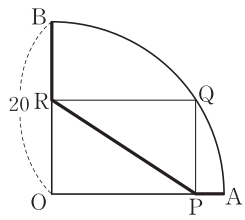
$r=a+b=0$에서 $b=1$

$\therefore ab=-1$

핵심유형 07 다항식의 연산의 활용

19 출제율 ❯❯❯

그림과 같이 반지름의 길이가 20인 사분원 OAB에 내접하는 직사각형 OPQR가 있다. $\overline{AP}+\overline{PR}+\overline{RB}=32$일 때, 직사각형 OPQR의 넓이를 구하시오. 답 192



해 $\overline{OP}=x$, $\overline{OR}=y$라 하자.

$\overline{AP}=20-x$, $\overline{RB}=20-y$, $\overline{PR}=\sqrt{x^2+y^2}$

한편, $\overline{PR}=\overline{OQ}=20$이므로 $x^2+y^2=20^2$ … ㉠

$\overline{AP}+\overline{PR}+\overline{RB}=(20-x)+20+(20-y)=32$ ($\because$ ㉠)

$x+y=28$ … ㉡

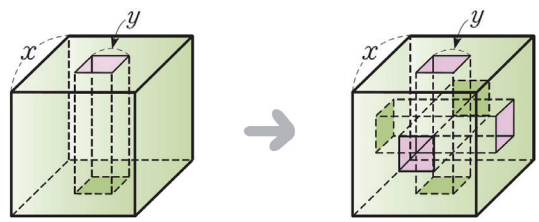
$(x+y)^2-2xy=x^2+y^2$에서 $28^2-2xy=400$ ($\because$ ㉠, ㉡)

$\therefore xy=192$

따라서 직사각형 OPQR의 넓이는 $xy=192$

20 출제율 ❯❯❯

한 모서리의 길이가 x인 정육면체 모양의 나무토막이 있다. [그림 1]과 같이 이 나무토막의 윗면의 중앙에서 한 변의 길이가 y인 정사각형 모양으로 아랫면의 중앙까지 구멍을 뚫었다. 구멍은 정사각기둥 모양이고, 각 모서리는 처음 정육면체의 모서리와 평행하다. 이와 같은 방법으로 각 면의 중앙에서 구멍을 뚫어 [그림 2]와 같은 입체도형을 얻었다. 이때, [그림 2]의 입체도형의 부피는?



[그림 1] [그림 2]

① x^3-3xy^2 ② $x^3-3xy^2+y^3$

③ $x^3-3xy^2-y^3$ ✓④ $x^3-3xy^2+2y^3$

⑤ $x^3-3xy^2-2y^3$

해 한 모서리의 길이가 x인 정육면체의 부피는 x^3

[그림 1]에서 뚫은 구멍은 밑면인 정사각형의 한 변의 길이가 y이고 높이가 x인 정사각기둥 모양이므로 그 부피는 xy^2

[그림 2]에서 세 방향으로 뚫은 구멍이 겹치는 부분은 한 모서리의 길이가 y인 정육면체이므로 그 부피는 y^3

따라서 구하는 입체도형의 부피는

$x^3-3(xy^2-y^3)-y^3=x^3-3xy^2+2y^3$

정답 및 해설 7~8p



FIRST CLASS

실전 유형 훈련

◀ 동영상 강의

핵심유형 01 다항식의 전개

21

$x^2+5x-2=0$일 때, $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$의 값은?

① 6 ② 12 ③ 24
④ 36 ✓⑤ 48

해 (주어진 식)$=\{(x+1)(x+4)\}\{(x+2)(x+3)\}$
$=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)$
$=(2+4)(2+6)$ ($\because x^2+5x=2$)
$=48$

22

두 다항식

$A=(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4)^2$,

$B=(5+4x+3x^2+2x^3+x^4)^2$

을 전개하였을 때 x^4의 계수를 각각 a, b라 하자. 이때, $a-b$의 값은?

✓① 0 ② 2 ③ 4
④ 6 ⑤ 8

해 $A=(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4)(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4)$에서
x^4항은 $1\times5x^4+2x\times4x^3+3x^2\times3x^2+4x^3\times2x+5x^4\times1$이므로
$a=1\times5+2\times4+3\times3+4\times2+5\times1$
$B=(5+4x+3x^2+2x^3+x^4)(5+4x+3x^2+2x^3+x^4)$에서
x^4항은 $5\times x^4+4x\times2x^3+3x^2\times3x^2+2x^3\times4x+x^4\times5$이므로
$b=5\times1+4\times2+3\times3+2\times4+1\times5$
따라서 $a=b$이므로 $a-b=0$

23

다항식 $(x+2y-3z)^3$의 전개식에서 모든 항의 계수의 총합을 a, y가 없는 항의 계수의 총합을 b라 할 때, a^2+b^2의 값을 구하시오. 답 64

해 다항식 $(x+2y-3z)^3$에 $x=1$, $y=1$, $z=1$을 대입하면
$a=(1+2\times1-3\times1)^3=0$
다항식 $(x+2y-3z)^3$에 $x=1$, $y=0$, $z=1$을 대입하면
$b=(1+2\times0-3\times1)^3=-8$
$\therefore a^2+b^2=0+(-8)^2=64$

핵심유형 02 곱셈 공식

24

양의 실수 x, y가 $(2x+2y-3)^2=89$를 만족시킬 때, $x^2+y^2+2xy-3x-3y$의 값은?

✓① 20 ② 25 ③ 30
④ 35 ⑤ 40

해 $(2x+2y-3)^2=89$에서
$4x^2+4y^2+9+8xy-12y-12x=89$
$4x^2+4y^2+8xy-12y-12x=80$
$4(x^2+y^2+2xy-3x-3y)=80$
$\therefore x^2+y^2+2xy-3x-3y=20$

25

두 다항식

$A=2x^3+x^2+x+2$,

$B=x^2+x+2$

에 대하여 A^3-B^3을 전개하였을 때 x^4의 계수를 구하시오. 답 24

해 $A-B=2x^3$이므로
$A^3-B^3=(A-B)^3+3AB(A-B)$
$=(2x^3)^3+3AB\times2x^3=8x^9+6ABx^3$
따라서 A^3-B^3의 전개식에서 x^4의 항은 $6ABx^3$에만 있고, x^4의 계수는 $6AB$의 x의 계수와 같다.
$6AB=6(2x^3+x^2+x+2)(x^2+x+2)$에서 x의 계수는 x와 2, 2와 x가 곱해진 항에서만 나오므로 $6(2x+2x)=24x$
따라서 A^3-B^3의 x^4의 계수는 24이다.

26

다항식

$f(x)=(1-x)(1+x+x^2)(1+x^3+x^6)(1+x^9)$

의 전개식이

$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_{18}x^{18}$

일 때, $a_0+a_6+a_{12}+a_{18}$의 값은?

(단, a_0, a_1, …, a_{18}은 상수)

① -2 ② -1 ✓③ 0
④ 1 ⑤ 2

해 $f(x)=\{(1-x)(1+x+x^2)\}(1+x^3+x^6)(1+x^9)$
$=(1-x^3)(1+x^3+x^6)(1+x^9)$
$=(1-x^9)(1+x^9)=1-x^{18}$
따라서 $a_0=1$, $a_{18}=-1$이고 나머지 항의 계수는 모두 0이므로
$a_0+a_6+a_{12}+a_{18}=1+0+0-1=0$

27

이차항의 계수가 음수인 이차다항식 $P(x)$와 양의 상수 a에 대하여 다항식

$$\{P(x)+x\}^2=(x-a)(x+a)(x^2+6)+25$$

가 항상 성립할 때, $\{P(a)\}^2$의 값을 구하시오. 답 49

해 $(x-a)(x+a)(x^2+6)+25$
$=(x^2-a^2)(x^2+6)+25=x^4+(6-a^2)x^2-6a^2+25$
$=\left(x^2+\frac{6-a^2}{2}\right)^2-\frac{(6-a^2)^2-4(-6a^2+25)}{4}$
에서 $(6-a^2)^2-4(-6a^2+25)=0$이어야 한다.
$\therefore a^2=4,\ a=2\ (\because a>0)$
$\{P(x)+x\}^2=(x^2+1)^2$에서 $P(x)$의 이차항의 계수가 음수이므로
$P(x)+x=-x^2-1$
$\therefore \{P(a)\}^2=\{P(2)\}^2=(-7)^2=49$

핵심유형 03 곱셈 공식의 변형 – 두 문자

28

$x+y=4,\ x^2+y^2=18$일 때, x^3+y^3의 값은?

① 36 ② 46 ③ 56
④ 66 ✓⑤ 76

해 $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$에서 $x+y=4,\ x^2+y^2=18$이므로
$16=18+2xy \quad \therefore xy=-1$
$\therefore x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$
$=4^3-3\times(-1)\times4=76$

29

$a-b=2,\ a^3-b^3=14$일 때, a^2+b^2의 값은?

✓① 6 ② 8 ③ 10
④ 12 ⑤ 14

해 $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$에서 $a-b=2,\ a^3-b^3=14$이므로
$14=2^3+3ab\times2,\ 6ab=6 \quad \therefore ab=1$
$\therefore a^2+b^2=(a-b)^2+2ab=2^2+2\times1=6$

30

$x=y+z=2$일 때, $x^3+y^3+z^3+3xyz$의 값은?

① -16 ② -8 ③ 0
④ 8 ✓⑤ 16

해 (주어진 식)$=x^3+(y+z)^3-3yz(y+z)+3xyz$
$=x^3+x^3-3xyz+3xyz$
$=2x^3=2\times2^3=16$

핵심유형 04 곱셈 공식의 변형 – 세 문자

31

실수 $a,\ b,\ c$에 대하여

$$a+b+c=6,\ ab+bc+ca=11,\ abc=6$$

일 때, 다음 식의 값은?

$$a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)$$

① 28 ② 33 ③ 38
④ 43 ✓⑤ 48

해 (주어진 식)
$=ab^2+ac^2+bc^2+ba^2+ca^2+cb^2$
$=ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$
$=ab(a+b+c-c)+bc(a+b+c-a)+ca(a+b+c-b)$
$=ab(a+b+c)+bc(a+b+c)+ca(a+b+c)-3abc$
$=(a+b+c)(ab+bc+ca)-3abc$
$=6\times11-3\times6=48$

32

어떤 세 수의 합이 2이고 역수의 합은 $\frac{1}{2}$이다. 또, 세 수의 제곱의 합이 6일 때, 이 세 수의 역수의 제곱의 합을 구하시오. 답 $\frac{9}{4}$

해 세 수를 $a,\ b,\ c$라 하면
$a+b+c=2 \cdots$ ㉠, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2} \cdots$ ㉡, $a^2+b^2+c^2=6 \cdots$ ㉢
㉡에서 $abc=2(ab+bc+ca)$
㉢에서 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$
$6=2^2-2(ab+bc+ca) \Rightarrow ab+bc+ca=-1,\ abc=-2$
$\therefore \left(\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{1}{b}\right)^2+\left(\frac{1}{c}\right)^2$
$=\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{a^2b^2c^2}=\frac{(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)}{(abc)^2}=\frac{9}{4}$

정답 및 해설 8~10p

33

세 실수 x, y, z에 대하여

$x+y+z=4$, $x^2+y^2+z^2=14$, $xyz=-6$

일 때, $\dfrac{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}{xy+yz+zx}$의 값을 구하시오. 답 49

해 $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$에서
$16=14+2(xy+yz+zx)$
$\therefore xy+yz+zx=1$
$(xy+yz+zx)^2=x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2xyz(x+y+z)$에서
$1=x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2\times(-6)\times4$ $\therefore x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=49$
$\therefore \dfrac{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}{xy+yz+zx}=49$

34

세 실수 x, y, z가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) x, y, z 중에서 적어도 하나는 1이다.
(나) $x^2+y^2+z^2=x+y+z$

$xyz=\dfrac{3}{8}$일 때, $xy+yz+zx$의 값은?

① $\dfrac{11}{8}$ ② $\dfrac{13}{8}$ ✓③ $\dfrac{15}{8}$
④ $\dfrac{17}{8}$ ⑤ $\dfrac{19}{8}$

해 조건 (가)에 의하여 $(1-x)(1-y)(1-z)=0$
$1-(x+y+z)+(xy+yz+zx)-xyz=0$
여기서 $A=x+y+z$, $B=xy+yz+zx$로 놓으면
$1-A+B-\dfrac{3}{8}=0$ $\therefore A-B=\dfrac{5}{8}$ … ㉠
조건 (나)에 의하여
$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)=x+y+z$
이므로 $A^2-2B=A$ … ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $A=\dfrac{1}{2}$ 또는 $A=\dfrac{5}{2}$
이때 x, y, z 중에서 적어도 하나는 1이므로
$A=x+y+z=x^2+y^2+z^2\geq1$
따라서 $A=\dfrac{5}{2}$이고 $B=A-\dfrac{5}{8}=\dfrac{15}{8}$

35

$a+b+c=1$, $a^2+b^2+c^2=3$, $a^3+b^3+c^3=-2$일 때, $ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$의 값은?

① -10 ② -5 ③ 0
✓④ 5 ⑤ 10

해 (주어진 식)
$=(b+c)a^2+(c+a)b^2+(a+b)c^2$
$=(a+b+c)a^2+(a+b+c)b^2+(a+b+c)c^2-a^3-b^3-c^3$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)-(a^3+b^3+c^3)$
$=1\times3-(-2)=5$

36

서로 다른 세 실수 x, y, z가

$x^2-yz=4$, $y^2-zx=4$, $z^2-xy=4$

를 만족시킬 때, $x^2+y^2+z^2$의 값은?

① 4 ② 6 ✓③ 8
④ 10 ⑤ 12

해 $x^2-yz=4$ … ㉠, $y^2-zx=4$ … ㉡, $z^2-xy=4$ … ㉢
㉠−㉡에서 $(x-y)(x+y+z)=0$
이때, $x\neq y$이므로 $x+y+z=0$ … ㉣
㉠+㉡+㉢에서 $x^2+y^2+z^2=xy+yz+zx+12$ … ㉤
$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$에 ㉣, ㉤을 대입하면
$0=3(xy+yz+zx)+12$ $\therefore xy+yz+zx=-4$
이 값을 ㉤에 대입하면 $x^2+y^2+z^2=8$

핵심유형 05 다항식의 나눗셈

37

다항식 $f(x)-1$을 $2x^2+3x+1$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 $2x+1$일 때, 다항식 $f(x)$를 $2x+1$로 나눈 몫은?

① $(x+1)Q(x)$ ✓② $(x+1)Q(x)+1$
③ $2(x+1)Q(x)$ ④ $2(x+1)Q(x)+1$
⑤ $2(x+1)Q(x)+2$

해 $f(x)-1=(2x^2+3x+1)Q(x)+2x+1$
$\therefore f(x)=(2x^2+3x+1)Q(x)+(2x+1)+1$
$=(2x+1)(x+1)Q(x)+(2x+1)+1$
$=(2x+1)\{(x+1)Q(x)+1\}+1$
따라서 $f(x)$를 $2x+1$로 나눈 몫은 $(x+1)Q(x)+1$이다.

38

세 다항식 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$에 대하여 $f(x)+g(x)$와 $f(x)-g(x)$를 $h(x)$로 나누면 나머지가 각각 9, -3일 때, $f(x)$를 $h(x)$로 나눈 나머지는?

① -3 ② 0 ✓③ 3
④ 6 ⑤ 9

해 $f(x)+g(x)$와 $f(x)-g(x)$를 $h(x)$로 나누었을 때의 몫을 각각 $Q_1(x)$, $Q_2(x)$라 하면
$f(x)+g(x)=h(x)Q_1(x)+9$ … ㉠
$f(x)-g(x)=h(x)Q_2(x)-3$ … ㉡
㉠+㉡을 하면 $2f(x)=h(x)\{Q_1(x)+Q_2(x)\}+6$
$\therefore f(x)=h(x)\times\dfrac{Q_1(x)+Q_2(x)}{2}+3$
따라서 $f(x)$를 $h(x)$로 나눈 나머지는 3이다.

39

다항식 $f(x)$를 x^2+1로 나누었을 때의 나머지가 $x+1$이다. 다항식 $x^2f(x)$를 x^2+1로 나누었을 때의 나머지가 $ax+b$일 때, a^2+b^2의 값은? (단, a, b는 상수)

① 1 ✓② 2 ③ 4
④ 5 ⑤ 8

해 $f(x)=(x^2+1)Q(x)+x+1$
$\therefore x^2f(x)=x^2\{(x^2+1)Q(x)+x+1\}$
$=x^2(x^2+1)Q(x)+(x^2+1)(x+1)-x-1$
$=(x^2+1)\{x^2Q(x)+x+1\}-x-1$
따라서 $a=-1$, $b=-1$이므로 $a^2+b^2=2$이다.

40

다항식 $(x^2+x+2)^3$을 x^2+1로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(5)$의 값은?

① 2 ② 5 ✓③ 8
④ 11 ⑤ 14

해 $x^2+1=A$, $x+1=B$라 두면
$(x^2+x+2)^3=(A+B)^3=A(A^2+3AB+3B^2)+B^3$
이때, B^3을 A로, 즉 $(x+1)^3$을 x^2+1로 나눈 나머지가 $R(x)$이다.
따라서 $R(x)=2x-2$이므로 $R(5)=8$

41

두 다항식 $f(x)$, $g(x)$를 x^2+2x+4로 나누었을 때의 나머지가 각각 $x+1$, $x-1$이다. 다항식 $f(x)g(x)$를 x^2+2x+4로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(-10)$의 값을 구하시오. 답 15

해 두 다항식 $f(x)$, $g(x)$를 x^2+2x+4로 나누었을 때의 나머지가 각각 $x+1$, $x-1$이므로
다항식 $f(x)g(x)$를 x^2+2x+4로 나누었을 때의 나머지는 나머지끼리의 곱 $(x+1)(x-1)$을 x^2+2x+4로 나누었을 때의 나머지와 같다.
$(x+1)(x-1)=x^2-1=(x^2+2x+4)-2x-5$이므로 나머지 $R(x)=-2x-5$이다.
$\therefore R(-10)=20-5=15$

42

이차식 $f(x)$와 상수가 아닌 다항식 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) x^3+4x^2+6x+3을 $f(x)$로 나눈 나머지는 $g(x)$이다.
(나) x^3+4x^2+6x+3을 $g(x)$로 나눈 나머지는 $f(x)-x^2-3x$이다.

이때, $f(1)+g(2)$의 값을 구하시오. 답 13

해 조건 (가)에서 $g(x)$는 일차식이고, 조건 (나)에서 $f(x)-x^2-3x$는 상수이다.
$f(x)-x^2-3x=k$ (k는 상수)라 하면 $f(x)=x^2+3x+k$이고
x^3+4x^2+6x+3을 $f(x)$로 나누면 몫이 $x+1$이고 나머지가 $g(x)=(3-k)(x+1)$
$x^3+4x^2+6x+3=(3-k)(x+1)Q(x)+k$의 양변에 $x=-1$을 대입하면 $k=0$
$f(x)=x^2+3x$, $g(x)=3x+3$이므로 $f(1)+g(2)=4+9=13$

핵심유형 06 조립제법

43

다항식 x^5+x^2+1을 $(x+1)^2$으로 나눈 나머지가 $ax+b$일 때, 상수 a, b에 대하여 a^2+b^2의 값은?

① 5 ② 10 ③ 13
④ 18 ✓⑤ 25

해 다항식 $x^5+x^2-ax+(1-b)$는 $(x+1)^2$으로 나누어떨어진다.
조립제법을 연이어 사용하면
$-a+3=0$에서 $a=3$, $1-b+a=0$에서 $b=4$
$\therefore a^2+b^2=9+16=25$

44

x의 값에 관계없이 등식

$8x^3+4x^2+4x+9$
$=a(2x+1)^3+b(2x+1)^2+c(2x+1)+d$

가 항상 성립할 때, 상수 a, b, c, d에 대하여 $ad-bc$의 값을 구하시오. 답 13

해 조립제법을 사용하면
$8x^3+4x^2+4x+9$
$=\left(x+\frac{1}{2}\right)\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)\left\{8\left(x+\frac{1}{2}\right)-8\right\}+6\right]+7$
$=8\left(x+\frac{1}{2}\right)^3-8\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+6\left(x+\frac{1}{2}\right)+7$
$\therefore a=1$, $b=-2$, $c=3$, $d=7$
$\therefore ad-bc=1\times7-(-2)\times3=7+6=13$

정답 및 해설 10~12p

45

다음 등식이 성립하도록 하는 상수 a, b, c에 대하여 $a^2+b^2+c^2$의 값을 구하시오. 답 38

$$x^3+ax^2+bx+c$$
$$=(x+1)^3+2(x+1)^2-4(x+1)+3$$

해 $x+1=t$라 하면 $x=t-1$
$\therefore t^3+2t^2-4t+3=(t-1)^3+a(t-1)^2+b(t-1)+c$
좌변의 식에서 조립제법을 연이어 사용하면

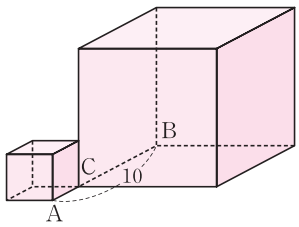
1	1	2	−4	3
		1	3	−1
1	1	3	−1	2 ⇦ c
		1	4	
1	1	4	3 ⇦ b	
		1		
	1	5 ⇦ a		

따라서 $a=5$, $b=3$, $c=2$
이므로
$a^2+b^2+c^2=5^2+3^2+2^2$
$=38$

핵심유형 07 다항식의 연산의 활용

46

그림과 같이 선분 AB 위의 점 C에 대하여 선분 AC를 한 모서리로 하는 정육면체와 선분 BC를 한 모서리로 하는 정육면체를 만든다. $\overline{AB}=10$이고 두 정육면체의 부피의 합이 370일 때, 두 정육면체의 겉넓이의 합을 구하시오. (단, 두 정육면체는 한 모서리에서만 만난다.) 답 348



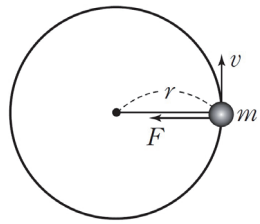
해 $\overline{AC}=x$, $\overline{CB}=y$라 하면 $x+y=10$이고, $x^3+y^3=370$이다.
두 정육면체의 겉넓이의 합은 $6(x^2+y^2)$이므로 먼저 xy의 값을 구하면 $(x+y)^3=x^3+y^3+3xy(x+y)$에서
$10^3=370+30xy$ $\therefore xy=21$
이때, $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=10^2-2\times21=58$
따라서 두 정육면체의 겉넓이의 합은
$6(x^2+y^2)=6\times58=348$

47

교육청 기출

물체가 등속 원운동을 하기 위해 원의 중심방향으로 작용하는 일정한 크기의 힘을 구심력이라 한다.
질량이 m인 물체가 반지름의 길이가 r인 원의 궤도를 따라 v의 속력으로 등속 원운동을 할 때 작용하는 구심력의 크기 F는 다음과 같다.

$$F=m\frac{v^2}{r}$$



물체 A와 물체 B는 반지름의 길이가 각각 r_A, r_B인 원의 궤도를 따라 등속 원운동을 한다.
물체 A의 질량은 물체 B의 질량의 3배이고, 물체 A의 속력은 물체 B의 속력의 $\frac{1}{2}$배이다. 물체 A와 물체 B의 구심력의 크기가 같을 때, $\frac{r_A}{r_B}$의 값은?

① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{5}{8}$
✓④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{7}{8}$

해 $F=\frac{m_A(v_A)^2}{r_A}=\frac{m_B(v_B)^2}{r_B}$
$\frac{3m_B\left(\frac{1}{2}v_B\right)^2}{r_A}=\frac{m_B(v_B)^2}{r_B}$이므로 $\frac{3\times\frac{1}{4}}{r_A}=\frac{1}{r_B}$
$\therefore \frac{r_A}{r_B}=\frac{3}{4}$

48

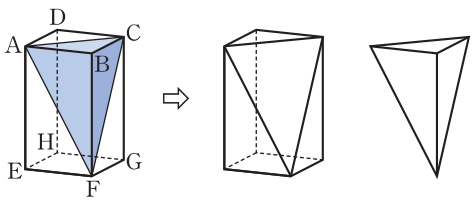
다음 조건을 만족시키는 서로 다른 자연수 x, y의 순서쌍 (x, y)의 개수를 구하시오. (단, a, b는 상수) 답 4

(가) $x^2+y^2=a$
(나) $x^3-y^3=b(x-y)$
(다) $b=a+16$

해 조건 (나)에서 $(x-y)^2+3xy=b$
즉, $b=x^2-2xy+y^2+3xy=x^2+y^2+xy=a+xy$ ($\because$ 조건 (가))
조건 (다)에서 $xy=16$이므로 이 식을 만족시키는 서로 다른 자연수 x, y의 순서쌍 (x, y)의 개수는 $(1, 16)$, $(2, 8)$, $(8, 2)$, $(16, 1)$의 4이다.

49

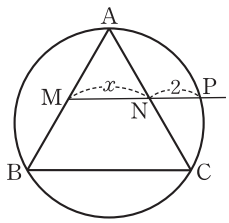
그림과 같이 직육면체 ABCD−EFGH에서 단면 AFC가 생기도록 사면체 F−ABC를 잘라내었다. 입체도형 ACD−EFGH의 모든 모서리의 길이의 합을 l_1, 겉넓이를 S_1이라 하고, 사면체 F−ABC의 모든 모서리의 길이의 합을 l_2, 겉넓이를 S_2라 하자. $l_1-l_2=20$, $S_1-S_2=31$일 때, $\overline{AC}^2+\overline{CF}^2+\overline{FA}^2$의 값을 구하시오. 답 76



해 $\overline{AB}=x$, $\overline{AD}=y$, $\overline{AE}=z$라 하면
$l_1-l_2=2x+2y+2z=20$에서 $x+y+z=10$
$S_1-S_2=xy+yz+zx=31$
$\therefore \overline{AC}^2+\overline{CF}^2+\overline{FA}^2$
$=2(x^2+y^2+z^2)$
$=2\{(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)\}$
$=76$

50

정삼각형 ABC에서 두 변 AB와 AC의 중점을 각각 M, N이라 하고, 반직선 MN이 삼각형 ABC의 외접원과 만나는 점을 P라 하자. $\overline{NP}=2$, $\overline{MN}=x$일 때, $\frac{x^2}{4}+\frac{4}{x^2}$의 값을 구하시오. 답 3



해 반직선 NM이 △ABC의 외접원과 만나는 점을 Q라 하자.
△AMN은 정삼각형이므로 $\overline{AN}=\overline{NC}=\overline{MN}=x$
두 삼각형 AQN, PCN에서 $\overline{QN}:\overline{CN}=\overline{AN}:\overline{PN}$이므로
$(2+x):x=x:2$
$x^2=2x+4$, $x^2-4=2x$
양변을 $2x$로 나누면 $\frac{x}{2}-\frac{2}{x}=1$
양변을 제곱하면 $\frac{x^2}{4}-2+\frac{4}{x^2}=1$ $\therefore \frac{x^2}{4}+\frac{4}{x^2}=3$

서술형

51

두 다항식 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 다항식 $f(x)+g(x)$를 다항식 $h(x)$로 나누었을 때의 나머지가 2이고, 다항식 $f(x)-g(x)$를 $h(x)$로 나누었을 때의 나머지가 8이다. 서로소인 두 자연수 m, n에 대하여 다항식 $mf(x)+ng(x)$를 $h(x)$로 나누었을 때의 나머지가 0일 때, mn의 값을 구하시오. 답 15

해 다항식 $f(x)+g(x)$를 $h(x)$로 나누었을 때의 몫을 $P(x)$라 하면
$f(x)+g(x)=h(x)P(x)+2$ … ㉠
다항식 $f(x)-g(x)$를 $h(x)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면
$f(x)-g(x)=h(x)Q(x)+8$ … ㉡
$\therefore mf(x)+ng(x)$
$=h(x)\times\left[\frac{m}{2}\{P(x)+Q(x)\}+\frac{n}{2}\{P(x)-Q(x)\}\right]+5m-3n$
이때, $mf(x)+ng(x)$를 $h(x)$로 나누었을 때의 나머지가 0이고 m과 n은 서로소인 자연수이므로 $m=3$, $n=5$ $\therefore mn=15$

52

다항식 $f(x)$를 x^2+x+1로 나누었을 때의 나머지가 $x+1$이다. 다항식 $x^3f(x)$를 x^2+x+1로 나누었을 때의 나머지를 $ax+b$라 할 때, 상수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하시오. 답 1

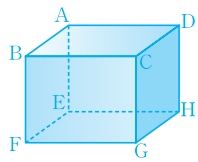
해 $f(x)$를 x^2+x+1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면
$f(x)=(x^2+x+1)Q(x)+x+1$ … ㉠
$x^3f(x)=(x^3-1)f(x)+f(x)$
$=(x^2+x+1)(x-1)f(x)+f(x)$
$=(x^2+x+1)\{(x-1)f(x)+Q(x)\}+x+1$ ($\because$ ㉠)
즉, $x^3f(x)$를 x^2+x+1로 나누었을 때의 나머지는 $f(x)$를 x^2+x+1로 나누었을 때의 나머지와 같으므로 나머지는 $x+1$이다.
따라서 $a=1$, $b=1$이므로 $ab=1$

53

다음 조건을 만족시키는 직육면체의 부피를 구하시오. 답 8

(가) 모든 모서리의 길이의 합은 24이다.
(나) 겉넓이는 24이다.

해 $\overline{AB}=a$, $\overline{AD}=b$, $\overline{AE}=c$라 하면
$ab+bc+ca=12$
또, $a+b+c=6$
$a^2+b^2+c^2$
$=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$
$=36-24=12$
이므로 $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$
즉, $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$에서
$\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$ $\therefore a=b=c$
따라서 $a+b+c=6$에서 $a=b=c=2$이므로
직육면체의 부피는 $abc=8$



◇ 정답 및 해설 12~14p



FIRST CLASS

고난도 도전 문제

◀ 동영상 강의

54

대각선의 길이가 $\sqrt{5}$인 두 직사각형 P, Q가 있다. P의 가로와 세로의 길이는 각각 a, b이고, Q의 가로와 세로의 길이는 각각 c, d이다. $ad-bc=4$일 때, $ac+bd$의 값은?

① $\sqrt{5}$ ✓② 3 ③ $2\sqrt{5}$
④ 5 ⑤ 9

해 $a^2+b^2=5$, $c^2+d^2=5$이므로
$(a^2+b^2)(c^2+d^2)$
$=a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2=(a^2d^2+b^2c^2)+(a^2c^2+b^2d^2)$
$=(ad-bc)^2+2abcd+(ac+bd)^2-2abcd$
$=(ad-bc)^2+(ac+bd)^2$
$=16+(ac+bd)^2=25$
$(ac+bd)^2=9$이므로 $ac+bd=3$ ($\because$ a, b, c, d는 양수)

55

$a+b+c=3\sqrt{2}$, $a^2+b^2+c^2=6$일 때, ab^2c^3의 값을 구하시오. (단, a, b, c는 실수이다.) 답 8

해 $ab+bc+ca=\frac{1}{2}\{(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)\}$
$=\frac{1}{2}\{(3\sqrt{2})^2-6\}=6$
$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=6-6=0$이므로
$\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$
$\therefore a=b=c=\sqrt{2}$ ($\because$ $a+b+c=3\sqrt{2}$)
$\therefore ab^2c^3=(\sqrt{2})^6=8$

56

0이 아닌 실수 x, y, z가

$$x+y+z=3,\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{3}$$

을 만족시킬 때, [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

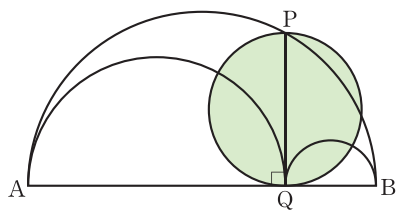
| 보기 |
ㄱ. $(x+y+z)(xy+yz+zx)=xyz$
ㄴ. $(x+y)(y+z)(z+x)=0$
ㄷ. x, y, z 중 적어도 하나는 3이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ✓⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해 ㄱ. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{3}$에서 $\frac{xy+yz+zx}{xyz}=\frac{1}{3}$
$3(xy+yz+zx)=xyz$ … ㉠
이때, $x+y+z=3$이므로 ㉠에 대입하면 $(x+y+z)(xy+yz+zx)=xyz$ (참)
ㄴ. $(x+y)(y+z)(z+x)$
$=(3-z)(3-x)(3-y)=27-9(x+y+z)+3(xy+yz+zx)-xyz$
$=27-27+3(xy+yz+zx)-xyz=0$ ($\because$ ㉠) (참)
ㄷ. $(x+y)(y+z)(z+x)=0$에서 $x+y$, $y+z$, $z+x$ 중 적어도 하나는 0이다.
이때, $x+y+z=3$이므로 x, y, z 중 적어도 하나는 3이다. (참)

57

선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 그림과 같이 호 AB 위의 점 P에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 Q라 하고, 선분 AQ와 선분 BQ를 지름으로 하는 반원을 각각 그린다. 호 AB, 호 AQ 및 호 BQ로 둘러싸인 모양 도형의 넓이를 S_1, 선분 PQ를 지름으로 하는 원의 넓이를 S_2라 하자. $\overline{AQ}-\overline{BQ}=2\sqrt{3}$이고 $S_1+S_2=\frac{\pi}{2}$일 때, $\overline{AQ}^3+\overline{BQ}^3+\overline{PQ}^3$의 값을 구하시오. 답 53

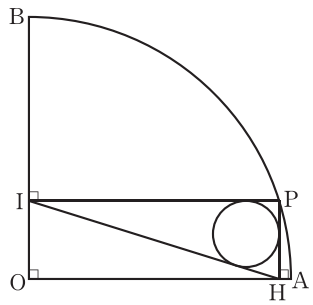


해 $\overline{AQ}=x$, $\overline{BQ}=y$라 하면
$S_1=\frac{\pi}{2}\left(\frac{x+y}{2}\right)^2-\frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2-\frac{\pi}{2}\left(\frac{y}{2}\right)^2=\frac{\pi}{4}xy$
$\overline{PQ}^2=\overline{AQ}\times\overline{BQ}=xy$ $\therefore S_2=\pi\left(\frac{\overline{PQ}}{2}\right)^2=\frac{\pi}{4}xy$
따라서 $S_1+S_2=\frac{\pi}{4}xy+\frac{\pi}{4}xy=\frac{\pi}{2}xy=\frac{\pi}{2}$에서 $xy=1$ … ㉠
즉, $\overline{PQ}^2=xy=1$에서 $\overline{PQ}=1$
또한, $\overline{AQ}-\overline{BQ}=2\sqrt{3}$에서 $x-y=2\sqrt{3}$ … ㉡
㉠, ㉡에서 $x+y=4$
$\therefore \overline{AQ}^3+\overline{BQ}^3+\overline{PQ}^3=x^3+y^3+1^3=(x+y)^3-3xy(x+y)+1=53$

58

그림과 같이 중심이 O, 반지름의 길이가 6이고 중심각의 크기가 90°인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P에서 두 선분 OA, OB에 내린 수선의 발을 각각 H, I라 하자. 삼각형 PIH에 내접하는 원의 넓이가 π일 때, $\overline{PH}^3+\overline{PI}^3$의 값을 구하시오. 176

(단, 점 P는 점 A도 아니고 점 B도 아니다.)



해 사각형 IOHP가 직사각형이므로 $\overline{HI}=\overline{OP}$에서 $\overline{HI}=6$이다.
$\overline{PH}=x$, $\overline{PI}=y$라 하면 직각삼각형 PIH에서 $x^2+y^2=36$ … ㉠
삼각형 PIH의 내접원의 반지름의 길이를 r $(r>0)$라 하면
$\frac{1}{2}xy=\frac{1}{2}\times r\times(x+y+6)$, $x+y=xy-6$ … ㉡
㉠, ㉡에서 $xy=14$ … ㉢, $x+y=8$
$\therefore \overline{PH}^3+\overline{PI}^3=x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=176$

59

다항식 $x^9+x^6+x^3+1$을 $(x^2+x+1)^2$으로 나눈 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(2)$의 값을 구하시오. 46

해 $(x^3-1)^2$은 $(x^2+x+1)^2$으로 나누어떨어진다. … ㉠
$x^9+x^6+x^3+1=x^6(x^3+1)+(x^3+1)=(x^3+1)(x^6+1)$이고
$x^3+1=(x^3-1)+2$,
$x^6+1=(x^3-1)(x^3+1)+2=(x^3-1)^2+2(x^3-1)+2$
$x^9+x^6+x^3+1$
$=(x^3-1)^2(x^3+3)+6(x^3-1)+4$
$=(x^2+x+1)^2(x-1)^2(x^3+3)+6(x^3-1)+4$
이므로 $R(x)=6(x^3-1)+4$
따라서 $R(2)=6(2^3-1)+4=6\times7+4=46$이다.

60

다항식

$$f(x)=x^{99}+x^{98}+\cdots+x+1$$

에 대하여 $f(x^{100})$을 $f(x)$로 나눈 나머지를 다음 성질을 이용하여 구하시오. 100

> 자연수 n에 대하여
> $$A^n-1=(A-1)(A^{n-1}+A^{n-2}+\cdots+A+1)$$
> 이 성립한다.

해 $(x-1)f(x)=(x-1)(x^{99}+x^{98}+\cdots+x+1)=x^{100}-1$
여기서 $x^{100}=t$라 하면 $(x-1)f(x)=t-1$ … ㉠
한편, $f(x^{100})=f(t)=t^{99}+t^{98}+\cdots+t+1$이므로 이 식의 양변에서 100씩 빼면
$f(t)-100=(t^{99}-1)+(t^{98}-1)+\cdots+(t-1)+(1-1)$
$=(t-1)P(t)$ (단, $P(t)$는 다항식)
㉠에서 $t-1=(x-1)f(x)$이므로 위 식은
$f(t)-100=(x-1)f(x)P(t)$
$f(x^{100})=(x-1)f(x)P(x^{100})+100$
따라서 $f(x^{100})$을 $f(x)$로 나눈 나머지는 100이다.

61

실수 a, b, c, d에 대하여

$$a^2+b^2=1,\ c^2+d^2=1,\ ac+bd=0$$

일 때, [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

| 보기 |

ㄱ. $a^2=d^2$, $b^2=c^2$
ㄴ. $a^2+c^2=1$, $b^2+d^2=1$
ㄷ. $ab+cd=0$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ✓⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해 ㄱ. $a^2+b^2=1$의 양변에 d^2을 곱하면 $a^2d^2+b^2d^2=d^2$ … ㉠
$ac+bd=0$으로부터 $b^2d^2=a^2c^2$
이것을 ㉠에 대입하면 $a^2d^2+a^2c^2=d^2$
$a^2(c^2+d^2)=d^2$ $\therefore a^2=d^2$ ($\because c^2+d^2=1$)
따라서 $a^2+b^2=c^2+d^2$에서 $b^2=c^2$ (참)
ㄴ. $a^2+b^2=1$이고 $b^2=c^2$이므로 $a^2+c^2=1$
$c^2+d^2=1$이고 $b^2=c^2$이므로 $b^2+d^2=1$ (참)
ㄷ. $ac+bd=0$에서 $(ac+bd)^2=0$이므로
$a^2c^2+2abcd+b^2d^2=0$
$b^2=c^2$이므로 $a^2b^2+2abcd+c^2d^2=0$, $(ab+cd)^2=0$
$\therefore ab+cd=0$ (참)

◇ 정답 및 해설 14~16p



02 나머지정리

개념 강의▶

중요도 ★★★

1 항등식

(1) **항등식**

등식에 포함되어 있는 문자에 어떤 값을 대입하여도 항상 등호가 성립하는 식을 **항등식**이라 한다.❶

이때, 다음 표현은 모두 x에 대한 항등식을 나타낸다.

- 모든 x에 대하여 성립하는 등식
- 임의의 x에 대하여 성립하는 등식
- x의 값에 관계없이 항상 성립하는 등식
- 어떤 x의 값에 대하여도 항상 성립하는 등식

$\Longleftrightarrow$ x에 대한 항등식

❶ 앞에서 배운 다항식의 곱셈 공식은 문자에 어떤 값을 대입하여도 항상 성립하므로 항등식이다.

(2) **항등식의 성질**

① x에 대한 항등식

$ax+b=0 \iff a=0,\ b=0$

$ax^2+bx+c=0 \iff a=0,\ b=0,\ c=0$

$ax+b=a'x+b' \iff a=a',\ b=b'$

$ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c' \iff a=a',\ b=b',\ c=c'$

② x, y에 대한 항등식

$ax+by+c=0 \iff a=b=c=0$

③ x, y, z에 대한 항등식

$ax+by+cz+d=0 \iff a=b=c=d=0$

2 미정계수법❷

항등식의 성질을 이용하여 미지의 계수를 정하는 방법을 **미정계수법**이라 한다.

(1) **계수비교법**: 양변의 동류항의 계수를 비교하여 계수를 정하는 방법

(2) **수치대입법**: 문자에 적당한 수를 대입하여 계수를 정하는 방법

❷ '$x+y=1$을 만족시키는 모든 x, y에 대하여'와 같이 문자들 사이의 관계식이 주어진 항등식은 관계식을 이용해 다른 문자를 소거하여 한 문자에 관한 항등식으로 고친 후 미정계수를 구한다.

First Class Tip

＊ 수치대입법을 확장한 수식대입

x에 α를 대입한 $f(\alpha)$를 $f(x=\alpha)$, 즉 $f(x-\alpha=0)$으로 생각하면 문자에 적당한 숫자를 대입하는 것을 넘어서서 어떤 값을 만족시키는 식을 대입하여 계수를 정할 수 있다.

예를 들어, x^5+x^3+1을 x^2+2로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$라 하면 $x^5+x^3+1=(x^2+2)Q(x)+ax+b$

양변에 $x^2+2=0$, 즉 $x^2=-2$를 대입하면

(좌변)$=(-2)^2\times x+(-2)\times x+1=2x+1$

(우변)$=0\times Q(x)+ax+b=ax+b$

$\therefore\ ax+b=2x+1$

3 나머지정리

다항식을 일차식으로 나누었을 때의 나머지를 구할 때, 직접 나눗셈을 하지 않고 항등식의 성질을 이용하여 나머지를 구할 수 있다.
이때, 이 성질을 **나머지정리**라 한다.

(1) 다항식 $f(x)$를 $(x-\alpha)$로 나눈 나머지는 $f(\alpha)$이다. ❸

$$f(x)=(x-\alpha)Q(x)+R \Longrightarrow R=f(\alpha)$$

(2) 다항식 $f(x)$를 $(ax+b)$로 나눈 나머지는 $f\left(-\frac{b}{a}\right)$이다.

$$f(x)=(ax+b)Q(x)+R \Longrightarrow R=f\left(-\frac{b}{a}\right)$$

(3) 나머지의 차수는 항상 나누는 식의 차수보다 작다.
(나누는 식의 차수)>(나머지의 차수)

❸ 미지의 식 $Q(x)$와 곱해진 식의 값이 0이 되는 값 또는 식을 대입한다.
$f(x)=(x-\alpha)Q(x)+R$
α = 0 → 숫자를 대입해도 그 값을 알 수 없는 미지의 식

First Class Tip

*** 나머지 $R(x)$를 구하기 편하게 설정하는 방법**

나누는 식 $g(x)$		나머지 $R(x)$
$(x-\alpha)(x-\beta)$	$\Rightarrow$	$a(x-\alpha)+b$
$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$		$a(x-\alpha)(x-\beta)+b(x-\alpha)+c$
$(x-\alpha)(x^2+\beta x+\gamma)$		$a(x^2+\beta x+\gamma)+b(x-\alpha)+c$

위와 같이 나누는 식에 맞추어 나머지를 설정하여 미정계수법을 이용하면 연립하지 않고도 수월하게 미정계수를 구할 수 있다.

First Class Tip

*** 같은 식으로 나눈 나머지의 계산**

같은 식으로 나눈 나머지의 계산은 나머지끼리만 계산하면 된다.
예를 들어, $f(x)$를 $h(x)$로 나눈 나머지가 $R_1(x)$,
$g(x)$를 $h(x)$로 나눈 나머지가 $R_2(x)$일 때,
(1) $f(x)+g(x)$를 $h(x)$로 나눈 나머지는 $R_1(x)+R_2(x)$이고,
(2) $f(x)\times g(x)$를 $h(x)$로 나눈 나머지는 $R_1(x)\times R_2(x)$를 $h(x)$로 나눈 나머지와 같다.

4 인수정리

다항식 $f(x)$에 대하여

$f(x)$는 $(x-\alpha)$로 나누어떨어진다. $\Longleftrightarrow f(\alpha)=0$ ❹

이때, 다음 표현은 모두 $f(\alpha)=0$임을 나타낸다.

- $f(x)$를 $(x-\alpha)$로 나눈 나머지가 0이다.
- $f(x)$는 $(x-\alpha)$로 나누어떨어진다.
- $f(x)$는 $(x-\alpha)$를 인수로 갖는다.
- $f(x)=(x-\alpha)Q(x)$

$\Longleftrightarrow f(\alpha)=0$

❹ $f(\alpha)=0, f(\beta)=0$
$\Leftrightarrow f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)Q(x)$



FIRST CLASS

핵심 유형 연습

◀ 동영상 강의

핵심유형 08 항등식과 미정계수법

01 출제율 ❯❯❯

$x^3+1=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$가 x에 대한 항등식일 때, $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+3\alpha\beta\gamma$의 값은?

✓① -6 ② -3 ③ 0
④ 3 ⑤ 6

해 주어진 식이 x에 대한 항등식이므로 양변에 $x=\alpha$, $x=\beta$, $x=\gamma$를 차례로 대입하면
$\alpha^3+1=0$, $\beta^3+1=0$, $\gamma^3+1=0$
$\therefore \alpha^3=-1$, $\beta^3=-1$, $\gamma^3=-1$
또, 주어진 식에 $x=0$을 대입하면
$1=-\alpha\beta\gamma$ $\therefore \alpha\beta\gamma=-1$
$\therefore \alpha^3+\beta^3+\gamma^3+3\alpha\beta\gamma=-1-1-1-3=-6$

02 출제율 ❯❯❯

다음 등식이 x에 대한 항등식일 때, 상수 a, b와 다항식 $f(x)$에 대하여 $a-b+f(2)$의 값을 구하시오. 답 8

$$(x-1)(x^2+3)f(x)=x^4+ax^2+b$$

해 $(x-1)(x^2+3)f(x)=x^4+ax^2+b$의 양변에
$x=1$을 대입하면 $0=1+a+b$ … ㉠
$x^2=-3$을 대입하면 $0=(-3)^2-3a+b$ … ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-3$
$(x-1)(x^2+3)f(x)=x^4+2x^2-3$의 양변에 $x=2$를 대입하면 $f(2)=3$
$\therefore a-b+f(2)=2-(-3)+3=8$

03 출제율 ❯❯❯

a, b가 서로 다른 자연수일 때, 등식

$$(x^2+2x)(x^2+2x+3)+k(x^2+2x)+16=(x^2+2x+a)(x^2+2x+b)$$

가 모든 실수 x에 대하여 성립하도록 하는 서로 다른 상수 k의 값의 합을 구하시오. 답 21

해 주어진 등식이 x에 대한 항등식이므로 $x^2+2x=t$라 하면
$t(t+3)+kt+16=(t+a)(t+b)$
$t^2+(3+k)t+16=t^2+(a+b)t+ab$는 t에 대한 항등식이다.
양변의 동류항의 계수를 비교하면
$3+k=a+b$, $16=ab$에서 $k=a+b-3$이고
$ab=16$을 만족시키는 서로 다른 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)는
$(1, 16)$, $(2, 8)$, $(8, 2)$, $(16, 1)$
따라서 가능한 k의 값은 $1+16-3=14$, $2+8-3=7$
따라서 서로 다른 상수 k의 값의 합은 $14+7=21$

핵심유형 09 다항식의 나눗셈과 항등식

04 출제율 ❯❯❯

최고차항의 계수가 1인 삼차다항식 $f(x)$가 x^2-x+a로 나누어떨어지고, 다항식 $f(x)-a$는 x^2+2로 나누어떨어질 때, $f(a)$의 최댓값은? (단, a는 상수)

① 12 ② 18 ③ 24
④ 30 ✓⑤ 36

해 $(x^2-x+a)(x+b)=(x^2+2)(x+c)+a$
$x^3+(b-1)x^2+(a-b)x+ab=x^3+cx^2+2x+2c+a$
$b-1=c$, $a-b=2$, $ab=2c+a$
$c=b-1$, $a=b+2$를 $ab=2c+a$에 대입하면 $b=0$ 또는 $b=1$
(i) $b=0$일 때, $a=2$, $c=-1$이므로 $f(2)=2\times(4-2+2)=8$
(ii) $b=1$일 때, $a=3$, $c=0$이므로 $f(3)=(9+2)\times3+3=36$
(i), (ii)에서 $f(a)$의 최댓값은 36이다.

05 출제율 ❯❯❯

다항식 ax^3+bx^2+1이 x^2-x-1로 나누어떨어질 때, 상수 a, b에 대하여 a^2+b^2의 값을 구하시오. 답 5

해 $ax^3+bx^2+1=(x^2-x-1)(px+q)$
$ax^3+bx^2+1=(x^2-x-1)(ax-1)$에서
$a=1$, $b=-2$
$\therefore a^2+b^2=5$

06 출제율 ❯❯❯

다항식 $P(x)$에 대하여 $(x-1)P(x)+x^2$을 $P(x)+x$로 나누었을 때의 몫은 $Q(x)$, 나머지는 $P(x)+2x$이다. $P(x)$를 $Q(x)$로 나눈 나머지가 5일 때, $P(3)$의 값은? (단, 모든 실수 x에 대하여 $P(x)+x\neq0$)

① 1 ② 2 ✓③ 3
④ 4 ⑤ 5

해 $P(x)=-2x+b$ … ㉠에 대하여
$(x-1)P(x)+x^2=\{P(x)+x\}Q(x)+P(x)+2x$
$\{P(x)+x\}Q(x)=(x-1)P(x)+x^2-\{P(x)+2x\}$
$=(x-2)\{P(x)+x\}$
이므로 $Q(x)=x-2$
$P(2)=-4+b=5$ ($\because$ ㉠) $\therefore b=9$
따라서 $P(x)=-2x+9$이므로 $P(3)=3$

핵심유형 10 나머지정리 – 이차 이하 다항식

07 출제율 ❯❯❯

모든 실수 x에 대하여 $f(3+x)=f(3-x)$를 만족시키는 다항식 $f(x)$를 $x-5$로 나눈 나머지가 4이다. 다항식 $f(x)$를 $(x-1)(x-5)$로 나눈 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(3)$의 값은?

① 2 ✓② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

해 $f(x)=(x-1)(x-5)Q(x)+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면
$f(x)$를 $x-5$로 나눈 나머지가 4이므로 나머지정리에 의하여 $f(5)=4$
또한, $f(3+x)=f(3-x)$는 x에 대한 항등식이므로
$x=2$를 대입하면 $f(5)=f(1)=4$
$f(1)=a+b=4$, $f(5)=5a+b=4$ $\therefore a=0$, $b=4$
따라서 $f(x)$를 $(x-1)(x-5)$로 나눈 나머지는
$R(x)=4$이므로 $R(3)=4$

08 출제율 ❯❯❯

다항식 $f(x)=x^2+ax+b$에 대하여 $(x+1)f(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지가 10이고, $(2x+1)f(2x-1)$을 $x-2$로 나눈 나머지가 55일 때, $xf(x)$를 $x+1$로 나눈 나머지는? (단, a, b는 상수이다.)

① -9 ② -8 ✓③ -7
④ -6 ⑤ -5

해 $2f(1)=10$이므로 $f(1)=1+a+b=5$
$5f(3)=55$이므로 $f(3)=9+3a+b=11$
$a=-1$, $b=5$이므로 $f(x)=x^2-x+5$
$\therefore xf(x)=x^3-x^2+5x$
따라서 $xf(x)$를 $x+1$로 나눈 나머지는
$-f(-1)=-1-1-5=-7$

09 출제율 ❯❯❯

최고차항의 계수가 양수인 다항식 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\{f(x)\}^3=4x^2f(x)-8x^2+6x-1$$

을 만족시킬 때, [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

| 보기 |

ㄱ. 다항식 $f(x)$를 x로 나눈 나머지는 1이다.
ㄴ. 다항식 $f(x)$의 최고차항의 계수는 2이다.
ㄷ. 다항식 $\{f(x)\}^3$을 x^2-1로 나눈 나머지는 $14x-13$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
✓④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해 ㄱ. 식의 양변에 $x=0$을 대입하면 $f(0)=-1$ (거짓)
ㄴ. $f(x)$의 차수를 n이라 하면 $3n=n+2$, $2n=2$ $\therefore n=1$
$f(x)=ax+b(a>0)$라 하면 최고차항의 계수는 $a^3=4a$
$a(a+2)(a-2)=0$
$a>0$이므로 $f(x)$의 최고차항의 계수는 2이다. (참)
ㄷ. ㄱ, ㄴ에서 $f(0)=-1$, $a=2$이므로 $f(x)=2x-1$
$(2x-1)^3=(x+1)(x-1)Q(x)+cx+d$ (c, d는 상수)
양변에 $x=-1$, $x=1$을 각각 대입하고 연립하여 풀면 $\{f(x)\}^3$을 x^2-1로 나눈 나머지는 $14x-13$이다. (참)

10 출제율 ❯❯❯

최고차항의 계수가 1인 사차다항식 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(1)$의 값은?

(가) $f(x)$를 $x+1$로 나눈 나머지와 $f(x)$를 x^2+4로 나눈 나머지는 서로 같다.
(나) $f(x-1)-4$는 x^2-x로 나누어떨어진다.

① 8 ② 11 ✓③ 14
④ 17 ⑤ 20

해 조건 (가)에서 $f(x)=(x+1)(x^2+4)(x+a)+R$ … ㉠
조건 (나)에서 $f(x-1)=x(x-1)Q_3(x)+4$ … ㉡
㉡에 $x=0$, $x=1$을 각각 대입하면 $f(-1)=4$, $f(0)=4$
이제 ㉠에 $x=-1$, $x=0$을 각각 대입하면
$f(-1)=R=4$, $f(0)=4a+R=4$이므로 $R=4$, $a=0$
따라서 $f(x)=x(x+1)(x^2+4)+4$이므로
$f(1)=1\times2\times5+4=14$

정답 및 해설 17~19p

핵심유형 11 나머지정리 – 삼차 이상 다항식

11 출제율 ❯❯❯

다항식 $f(x)$를 $(x-1)(x-2)$로 나눈 나머지는 $2x+1$이고, $(x-1)(x-3)$으로 나눈 나머지는 $6x+k$라 한다. $f(x)$를 $(x-1)(x-2)(x-3)$으로 나눈 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(-1)$의 값을 구하시오. 답 23

해 $f(x)=(x-1)(x-2)Q_1(x)+2x+1 \cdots ㉠$
$=(x-1)(x-3)Q_2(x)+6x+k \cdots ㉡$
㉠에서 나머지정리에 의하여 $f(1)=3$, $f(2)=5$
㉡에서 나머지정리에 의하여 $f(1)=6+k=3$ $\therefore k=-3$
$f(3)=18+k=15$
$R(x)=a(x-1)(x-2)+b(x-1)+c$ (a, b, c는 상수)라 하면
$f(1)=3=c$, $f(2)=5=b+c$, $f(3)=15=2a+2b+c$
$a=4$, $b=2$, $c=3$이므로
$R(x)=4(x-1)(x-2)+2(x-1)+3$ $\therefore R(-1)=23$

12 출제율 ❯❯❯

다항식 $f(x)$를 x^2+1로 나눈 나머지가 $x+1$이고, $x-1$로 나눈 나머지가 4이다. $f(x)$를 $(x^2+1)(x-1)$로 나눈 나머지가 ax^2+bx+c일 때, 상수 a, b, c에 대하여 abc의 값은?

① -4 ② -2 ✓③ 2
④ 4 ⑤ 8

해 $f(x)=(x^2+1)(x-1)Q(x)+ax^2+bx+c$라 하면
$f(x)$를 x^2+1로 나눈 나머지가 $x+1$이므로
ax^2+bx+c를 x^2+1로 나눈 나머지도 $x+1$이다.
$\therefore f(x)=(x^2+1)(x-1)Q(x)+a(x^2+1)+x+1$
$f(1)=2a+2=4$ $\therefore a=1$
$ax^2+bx+c=x^2+x+2$이므로
$a=1$, $b=1$, $c=2$ $\therefore abc=2$

13 출제율 ❯❯❯

다항식 $f(x)$를 x^2+1, x^2+2로 나눈 나머지가 각각 $4x+4$, $4x+8$이다. $f(x)$를 $(x^2+1)(x^2+2)$로 나눈 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R\left(\frac{1}{2}\right)$의 값을 구하시오. 답 1

해 $f(x)=(x^2+1)(x^2+2)Q(x)+R(x)$
$R(x)$는 삼차 이하의 식이므로
$R(x)=(x^2+1)(ax+b)+4x+4$ (a, b는 상수)
$=(x^2+2-1)(ax+b)+4x+4$
$=(x^2+2)(ax+b)-(ax+b)+4x+4$
$=(x^2+2)(ax+b)+(4-a)x+(4-b)$
$\therefore f(x)=(x^2+1)(x^2+2)Q(x)+(x^2+2)(ax+b)$
$+(4-a)x+(4-b)$
이때, $f(x)$를 x^2+2로 나눈 나머지가 $4x+8$이므로
$(4-a)x+(4-b)=4x+8$에서 $a=0$, $b=-4$
$R(x)=(x^2+2)(ax+b)+4x+8=-4x^2+4x$ $\therefore R\left(\frac{1}{2}\right)=1$

핵심유형 12 인수정리

14 출제율 ❯❯❯

소수 p에 대하여 다항식 x^3-2x^2+p가 계수가 정수인 일차식의 인수를 가지도록 하는 상수 p의 값을 구하시오. 답 3

해 $f(x)=x^3-2x^2+p$라 하면
$f(x)$의 상수항 p가 소수이므로 계수가 정수인 일차식의 인수가 될 수 있는 것은 $x+1$, $x-1$, $x+p$, $x-p$이다.
$f(-1)=0$일 때, $-3+p=0$에서 $p=3$
$f(1)=0$일 때, $-1+p=0$에서 $p=1$이 되어 소수가 아니다.
$f(-p)=0$일 때, $-p^3-2p^2+p=0$, $p=p^2(p+2)$
양변을 p로 나누면 $1=p(p+2)\geq 8$이 되어 성립하지 않는다.
$f(p)=0$일 때, $p^3-2p^2+p=0$
양변을 p로 나누면 $p^2-2p+1=0$, $(p-1)^2=0$에서
$p=1$이 되어 소수가 아니다.
따라서 소수 p의 값은 3이다.

15 출제율 ❯❯❯

다항식 $f(x)$에 대하여 $f(x)-k$, $(x+1)f(x)-6$이 일차식 $x-k$로 나누어떨어질 때, 양수 k의 값은?

✓① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

해 $f(x)-k$, $(x+1)f(x)-6$이 일차식 $x-k$로 나누어떨어지므로
인수정리에 의하여
$f(k)-k=0 \cdots ㉠$
$(k+1)f(k)-6=0 \cdots ㉡$
㉠을 ㉡에 대입하면 $(k+1)k-6=0$
$k^2+k-6=0$, $(k+3)(k-2)=0$
$\therefore k=2$ 또는 $k=-3$
이때, k는 양수이므로 $k=2$

16 출제율 ❯❯❯

임의의 실수 x에 대하여 다항식 $f(x)$가 등식
$f(x^2-4x+3)=(x^2-4x+4)f(x)+3$
을 만족시킨다. $f(m+1)-f(m)=3$일 때, 실수 m의 값을 구하시오. 답 3

해 $f(x)=a(x-1)(x-3)+f(0)-3$
위 식에 $x=0$을 대입하면
$f(0)=3a+f(0)-3$ $\therefore a=1$
따라서 $f(x)=(x-1)(x-3)+f(0)-3$이다.
$f(m+1)-f(m)=3$에서
$m(m-2)-(m-1)(m-3)=3$
$m^2-2m-(m^2-4m+3)=3$
$2m-3=3$ $\therefore m=3$

핵심유형 13 인수정리의 활용

17 출제율 ❯❯❯

x에 대한 삼차다항식 $f(x)$가

$f(1)=3,\ f(2)=5,\ f(3)=7$

을 만족시킬 때, $f(4)+f(0)$의 값을 구하시오. 답 10

해 $f(1)=3=2\times1+1$
$f(2)=5=2\times2+1$
$f(3)=7=2\times3+1$
⋮
$f(x)=2\times x+1$
이므로 $g(x)=f(x)-(2x+1)$이라 하면
$g(x)$는 삼차다항식이고 $g(1)=g(2)=g(3)=0$이므로
$g(x)=k(x-1)(x-2)(x-3)$ (k는 상수)
따라서 $f(x)=k(x-1)(x-2)(x-3)+2x+1$이므로
$f(4)+f(0)=(6k+9)+(-6k+1)=10$

18 출제율 ❯❯❯

x에 대한 삼차다항식 $f(x)$가 다음을 만족시킨다.

$f(1)=1,\ 2f(2)=3,\ 3f(3)=5,\ 4f(4)=7$

$5f(5)$의 값을 구하시오. 답 10

해 $f(1)=1=2\times1-1,\ 2f(2)=3=2\times2-1,\ 3f(3)=5=2\times3-1$
$4f(4)=7=2\times4-1,$ …이므로 $xf(x)=2x-1$
$g(x)=xf(x)-(2x-1)$이라 하면
$g(x)=a(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ (a는 상수)
$\therefore xf(x)=a(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+2x-1$
$x=0$을 대입하면 $a=\frac{1}{24}$이므로
$xf(x)=\frac{1}{24}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+2x-1$에
$x=5$를 대입하면 $5f(5)=10$

19 출제율 ❯❯❯

최고차항의 계수가 1인 삼차다항식 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(0)$의 값은?

(가) 다항식 $f(x+2)-f(x)$는 $(x-1)(x+1)$로 나누어떨어진다.
(나) 다항식 $f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는 2이다.

① 5 ② 6 ③ 7
✓④ 8 ⑤ 9

해 조건 (가)에서 인수정리에 의하여
$f(-1)=f(1)=f(3)$
$f(x)=(x+1)(x-1)(x-3)+k$
조건 (나)에서 $f(2)=-3+k=2$
$\therefore k=5$
따라서 $f(x)=(x+1)(x-1)(x-3)+5$이고
$f(0)=1\times(-1)\times(-3)+5=8$

20 출제율 ❯❯❯

다항식 $P(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $P(x^2+2)=x^2\{P(x)+2\}$
(나) $P(-x)=P(x)$

$P(10)$의 값을 구하시오. 답 24

해 조건 (가)에 $x=0$을 대입하면 $P(2)=0$,
$x=2$를 대입하면 $P(6)=4\{P(2)+2\}=8$
조건 (나)에서 $P(-2)=P(2)=0$
한편, 다항식 $P(x)$의 차수를 n이라 하면
㉠의 좌변의 차수는 $2n$이고, 우변의 차수는 $n+2$이므로
$2n=n+2 \quad \therefore n=2$
따라서 $P(x)=\frac{1}{4}(x^2-4)$이므로
$P(10)=\frac{1}{4}(100-4)=24$

◇ 정답 및 해설 19~21p



FIRST CLASS **실전 유형 훈련**

◀ 동영상 강의

핵심유형 08 항등식과 미정계수법

21

모든 실수 x에 대하여 $\dfrac{x^2+bx+a}{2x^2+ax+1}$의 값이 일정하다. 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① $\dfrac{1}{3}$ ② $\dfrac{1}{2}$ ✓③ $\dfrac{3}{4}$

④ $\dfrac{7}{3}$ ⑤ $\dfrac{7}{2}$

해 $\dfrac{x^2+bx+a}{2x^2+ax+1}=k$ (k는 상수)라 하면
$x^2+bx+a=2kx^2+akx+k$
이 식은 x에 대한 항등식이므로
$1=2k$, $b=ak$, $a=k$ $\therefore k=\dfrac{1}{2}$, $a=\dfrac{1}{2}$, $b=\dfrac{1}{4}$
$\therefore a+b=\dfrac{3}{4}$

22

다항식 $f(x)$에 대하여
$(x^2-2)(x^4+1)f(x)=x^8+ax^4+b$
가 x에 대한 항등식일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① -14 ✓② -7 ③ 0

④ 7 ⑤ 14

해 주어진 등식은 항등식이므로
$x^2=2$를 대입하면 $0=16+4a+b$ … ㉠
$x^4=-1$을 대입하면 $0=1-a+b$ … ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=-4$이므로 $a+b=-7$

23

$x+y=1$을 만족시키는 모든 실수 x, y에 대하여 $ax^2+by^2=cx+1$이 성립할 때, 상수 a, b, c에 대하여 $a^2+b^2+c^2$의 값을 구하시오. 답 6

해 $x+y=1$에서 $y=1-x$를 $ax^2+by^2=cx+1$에 대입하여 정리하면
$(a+b)x^2-(2b+c)x+(b-1)=0$
$a+b=0$, $2b+c=0$, $b-1=0$에서 $b=1$, $c=-2$, $a=-1$이므로
$a^2+b^2+c^2=(-1)^2+1^2+(-2)^2=6$

24

x에 대한 항등식
$x^{10}=a_0+a_1(x+1)+a_2(x+1)^2+\cdots+a_{10}(x+1)^{10}$
에 대하여 $a_0+a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}$의 값은?

① -2^{10} ② -2^9 ③ 2^5

✓④ 2^9 ⑤ 2^{10}

해 $0=a_0+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_9+a_{10}$ … ㉠
$(-2)^{10}=a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots-a_9+a_{10}$ … ㉡
㉠+㉡을 하면
$2^{10}=2(a_0+a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10})$
$\therefore a_0+a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}=\dfrac{2^{10}}{2}=2^9$

25

삼차다항식 $f(x)=x^3+px^2+qx+r$가 있다. 0이 아닌 모든 실수 x에 대하여

$$f\left(x+2+\frac{1}{x}\right)=x^3+2+\frac{1}{x^3}$$

이 성립할 때, $p+q+r$의 값을 구하시오. 답 3

(단, p, q, r는 상수이다.)

해 $x+2+\dfrac{1}{x}=t$로 놓으면
$f(t)=(t-2)^3-3(t-2)+2$
$=t^3-6t^2+9t$
즉, $f(x)=x^3-6x^2+9x$
따라서 $p=-6$, $q=9$, $r=0$이므로
$p+q+r=3$

26

임의의 실수 x에 대하여 다항식 $f(x)$가
$f(x^2+2x)=(x^2+2x)f(x)+8$
을 만족시킬 때, $f(1)$의 값을 구하시오. 답 20

해 다항식 $f(x)$의 차수를 n이라 하면
$2n=n+2$ $\therefore n=2$
$x=0$을 대입하면 $f(0)=8$
$x=-1$을 대입하면 $f(-1)=4$
즉, $f(x)=ax^2+(a+4)x+8$
$ax^4+4ax^3+(5a+4)x^2+(2a+8)x+8$
$=ax^4+(3a+4)x^3+(2a+16)x^2+16x+8$
이므로 x^3의 계수를 비교하면 $a=4$
따라서 $f(x)=4x^2+8x+8$이므로 $f(1)=4+8+8=20$

핵심유형 09 다항식의 나눗셈과 항등식

27

다항식 x^3+ax^2+bx+c를 x^2+1로 나눈 나머지가 $x+1$이고, $x-2$로 나눈 나머지가 3일 때, 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값은?

① -2 ✓② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

해 $x^3+ax^2+bx+c=(x^2+1)(x+k)+x+1$ (k는 상수) … ㉠
㉠의 우변에 $x=2$를 대입하면
$5(2+k)+3=3$ $\therefore k=-2$
$\therefore x^3+ax^2+bx+c=(x^2+1)(x-2)+x+1=x^3-2x^2+2x-1$
따라서 $a=-2$, $b=2$, $c=-1$이므로 $a+b+c=-1$

28

다항식 $f(x)$를 x^2+1로 나눈 나머지가 $x+1$이다. $\{f(x)+1\}[\{f(x)\}^2-f(x)+1]$을 x^2+1로 나눈 나머지가 $R(x)$일 때, $R(10)$의 값을 구하시오. 답 19

해 $f(x)=(x^2+1)Q(x)+x+1$ … ㉠
$\{f(x)\}^3+1=(x^2+1)Q_1(x)+R(x)$
또한, ㉠에 의하여 $R(x)$는
$(x+1)^3+1=(x^2+1)Q_2(x)+R(x)$라 할 수 있다.
$(x+1)^3+1=x^3+3x^2+3x+2$
$=(x^2+1)(x+3)+2x-1$
이므로 $R(x)=2x-1$이고
$R(10)=19$

29

삼차다항식 $f(x)$는 x^2-2로 나누어떨어지고, $f(x)+4x+12$는 x^2+2로 나누어떨어질 때, $f(2)$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ✓⑤ 10

해 $f(x)+4x+12=(x^2+2)(ax+b)$이므로
$f(x)=(x^2+2)(ax+b)-4x-12$
$=(x^2-2+4)(ax+b)-4x-12$
$=(x^2-2)(ax+b)+(4a-4)x+4b-12$
$f(x)$는 x^2-2로 나누어떨어지므로
$4a-4=0$, $4b-12=0$
$\therefore a=1$, $b=3$
따라서 $f(x)=(x^2-2)(x+3)$이므로 $f(2)=2\times5=10$

30

최고차항의 계수가 양수인 두 다항식 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)$를 $x^2+\{g(x)\}^2$으로 나눈 몫은 $x+2$이고 나머지는 $x^2-\{g(x)\}^2$이다.
(나) $f(x)$는 $g(x)$로 나누어떨어진다.

$f(0)\neq0$일 때, $f(1)$의 값은?

① 12 ② 18 ③ 24
④ 30 ✓⑤ 36

해 $f(x)=[x^2+\{g(x)\}^2](x+2)+x^2-\{g(x)\}^2$
이때, $x^2-\{g(x)\}^2$의 차수는 $x^2+\{g(x)\}^2$의 차수보다 작으므로
$g(x)=x+a$ (a는 상수)로 놓을 수 있다.
$f(x)=(2x^2+2ax+a^2)(x+2)-2ax-a^2$
조건 (나)에서
$f(-a)=(2a^2-2a^2+a^2)(-a+2)+2a^2-a^2=-a^3+3a^2=0$
에서 $a=0$ 또는 $a=3$
$f(0)\neq0$이므로 $f(x)=(2x^2+6x+9)(x+2)-6x-9$이고
$f(1)=17\times3-6-9=36$

31

다음 조건을 만족시키는 이차식 $f(x)$에 대하여 $f(10)$의 최댓값과 최솟값의 차를 구하시오. 답 210

(가) $f(0)=-1$
(나) $f(x^2)$은 $f(x)$로 나누어떨어진다.

해 $f(x)=ax^2+bx-1$ ($a\neq0$)이라 하면
$ax^4+bx^2-1=(ax^2+bx-1)(x^2+cx+1)$ (c는 상수)
양변의 계수를 비교하면
$b+ac=0$, $a+bc-1=b$, $b-c=0$
즉, $b=c$, $b(a+1)=0$이므로 $b=c=0$ 또는 $a=-1$
(i) $b=c=0$일 때,
$f(x)=x^2-1$
$\therefore f(10)=99$
(ii) $a=-1$일 때,
$f(x)=-x^2+2x-1$ 또는 $f(x)=-x^2-x-1$
$\therefore f(10)=-81$ 또는 $f(10)=-111$
(i), (ii)에서 $f(10)$의 최댓값은 99, 최솟값은 -111이므로
두 수의 차는 $99-(-111)=210$이다.

정답 및 해설 21~23p

핵심유형 10 나머지정리 – 이차 이하 다항식

32

다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지는 12이고, $f(x)$를 $x+2$로 나눈 몫을 $x-1$로 나눈 나머지는 3일 때, $f(x)$를 $x+2$로 나눈 나머지는?

✓① 3 ② 6 ③ 9
④ 12 ⑤ 15

해 $f(x)=(x+2)Q(x)+R$ (R는 상수)라 하면
나머지정리에 의하여 $f(1)=12$, $Q(1)=3$
$f(1)=3Q(1)+R$에서 $12=3\times3+R$ $\therefore R=3$

33

$\alpha\beta=2$인 두 상수 α, β에 대하여 이차항의 계수가 1인 이차다항식 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, 다항식 $f(x)$를 $x-(\alpha+\beta)$로 나눈 나머지는? (단, $\alpha\neq\beta$)

(가) 다항식 $f(x)$를 $x-\alpha$로 나눈 나머지는 β이다.
(나) 다항식 $f(x)$를 $x-\beta$로 나눈 나머지는 α이다.

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ✓⑤ 2

해 $f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)+ax+b$ (a, b는 상수)라 하자.
$f(x)$를 $x-\alpha$, $x-\beta$로 나눈 나머지가 각각 β, α이므로
$f(\alpha)=a\alpha+b=\beta$, $f(\beta)=a\beta+b=\alpha$
두 식을 연립하면 $a=-1$, $b=\alpha+\beta$
$\therefore f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)-x+\alpha+\beta$
따라서 다항식 $f(x)$를 $x-(\alpha+\beta)$로 나눈 나머지는 나머지정리에 의해 $f(\alpha+\beta)=\alpha\beta=2$

34

교육청 기출

이차 이상의 다항식 $f(x)$를 $(x-a)(x-b)$로 나눈 나머지를 $R(x)$라 할 때, [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, a, b는 서로 다른 두 실수이다.)

| 보기 |
ㄱ. $f(a)-R(a)=0$
ㄴ. $f(a)-R(b)=f(b)-R(a)$
ㄷ. $af(b)-bf(a)=(a-b)R(0)$

① ㄱ ② ㄴ ✓③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해 ㄱ. $f(x)=(x-a)(x-b)Q(x)+R(x)$ … ㉠라 하면
㉠은 x에 대한 항등식이므로 $x=a$를 대입하면
$f(a)=R(a)$이므로 $f(a)-R(a)=0$ (참)
ㄴ. 【반례】 $f(x)=(x-a)(x-b)+x$라 하면 $R(x)=x$이고
$f(a)-R(b)=a-b$, $f(b)-R(a)=b-a$
이때, $a\neq b$이므로 $f(a)-R(b)\neq f(b)-R(a)$ (거짓)
ㄷ. $R(x)=px+q$ (p, q는 상수)라 하면
$af(b)-bf(a)=abp+aq-abp-bq=(a-b)q$
이때, $R(0)=q$이므로
$af(b)-bf(a)=(a-b)R(0)$ (참)

35

다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지는 3, $x-2$로 나눈 나머지는 1, $x-3$으로 나눈 나머지는 2이다. $f(f(x))$를 $(x-1)(x-3)$으로 나눈 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(5)$의 값은?

✓① 0 ② 1 ③ 2
④ 3 ⑤ 4

해 $f(f(x))=(x-1)(x-3)Q(x)+R(x)$이고,
$R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면
$f(f(1))=f(3)=2=a+b$
$f(f(3))=f(2)=1=3a+b$
연립하여 풀면 $a=-\frac{1}{2}$, $b=\frac{5}{2}$이므로 $R(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$
$\therefore R(5)=-\frac{1}{2}\times5+\frac{5}{2}=0$

36

다항식 $P(x)=x^3+x^2+x+1$을 $x-k$로 나눈 나머지와 $x+k$로 나눈 나머지의 합이 8이다. $P(x)$를 x^2-k^2으로 나눈 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(1)$의 값은?
(단, k는 상수이다.)

① 2 ② 4 ③ 6
✓④ 8 ⑤ 10

해 두 나머지의 합이 8이므로
$P(k)+P(-k)=k^3+k^2+k+1+(-k^3+k^2-k+1)$
$=2k^2+2=8$
$\therefore k^2=3$
$x^3+x^2+x+1=(x^2-k^2)Q(x)+R(x)$
위 식은 항등식이므로 양변에 $x^2=k^2$을 대입하면
$k^2x+k^2+x+1=R(x)$
이때, $k^2=3$이므로 $R(x)=4x+4$
$\therefore R(1)=8$

37

최고차항의 계수가 1인 두 이차다항식 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)-g(x)$를 $x-2$로 나눈 몫과 나머지가 서로 같다.
(나) $f(x)g(x)$는 x^2-1로 나누어떨어진다.

$g(3)=2$일 때, $f(x)g(x)$를 $x+2$로 나눈 나머지를 구하시오. 답 36

해 $f(x)-g(x)$를 $x-2$로 나눈 몫과 나머지를 각각 a라 하면
$f(x)-g(x)=(x-2)a+a=a(x-1)$
$x=1$을 대입하면 $f(1)-g(1)=0$ … ㉠
$f(x)g(x)=(x^2-1)Q(x)$에 $x=1$을 대입하면 $f(1)g(1)=0$ … ㉡
㉠, ㉡에 의하여 $f(x)=(x-1)(x+p)$, $g(x)=(x-1)(x+q)$라 하자.
$g(3)=2$이므로 $q=-2$이고 $x=-1$을 대입하면
$(-2)^2\times(-3)\times(-1+p)=0$에서 $p=1$
따라서 $f(x)g(x)$를 $x+2$로 나눈 나머지는
$f(-2)g(-2)=3\times12=36$

38

다항식 $x^{100}+x^{10}+x+10$을 x^2-1로 나눈 몫을 $Q(x)$라 할 때, $Q(x)$를 x로 나눈 나머지는?

① -2 ② -1 ③ 1
✓④ 2 ⑤ 4

해 $x^{100}+x^{10}+x+10$을 x^2-1로 나눈 나머지를
$ax+b$(a, b는 상수)라 하면
$x^{100}+x^{10}+x+10=(x-1)(x+1)Q(x)+ax+b$
$x=1$, $x=-1$을 차례로 대입하면 $13=a+b$, $11=-a+b$
두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=12$
$x=0$을 대입하면 $10=-Q(0)+12$ $\therefore Q(0)=2$
따라서 $Q(x)$를 x로 나눈 나머지는 2이다.

39

이차항의 계수가 1인 이차다항식 $P(x)$와 일차항의 계수가 1인 일차다항식 $Q(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $P(2)$의 값은?

(가) 다항식 $P(x+1)-Q(x+1)$은 $x+2$로 나누어떨어진다.
(나) 다항식 $P(x)-Q(x)$는 완전제곱식이다.
(다) 다항식 $P(x)+Q(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지가 11이다.

① 8 ② 9 ✓③ 10
④ 11 ⑤ 12

해 $P(x+1)-Q(x+1)=(x+2)(x+a)$이므로
$P(x)-Q(x)=(x+1)(x+a-1)$
$P(x)-Q(x)=(x+1)^2$ … ㉠
조건 (다)에서 $P(2)+Q(2)=11$ … ㉡ 이고
㉠에 $x=2$를 대입하면 $P(2)-Q(2)=9$ … ㉢
㉡, ㉢을 변끼리 더하면 $2P(2)=20$
$\therefore P(2)=10$

핵심유형 11 나머지정리 – 삼차 이상 다항식

40

다항식 $f(x)$를 $(x-1)^2$으로 나눈 나머지가 $3x+2$이고, $x+1$로 나눈 나머지가 3이다. 다항식 $f(x)$를 $(x-1)^2(x+1)$로 나눈 나머지를 ax^2+bx+c라 할 때, abc의 값은? (단, a, b, c는 상수이다.)

① 1 ② 2 ✓③ 3
④ 4 ⑤ 5

해 다항식 $f(x)$를 $(x-1)^2(x+1)$로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)$라 하면 $R(x)$를 $(x-1)^2$으로 나눈 나머지는 $3x+2$이다.
$\therefore f(x)=(x-1)^2(x+1)Q(x)+R(x)$
$=(x-1)^2(x+1)Q(x)+a(x-1)^2+3x+2$
양변에 $x=-1$을 대입하면
$f(-1)=4a-1=3$ $\therefore a=1$
$R(x)=(x-1)^2+3x+2=x^2+x+3=ax^2+bx+c$이므로
$a=1$, $b=1$, $c=3$
$\therefore abc=3$

정답 및 해설 23~25p

41

삼차다항식 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(-1)=1$
(나) $f(x)$를 $(x+1)^2$으로 나눈 몫과 나머지가 같다.

$f(x)$를 $(x+1)^3$으로 나눈 나머지를 $R(x)$라 하자.
$R(-1)=R(1)$일 때, $R(2)$의 값을 구하시오. 답 4

해 조건 (가), (나)에서
$f(x)=(x+1)^2\{a(x+1)+1\}+a(x+1)+1$
$=a(x+1)^3+(x+1)^2+a(x+1)+1$
따라서 $f(x)$를 $(x+1)^3$으로 나눈 나머지
$R(x)=(x+1)^2+a(x+1)+1$
$R(-1)=R(1)$이므로 $1=4+2a+1$ $\therefore a=-2$
따라서 $R(2)=9-6+1=4$

42

$2^3=7+1$일 때, 2^{999}을 7로 나눈 나머지는?

① 5 ② 4 ③ 3
④ 2 ✓⑤ 1

해 $2^{999}=(2^3)^{333}=(7+1)^{333}$에서
$f(x)=(x+1)^{333}$을 x로 나눈 나머지는 나머지정리에 의하여
$f(0)=1$이므로 $f(x)$를 x로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하면
$(x+1)^{333}=xQ(x)+1$
양변에 $x=7$을 대입하면 $(7+1)^{333}=7Q(7)+1$
따라서 $2^{999}=(7+1)^{333}$을 7로 나눈 나머지는 1이다.

43

두 다항식 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(x)+g(x)$를 $h(x)$로 나눈 나머지가 5이고, $\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2$을 $h(x)$로 나눈 나머지가 15이다. $f(x)g(x)$를 $h(x)$로 나눈 나머지는?

✓① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

해 $f(x)+g(x)$를 $h(x)$로 나눈 몫을 $Q_1(x)$라 하면
$f(x)+g(x)=h(x)Q_1(x)+5$
$\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2$을 $h(x)$로 나눈 몫을 $Q_2(x)$라 하면
$\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2=h(x)Q_2(x)+15$
$\{f(x)+g(x)\}^2=\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2+2f(x)g(x)$에서
$f(x)g(x)=\frac{1}{2}[\{f(x)+g(x)\}^2-\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2]$
$=\frac{1}{2}[\{h(x)Q_1(x)+5\}^2-\{h(x)Q_2(x)+15\}]$
$=\frac{1}{2}h(x)[h(x)\{Q_1(x)\}^2+10Q_1(x)-Q_2(x)]+5$
따라서 $f(x)g(x)$를 $h(x)$로 나눈 나머지는 5이다.

핵심유형 12 인수정리

44

자연수 a, b와 정수 p에 대하여 다항식
$f(x)=x^4+ax^3+x^2+bx-2$
가 $x-p$를 인수로 가질 때, abp의 값은? (단, $a>b$)

① -1 ② -2 ③ -3
✓④ -4 ⑤ -5

해 $f(x)=x^4+ax^3+x^2+bx-2$가 $x-p$를 인수로 가지므로 정수 p가 될 수 있는 값은 2의 약수인 ±1, ±2이고 $f(p)=0$이어야 한다.
$f(1)=a+b>0$이므로 $p\neq1$
$f(-1)=-a-b<0$이므로 $p\neq-1$
$f(2)=18+8a+2b>0$이므로 $p\neq2$
$f(-2)=18-8a-2b=0$인 자연수 a, b가 존재하므로 $p=-2$
이때, $4a+b=9$이고, a, b는 자연수이므로
$a=1$, $b=5$ 또는 $a=2$, $b=1$
이때, $a>b$이므로 $a=2$, $b=1$
$\therefore abp=2\times1\times(-2)=-4$

45

x에 대한 다항식 $f(x)=x^4+ax^2+b$에 대하여 [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

| 보기 |

ㄱ. $x-2$가 $f(x)$의 인수이면 $x+2$도 $f(x)$의 인수이다.
ㄴ. $f(x)$가 $x-1$로 나누어떨어지면 $f(x)$는 x^2-1로 나누어떨어진다.
ㄷ. $f(x)$가 $(x-1)(x-2)$로 나누어떨어지면 $4a+5b=0$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ✓⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해 ㄱ. $f(2)=16+4a+b=0$이면 $f(-2)=16+4a+b=0$이므로 $x+2$도 $f(x)$의 인수이다. (참)
ㄴ. $f(x)$가 $x-1$로 나누어떨어지면 $f(1)=1+a+b=0$
이때, $f(-1)=1+a+b=0$이므로 $f(x)$는 $x+1$로도 나누어떨어진다. 따라서 $f(x)$는 $(x-1)(x+1)=x^2-1$로 나누어떨어진다. (참)
ㄷ. $f(x)=k(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$
$=k(x^2-1)(x^2-4)$
$=k(x^4-5x^2+4)=x^4+ax^2+b$
$k=1$, $a=-5$, $b=4$이므로 $4a+5b=0$ (참)

46

교육청 기출

삼차다항식 $P(x)$와 일차다항식 $Q(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $P(x)Q(x)$는 $(x^2-3x+3)(x-1)$로 나누어떨어진다.
(나) 모든 실수 x에 대하여 $x^3-10x+13-P(x)=\{Q(x)\}^2$이다.

$Q(0)<0$일 때, $P(2)+Q(8)$의 값을 구하시오. 답 13

해 조건 (가), (나)에서
$P(x)=(x^2-3x+3)(x-a)$ (a는 상수) … ㉠로 놓을 수 있다.
조건 (가)에서 $P(1)Q(1)=0$이므로
(i) $Q(1)=0$인 경우
조건 (나), ㉠에서 $P(1)=1-a=4$ $\therefore a=-3$
이때, 조건 (나)에서
$\{Q(x)\}^2=x^3-10x+13-P(x)=-4x+4$
가 되어 $Q(x)$는 일차식이 아니므로 성립하지 않는다.
(ii) $P(1)=0$인 경우
조건 (나)에서
$\{Q(x)\}^2=x^3-10x+13-P(x)=(2x-4)^2$
$Q(0)<0$이므로 $Q(x)=2x-4$
(i), (ii)에서
$P(2)+Q(8)=(8-16+12-3)+(16-4)=13$

47

최고차항의 계수가 1인 삼차다항식 $f(x)$와 다항식 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\{f(2x)\}^2+\{f(x)\}^2=x(x+1)g(x)$$

를 만족시킨다. $g(x)$를 $f(x)$로 나눈 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(1)$의 값을 구하시오. 답 288

해 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차다항식이므로
인수정리에 의하여 $f(x)=x(x+1)(x+2)$이다.
$\{2x(2x+1)(2x+2)\}^2+\{x(x+1)(x+2)\}^2$
$=x^2(x+1)^2(65x^2+68x+20)=x(x+1)g(x)$
에서 $g(x)=x(x+1)(65x^2+68x+20)$
$=x(x+1)\{(x+2)(65x-62)+144\}$
$=f(x)(65x-62)+144x(x+1)$
$\therefore R(1)=144\times1\times2=288$

핵심유형 13 인수정리의 활용

48

두 삼차다항식 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+1$, $g(x)=px^3+qx^2+rx-1$은 x^2-2로 나눈 나머지가 서로 같고 $f(1)=g(1)$을 만족시킨다. $f(-1)-g(-1)$의 값은? (단, a, b, c, p, q, r는 상수이다.)

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ✓⑤ 2

해 $h(x)=f(x)-g(x)$라 하면 $h(x)$는 x^2-2, $x-1$를 인수로 가지고, 삼차식이므로
$h(x)=f(x)-g(x)=k(x^2-2)(x-1)$ (k는 상수) … ㉠
그런데 $h(0)=f(0)-g(0)=1-(-1)=2$이므로
㉠에 $x=0$을 대입하면 $2k=2$ $\therefore k=1$
따라서 $h(x)=(x^2-2)(x-1)$이므로
$f(-1)-g(-1)=h(-1)=(-1)\times(-2)=2$

49

서로 다른 세 실수 a, b, c에 대하여 $a+b+c=10$이고, 다항식 $f(x)$를 $x-a$, $x-b$, $x-c$로 나눈 나머지가 각각 a^2+b+c, $a+b^2+c$, $a+b+c^2$이다.
$f(x)$를 $(x-a)(x-b)(x-c)$로 나눈 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(2)$의 값은?

① 10 ✓② 12 ③ 14
④ 16 ⑤ 18

해 $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)Q(x)+R(x)$라 하면
$R(a)=a^2+b+c=a^2-a+10$, $R(b)=a+b^2+c=b^2-b+10$
$R(c)=a+b+c^2=c^2-c+10$
이때, $g(x)=R(x)-(x^2-x+10)$이라 하면
$g(x)=R(x)-(x^2-x+10)=k(x-a)(x-b)(x-c)$ (k는 상수)
$\therefore R(x)=k(x-a)(x-b)(x-c)+x^2-x+10$
그런데 $R(x)$는 이차 이하의 식이므로 $k=0$이다.
따라서 $R(x)=x^2-x+10$이므로 $R(2)=4-2+10=12$

50

최고차항의 계수가 1인 두 이차다항식 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$$(x-1)f(x)=(x-2)g(x)$$

가 항상 성립한다. $f(1)=2$일 때, $g(2)$의 값은?

① -3 ✓② -1 ③ 1
④ 3 ⑤ 5

해 $F(x)=(x-1)f(x)=(x-2)g(x)$라 하면
$F(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차다항식이다.
$F(x)=(x-1)(x-2)(x+a)$ (a는 상수)라 하면
$f(x)=(x-2)(x+a)$이고 $f(1)=2$이므로
$(1-2)(1+a)=2$
$\therefore a=-3$
$\therefore F(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$
따라서 $g(x)=(x-1)(x-3)$이므로 $g(2)=-1$

정답 및 해설 25~27p

51

x에 대한 삼차다항식 $f(x)$에 대하여

$$f(1)=1,\ f(2)=\frac{1}{2},\ f(3)=\frac{1}{3},\ f(4)=\frac{1}{4}$$

이 성립한다고 한다. $g(x)=xf(x)-1$일 때, $g(5)$의 값은?

✓① -1 ② $-\frac{1}{12}$ ③ $-\frac{1}{24}$

④ $\frac{1}{24}$ ⑤ $\frac{1}{12}$

해 $f(1)=1,\ 2f(2)=1,\ 3f(3)=1,\ 4f(4)=1$ … ㉠
$g(x)$는 $x-1,\ x-2,\ x-3,\ x-4$의 인수를 가지고
$g(x)=xf(x)-1$은 사차다항식이므로
$g(x)=k(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ (k는 상수) … ㉡
㉡의 양변에 $x=0$을 대입하면
$-1=k\times(-1)\times(-2)\times(-3)\times(-4)$ $\therefore k=-\frac{1}{24}$
$\therefore g(5)=-\frac{1}{24}\times4\times3\times2\times1=-1$

52

최고차항의 계수가 1인 삼차다항식 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 식을 만족시킨다.

$$(x-7)f(2x)=8xf(x-1)$$

이때, $f(1)$의 값을 구하시오. 답 5

해 $(x-7)f(2x)=8xf(x-1)$에
$x=0$을 대입하면
$-7f(0)=0$이므로 $f(0)=0$
$x=1$을 대입하면
$-6f(2)=8f(0)=0$이므로 $f(2)=0$
$x=3$을 대입하면
$-4f(6)=24f(2)=0$이므로 $f(6)=0$
$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차다항식이므로
인수정리에 의하여 $f(x)=x(x-2)(x-6)$
$\therefore f(1)=1\times(-1)\times(-5)=5$

서술형

53

x에 대한 항등식

$$(x^2-2x-1)^5=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_{10}x^{10}$$

에서 $a_1+a_3+a_5+a_7+a_9$의 값을 구하시오. 답 -2^5

(단, $a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_{10}$은 상수)

해 주어진 항등식의 양변에 $x=1,\ x=-1$을 차례로 대입하여 정리하면
$(-2)^5=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_9+a_{10}$ … ㉠
$2^5=a_0-a_1+a_2-\cdots-a_9+a_{10}$ … ㉡
㉠−㉡을 하면 $-2^5-2^5=2(a_1+a_3+a_5+a_7+a_9)$
$\therefore a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=-2^5$

54

다항식 $f(x)$를 $(x-1)(x+1)$로 나눈 나머지가 $2x+5$일 때, 다항식 $(x+1)f(x-1)$을 x^2-2x로 나눈 나머지가 $ax+b$이다. $a+b$의 값을 구하시오.

(단, $a,\ b$는 상수이다.)

해 $f(x)=(x-1)(x+1)Q(x)+2x+5$ 답 12
나머지정리에 의하여 $f(1)=7,\ f(-1)=3$
$(x+1)f(x-1)=x(x-2)P(x)+ax+b$
이 식의 양변에 $x=0,\ x=2$를 차례로 대입하면
$f(-1)=b=3,\ 3f(1)=2a+b=21$
$\therefore a=9,\ b=3$
$\therefore a+b=9+3=12$

55

최고차항의 계수가 1인 x에 대한 삼차다항식 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(0)=1$
(나) $f(1)=f(2)=f(3)$

$f(4)$의 값을 구하시오. 답 13

해 $f(1)=f(2)=f(3)=k$라 하자.
$g(x)=f(x)-k$라 하면
$g(1)=g(2)=g(3)=0$이므로 인수정리에 의하여
$g(x)=f(x)-k=(x-1)(x-2)(x-3)$
$\therefore f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)+k$
$f(0)=-6+k=1$ $\therefore k=7$
따라서 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)+7$이므로
$f(4)=3\times2\times1+7=13$



FIRST CLASS

고난도 도전 문제

◀ 동영상 강의

56

삼차다항식 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(3)=36$
(나) $f(x+1)=f(x)+6x^2$

$f(x)$를 x^2-3x+2로 나눈 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 할 때, a^2+b^2의 값은?

① 16 ② 25 ✓③ 36
④ 41 ⑤ 45

해 $f(x)=(x^2-3x+2)Q(x)+ax+b$
한편, 조건 (나)의 식 $f(x+1)=f(x)+6x^2$에
$x=2$를 대입하면
$f(3)=f(2)+24=36$에서 $f(2)=12$
$x=1$을 대입하면
$f(2)=f(1)+6=12$에서 $f(1)=6$
두 식을 연립하여 풀면 $a=6$, $b=0$
$\therefore a^2+b^2=36$

57

자연수 n에 대하여 x^n을 이차식 $f(x)=x^2-x+b$로 나눈 몫을 $Q_n(x)$, 나머지를 p_nx+q_n이라 할 때, [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

| 보기 |

ㄱ. $f(x)=f(1-x)$
ㄴ. $(1-x)^n$을 $f(x)$로 나눈 몫은 $Q_n(1-x)$이다.
ㄷ. $x^n+(1-x)^n$을 $f(x)$로 나눈 나머지는 p_n+2q_n이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ✓⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해 ㄱ. $f(1-x)=(1-x)^2-(1-x)+b=x^2-x+b=f(x)$ (참)
ㄴ. $x^n=f(x)Q_n(x)+p_nx+q_n$이라 하면 x 대신 $1-x$를 대입해도 성립한다.
$\therefore (1-x)^n=f(1-x)Q_n(1-x)+p_n(1-x)+q_n$
$=f(x)Q_n(1-x)+p_n(1-x)+q_n$ ($\because$ ㄱ)
따라서 $(1-x)^n$을 $f(x)$로 나눈 몫은 $Q_n(1-x)$이다. (참)
ㄷ. $x^n+(1-x)^n$을 $f(x)$로 나눈 나머지는
$p_nx+q_n+p_n(1-x)+q_n=p_n+2q_n$이다. (참)

58

다항식 $f(x)$를 $(x+1)^3$으로 나눈 나머지가 x^2+4x+2이고, $(x-2)^2$으로 나눈 나머지가 $4x+6$이다. 다항식 $f(x)$를 $(x+1)^2(x-2)$로 나눈 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(1)$의 값은?

① -1 ② 1 ③ 3
④ 5 ✓⑤ 7

해 $f(x)=(x+1)^3Q_1(x)+x^2+4x+2$
$=(x+1)^2(x+1)Q_1(x)+(x+1)^2+2x+1$
라 하면 $f(x)$를 $(x+1)^2$으로 나눈 나머지는 $2x+1$이다.
$f(x)=(x+1)^2(x-2)Q_2(x)+a(x+1)^2+2x+1$ (a는 상수) … ㉠
라 하면 $f(2)=4\times2+6=14$
㉠에 $x=2$를 대입하면 $f(2)=9a+5=14$ $\therefore a=1$
$R(x)=(x+1)^2+2x+1$이므로 $R(1)=7$

59

다항식 $f(x)$를 $x-1$, $(x-1)^2$으로 각각 나눈 나머지의 합이 0이고 $(x-1)^3$으로 나눈 나머지가 ax^2+bx+c일 때, 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값은?

① -2 ② -1 ✓③ 0
④ 1 ⑤ 2

해 $f(x)=(x-1)Q_1(x)+R_1$, $f(x)=(x-1)^2Q_2(x)+R_2(x)$라 하면
$2f(x)=(x-1)Q_1(x)+(x-1)^2Q_2(x)+R_1+R_2(x)$
$R_1+R_2(x)=0$이므로
$f(x)=\frac{1}{2}(x-1)Q_1(x)+\frac{1}{2}(x-1)^2Q_2(x)$ … ㉠
$f(x)=(x-1)^3Q(x)+ax^2+bx+c$ … ㉡라 하고
㉠, ㉡에 $x=1$을 대입하면 $a+b+c=0$

◇ 정답 및 해설 27~29p

60

최고차항의 계수가 1인 삼차다항식 $f(x)$가 임의의 x에 대하여

$$(x-2)f(x+1)=(x+4)f(x-1)$$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값을 구하시오. 답 15

해 $(x-2)f(x+1)=(x+4)f(x-1)$에
$x=2$를 대입하면 $0=6f(1)$ $\therefore f(1)=0$
$x=-4$를 대입하면 $-6f(-3)=0$ $\therefore f(-3)=0$
$x=0$을 대입하면 $-2f(1)=4f(-1)=0$ $\therefore f(-1)=0$
$f(x)=(x-1)(x+1)(x+3)$이므로
$f(2)=1\times3\times5=15$

61

다항식 $f(x)$가 모든 x에 대하여

$$f(x^2)=x^3f(x+1)-2x^4+2x^2$$

이 성립할 때, [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

| 보기 |

ㄱ. $f(2)=0$
ㄴ. $f(x)$는 삼차다항식이다.
ㄷ. 모든 x에 대하여 $(x-3)f(x)=xf(x-1)$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ✓⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해 ㄱ. $f(x^2)=x^3f(x+1)-2x^4+2x^2$에 $x=0$, $x=-1$, $x=1$을 대입하면
$f(0)=0$, $f(1)=0$, $f(2)=0$ (참)
ㄴ. $f(x)$의 차수를 n이라 하면 $2n=n+3$일 때 성립하므로
$f(x)$는 삼차다항식이다. (참)
ㄷ. $f(x)=ax(x-1)(x-2)$ ($a\neq0$인 상수)라 하고 주어진 식에
$x=2$를 대입하면 $f(4)=8f(3)-24$ $\therefore a=1$
$f(x)=x(x-1)(x-2)$이므로
$(x-3)f(x)=xf(x-1)$ (참)

62

다음 조건을 만족시키는 모든 다항식 $f(x)$의 합을 $P(x)$라 할 때, $P(2)$의 값을 구하시오. 답 17

(가) $f(x)$는 이차항의 계수가 1인 이차식이다.
(나) $f(x^2)$은 $f(x)$로 나누어떨어진다.

해 $P(x)=x^2+(x^2-x)+(x^2-1)+(x^2+x+1)+(x^2-2x+1)$
$=5x^2-2x+1$
$\therefore P(2)=20-4+1=17$

63

다음 조건을 만족시키는 모든 이차다항식 $P(x)$의 개수를 구하시오. 답 5

(가) $P(1)P(2)=0$
(나) 사차다항식 $P(x)\{P(x)-3\}$은 $x(x-3)$으로 나누어떨어진다.

해 조건 (가)에서 $P(1)=0$ 또는 $P(2)=0$
조건 (나)에서
$P(0)\{P(0)-3\}=0$이고, $P(3)\{P(3)-3\}=0$이므로
$P(0)=0$ 또는 $P(0)=3$이고, $P(3)=0$ 또는 $P(3)=3$
이때, $P(x)$는 이차식이므로 $P(x)=0$이 되는 x의 개수는 2 이하여야 한다.
따라서 주어진 조건을 만족시키는 $P(x)$의 개수는
$P(x)=\frac{3}{2}(x-1)(x-2)$, $P(x)=\frac{1}{2}x(x-1)$,
$P(x)=(x-1)(x-3)$, $P(x)=x(x-2)$,
$P(x)=\frac{1}{2}(x-2)(x-3)$의 5이다.

정답 및 해설 29~30p



생각을 절약하는 기호화

오늘날 사용되고 있는 수학의 기호는 만국 공통 언어이다. '+'는 어느 국가에 가서도 덧셈을 나타내는 기호이고, '−'는 뺄셈을 나타내는 기호라 알고 있다. 이런 간단한 기호의 발달을 통해 현대수학은 급속도로 발달하게 된 것이다.

사칙연산의 유래

덧셈 기호와 **뺄셈 기호**는 1489년에 비트만(Widman)이 쓴 산술책에 처음으로 나타나 있다. 덧셈 기호 +는 더한다는 뜻의 라틴어 et를 줄여서 얻었고, 뺄셈 기호 −는 뺀다는 뜻의 minus를 간단히 쓴 m을 사용하다가 중세 상인이 물건의 무게의 차이를 나타내기 위해 사용했던 가로대를 본떠 −로 바뀌었다고 한다.

곱셈 기호는 17세기의 독일 철학자 라이프니츠가 사용한 기호지만 그 당시 이미 성안드레의 십자가에서 유래한 현재의 소기호가 알려져 있었다. 하지만 ×기호가 미지수 x와 혼동되기 쉽다고 생각하여 잘 쓰이지 않다가 19세기 이르러서야 널리 쓰이기 시작했다.

나눗셈 기호는 18세기의 프랑스의 갈리마르가 나눗셈의 기호로 D자를 뒤집은 기호를 사용했다. 현재의 ÷기호는 단순한 분수의 가로선에서 유래하며, 그 아래 위의 점은 분수의 아래, 위의 수를 뜻한다고 생각한다.

등호(=)는 레코드(Recorde, 1510~1558)가 그의 책『지혜의 숫돌』에서 사용하였다. 그는 같다는 기호라 말하였다. 또, **제곱근 기호**($\sqrt{\ }$)는 1525년에 루돌프(Rudolff)에 의해서 도입되었다. 이는 근을 뜻하는 radix의 **두문자인** r에서 따왔다고 한다.
이후 대수학자 오일러가 r을 길게 늘여쓰면서 현재와 같은 모양이 되었다고 한다.

현대 수학에서 사용되고 있는 대표적인 기호들

현대 과학의 발달은 기호의 체계화 덕분이다. 앞으로 자주 보게 될 수학 기호들을 정리!

기호	의미
i	허수단위
$\cos\theta$	θ에 대한 코사인값
π	원주율
$\therefore$	그러므로
$\because$	왜냐하면
$\equiv$	합동

기호	의미
$\pm$	플러스 또는 마이너스
$\neq$	같지 않다.
$\leq$	작거나 같다.
$\geq$	크거나 같다.
$<$	작다.
$>$	크다.



03 인수분해

개념 강의▶

중요도 ★★★

1 인수분해의 뜻

하나의 다항식을 두 개 이상의 다항식의 곱으로 나타내는 것을 **인수분해**라 한다.

$$x^2+3x+2 \underset{\text{전개}}{\overset{\text{인수분해}}{\rightleftarrows}} \underbrace{(x+1)}_{\text{인수}}\underbrace{(x+2)}_{\text{인수}}$$

First Class Tip

*** 인수분해에서 수의 범위**

인수분해는 아무 조건이 없으면 계수가 유리수인 범위에서 인수분해한다.
예를 들어, '계수가 실수인 범위까지 인수분해하라.'고 할 때만 $x^2-2=(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$로 인수분해한다.

2 인수분해 공식❶

(1) $ma+mb+mc=m(a+b+c)$

(2) $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

(3) $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

(4) $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

$x^2+(a+b)xy+aby^2=(x+ay)(x+by)$

(5) $acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$

(6) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

(7) $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$

$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$

(8) $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2$

(9) $a^4+a^2b^2+b^4=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$

❶ 인수분해 공식은 곱셈 공식의 좌변과 우변을 서로 바꾸어 놓은 것이다.

First Class Tip

*** 곱셈 공식의 변형을 이용한 인수분해❷**

① $(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc=(a+b)(b+c)(c+a)$
② $(a+b)(b+c)(c+a)+abc=(a+b+c)(ab+bc+ca)$
③ $a+b+c=0$이면
$a^3+b^3+c^3=3abc$

❷ 다음 식은 모두 같다.
$a^2b+a^2c+b^2c+b^2a+c^2a+c^2b$
$=a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)$
$=a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)$
$=ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$
$=(a+b+c)(ab+bc+ca)-3abc$
$=(a+b)(b+c)(c+a)-2abc$

3 복잡한 식의 인수분해

(1) 치환을 이용한 인수분해

① 공통부분이 있을 경우, (공통부분)$=t$로 치환하여 인수분해한다.

② 공통부분이 없을 때는 공통부분이 생기도록 식을 변형한 후 치환하여 인수분해한다.

(2) 복이차식의 인수분해 (x^4+ax^2+b 꼴의 식) ❸

① 상수항이 제곱수가 아니면 $\Longrightarrow x^2=t$로 치환

② 상수항이 제곱수이면 $\Longrightarrow A^2-B^2$ 꼴로 변형

❸ **복이차식**
차수가 짝수인 항과 상수항으로만 이루어진 다항식

(3) 여러 개의 문자가 있는 식의 인수분해

① 문자 중 차수가 가장 낮은 문자에 대하여 내림차순으로 정리하여 인수분해한다.

② 차수가 같으면 어느 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리하여 인수분해한다.

First Class Tip

$*\ x^n-1,\ x^n+1$ 꼴의 인수분해

① n이 자연수일 때,
$x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+x^{n-3}+\cdots+x+1)$

② n이 홀수일 때,
$x^n+1=(x+1)(x^{n-1}-x^{n-2}+x^{n-3}-\cdots-x+1)$

4 인수정리를 이용한 인수분해

삼차 이상의 다항식 $f(x)$를 인수분해하는 경우에는 인수정리를 이용하여 다음 순서로 인수분해한다.

(i) $f(\alpha)=0$이 되는 α를 찾는다. ❹

(ii) 조립제법을 써서 $f(x)=(x-\alpha)Q(x)$의 꼴로 나타낸다.

(iii) 몫 $Q(x)$에 위의 순서를 다시 적용한다.

❹ 계수가 모두 정수인 다항식을 0으로 만드는 값은
$\pm\dfrac{\text{(상수항의 약수)}}{\text{(최고차항의 계수의 약수)}}$
중에서 찾을 수 있다.

5 공통인수

(1) 공통인수 : 두 개 이상의 다항식이 공통으로 가지는 인수를 그 다항식의 **공통인수**라 한다.

(2) 공통인수의 성질

두 다항식 $f(x)$, $g(x)$가 공통인수 $G(x)$를 가지면 두 다항식을 더하거나 빼거나 곱해서 만든 다항식도 $G(x)$를 인수로 갖는다.

즉, 두 다항식 $A(x)$, $B(x)$에 대하여
$f(x)=A(x)G(x)$, $g(x)=B(x)G(x)$이면

① $f(x)+g(x)=\{A(x)+B(x)\}G(x)$

② $f(x)-g(x)=\{A(x)-B(x)\}G(x)$

③ $f(x)g(x)=A(x)B(x)\{G(x)\}^2$



FIRST CLASS

핵심 유형 연습

◀ 동영상 강의

핵심유형 14 인수분해 공식을 이용한 인수분해

01 출제율 ❯❯❯

서로 다른 양수 a, b에 대하여

$$\frac{(a+b)^3+b^3}{a^3-b^3}=\frac{a+2b}{b}$$

가 성립할 때, $\frac{a}{b}$의 값은?

① 1 ✓② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

해 $\frac{(a+b)^3+b^3}{a^3-b^3}=\frac{(a+2b)\{(a+b)^2-(a+b)b+b^2\}}{(a-b)(a^2+ab+b^2)}$

$=\frac{(a+2b)(a^2+ab+b^2)}{(a-b)(a^2+ab+b^2)}=\frac{a+2b}{a-b}$

따라서 $\frac{a+2b}{a-b}=\frac{a+2b}{b}$이고, a, b는 서로 다른 양수이므로

$a-b=b$ $\therefore a=2b$ $\therefore \frac{a}{b}=2$

02 출제율 ❯❯❯

자연수 k에 대하여 $\frac{99^4+99^2+1}{99^2+99+1}=100^2-k$일 때, k의 값을 구하시오. 답 297

해 $99=x$라 하면 $100=x+1$이므로

$\frac{99^4+99^2+1}{99^2+99+1}=\frac{x^4+x^2+1}{x^2+x+1}=\frac{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}{x^2+x+1}$

$=x^2-x+1=(x+1)^2-3x$

$=100^2-3\times 99$

$\therefore k=3\times 99=297$

03 출제율 ❯❯❯

세 다항식 $f(x)=2x^2+x$, $g(x)=x^2+2x+2$, $h(x)$에 대하여

$\{f(x)\}^3-\{g(x)\}^3=(x^2-x-2)h(x)$

가 x에 대한 항등식일 때, $h(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는?

① 2 ✓② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

해 $f(x)-g(x)=x^2-x-2$이므로

$h(x)=\{f(x)\}^2+f(x)g(x)+\{g(x)\}^2$ … ㉠

$f(-1)=1$, $g(-1)=1$이므로 ㉠에서 $h(-1)=1+1+1=3$

핵심유형 15 치환을 이용한 인수분해

04 출제율 ❯❯❯

다항식

$(x+y)^3+3(x+y)(x^2-y^2)$
$+3(x-y)(x^2-y^2)+(x-y)^3$

의 인수인 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?

| 보기 |

ㄱ. $x+y$ ㄴ. $x-y$ ㄷ. x^2

① ㄱ ✓② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

해 $x+y=A$, $x-y=B$라 하면

$A^3+3A^2B+3AB^2+B^3=(A+B)^3=(x+y+x-y)^3=8x^3$

따라서 주어진 다항식의 인수인 것은 x^2이므로 ㄷ이다.

05 출제율 ❯❯❯

다항식 $(x^2-2x)^2-2x^2+4x+a$가 $(x+1)(x+b)(x+c)^2$으로 인수분해될 때, 정수 a, b, c에 대하여 $a^2+b^2+c^2$의 값을 구하시오. 답 19

해 $(x^2-2x)^2-2x^2+4x+a=(x+1)(x+b)(x+c)^2$에서

인수정리에 의하여 $a=-3$

따라서 ㉠의 좌변은 $(x+1)(x-3)(x-1)^2$이므로

$a^2+b^2+c^2=(-3)^2+(-3)^2+(-1)^2=19$

06 출제율 ❯❯❯

다음은 다항식 $(x^2-x-1)(x^2-x-5)-5$를 인수분해하는 과정이다.

(가)$=t$라 하면

$(x^2-x-1)(x^2-x-5)-5$

$=(t+$(나)$)(t-$(나)$)-5$

$=$ ⋮

$=(t+3)(t-3)$

$=$ ⋮

$=x(x-1)(x+2)(x-$(다)$)$

위의 (가)에 알맞은 식을 $f(x)$, (나)와 (다)에 알맞은 자연수를 각각 m, n이라 할 때, $f(3)+m+n$의 값을 구하시오. 답 8

해 $(x^2-x-1)(x^2-x-5)-5=(t+m)(t-m)-5$에서

$t=x^2-x-3=f(x)$이므로 ((가))

$(x^2-x-1)(x^2-x-5)-5=(t+2)(t-2)-5$

$=(t+3)(t-3)$ ((나))

$=x(x-1)(x+2)(x-3)$ ((다))

$\therefore f(3)+m+n=(3^2-3-3)+2+3=8$

핵심유형 16 복이차식의 인수분해

07 출제율 ❯❯

이차항의 계수가 1인 두 이차식 $f(x)$와 $g(x)$에 대하여 $f(x)g(x)=x^4+4$가 성립할 때, $f(1)+g(1)$의 값은?

① 5 ✓② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

해 $x^4+4=(x^4+4x^2+4)-4x^2$
$=(x^2+2)^2-(2x)^2$
$=(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$
$\therefore f(1)+g(1)=(1+2+2)+(1-2+2)=6$

08 출제율 ❯❯

다항식 $(x^2-y^2)^2-2(x^2+y^2)+1$은 x의 계수가 모두 자연수인 네 개의 x, y에 대한 일차식의 곱으로 인수분해될 때, 네 일차식을 모두 더한 것은?

① 0 ② 4 ✓③ $4x$
④ $4x+4y$ ⑤ $4x+4y+4$

해 $(x^2-y^2)^2-2(x^2+y^2)+1$
$=(x^2-y^2)^2-2(x^2-y^2)+1-4y^2$
$=(x^2-y^2-1)^2-(2y)^2$
$=\{x^2-(y-1)^2\}\{x^2-(y+1)^2\}$
$=(x+y-1)(x-y+1)(x+y+1)(x-y-1)$
따라서 네 일차식을 모두 더하면 $4x$

09 출제율 ❯❯❯

다항식
$a^4+b^4+c^4+2a^2b^2-2b^2c^2+2c^2a^2$
을 인수분해하면
$(a^2+$ (가) $)(a^2+$ (나) $)$
가 될 때, (가), (나)에 알맞은 식을 각각 M, N이라 하자. 두 다항식 M, N의 모든 항의 계수의 합을 구하시오. 답 4

해 $a^4+b^4+c^4+2a^2b^2-2b^2c^2+2c^2a^2$
$=(a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2)-4b^2c^2$
$=(a^2+b^2+c^2)^2-(2bc)^2$
$=(a^2+b^2+c^2+2bc)(a^2+b^2+c^2-2bc)$
따라서 M, N의 모든 계수의 합은 4이다.

핵심유형 17 문자가 여러 개인 식의 인수분해

10 출제율 ❯❯

서로 다른 실수 a, b, c에 대하여
$$\frac{(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3}{a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)}$$
의 값을 구하시오. 답 3

해 (분모)$=ab^2-ac^2+bc^2-a^2b+a^2c-b^2c$
$=(-b+c)a^2+(b^2-c^2)a+(bc^2-b^2c)$
$=(a-b)(b-c)(c-a)$
한편, $A^3+B^3=(A+B)^3-3AB(A+B)$를 이용하면
(분자)$=(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$
$=(a-c)^3-3(a-b)(b-c)(a-c)+(c-a)^3$
$=3(a-b)(b-c)(c-a)$
$\therefore$ (주어진 식)$=3$

11 출제율 ❯❯❯

$x^2+xy-2y^2+ax-y+3$이 계수가 정수인 x, y에 대한 두 일차식의 곱으로 인수분해될 때, 상수 a의 값을 구하시오. 답 4

해 주어진 식을 x에 대한 내림차순으로 정리하면
$x^2+xy-2y^2+ax-y+3$
$=x^2+(y+a)x-(2y^2+y-3)$
$=x^2+(y+a)x-(2y+3)(y-1)$
이 식이 x, y에 대한 일차식으로 인수분해되기 위한 x의 계수는

x		$2y+3$
x		$-(y-1)$
		$y+4$

따라서 $y+a=y+4$이므로 $a=4$

12 출제율 ❯❯

다항식 $(3x-1)^3-(2x+1)^3-(x-2)^3$을 x에 대한 세 일차식의 곱으로 인수분해하면 $18(x+a)(x+b)(x+c)$가 된다.
유리수 a, b, c에 대하여 $9abc$의 값을 구하시오. 답 3

해 $A^3-B^3=(A-B)^3+3AB(A-B)$를 이용하면
$(3x-1)^3-(2x+1)^3=(x-2)^3+3(3x-1)(2x+1)(x-2)$
$\therefore \{(3x-1)^3-(2x+1)^3\}-(x-2)^3$
$=(x-2)^3+3(3x-1)(2x+1)(x-2)-(x-2)^3$
$=3(3x-1)(2x+1)(x-2)$
$=18\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-2)$
따라서 $a=-\frac{1}{3}$, $b=\frac{1}{2}$, $c=-2$ 또는 서로 자리를 바꾼 값이다.
$\therefore 9abc=9\times\left(-\frac{1}{3}\right)\times\frac{1}{2}\times(-2)=3$

정답 및 해설 31~33p

핵심유형 18 인수정리를 이용한 인수분해

13 출제율 ›››

일차식 $f(x)$에 대하여 다항식 $x^3+2-f(x)$가 $(x+1)(x+a)^2$으로 인수분해될 때, $f(3)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① 2 ✓② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

해 인수정리에 의하여
$(-1)^3+2-f(-1)=0 \quad \therefore f(-1)=1$
$f(x)=k(x+1)+1$ (k는 0이 아닌 상수)이라 하면
$x^3+2-f(x)=(x+1)(x^2-x+1-k)$
따라서 $a=-\frac{1}{2}$, $k=\frac{3}{4}$이므로 $f(3)=4$

14 출제율 ›››

다항식 $x^4-2x^3+2x^2-x-k$가
$(x+1)(x+a)(x^2+bx+c)$
로 인수분해될 때, 정수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값은? (단, k는 상수이다.)

① -2 ② -1 ✓③ 0
④ 1 ⑤ 2

해 인수정리에 의해 $k=6$
조립제법에 의하여
$x^4-2x^3+2x^2-x-6$
$=(x+1)(x-2)(x^2-x+3)$
따라서 $a=-2$, $b=-1$, $c=3$이므로 $a+b+c=0$

15 출제율 ›››

다항식 $x^3+ax^2+(2a+1)x+10$이 계수가 모두 자연수인 x에 대한 세 일차식의 곱으로 인수분해될 때, 상수 a의 값은?

① 6 ✓② 8 ③ 10
④ 12 ⑤ 14

해 $x^3+ax^2+(2a+1)x+10$
$=(x+2)\{x^2+(a-2)x+5\}$
$x^2+(a-2)x+5=(x+p)(x+q)$ (p, q는 자연수)라 하면
$p+q=a-2 \cdots$ ㉠, $pq=5$
이때, p, q가 자연수이므로 $p=1$, $q=5$ 또는 $p=5$, $q=1$
따라서 $p+q=6$이므로 ㉠에서 $a=8$이다.

핵심유형 19 공통인수

16 출제율 ›››

두 다항식 x^4-7x^2+9, $x^4+2x^3+x^2-9$ 모두 이차식 x^2+ax+b를 인수로 갖는다. 상수 a, b에 대하여 a^2+b^2의 값은?

✓① 10 ② 13 ③ 16
④ 19 ⑤ 21

해 $f(x)=x^4-7x^2+9$, $g(x)=x^4+2x^3+x^2-9$라 하면
$g(x)-f(x)$도 x^2+ax+b를 인수로 갖는다. 즉,
$g(x)-f(x)=2x^3+8x^2-18$
$=2(x^3+4x^2-9)$
$=2(x+3)(x^2+x-3)$
공통인수는 x^2+x-3이므로 $a^2+b^2=1^2+(-3)^2=10$

17 출제율 ›››

두 다항식 x^3+2x^2+2x+1, x^3+4x^2+4x+1의 공통인수를 $G(x)$라 할 때, $G(99)$의 값을 구하시오. 답 100

해 $x^3+2x^2+2x+1=(x^3+3x^2+3x+1)-(x^2+x)$
$=(x+1)(x^2+x+1)$
$x^3+4x^2+4x+1=(x^3+3x^2+3x+1)+(x^2+x)$
$=(x+1)(x^2+3x+1)$
따라서 $G(x)=x+1$이므로
$G(99)=100$

18 출제율 ›››

두 다항식 $f(x)=x^2-x-n$, $g(x)=x^3-5x^2+2x+8$이 공통인수를 가지도록 하는 서로 다른 상수 n의 값의 합은?

① 11 ② 12 ③ 13
✓④ 14 ⑤ 15

해 $g(x)=(x+1)(x-2)(x-4)$
(i) $x+1$이 공통인수이면
$f(-1)=2-n=0 \quad \therefore n=2$
(ii) $x-2$가 공통인수이면
$f(2)=2-n=0 \quad \therefore n=2$
(iii) $x-4$가 공통인수이면
$f(4)=12-n=0 \quad \therefore n=12$
따라서 공통인수를 가지도록 하는 서로 다른 상수 n의 값의 합은
$2+12=14$



FIRST CLASS

실전 유형 훈련

◀ 동영상 강의

핵심유형 14 인수분해 공식을 이용한 인수분해

19

다음 식을 만족시키는 자연수 n의 값을 구하시오. 답 99

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{50}{99}$$

해 $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

$=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\times\cdots$

$\times\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{4}\times\cdots\times\frac{n-1}{n}\times\frac{n+1}{n}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{n+1}{n}=\frac{n+1}{2n}$ 따라서 $\frac{n+1}{2n}=\frac{50}{99}$이므로 $n=99$

20

자연수 N을

$N=3\times33^3+3^2\times33^2+3^2\times33+3$

이라 할 때, N의 양의 약수의 개수는?

① 6 ② 9 ③ 16

④ 18 ✓⑤ 32

해 $N=3\times33^3+3^2\times33^2+3^2\times33+3$

$=3(33^3+3\times33^2+3\times33+1)$

$=3(33+1)^3=3\times34^3$

$=3\times2^3\times17^3$

따라서 N의 양의 약수의 개수는

$(1+1)\times(3+1)\times(3+1)=32$

21

-1이 아닌 두 실수 a, b에 대하여

$a+b=2$, $a^3+b^3=14$

일 때, $(a^2-a+1)(b^2-b+1)$의 값을 구하시오. 답 7

해 $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$에서

$14=2^3-3ab\times2$ $\therefore ab=-1$

$\therefore (a^2-a+1)(b^2-b+1)=\frac{(a^3+1)(b^3+1)}{(a+1)(b+1)}$

$=\frac{(ab)^3+(a^3+b^3)+1}{ab+(a+b)+1}$

$=\frac{(-1)^3+14+1}{(-1)+2+1}=\frac{14}{2}=7$

22

x^6을 $x-2$로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하면 $Q(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지는 3×2^k이다. 자연수 k의 값을 구하시오. 답 6

해 $x^6=(x-2)Q(x)+R$라 하면 $R=2^6$이므로

$(x-2)Q(x)=x^6-2^6=(x^3-2^3)(x^3+2^3)$

$=(x-2)(x^2+2x+4)(x^3+2^3)$

$\therefore Q(x)=(x^2+2x+4)(x^3+2^3)$

$Q(2)=(4+4+4)(2^3+2^3)=3\times2^2\times2\times2^3=3\times2^6$

$\therefore k=6$

23

사차다항식 $P(x)=x^4+x^2-n^2-n$이 모든 정수 k에 대하여 $P(k)\neq0$이 되도록 하는 10 이하의 자연수 n의 모든 값의 합을 구하시오. 답 41

해 $P(k)=(k^2-n)(k^2+n+1)$에서 모든 정수 k에 대하여

$k^2+n+1>0$이고, $P(k)\neq0$을 만족시키려면 $n\neq k^2$이어야 하므로

n은 완전제곱수가 아닌 정수이다.

따라서 10 이하의 자연수 중 완전제곱수가 아닌 수의 합은

$2+3+5+6+7+8+10=41$이다.

핵심유형 15 치환을 이용한 인수분해

24

x에 대한 다항식 $(x^2-1)(x-3)(x-5)+a$가 완전제곱식이 되도록 하는 상수 a의 값을 구하시오. 답 16

해 $(x^2-1)(x-3)(x-5)+a$

$=\{(x+1)(x-5)\}\{(x-1)(x-3)\}+a$

$=(x^2-4x-5)(x^2-4x+3)+a$

$x^2-4x=X$라 하면

$(X-5)(X+3)+a=(X-1)^2-16+a$

이 식이 완전제곱식이 되려면

$-16+a=0$ $\therefore a=16$

정답 및 해설 33~35p

25

다항식 $(a+b)(a+1)(b+1)+ab$가 a, b에 대한 두 다항식 A, B의 곱으로 인수분해될 때, $A+B=f(a, b)$라 하자. $f(2, 3)$의 값은?

① 15 ✓② 17 ③ 19
④ 21 ⑤ 23

해 $(a+b)(a+1)(b+1)+ab=(a+b)(ab+a+b+1)+ab$
이때, $a+b=t$라 하면
$t(ab+1+t)+ab=t^2+(ab+1)t+ab$
$=(a+b+1)(ab+a+b)$
따라서 두 다항식 A, B의 합은 $ab+2a+2b+1$이므로
$f(a, b)=ab+2a+2b+1$ $\therefore f(2, 3)=6+4+6+1=17$

26

다음은 $(x^2-4x+3)(x^2+12x+35)+15$를 인수분해하는 과정이다.

$(x^2-4x+3)(x^2+12x+35)+15$
$=$ ⋮
$=(x^2+4x-$ (가) $)(x^2+4x-$ (나) $)+15$
이때, $x^2+4x=t$라 하면
$(t-$ (가) $)(t-$ (나) $)+15$
$=$ ⋮
$=(x^2+4x-6)(x^2+4x-$ (다) $)$

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 a, b, c라 할 때, $a+b+c$의 값을 구하시오. 답 46

해 $(x^2-4x+3)(x^2+12x+35)+15$
$=(x-1)(x+5)(x-3)(x+7)+15$
$=(x^2+4x-5)(x^2+4x-21)+15$
(가) (나)
$(t-5)(t-21)+15=t^2-26t+120=(t-6)(t-20)$
$=(x^2+4x-6)(x^2+4x-20)$
(다)
$\therefore a+b+c=5+21+20=46$

27

다음과 같이 연속한 네 홀수의 곱에 16을 더한 수는 어떤 자연수의 제곱이 된다.

$1\times3\times5\times7+16=121=11^2$
$3\times5\times7\times9+16=961=31^2$

$11\times13\times15\times17+16=N^2$을 만족시키는 자연수 N의 값을 구하시오. 답 191

해 $n(n+2)(n+4)(n+6)+16=n(n+6)(n+2)(n+4)+16$
$=(n^2+6n)(n^2+6n+8)+16$
이때, $n^2+6n=t$라 하면
$t(t+8)+16=t^2+8t+16=(t+4)^2=(n^2+6n+4)^2$
$11\times13\times15\times17+16=(11^2+6\times11+4)^2=191^2$
$\therefore N=191$

핵심유형 16 복이차식의 인수분해

28

n^4-11n^2+49의 값이 소수가 되도록 하는 자연수 n의 값을 a, 그 소수를 p라 할 때, $a+p$의 값은?

① 19 ② 24 ③ 29
✓④ 34 ⑤ 39

해 $n^4-11n^2+49=(n^4+14n^2+49)-25n^2$
$=(n^2+7)^2-(5n)^2$
$=(n^2-5n+7)(n^2+5n+7)$
n^4-11n^2+49가 소수가 되려면 $n^2-5n+7=1$이어야 한다.
즉, $n^2-5n+6=0$이므로 $n=2$ 또는 $n=3$
$n=2$이면 $n^4-11n^2+49=21$이 되어 소수가 아니다.
$n=3$이면 $n^4-11n^2+49=31$이 되어 소수이다.
$\therefore a+p=3+31=34$

29

다항식 $a^2+b^2-3c^2+2ab+2bc+2ca$가 계수가 정수인 a, b, c에 대한 두 일차식 A, B의 곱으로 인수분해될 때, $A+B$는?

✓① $2(a+b+c)$ ② $2(a+b-c)$ ③ $2(a-b+c)$
④ $2(-a+b+c)$ ⑤ $2(a-b-c)$

해 $a^2+b^2-3c^2+2ab+2bc+2ca$
$=(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca)-4c^2$
$=(a+b+c)^2-(2c)^2$
$=(a+b+c+2c)(a+b+c-2c)$
$=(a+b+3c)(a+b-c)$
$\therefore A+B=(a+b+3c)+(a+b-c)=2(a+b+c)$

30

$x^4+ax^2+b=(x^2-2x-1)f(x)$를 만족시키는 이차다항식 $f(x)$에 대하여 $f(10)$의 값을 구하시오. 답 119
(단, a, b는 상수이다.)

해 $g(x)=x^4+ax^2+b$라 하면 $g(x)$는 짝수차수인 항만으로 이루어져 있으므로 $g(x)$가 $x-\alpha$를 인수로 가지면 $x+\alpha$도 인수로 갖는다.
$x^2-2x-1=(x-p)(x-q)$ (p, q는 상수) … ㉠
라 하면 $g(x)$가 $x+p$, $x+q$도 인수로 갖는다.
$\therefore f(x)=(x+p)(x+q)=x^2+(p+q)x+pq$
㉠에서 $p+q=2$, $pq=-1$이므로 $f(x)=x^2+2x-1$
$\therefore f(10)=10^2+20-1=119$

핵심유형 17 문자가 여러 개인 식의 인수분해

31

다항식 $a^4+a^2b^2-b^2c^2-c^4$의 인수인 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?

| 보기 |

ㄱ. $a+b$　　ㄴ. $a+c$　　ㄷ. $a^2+b^2+c^2$

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
✓④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해 $a^4+a^2b^2-b^2c^2-c^4=(a^2-c^2)b^2+(a^4-c^4)$
$=(a^2-c^2)b^2+(a^2+c^2)(a^2-c^2)$
$=(a^2-c^2)(a^2+b^2+c^2)$
$=(a+c)(a-c)(a^2+b^2+c^2)$

32

$a+b+c=1$을 만족시키는 서로 다른 세 실수 a, b, c에 대하여

$$P=\frac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^3}{(c-a)(c-b)}$$

의 값은?

① -3　② -1　③ 0
✓④ 1　⑤ 3

해 $P=\frac{-a^3(b-c)-b^3(c-a)-c^3(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$
$=\frac{-(b-c)a^3+(b^3-c^3)a-b^3c+bc^3}{(a-b)(b-c)(c-a)}$
(P의 분자)
$=-(b-c)a^3+(b-c)(b^2+bc+c^2)a-bc(b-c)(b+c)$
$=(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$
$\therefore P=a+b+c=1$

33

정수 $2^{15}-3^9-5^3$을 소인수분해하면 $2^a\times3^b\times5^c$이 된다. 이때, $a+b+c$의 값을 구하시오. 답 10

해 $2^{15}-3^9=(2^5-3^3)^3+3\times2^5\times3^3\times(2^5-3^3)$
$=5^3+3\times2^5\times3^3\times5$
$\therefore 2^{15}-3^9-5^3=3\times2^5\times3^3\times5$
$=2^5\times3^4\times5$
$\therefore a+b+c=5+4+1=10$

34

세 변의 길이가 a, b, c인 삼각형 ABC가 다음 조건을 만족시킬 때, 삼각형 ABC의 넓이를 구하시오. 답 10

(가) $(a+c)^2-(a-c)^2=80$
(나) $a^3+a^2b-ab^2+ac^2+bc^2-b^3=0$

해 $(a+c)^2-(a-c)^2=4ac=80$에서 $ac=20$
$a^3+a^2b-ab^2+ac^2+bc^2-b^3$
$=a^2(a+b)-b^2(a+b)+c^2(a+b)$
$=(a+b)(a^2-b^2+c^2)=0$
$a^2+c^2=b^2$이므로 삼각형 ABC는 빗변의 길이가 b인 직각삼각형이다.
따라서 삼각형 ABC의 넓이는
$\frac{1}{2}ac=\frac{1}{2}\times20=10$

35

서로 다른 세 자연수 a, b, c가

$$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+3abc=207$$

을 만족시킬 때, $a^2+b^2+c^2$의 값은?

✓① 35　② 38　③ 41
④ 44　⑤ 47

해 $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+3abc$
$=(b+c)a^2+(b^2+3bc+c^2)a+(b+c)bc$
$=(ab+bc+ca)(a+b+c)$
한편, $207=23\times9=69\times3=207\times1$이고,
서로 다른 세 자연수 a, b, c에 대하여
$ab+bc+ca>a+b+c\geq1+2+3=6$이므로
범위를 만족시키는 경우는
$ab+bc+ca=23$, $a+b+c=9$ 뿐이다.
$\therefore a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$
$=81-2\times23=81-46=35$

정답 및 해설 35~36p

핵심유형 18 인수정리를 이용한 인수분해

36

$\dfrac{a^4+4a^3+6a^2+5a+2}{a^3+3a^2+3a+2}=101$을 만족시키는 자연수 a의 값은?

① 60 ② 70 ③ 80
④ 90 ✓⑤ 100

해 $f(a)=a^4+4a^3+6a^2+5a+2$라 하면
$f(-1)=0$, $f(-2)=0$이므로
$f(a)=(a+1)(a+2)(a^2+a+1)$
또, $g(a)=a^3+3a^2+3a+2$라 하면
$g(-2)=0$이므로
$g(a)=(a+2)(a^2+a+1)$
즉, (주어진 식)$=\dfrac{(a+1)(a+2)(a^2+a+1)}{(a+2)(a^2+a+1)}=a+1=101$
$\therefore a=100$

37

다항식 $x^3-x^2y-5xy^2-3y^3$을 인수분해하면 $(x+ay)^2(x+by)$가 될 때, 상수 a, b에 대하여 a^2+b^2의 값을 구하시오. 답 10

해 $f(x)=x^3-x^2y-5xy^2-3y^3$이라 하면
$f(-y)=-y^3-y^3+5y^3-3y^3=0$이므로
$f(x)$는 $x+y$를 인수로 갖는다.
조립제법에서

$-y$	1	$-y$	$-5y^2$	$-3y^3$
		$-y$	$2y^2$	$3y^3$
	1	$-2y$	$-3y^2$	0

$x^3-x^2y-5xy^2-3y^3$
$=(x+y)(x^2-2xy-3y^2)$
$=(x+y)(x+y)(x-3y)$
$=(x+y)^2(x-3y)$
따라서 $a=1$, $b=-3$이므로 $a^2+b^2=1^2+(-3)^2=10$

38

1이 아닌 자연수 a, b에 대하여

$3859=16^3-16^2+16+3=a\times b$

로 나타낼 때, $a+b$의 값을 구하시오. 답 244

해 $t=16$이라 하면
$3859=16^3-16^2+16+3$
$=t^3-t^2+t+3$
$=(t+1)(t^2-2t+3)$
$=(16+1)(16^2-2\times16+3)$
$=17\times227$
$\therefore a+b=17+227=244$

-1	1	-1	1	3
		-1	2	-3
	1	-2	3	0

39

다음 조건을 만족시키는 직육면체가 있다. 이 직육면체의 모든 모서리의 길이의 합을 $l(n)$이라 할 때, $l(6)$의 값을 구하시오. 답 100

(가) 밑면이 정사각형이다.
(나) 모든 모서리의 길이는 일차항의 계수가 1인 n에 대한 일차식이다.
(다) 부피가 $n^3+7n^2+16n+12$이다.

해 $n^3+7n^2+16n+12=(n+2)(n^2+5n+6)=(n+2)^2(n+3)$
이 직육면체는 밑면이 한 변의 길이가 $n+2$인 정사각형이고 높이가 $n+3$인 직육면체이므로
$l(n)=4\{(n+2)+(n+2)+(n+3)\}=4(3n+7)$
$\therefore l(6)=4\times(18+7)=100$

40

다항식 $f(x)=x^4-3x^3-3x^2+11x-6$을 $x+a$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하자. 실수 a에 대하여 다항식 $f(x)$가 $x+a$로 나누어떨어질 때, $Q(a)$의 최댓값을 구하시오. 답 8

해 $f(x)=(x-1)^2(x+2)(x-3)$
(i) $a=-1$일 때,
$Q(x)=(x-1)(x+2)(x-3)$이므로
$Q(a)=Q(-1)=(-2)\times1\times(-4)=8$
(ii) $a=2$일 때,
$Q(x)=(x-1)^2(x-3)$이므로
$Q(a)=Q(2)=1^2\times(-1)=-1$
(iii) $a=-3$일 때,
$Q(x)=(x-1)^2(x+2)$이므로
$Q(a)=Q(-3)=(-4)^2\times(-1)=-16$
(i)~(iii)에서 $Q(a)$의 최댓값은 8이다.

핵심유형 19 공통인수

41

두 다항식 x^2+x-2, $x^3+a^2x^2+2ax-16$의 공통인수가 x에 대한 일차식일 때, 모든 상수 a의 값의 합은?

① -4 ② -5 ③ -6
✓④ -7 ⑤ -8

해 $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$에서
(i) $x-1$이 공통인수일 때, 인수정리에 의하여
$a^2+2a-15=0$, $(a-3)(a+5)=0$ $\therefore a=3$ 또는 $a=-5$
(ii) $x+2$가 공통인수일 때, 인수정리에 의하여
$4a^2-4a-24=0$, $4(a-3)(a+2)=0$ $\therefore a=3$ 또는 $a=-2$
(i), (ii)에서 $a=3$ 또는 $a=-5$ 또는 $a=-2$
이때, $a=3$이면 이차식 $(x-1)(x+2)$가 공통인수가 되어 조건을 만족시키지 않는다.
따라서 $a=-5$ 또는 $a=-2$이므로 모든 상수 a의 값의 합은 $(-5)+(-2)=-7$

42

다음 두 다항식 $f(x)$, $g(x)$의 공통인수를 $G(x)$라 할 때, $G(10)$의 값을 구하시오. 답 111

$$f(x)=x^3+2x^2+2x+1$$
$$g(x)=x^4+x^3+2x^2+x+1$$

해 $f(x)$, $g(x)$ 모두 $G(x)$를 인수로 가지므로 두 다항식 A, B에 대하여 $f(x)=AG(x)$, $g(x)=BG(x)$라 하자.
$xf(x)-g(x)=(Ax-B)G(x)$
이므로 다항식 $xf(x)-g(x)$도 $G(x)$를 인수로 갖는다.
$xf(x)-g(x)=x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$
$G(x)=x^2+x+1$이므로 $G(10)=10^2+10+1=111$

43

서로 다른 실수 p, q에 대하여 다항식
$P(x)=x^3+px+q$, $Q(x)=x^3+qx+p$
의 공통인수가 ax^2+x+b일 때, $p+q$의 값은?
(단, a, b는 상수이다.)

① -2 ✓② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

해 $P(x)$와 $Q(x)$의 공통인수는 $P(x)-Q(x)$의 인수이므로
ax^2+x+b는 일차식이다.
$\therefore a=0$
따라서 $P(x)$와 $Q(x)$의 공통인수는 $x+b$이므로
$P(-b)=0$에서 $-b^3-pb+q=0$ … ㉠
$Q(-b)=0$에서 $-b^3-qb+p=0$ … ㉡
㉡−㉠에서 $(p-q)b+(p-q)=0$, $(p-q)(b+1)=0$
그런데 $p\neq q$이므로 $b=-1$
㉠에 대입하면 $p+q=-1$

서술형

44

사차다항식 x^4+kx^2+1이 계수가 정수인 x에 대한 두 개 이상의 다항식의 곱으로 인수분해되도록 하는 모든 자연수 k의 값의 합을 구하시오. 답 3

해 복이차식 x^4+kx^2+1의 최고차항의 계수와 상수항에 의하여
$x^4+kx^2+1=(x^2+mx+1)(x^2+nx+1)$ (m, n은 정수)
양변의 계수를 비교하면
$m+n=0$, $mn+2=k$
이때, k는 자연수이므로 $k=2-m^2\geq 1$에서 $m^2\leq 1$
$\therefore m=0, \pm 1$
이것을 ㉠에 각각 대입하면 $k=2$ 또는 $k=1$
따라서 모든 자연수 k의 값의 합은 $2+1=3$

45

모든 항의 계수와 상수항이 실수인 두 다항식 $P(x)$와 $Q(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $P(x)Q(x)$는 사차식이다.
(나) $P(x)Q(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=0$, $x=1$, $x=2$ 뿐이다.
(다) 모든 실수 x에 대하여 $P(x)-\{Q(x)\}^3=-8x+8$이다.

이때, $P(3)$의 값을 구하시오. 답 48

해 $Q(1)=0$
조건 (다)에서 $P(x)=\{Q(x)\}^3-8x+8$이므로 $P(x)$와 $\{Q(x)\}^3$의 차수가 서로 같다.
$4-n=3n$ $\therefore n=1$
$Q(x)=a(x-1)$ (a는 0이 아닌 실수)이라 두면 $a=2$
따라서 $P(x)=(x-1)\{8(x-1)^2-8\}$이므로
$P(3)=2\times(8\times 2^2-8)=48$

46

두 다항식 $f(x)=2x^2+ax-2$, $g(x)=4x^2-8x+a$가 x에 대한 일차식인 공통인수를 가질 때, 상수 a의 값을 구하시오. 답 3

해 일차식인 공통인수를 $G(x)$라 하면 $2f(x)-g(x)$도 $G(x)$를 인수로 갖는다.
$2f(x)-g(x)=(2a+8)x-(4+a)=(a+4)(2x-1)$
$\therefore G(x)=2x-1$
따라서 $f(x)$가 $2x-1$을 인수로 가지므로 인수정리에 의하여
$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a-2=0$ $\therefore a=3$

정답 및 해설 37~39p



FIRST CLASS

고난도 도전 문제

◀ 동영상 강의

47

$1<a<b<c$인 자연수 a, b, c에 대하여 다음 식이 성립할 때, $a+b+c$의 값은?

$$(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc=210$$

① 7 ② 8 ✓③ 9
④ 10 ⑤ 11

해 $(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$
$=(b+c)a^2+(b^2+3bc+c^2)a+bc(b+c)-abc$
$=(b+c)(a+b)(a+c)=210$
이때, $1<a<b<c$에서
$a\geq 2$, $b\geq 3$, $c\geq 4$이므로 $5\leq a+b<a+c<b+c$
$210=2\times 3\times 5\times 7$이므로 가능한 경우는
$a+b=5$, $a+c=6$, $b+c=7$이다.
세 식을 모두 더하면 $2(a+b+c)=18$
$\therefore a+b+c=9$

48

서로 다른 실수 x, y, z가

$$x^2-yz=1,\ y^2-zx=1,\ z^2-xy=1$$

을 만족시킬 때, $x^2+y^2+z^2$의 값을 구하시오. 답 2

해 $x^2-yz=1$ … ㉠
$y^2-zx=1$ … ㉡
$z^2-xy=1$ … ㉢
㉠−㉡을 하면 $x^2-y^2-yz+zx=0$이므로
$(x-y)(x+y+z)=0$ $\therefore x+y+z=0$ $(\because x\neq y)$
㉠+㉡+㉢을 하면 $x^2+y^2+z^2-(xy+yz+zx)=3$이므로
$(x+y+z)^2-3(xy+yz+zx)=3$ $\therefore xy+yz+zx=-1$
$\therefore x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)=0+2=2$

49

10보다 작은 세 자연수 a, b, c에 대하여

$$c^3=a^2+4a+4ab+4b^2+8b+4$$

일 때, $a+b+c$의 값 중 최솟값 m과 최댓값 M에 대하여 $m+M$의 값을 구하시오. 답 34

해 $c^3=(a^2+4ab+4b^2)+4a+8b+4$
$=(a+2b)^2+4(a+2b)+4=(a+2b+2)^2$
a, b, c가 10보다 작은 자연수이므로 $c^3\geq 25$에서 $3\leq c<10$
c^3은 제곱수이므로 c는 제곱수이다.
$\therefore c=2^2$ 또는 $c=3^2$
(i) $c=2^2$일 때,
$a+2b=6$이므로
$b=1$, $a=4$이면 $a+b+c=4+1+2^2=9$
$b=2$, $a=2$이면 $a+b+c=2+2+2^2=8$
(ii) $c=3^2$일 때,
$a+2b=25$이므로
$b=9$, $a=7$이면 $a+b+c=7+9+3^2=25$
$b=8$, $a=9$이면 $a+b+c=9+8+3^2=26$
(i), (ii)에서 $a+b+c$의 최솟값은 8이고 최댓값은 26이므로
$m+M=8+26=34$

50

다항식 x^2+ax-y^2+by-3이 계수가 모두 정수인 x, y에 대한 두 일차식의 곱으로 인수분해될 때, 자연수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하시오. 답 8

해 정수 p, q, r, s에 대하여
$x^2+ax-y^2+by-3=(x+py+q)(x+ry+s)$라 할 때,
xy의 계수와 y^2의 계수를 비교하면
$x^2+ax-y^2+by-3=(x+y+q)(x-y+s)$
x의 계수와 y의 계수를 비교하면
$(b+a)(b-a)=12$
$b-a$, $b+a$는 12의 양의 약수이면서 둘 다 짝수이므로
$b-a=2$, $b+a=6$
$a=2$, $b=4$ $\therefore ab=8$

51

두 다항식

$x^4-2x^3+3x^2-2x+1$, $3x^4+2x^3+x^2+2x+3$

의 공통인수가 x^2+ax+b일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오.

답 2 (단, a, b는 상수)

해 $f(x)=x^4-2x^3+3x^2-2x+1$, $g(x)=3x^4+2x^3+x^2+2x+3$
이라 하고 $f(x)$, $g(x)$의 공통인수를 $G(x)$라 하면
$g(x)-3f(x)=8x^3-8x^2+8x=8x(x^2-x+1)$도 $G(x)$를 인수로 갖는다.
그런데 $f(x)$, $g(x)$ 모두 $2x$를 인수로 갖지 않으므로 공통인수는 x^2-x+1이다.
따라서 $a=-1$, $b=1$이므로 $a^2+b^2=2$이다.

52

두 다항식

x^3+5x^2+ax, x^3+6x^2+bx+6

의 공통인수가 x에 대한 이차식일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오. 답 17

해 $f(x)=x^3+5x^2+ax$, $g(x)=x^3+6x^2+bx+6$이라 하면
$f(x)=x(x^2+5x+a)$에서 공통인수는 x^2+5x+a이다.
이때, 상수 p에 대하여
$g(x)=x^3+6x^2+bx+6=(x^2+5x+a)(x+p)$라 하면
$x^3+6x^2+bx+6=x^3+(p+5)x^2+(5p+a)x+ap$
따라서 $p=1$, $a=6$, $b=11$이므로
$a+b=6+11=17$

53

두 자연수 a, b에 대하여 일차식 $x-a$를 인수로 가지는 다항식 $P(x)=x^4-100x^2+b$가 다음 조건을 만족시킬 때, 자연수 a의 개수를 구하시오. 답 7

> 계수와 상수항이 모두 정수인 서로 다른 세 개의 다항식의 곱으로 인수분해된다.

해 $P(x)=x^4-100x^2+b$
$=x^4-100x^2+a^2(100-a^2)$
$=(x-a)(x+a)(x^2+a^2-100)$
문제의 조건에 의하여 x^2+a^2-100은 인수분해되지 않아야 한다.
즉, $100-a^2$이 제곱수가 아니어야 하므로
$100=6^2+8^2$에서 $a\neq6$, $a\neq8$
따라서 ㉠에서 b가 자연수이므로 $100-a^2>0$, 즉 $a<10$이고
이를 만족시키는 자연수 a의 개수는
1, 2, 3, 4, 5, 7, 9의 7이다.

54

$a>b>c$인 세 자연수 a, b, c가

$a^2b-ab^2+b^2c-bc^2+c^2a-ca^2=30$

을 만족시킬 때, $a+b+c$의 최솟값을 구하시오. 답 10

해 $a^2b-ab^2+b^2c-bc^2+c^2a-ca^2$
$=a^2(b-c)-a(b^2-c^2)+bc(b-c)$
$=(b-c)(a-b)(a-c)=30=2\times3\times5$
$(a-b)+(b-c)=a-c$이므로 가장 큰 수 $a-c$는 나머지 두 수의 합과 같다.
(i) $a-b$, $b-c$, $a-c$가 1, 5, 6 중 하나씩일 때,
$c=1$, $b=6$, $a=7$일 때 $a+b+c$는 최솟값 14를 가진다.
$c=1$, $b=2$, $a=7$일 때 $a+b+c$는 최솟값 10을 가진다.
(ii) $a-b$, $b-c$, $a-c$가 2, 3, 5 중 하나씩일 때
$c=1$, $b=4$, $a=6$일 때 $a+b+c$는 최솟값 11을 가진다.
$c=1$, $b=3$, $a=6$일 때 $a+b+c$는 최솟값 10을 가진다.
(i), (ii)에서 $a+b+c$의 최솟값은 10이다.

정답 및 해설 39~41p



게임 이론

게임 이론이란?

게임 이론은 한 사람의 행위가 다른 사람의 행위에 미치는 상호의존적, 전략적 상황에서 의사결정이 어떻게 이루어지는가를 연구하는 이론이다.
게임 이론의 중요한 특징 가운데 하나는 의사결정자들이 합리적으로 선택한다는 점이다.
게임 이론은 폰 노이만과 모르겐슈테른이 1944년에 공저한
『게임 이론과 경제 행태(Theory of Games and Economic Behavior)』가
발간되면서 본격적으로 발전되기 시작했다.

죄수딜레마

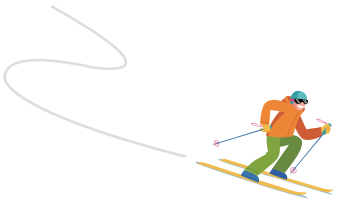
두 명의 사건 용의자가 체포되어 서로 다른 취조실에서 격리되어 심문을 받으며 서로 간의 의사소통은 불가능하다. 이들에게 자백여부에 따라 다음의 선택이 가능하다.

- 둘 중 하나가 배신하여 죄를 자백하면 자백한 사람은 즉시 풀어주고, 나머지 한 명이 10년을 복역해야 한다.
- 둘 모두 서로를 배신하여 죄를 자백하면 둘 모두 5년을 복역한다.
- 둘 모두 죄를 자백하지 않으면 둘 모두 6개월을 복역한다.

이 게임의 죄수는 상대방의 결과는 고려하지 않고 자신의 이익만을 최대화한다는 가정 하에 움직이게 된다.
이때, 언제나 침묵보다는 자백을 통해 더 많은 이익을 얻으므로 참가자 입장에서는 상대방의 선택에 상관없이 자백을 하는 쪽이 언제나 이익이므로 합리적인 참가자라면 자백을 택한다.
결국 결과는 둘 모두 5년을 복역하는 것이고, 이는 둘 모두가 자백하지 않고 6개월을 복역하는 것보다 나쁜 결과가 된다.

구분	죄수 B의 침묵	죄수 B의 자백
죄수 A의 침묵	죄수 A, B 각자 6개월씩 복역	죄수 A 10년 복역, 죄수 B 석방
죄수 A의 자백	죄수 A 석방, 죄수 B 10년 복역	죄수 A, B 각자 5년씩 복역





Ⅱ 방정식과 부등식

04 복소수
05 이차방정식
06 이차방정식과 이차함수
07 여러 가지 방정식
08 여러 가지 부등식

아인슈타인의 상대성이론에서
$E=mc^2$이라는 간단한 방정식을 통해
핵폭탄이나 원자력발전소가
존재할 수 있었고,
뉴턴의 만유인력에서
$F=\frac{GMm}{r^2}$이라는
간단한 방정식으로
행성 사이의 힘을
표현할 수 있었습니다.
그래서 방정식은
수학의 꽃이라 합니다.





04 복소수

개념 강의▶

중요도 ★★○

1 허수단위 i

(1) **허수단위**

제곱하여 -1이 되는 수 중 하나를 i로 나타내고, 이를 **허수단위**라 한다.

즉, $i^2=-1$, $\sqrt{-1}=i$

(2) $i=\sqrt{-1}$, $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=1$

2 복소수의 정의❶

(1) a, b가 실수일 때, $a+bi$의 꼴로 나타낼 수 있는 수를 **복소수**라 하고, a를 **실수부분**, b를 **허수부분**이라 한다.

a, b가 실수일 때, 복소수 $a+bi$를 분류하면 다음과 같다.

$$a+bi \begin{cases} \text{실수 } a & (b=0\text{일 때}) \\ \text{허수 } a+bi & (b\neq 0\text{일 때}) \end{cases}$$

❶ '복소수'와 '허수'는 서로 다른 말이다.
복소수 $a+bi$에서 허수부분이 0이면 실수이다.

(2) **허수의 성질**

① 실수부분이 0인 허수를 **순허수**라 한다.

실수	㉠ 0, $\sqrt{2}$, $\frac{3}{4}$, $\cdots$
순허수	㉠ $-3i$, $2i$, $\sqrt{7}i$, $\cdots$
순허수가 아닌 허수	㉠ $-1+i$, $3+8i$, $\cdots$

② 허수는 대소 관계를 갖지 않는다.

3 두 복소수가 서로 같을 조건

a, b, c, d가 실수일 때,

(1) $a+bi=0 \Longleftrightarrow a=0,\ b=0$

(2) $a+bi=c+di \Longleftrightarrow a=c,\ b=d$

First Class Tip

*** 두 복소수가 서로 같을 조건의 확장**

a, b, c, d가 실수이고 x가 허수일 때,
$a+bx=c+dx \Longleftrightarrow a=c,\ b=d$

4 복소수의 기본 연산❷

a, b, c, d가 실수일 때,

(1) **덧셈** : $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$

(2) **뺄셈** : $(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$

(3) **곱셈** : $(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$

(4) **나눗셈** : $\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$ (단, $c+di\neq 0$)

❷ 복소수에 대하여 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙이 모두 성립한다.

5 켤레복소수

(1) **켤레복소수**

복소수 $z=a+bi$ (a, b는 실수)에 대하여 $a-bi$를 z의 **켤레복소수**라 하고 $\overline{z}$로 나타낸다. 즉, $\overline{z}=a-bi$❸

① $z+\overline{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a$ (실수)

② $z-\overline{z}=(a+bi)-(a-bi)=2bi$ (순허수 또는 0)

③ $z\overline{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$ (음이 아닌 실수)

④ $\overline{(\overline{z})}=\overline{(a-bi)}=a+bi=z$

❸ 복소수 z에 대하여
① $\overline{z}$는 'z bar'라 읽는다.
② 복소수와 켤레복소수의 합과 곱은 항상 실수이다.

(2) **켤레복소수의 성질**

두 복소수 α, β에 대하여

① $\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}$ ② $\overline{\alpha-\beta}=\overline{\alpha}-\overline{\beta}$

③ $\overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\times\overline{\beta}$ ④ $\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}=\frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}$ (단, $\beta\neq0$)

⑤ $\overline{\alpha^n}=(\overline{\alpha})^n$

First Class Tip

*** 복소수와 켤레복소수의 성질의 확장**

$\overline{z}=z \iff z$는 실수
$\overline{z}=-z \iff z$는 순허수 또는 0
$z^2\geq0\iff z$는 실수
$z^2<0 \iff z$는 순허수

6 음의 실수의 제곱근의 계산

① $a>0$이면 $\sqrt{-a}=\sqrt{a}i$

② $a<0$이면 $\sqrt{-a}=-\sqrt{a}i$❹

③ $a<0$, $b<0$이면 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$

$\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$이면 $a<0$, $b<0$ 또는 $ab=0$

④ $a>0$, $b<0$이면 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}$

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}$이면 $a>0$, $b<0$ 또는 $a=0$

❹ $a<0$일 때, $a\sqrt{b}=-\sqrt{a^2b}$

First Class Tip

*** 방정식 $x^3-1=0$의 허근의 성질**

$\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$일 때,

① $\omega^3=1$ ② $\omega^2+\omega+1=0$

③ $\omega+\overline{\omega}=-1$ ④ $\omega\overline{\omega}=1$

⑤ $\omega^2=\overline{\omega}$ ($\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수)



FIRST CLASS

핵심 유형 연습

◀ 동영상 강의

핵심유형 01 복소수의 연산

01 출제율 ❯❯❯

함수 $f(x)=\frac{1+x}{1-x}$ $(x\neq 1)$에 대하여

$f\left(\frac{1-i}{1+i}\right)+f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$의 값은?

✓① 0 ② $-2i$ ③ $2i$
④ -2 ⑤ 2

해 $\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$

$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$이므로

$f\left(\frac{1-i}{1+i}\right)+f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)=f(-i)+f(i)=\frac{1-i}{1+i}+\frac{1+i}{1-i}$

$=-i+i=0$

02 출제율 ❯❯❯

$z=\frac{3+i}{1-i}$일 때, $2z^3-4z^2+6z+8$의 값은?

① $8+4i$ ② $8-4i$ ③ $4+8i$
✓④ $4-8i$ ⑤ $4+4i$

해 $z=\frac{3+i}{1-i}=\frac{(3+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{2+4i}{2}=1+2i$에서 $z-1=2i$

양변을 제곱하여 정리하면

$z^2-2z+1=-4$, $z^2-2z+5=0$

$\therefore 2z^3-4z^2+6z+8=2z(z^2-2z+5)-4z+8$

$=0-4(1+2i)+8=4-8i$

03 출제율 ❯❯❯

$x=\frac{2i}{i+1}$, $y=\frac{2i}{i-1}$일 때, [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

| 보기 |

ㄱ. $x+y=2$
ㄴ. $x^2+y^2=0$
ㄷ. $x^3+y^3=-2$

① ㄱ ✓② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해 ㄱ. $x+y=(1+i)+(1-i)=2$ (참)

ㄴ. $xy=(1+i)(1-i)=2$이므로

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=2^2-2\times 2=0$ (참)

ㄷ. $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

$=2^3-3\times 2\times 2=-4$ (거짓)

핵심유형 02 두 복소수가 서로 같은 조건

04 출제율 ❯❯❯

복소수 $z=a+bi$ (a, b는 양의 실수)가 $z^2=i$를 만족시킬 때, $z+\frac{1}{z}$의 값은?

① 1 ✓② $\sqrt{2}$ ③ 2
④ $-\sqrt{2}$ ⑤ -2

해 $z^2=(a+bi)^2=(a^2-b^2)+2abi=i$

복소수가 같을 조건에서 $a^2-b^2=0$, $2ab=1$

$a^2-b^2=0$에서 $a=b$ 또는 $a=-b$

그런데 a, b가 양의 실수이므로 $a=b$

$2ab=1$에서 $2a^2=1$ $\therefore a=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $b=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ($\because a$, b는 양의 실수)

$z=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$에서 $z-\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}i$

양변을 제곱하면 $z^2-\sqrt{2}z+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$, $z^2+1=\sqrt{2}z$

05 출제율 ❯❯❯ 양변을 z로 나누면 $z+\frac{1}{z}=\sqrt{2}$

실수 x, y에 대하여 $(\sqrt{3}+i)^{10}=x+yi$가 성립할 때, $\left(\frac{y}{x}\right)^2$의 값을 구하시오. 답 3

해 $(\sqrt{3}+i)^2=2+2\sqrt{3}i$

$(\sqrt{3}+i)^3=(2+2\sqrt{3}i)(\sqrt{3}+i)=8i$

$(\sqrt{3}+i)^9=(8i)^3=-2^9i$

$(\sqrt{3}+i)^{10}=(\sqrt{3}+i)^9(\sqrt{3}+i)=2^9-2^9\sqrt{3}i$

$\therefore \left(\frac{y}{x}\right)^2=(-\sqrt{3})^2=3$

06 출제율 ❯❯❯

복소수 $z=1+2i$에 대하여

$z^2(z-1)-z(z-1)(2z-1)=a+bi$

일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 실수이다.) 답 12

해 $z^2(z-1)-z(z-1)(2z-1)=z(z-1)\{z-(2z-1)\}$

$=-z(z-1)^2$

그런데 $z=1+2i$에서 $z-1=2i$이므로

$-z(z-1)^2=-z(2i)^2=4z=4(1+2i)=4+8i$

$\therefore a+b=4+8=12$

핵심유형 03 켤레복소수

07 출제율 ❯❯❯

$\overline{z-zi}=2+i$를 만족시키는 복소수 z의 실수부분을 x, 허수부분을 y라 할 때, x^2+y^2의 값은?
(단, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{2}$ ✓③ $\frac{5}{2}$
④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{9}{2}$

해 $z=x+yi$ (x, y는 실수)이므로
$z-zi=x+yi-(x+yi)i$
$=\overline{x+yi}-\overline{(x+yi)}\times\overline{i}=x-yi-(x-yi)\times(-i)$
$=x-yi+xi+y=x+y+(x-y)i=2+i$
$x+y=2$, $x-y=1$이므로 $x=\frac{3}{2}$, $y=\frac{1}{2}$
$\therefore x^2+y^2=\frac{9}{4}+\frac{1}{4}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$

08 출제율 ❯❯❯

실수 a, b, c에 대하여 다항식 $f(x)=ax^2+bx+c$가
$f(1+i)=p-4i$, $f(1-i)=3+qi$
를 만족시킨다. 실수 p, q에 대하여 $p+q$의 값은?

① 5 ✓② 7 ③ 9
④ 11 ⑤ 13

해 $z=1+i$라 하면 $f(z)=az^2+bz+c=p-4i$
이때, $\overline{z}=\overline{1+i}=1-i$이므로
$f(1-i)=f(\overline{z})=a(\overline{z})^2+b\overline{z}+c=\overline{az^2+bz+c}$
$=\overline{p-4i}=p+4i=3+qi$
따라서 복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$p=3$, $q=4$ $\therefore p+q=7$

09 출제율 ❯❯❯

복소수 $z=a+bi$ (a, b는 0이 아닌 실수)에 대하여 $iz=-\overline{z}$일 때, [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

| 보기 |
ㄱ. $z+\overline{z}=2b$
ㄴ. $i\overline{z}=z$
ㄷ. $\frac{\overline{z}}{z}+\frac{z}{\overline{z}}=0$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ✓⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해 $z=a+bi$에 대하여
$iz=-\overline{z}$에서 $a=b$
ㄱ. $z+\overline{z}=(a+ai)+(a-ai)=2a=2b$이다. (참)
ㄴ. $iz=-\overline{z}$의 양변에 $-i$를 곱하면 $z=i\overline{z}$이다. (참)
ㄷ. $iz=-\overline{z}$의 양변을 제곱하면 $-z^2=(\overline{z})^2$
즉, $z^2+(\overline{z})^2=0$
양변을 $z\overline{z}$로 나누면 $\frac{z}{\overline{z}}+\frac{\overline{z}}{z}=0$ (참)

핵심유형 04 복소수의 거듭제곱

10 출제율 ❯❯

$f(n)=i^n+i^{n+1}$이라 할 때,
$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(99)$의 값은?

① 0 ② 2 ③ $1+i$
④ $1-i$ ✓⑤ $-1-i$

해 $i^1=i$, $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=1$, $i^5=i$, …이므로
$i+i^2+i^3+i^4=0$
따라서 $i^n+i^{n+1}+i^{n+2}+i^{n+3}=i^{n-1}(i+i^2+i^3+i^4)=0$이다.
$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(99)$
$=i+i^2+i^2+i^3+i^3+i^4+\cdots+i^{99}+i^{100}$
$=2(i+i^2+i^3+\cdots+i^{100})-i-i^{100}$
$=-i-(i^4)^{25}=-1-i$

11 출제율 ❯❯❯

등식 $(1+i)^{2n}=2^ni$를 만족시키는 100 이하의 자연수 n의 개수를 구하시오. 답 25

해 $(1+i)^2=1+2i-1=2i$에서
$(1+i)^{2n}=(2i)^n=2^ni^n$
즉, $2^ni^n=2^ni$이므로 $i^n=i$
$\therefore n=4k+1$ (k는 음이 아닌 정수)
$1\le n\le100$에서 $1\le4k+1\le100$
$0\le k\le\frac{99}{4}=24.75$
$\therefore k=0, 1, 2, \cdots, 24$
따라서 자연수 n의 개수는 25이다.

12 출제율 ❯❯❯

복소수 α, β를 $\alpha=\frac{\sqrt{3}i+1}{2}$, $\beta=\frac{\sqrt{3}i-1}{2}$이라 할 때, $\alpha^m\beta^n=-1$을 만족시키는 10 이하의 자연수 m, n에 대하여 $m+2n$의 최댓값을 구하시오. 답 27

해 $\alpha^2=\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^2=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}=\beta$, $\alpha^3=\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^3=i$, $\alpha^{12}=(\alpha^3)^4=i^4=1$
이때, $\alpha^m\beta^n=\alpha^{m+2n}=i$를 만족시키는 $m+2n$의 값 중 최소인 자연수는 3이다.
또한, $m+2n=12k+3$ ($k=0, 1, 2, \cdots$)이므로
$m+2n=3, 15, 27, 39, \cdots$
따라서 10 이하의 자연수 m, n에 대하여 $m+2n\le30$이므로
$m+2n$의 최댓값은 27이다.

정답 및 해설 42~43p

핵심유형 05 음의 실수의 제곱근의 계산

13 출제율 ❯❯❯

실수 x, y에 대하여 $xy<0$, $x-y<0$일 때, [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

| 보기 |

ㄱ. $x\sqrt{y}=\sqrt{x^2y}$
ㄴ. $y\sqrt{x}=\sqrt{xy^2}$
ㄷ. $\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$

✓① ㄴ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해 $x<0$, $y>0$
ㄱ. $\sqrt{x^2}\sqrt{y}=\sqrt{x^2y}$, $-x\sqrt{y}=\sqrt{x^2y}$
$\therefore x\sqrt{y}=-\sqrt{x^2y}$ (거짓)
ㄴ. $\sqrt{x}\sqrt{y^2}=\sqrt{xy^2}$
$\therefore y\sqrt{x}=\sqrt{xy^2}$ (참)
ㄷ. $x<0$, $y>0$이므로 $\sqrt{\dfrac{y}{x}}=-\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$ (거짓)

14 출제율 ❯❯❯

0이 아닌 실수 a, b에 대하여 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$일 때, [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

| 보기 |

ㄱ. $\sqrt{-a}\sqrt{b}=\sqrt{-ab}$
ㄴ. $\sqrt{a}\sqrt{-b}=\sqrt{-ab}$
ㄷ. $\sqrt{-a}\sqrt{-b}=\sqrt{ab}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
✓④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$에서 $a>0$, $b<0$ ($\because a\neq0$)
ㄱ. $-a<0$, $b<0$이므로 $\sqrt{-a}\sqrt{b}=-\sqrt{-ab}$ (거짓)
ㄴ. $a>0$, $-b>0$이므로 $\sqrt{a}\sqrt{-b}=\sqrt{-ab}$ (참)
ㄷ. $-a<0$, $-b>0$이므로 $\sqrt{-a}\sqrt{-b}=\sqrt{ab}$ (참)

15 출제율 ❯❯❯

$x+y=-3$, $xy=1$을 만족시키는 실수 x, y에 대하여 $\sqrt{\dfrac{y}{x}}+\sqrt{\dfrac{x}{y}}$의 값을 구하시오. 답 3

해 $x+y=-3<0$, $xy=1>0$에서 $x<0$, $y<0$
$x<0$, $y<0$이면 $\sqrt{x}\sqrt{y}=-\sqrt{xy}$이므로

$$\sqrt{\frac{y}{x}}+\sqrt{\frac{x}{y}}=\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}=\frac{(\sqrt{y})^2+(\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}\sqrt{y}}$$
$$=\frac{x+y}{-\sqrt{xy}}=\frac{-3}{-1}=3$$

핵심유형 06 복소수의 성질

16 출제율 ❯❯❯

복소수 α, β의 켤레복소수를 각각 $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$라 할 때, [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

| 보기 |

ㄱ. $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$가 모두 실수이면 $\beta=\overline{\alpha}$이다.
ㄴ. $\alpha+\overline{\beta}=0$이면 $\overline{\alpha}+\beta=0$이다.
ㄷ. $\alpha\overline{\beta}=1$이면 $\overline{\alpha}+\dfrac{1}{\alpha}=\overline{\beta}+\dfrac{1}{\beta}$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
✓④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해 ㄱ. [반례] $\alpha=1$, $\beta=2$이면 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$는 모두 실수이지만 $\beta\neq\overline{\alpha}$이다. (거짓)
ㄴ. $\overline{\alpha}+\overline{\beta}=\overline{\alpha+\beta}=\overline{0}=0$ (참)
ㄷ. $\alpha\overline{\beta}=1$이면 $\overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\beta=1$

$$\overline{\alpha}+\frac{1}{\alpha}-\left(\overline{\beta}+\frac{1}{\beta}\right)=\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\alpha}-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)=0 \quad \therefore \overline{\alpha}+\frac{1}{\alpha}=\overline{\beta}+\frac{1}{\beta}$$ (참)

17 출제율 ❯❯❯

실수 x, y에 대하여 복소수
$z=(x-y+2)+(x+y-8)i$
가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $z\overline{z}=4$
(나) z^2은 실수이다.

x^2+y^2의 최댓값을 구하시오. 답 52

해 조건 (가)에서 $z\overline{z}=(x-y+2)^2+(x+y-8)^2=4$
조건 (나)에서 z^2이 실수이려면 z는 실수이거나 순허수이다.
(i) $x-y+2=0$일 때, $0+(2x-6)^2=4$ $\therefore x=2$, $y=4$ 또는 $x=4$, $y=6$
(ii) $x+y-8=0$일 때, $(2x-6)^2+0=4$가 되어 (i)과 같아진다.
따라서 x^2+y^2의 최댓값은 $x=4$, $y=6$일 때, $4^2+6^2=52$이다.

18 출제율 ❯❯❯

복소수 z_1, z_2의 켤레복소수를 각각 $\overline{z_1}$, $\overline{z_2}$라 할 때, [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

| 보기 |

ㄱ. $z_1-z_2>0$이면 $z_1>z_2$이다.
ㄴ. $z_1>z_2$이면 $z_1^2>z_2^2$이다.
ㄷ. $z_1>z_2$이면 $\overline{z_1}>\overline{z_2}$이다.

① ㄱ ② ㄴ ✓③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

해 ㄱ. [반례] $z_1=1+i$, $z_2=i$이면 $z_1-z_2=1>0$이지만 허수는 대소 관계를 갖지 않으므로 z_1과 z_2의 대소 관계를 비교할 수 없다. (거짓)
ㄴ. [반례] $z_1>z_2$이면 z_1, z_2 모두 실수이다. 그러나 $z_1=-1$, $z_2=-2$이면 $z_1>z_2$이지만 $z_1^2<z_2^2$이다. (거짓)
ㄷ. $z_1>z_2$이면 z_1, z_2 모두 실수이므로 $z_1=\overline{z_1}$, $z_2=\overline{z_2}$이다.
$\therefore \overline{z_1}>\overline{z_2}$ (참)



FIRST CLASS

실전 유형 훈련

◀ 동영상 강의

핵심유형 01 복소수의 연산

19

$i+2i^2+3i^3+4i^4+\cdots+100i^{100}$의 값은?

① $50+51i$ ② $50+50i$ ③ $50-51i$
✓④ $50-50i$ ⑤ $-50-50i$

해 $i+2i^2+3i^3+4i^4+\cdots+100i^{100}$
$=(i+2i^2+3i^3+4i^4)+(5i^5+6i^6+7i^7+8i^8)+$
$\cdots+(97i^{97}+98i^{98}+99i^{99}+100i^{100})$
$=(i-2-3i+4)+(5i-6-7i+8)+\cdots+(97i-98-99i+100)$
$=\underbrace{(2-2i)+(2-2i)+\cdots+(2-2i)}_{25개}$
$=25\times(2-2i)=50-50i$

20

실수 a, b에 대하여 $\frac{a+bi}{a-bi}+\frac{b+ai}{b-ai}=i$일 때, $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$의 값을 구하시오. 답 4

해 $\frac{b+ai}{b-ai}=\frac{(b+ai)i}{(b-ai)i}=\frac{-a+bi}{a+bi}=-\frac{a-bi}{a+bi}$이므로
$\frac{a+bi}{a-bi}+\frac{b+ai}{b-ai}=\frac{a+bi}{a-bi}-\frac{a-bi}{a+bi}$
$=\frac{4abi}{a^2+b^2}=i$
에서 $a^2+b^2=4ab$
$\therefore \frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{a^2+b^2}{ab}=4$

21

0이 아닌 실수 a, b에 대하여 $f(a,b)=\frac{b-ai}{a+bi}$라 할 때, $f(1,2)+f(3,4)+f(5,6)+f(7,8)+f(9,10)$의 값은?

① -5 ✓② $-5i$ ③ $5-5i$
④ $5i$ ⑤ 5

해 $f(a,b)=\frac{b-ai}{a+bi}=\frac{(b-ai)(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)}=\frac{-(a^2+b^2)i}{a^2+b^2}=-i$
따라서 $f(1,2)=f(3,4)=f(5,6)=\cdots=f(9,10)=-i$이므로
$f(1,2)+f(3,4)+f(5,6)+f(7,8)+f(9,10)=5\times(-i)$
$=-5i$

22

복소수 $z=\frac{-1+2i}{1-i}$일 때, $2z^3+6z^2+7z+3$의 값은?

① 2 ② 1 ③ $1+i$
✓④ i ⑤ $2i$

해 $z=\frac{-1+2i}{1-i}=\frac{(-1+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{-3+i}{2}$에서
$2z+3=i$
양변을 제곱하여 정리하면
$2z^2+6z+5=0$
$\therefore 2z^3+6z^2+7z+3=z(2z^2+6z+5)+2z+3$
$=0+(2z+3)=i$

23

복소수 α, β에 대하여
$\alpha-\beta=2i$, $\alpha^2+\beta^2=0$, $\alpha^3+\beta^3=-4$
를 만족시킬 때, $\frac{\alpha}{\beta}$의 값은?

✓① i ② $-i$ ③ $2-3i$
④ $\frac{1-i}{2}$ ⑤ $\frac{1+i}{2}$

해 $\alpha-\beta=2i$에서 $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta=-4$
이때, $\alpha^2+\beta^2=0$이므로 $\alpha\beta=2$
또, $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta=0+4=4$이므로
$\alpha+\beta=2$ 또는 $\alpha+\beta=-2$
한편, $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=-4$에서 $\alpha+\beta=2$
$\alpha=1+i$, $\beta=1-i$이므로 $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{1+i}{1-i}=i$

08 DAY

정답 및 해설 44~45p

핵심유형 02 두 복소수가 서로 같을 조건

24

복소수 $\frac{1}{x+yi}$의 실수부분을 a, 허수부분을 b라 할 때, $a^2+b^2=5$를 만족시킨다. 이때, $\frac{1}{x^2+y^2}$의 값을 구하시오. (단, x, y는 실수이다.) 답 5

해 $x+yi=\frac{1}{a+bi}=\frac{a-bi}{a^2+b^2}=\frac{a-bi}{5}=\frac{a}{5}-\frac{b}{5}i$

$x^2+y^2=\frac{a^2+(-b)^2}{5^2}=\frac{5}{5^2}=\frac{1}{5}$

$\therefore \frac{1}{x^2+y^2}=5$

25

0이 아닌 복소수 $z=a+bi$ (a, b는 실수)에 대하여 복소수 $\hat{z}$를 $\hat{z}=b-ai$라 하자. 실수가 아닌 복소수 z에 대하여

$(m-2i)z=(n+i)\hat{z}$

가 성립할 때, 실수 m, n에 대하여 $m+n$의 값을 구하시오. 답 3

해 $iz=i(a+bi)=-b+ai=-\hat{z}$이므로 $\hat{z}=-iz$

$(m-2i)z=(1-ni)z$

$m-2i=1-ni$이므로 $m=1$, $n=2$

$\therefore m+n=3$

26

복소수 $z=a+bi$가 다음 조건을 만족시킬 때, $a^2+b^2+c^2$의 값을 구하시오. (단, a, b, c는 실수이다.) 답 14

(가) $(z+2-i)^2<0$

(나) $z^2=c+4i$

해 조건 (가)에서 $z+2-i$는 순허수이므로

$z+2-i=a+bi+2-i=(a+2)+(b-1)i$에서

$a+2=0$, $b-1\neq 0$ $\therefore a=-2$, $b\neq 1$

또한, 조건 (나)에서 $(-2+bi)^2=c+4i$이므로

$4-4bi-b^2=c+4i$

$\therefore (4-b^2)-4bi=c+4i$

$\therefore a^2+b^2+c^2=(-2)^2+(-1)^2+3^2=14$

핵심유형 03 켤레복소수

27

복소수 z와 그 켤레복소수 $\overline{z}$에 대하여

$z-\overline{z}=2i$, $\frac{\overline{z}}{z}=-i$가 성립할 때, $z\overline{z}$의 값은?

① 1 ✓② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5

해 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\overline{z}=a-bi$이다.

$z-\overline{z}=2i$에서 $2bi=2i$ $\therefore b=1$ … ㉠

$\frac{\overline{z}}{z}=-i$에서 $\overline{z}=-iz$

$a-bi=-i(a+bi)=b-ai$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여 $a=b$ … ㉡

㉠, ㉡에서 $a=b=1$ $\therefore z=1+i$

$\therefore z\overline{z}=(1+i)(1-i)=1+1=2$

28

실수 a, b, c, d에 대하여

$\overline{(a+bi)^2}=3+i$, $(a-bi)^4=\frac{c+di}{3+i}$

일 때, $c+d$의 값을 구하시오. 답 44

(단, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

해 $z=a+bi$라 하면 $\overline{(a+bi)^2}=\overline{z^2}=(\overline{z})^2$이므로 $(\overline{z})^2=3+i$

이때, $(a-bi)^4=(\overline{z})^4=(3+i)^2=8+6i$이므로

$8+6i=\frac{c+di}{3+i}$

$c+di=(8+6i)(3+i)=18+26i$

$\therefore c+d=18+26=44$

29

복소수 z가 다음 조건을 만족시킬 때, $(z-2i)(\overline{z-2i})$의 값은? (단, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

(가) $(z-\overline{z})i=-2$

(나) $z\overline{z}=5$

① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ✓⑤ 5

해 실수 a, b에 대하여 $z=a+bi$라 하면

조건 (가)에서 $(z-\overline{z})i=\{a+bi-(a-bi)\}i=-2b=-2$

$\therefore b=1$

조건 (나)에서

$z\overline{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2=a^2+1^2=5$ $\therefore a^2=4$

$\therefore (z-2i)(\overline{z-2i})=\{a+(b-2)i\}\{a-(b-2)i\}$

$=a^2+(b-2)^2=4+1=5$

30

복소수 z에 대하여 $z^2=3+4i$일 때, $z\bar{z}$의 값을 구하시오. (단, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

답 5

해 $z^2=3+4i$에서 $\overline{z^2}=\overline{3+4i}=3-4i$
$z^2\overline{z^2}=(3+4i)(3-4i)=9+16=25$이므로
$(z\bar{z})^2=25$ $\therefore z\bar{z}=5$ 또는 $z\bar{z}=-5$
이때, $z\bar{z}\geq 0$이므로 $z\bar{z}=5$

31

복소수 z의 켤레복소수가 $\bar{z}$일 때, 다음 조건을 만족시키는 복소수 z는?

(가) $(2+3i)z+(2-3i)\bar{z}=2$
(나) $(1+2i)z+(-1+2i)\bar{z}=10i$

① $1+2i$ ② $1-2i$ ③ $1+i$
✓④ $2+i$ ⑤ $2-i$

해 조건 (가)에서 $(2+3i)z+\overline{(2+3i)z}=2$이므로
$(2+3i)z$의 실수부분이 1이다.
조건 (나)에서 $(1+2i)z-\overline{(1+2i)z}=10i$이므로
$(1+2i)z$의 허수부분이 5이다.
$z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면
$(2+3i)(a+bi)$의 실수부분은 $2a-3b=1$
$(1+2i)(a+bi)$의 허수부분은 $2a+b=5$
따라서 $a=2$, $b=1$이므로 $z=2+i$

32

복소수 α, β가
$\alpha\bar{\alpha}=1$, $\beta\bar{\beta}=1$, $\alpha+\beta=1+i$
를 만족시킬 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값은?

① 1 ✓② 0 ③ -1
④ i ⑤ $-i$

해 $\alpha+\beta=1+i$ … ㉠에서 $\overline{\alpha+\beta}=\overline{1+i}=1-i$
$\therefore \bar{\alpha}+\bar{\beta}=1-i$ … ㉡
한편, $\alpha\bar{\alpha}=1$, $\beta\bar{\beta}=1$에서 $\bar{\alpha}=\frac{1}{\alpha}$, $\bar{\beta}=\frac{1}{\beta}$ … ㉢
㉢을 ㉡에 대입하면 $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1-i$이므로
$\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{1+i}{\alpha\beta}=1-i$
$\therefore \alpha\beta=\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=i$ … ㉣
따라서 ㉠, ㉣에 의하여
$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(1+i)^2-2i=0$

핵심유형 04 복소수의 거듭제곱

33

실수 x, y에 대하여 $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{1+i}\right)^{12}=x+yi$일 때, $x+y$의 값은?

✓① -2^6 ② $-\frac{1}{2^6}$ ③ 1
④ $\frac{1}{2^6}$ ⑤ 2^6

해 $(1+i)^2=1+2i+i^2=2i$이므로 $(1+i)^{12}=(2i)^6=-2^6$
$(\sqrt{3}-i)^2=3-2\sqrt{3}i+i^2=2-2\sqrt{3}i$
$(\sqrt{3}-i)^3=(2-2\sqrt{3}i)(\sqrt{3}-i)=-8i$
$\therefore (\sqrt{3}-i)^{12}=(-8i)^4=2^{12}$
$\left(\frac{\sqrt{3}-i}{1+i}\right)^{12}=\frac{2^{12}}{-2^6}=-2^6$이므로 $x+y=-2^6+0=-2^6$

34

자연수 n에 대하여 복소수 z_n을
$z_1=1+i$, $z_{n+1}=(1-i)z_n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$
이라 할 때, z_{50}의 값은?

① 2^{50} ✓② 2^{25} ③ 2
④ -2^{25} ⑤ -2^{50}

해 $z_1=1+i$
$z_2=(1-i)z_1=(1-i)(1+i)$
$z_3=(1-i)z_2=(1-i)^2(1+i)$
$z_4=(1-i)z_3=(1-i)^3(1+i)$
⋮
$\therefore z_{50}=(1-i)^{49}(1+i)$
$=(1-i)^{48}(1-i)(1+i)$
$=\{(1-i)^2\}^{24}\times(1-i^2)$
$=(-2i)^{24}\times 2=2^{24}\times 2=2^{25}$

35

교육청 기출

복소수 $z=\frac{i-1}{\sqrt{2}}$에 대하여
$z^n+(z+\sqrt{2})^n=0$
을 만족시키는 25 이하의 자연수 n의 개수를 구하시오.

답 6

(단, $i=\sqrt{-1}$)

해 $z^2=-i$, $(z+\sqrt{2})^2=i$
$n=2$, 6일 때, $z^n+(z+\sqrt{2})^n=0$이고
$z^8=1$, $(z+\sqrt{2})^8=1$이다.
따라서 $z^n+(z+\sqrt{2})^n=0$을 만족시키는 25 이하의 자연수 n의 개수는
2, 6, 10, 14, 18, 22로 모두 6이다.

정답 및 해설 45~47p

36

자연수 n에 대하여 $f(n)=\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^n$이라 할 때,

[보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

| 보기 |

ㄱ. $f(2)=-1$
ㄴ. $f(n+2)=-f(n)$
ㄷ. $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(99)=-f(100)$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ✓⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해 $\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$이므로

$f(n)=\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^n=(-i)^n$

ㄱ. $f(2)=(-i)^2=-1$ (참)

ㄴ. $f(n+2)=(-i)^{n+2}=(-i)^2(-i)^n=-(-i)^n=-f(n)$ (참)

ㄷ. $(-i)^n$은 $n=4k$, $n=4k+1$, $n=4k+2$, $n=4k+3$ (k는 음이 아닌 정수)인 경우에 각각 1, $-i$, -1, i이다. (참)

38

다음 계산 과정에서 등식이 성립하지 않는 것이 처음으로 나타나는 곳은?

$x>0$, $y<0$일 때,

$$\sqrt{\frac{x}{y}}\overset{㉠}{=}\sqrt{\frac{x}{-y}\times(-1)}\overset{㉡}{=}\sqrt{\frac{x}{-y}}i\overset{㉢}{=}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{-y}}i\overset{㉣}{=}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}i}i\overset{㉤}{=}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$$

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢
✓④ ㉣ ⑤ ㉤

해 ㉢ 이후의 $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{-y}}i$에서 $y<0$이므로 $-y>0$이다.

$\therefore \sqrt{-y}\neq\sqrt{y}i$

핵심유형 05 음의 실수의 제곱근의 계산

37

$ab\neq0$인 실수 a, b에 대하여

$$\sqrt{\frac{1}{a}}=-\frac{1}{\sqrt{a}},\ \sqrt{-\frac{1}{b}}=\frac{1}{\sqrt{-b}}$$

이 성립할 때, $\sqrt{\frac{b}{a}}\sqrt{\frac{a}{b}}$를 간단히 한 것은?

✓① 1 ② -1 ③ i
④ $-i$ ⑤ $\frac{1}{i}$

해 $\sqrt{\frac{1}{a}}=-\frac{1}{\sqrt{a}}$에 의하여 $a<0$

$\sqrt{-\frac{1}{b}}=\sqrt{\frac{1}{-b}}=\frac{1}{\sqrt{-b}}$에 의하여 $-b>0$, 즉 $b<0$

따라서 $\frac{b}{a}>0$, $\frac{a}{b}>0$이므로

$\sqrt{\frac{b}{a}}\sqrt{\frac{a}{b}}=\sqrt{\frac{b}{a}\times\frac{a}{b}}=1$

39

$abcd=5$를 만족시키는 실수 a, b, c, d에 대하여 $\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c}\sqrt{d}$는 서로 다른 두 값 α, β를 갖는다. 이때, $\alpha\beta$의 값을 구하시오. (단, $\alpha<\beta$) 답 -5

해 $abcd=5$이므로 a, b, c, d 중 음수는 0개 또는 2개 또는 4개이다.

(i) $a>0$, $b>0$, $c>0$, $d>0$일 때,
$\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c}\sqrt{d}=\sqrt{abcd}=\sqrt{5}$

(ii) $a>0$, $b>0$, $c<0$, $d<0$일 때,
$\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c}\sqrt{d}=\sqrt{ab}\times(-\sqrt{cd})$
$=-\sqrt{abcd}=-\sqrt{5}$

(iii) $a<0$, $b<0$, $c<0$, $d<0$일 때,
$\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c}\sqrt{d}=(-\sqrt{ab})\times(-\sqrt{cd})$
$=\sqrt{abcd}=\sqrt{5}$

(i)~(iii)에 의하여 α, β는 $-\sqrt{5}$, $\sqrt{5}$이므로 $\alpha\beta=-5$

핵심유형 06-1 복소수의 성질

40

복소수 z와 그 켤레복소수 $\overline{z}$에 대하여 [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

| 보기 |

ㄱ. $z\overline{z}=0$이면 $z=0$이다.
ㄴ. $z+\overline{z}=0$이면 $z^2<0$이다.
ㄷ. $z^2+\overline{z^2}=0$이면 $z=0$이다.

✓① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해 ㄱ. $z\overline{z}=0$이면 $z=0$ 또는 $\overline{z}=0$이다.
이때, 0의 켤레복소수는 0이므로 $z=\overline{z}=0$ (참)
ㄴ. $z+\overline{z}=0$이면 z는 순허수 또는 $z=0$이다.
$\therefore z^2\leq 0$ (거짓)
ㄷ. $z^2+\overline{z^2}=0$이면 z^2은 순허수 또는 $z^2=0$이다.
이때, z^2이 순허수이면 $z\neq 0$ (거짓)

41

복소수 $z=(1+i)x^2-(1+3i)x-(2-2i)$에 대하여 z^2이 음의 실수가 되었을 때, 실수 x의 값은?

✓① -1 ② 1 ③ 2
④ -1 또는 2 ⑤ 1 또는 2

해 $z=(x^2-x-2)+(x^2-3x+2)i$의 제곱이 음의 실수이므로
z는 순허수이다.
즉, $x^2-x-2=0$이고 $x^2-3x+2\neq 0$이므로
$x^2-x-2=0$에서 $(x+1)(x-2)=0$ $\therefore x=-1$ 또는 $x=2$
이때, $x=2$이면 $x^2-3x+2=0$이므로 $z=0$이 되어 모순이 된다.
$\therefore x=-1$

42

$(n+i)^4$이 실수가 되도록 하는 정수 n의 개수는?

① 0 ② 1 ③ 2
✓④ 3 ⑤ 4

해 $(n+i)^4$이 실수이므로 $(n+i)^2=(n^2-1)+2ni$가 실수이거나
순허수이어야 한다.
즉, $n^2-1=0$ 또는 $n=0$이므로
$n=-1$ 또는 $n=0$ 또는 $n=1$
따라서 $(n+i)^4$이 실수가 되도록 하는 정수 n의 개수는 3이다.

43

복소수 z에 대하여 [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이고 $z\neq 0$이다.)

ㄱ. $z+\overline{z}$는 항상 실수이다.
ㄴ. $z-\overline{z}$는 항상 허수이다.
ㄷ. $z^2-\overline{z^2}$는 항상 순허수이다.

✓① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해 실수 a, b에 대하여 $z=a+bi$라 하면
ㄱ. $z+\overline{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a$ 이므로 $z+\overline{z}$는 항상 실수이다. (참)
ㄴ. $z-\overline{z}=(a+bi)-(a-bi)=2bi$
이때, $b=0$, 즉 z가 실수이면 $z-\overline{z}=0$이 되어 실수이다. (거짓)
ㄷ. $b\neq 0$이면 $\frac{1}{z}$과 $\frac{1}{\overline{z}}$의 허수부분은 서로 다르다. (거짓)

44

복소수 z와 그 켤레복소수 $\overline{z}$에 대하여 $f(z)=z\overline{z}$라 할 때, [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

| 보기 |

ㄱ. $f(1+i)=2$
ㄴ. $f(z_1)=f(z_2)$이면 $z_1=z_2$
ㄷ. $f(z)=f(\overline{z})$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ✓③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해 ㄱ. $f(1+i)=(1+i)(1-i)=1-i^2=2$ (참)
ㄴ. 【반례】 $z_1=1$, $z_2=i$이면 $f(z_1)=f(z_2)=1$이지만 $z_1\neq z_2$ (거짓)
ㄷ. $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\overline{z}=a-bi$이므로
$f(z)=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$
$f(\overline{z})=(a-bi)(a+bi)=a^2+b^2$
$\therefore f(z)=f(\overline{z})$ (참)

정답 및 해설 47~48p

45

교육청 기출

복소수 α, β가 $\alpha^2=2i$, $\beta^2=-2i$를 만족시킬 때, [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

| 보기 |

ㄱ. $\alpha\beta=2$

ㄴ. $(\alpha+\beta)^4=16$

ㄷ. $\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$는 실수이다.

✓① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

해 ㄱ. $(\alpha\beta)^2=\alpha^2\beta^2=(2i)(-2i)=4$이므로 $\alpha\beta=2$ 또는 $\alpha\beta=-2$ … ㉠ (거짓)

ㄴ. $\alpha^2+\beta^2=0$ … ㉡이므로 $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta=2\alpha\beta$

㉠에 의하여 $(\alpha+\beta)^4=(2\alpha\beta)^2=16$ (참)

ㄷ. ㉡에 의하여 $\left(\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right)^2=\dfrac{(\alpha-\beta)^2}{(\alpha+\beta)^2}=\dfrac{\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta}=-1$

한편, 제곱한 수가 음수이므로 $\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$는 실수가 아니다. (거짓)

46

두 복소수

$$z_1=a+bi,\ z_2=c+di$$

에 대하여 a, b, c, d는 자연수이고

$$z_1\overline{z_1}=13,\ (z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2})=41$$

일 때, $z_2\overline{z_2}$의 최댓값을 구하시오. 답 10

(단, $\overline{z}$는 복소수 z의 켤레복소수이다.)

해 (i) $a+c=4$, $b+d=5$일 때,

$a=2$, $b=3$이면 $c=2$, $d=2$

$a=3$, $b=2$이면 $c=1$, $d=3$

(ii) $a+c=5$, $b+d=4$일 때,

$a=2$, $b=3$이면 $c=3$, $d=1$

$a=3$, $b=2$이면 $c=2$, $d=2$

(i), (ii)에 의하여 $z_2\overline{z_2}=c^2+d^2$의 값은 8 또는 10이므로 $z_2\overline{z_2}$의 최댓값은 10이다.

핵심유형 06-2 ω의 성질

47

$\omega^2+\omega+1=0$을 만족시키는 복소수 ω에 대하여

$f(\omega)=\omega+\dfrac{1}{\omega}$이라 할 때,

$f(\omega)+f(\omega^2)+f(\omega^3)+\cdots+f(\omega^{20})$의 값은?

✓① -2 ② -1 ③ 0

④ 1 ⑤ 2

해 $\omega^2+1=-\omega$이므로 양변을 ω로 나누면 $\omega+\dfrac{1}{\omega}=-1$

$f(\omega)=\omega+\dfrac{1}{\omega}=-1$, $f(\omega^2)=\omega^2+\dfrac{1}{\omega^2}=\omega^2+\dfrac{\omega}{\omega^3}=\omega^2+\omega=-1$

$f(\omega^3)=\omega^3+\dfrac{1}{\omega^3}=1+\dfrac{1}{1}=2$

$\therefore f(\omega^n)=\begin{cases}2 & (n\text{이 }3\text{의 배수일 때})\\ -1 & (n\text{이 }3\text{의 배수가 아닐때})\end{cases}$

$\therefore f(\omega)+f(\omega^2)+f(\omega^3)+\cdots+f(\omega^{20})$

$=f(\omega)+f(\omega^2)+0+0+\cdots+0=(-1)+(-1)=-2$

48

함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(1)$의 값을 구하시오. (단, a, b, c는 실수이다.) 답 20

(가) $f(-1)=8$

(나) $\omega=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$에 대하여 $f(\omega)=15\omega-7$이다.

해 $\omega=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$에서 $\omega^2-\omega+1=0$

$(\omega+1)(\omega^2-\omega+1)=0$이므로

$\omega^3+1=0$ $\therefore \omega^3=-1$

$f(\omega)=\omega^3+a\omega^2+b\omega+c=(a+b)\omega+(-a+c-1)=15\omega-7$

$a+b=15$, $-a+c-1=-7$, $f(-1)=-1+a-b+c=8$이므로

$a=10$, $b=5$, $c=4$

$\therefore f(1)=1+a+b+c=1+10+5+4=20$

49

$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$에 대하여 $z=\dfrac{\omega+2}{\omega^2+2}$라 할 때, $z+\overline{z}$의 값을 구하시오. 답 1

해 $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$에서 $2\omega+1=\sqrt{3}i$

양변을 제곱하여 정리하면 $\omega^2+\omega+1=0$ … ㉠

또한, $\omega+\overline{\omega}=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}+\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}=-1$

㉠에서 $\omega^2+1=-\omega$, $\omega+1=-\omega^2$이므로

$z=\dfrac{\omega+2}{\omega^2+2}=\dfrac{1-\omega^2}{1-\omega}=1+\omega$

$\therefore z+\overline{z}=1+\omega+\overline{1+\omega}=2+(\omega+\overline{\omega})=1$

50

복소수 $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$에 대하여

$$z_n=\omega^n+\overline{\omega}^n$$

일 때, $z_1+z_2+z_3+\cdots+z_n=-1$을 만족시키는 100 이하의 자연수 n의 개수를 구하시오. 답 34

(단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

해 m이 0 이상의 정수일 때,

$n=3m+1$ 또는 $n=3m+2$이면 $z_n=-1$

$n=3(m+1)$이면 $z_n=2$이고

$S_n=z_1+z_2+z_3+\cdots+z_n$이라 하면

$S_{3m+1}=-1$, $S_{3m+2}=-2$, $S_{3(m+1)}=0$

이므로 $S_n=z_1+z_2+z_3+\cdots+z_n=-1$을 만족시키는 자연수 n의 개수는 1, 4, 7, …, 100에서 34이다.

서술형

51

$z^2=2i-2$를 만족시키는 복소수 z에 대하여 $z^4+2z^3+4z^2+8z+\dfrac{16}{z}$의 값을 구하시오. 답 −8

해 $z^2=2i-2$에서 $z^2+2=2i$

양변을 제곱하면

$z^4+4z^2+8=0$

양변을 z로 나누면 $z^3+4z+\dfrac{8}{z}=0$

$\therefore z^4+2z^3+4z^2+8z+\dfrac{16}{z}=z^4+4z^2+2\left(z^3+4z+\dfrac{8}{z}\right)$

$=z^4+4z^2=-8$

52

$z^2=4i$를 만족시키는 복소수 z에 대하여 $\left(\dfrac{\overline{z}}{z}\right)^n$이 양의 실수가 되게 하는 자연수 n의 최솟값을 구하시오. 답 4

해 $z^2=4i$에서 $\overline{z}^2=\overline{4i}=-4i$이므로

$\left(\dfrac{\overline{z}}{z}\right)^2=\dfrac{-4i}{4i}=-1$

$\left(\dfrac{\overline{z}}{z}\right)^4=1$

따라서 $\left(\dfrac{\overline{z}}{z}\right)^n$이 양의 실수가 되게 하는 자연수 n의 최솟값은 4이다.

53

다음을 만족시키는 100 이하의 자연수 n의 개수를 구하시오. 답 8

$$(\sqrt{3}+i)^n=-2^n$$

해 $(\sqrt{3}+i)^n=-2^n$의 양변을 2^n으로 나누면

$\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^n=-1$이므로

$n=12k+6$ ($k=0, 1, 2, \cdots$)일 때,

$\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^n=-1$

따라서 $1\le 12k+6\le 100$을 만족시키는 음이 아닌 정수 k의 개수는 0, 1, 2, …, 7의 8이다.

정답 및 해설 48~50p



FIRST CLASS

고난도 도전 문제

◀ 동영상 강의

54

실수가 아닌 복소수 z와 그 켤레복소수 $\overline{z}$에 대하여 $z\overline{z}+\frac{\overline{z}}{z}=1$일 때, z^2의 값은?

① $-2i$ ② $2i$ ③ 1
✓④ -2 ⑤ 2

해 실수가 아닌 복소수를 $z=x+yi$ ($y\neq0$, x, y는 실수)라 하면
$z\overline{z}+\frac{\overline{z}}{z}=x^2+y^2+\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-\frac{2xy}{x^2+y^2}i=1$
$\therefore x^2+y^2+\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=1 \cdots ㉠,\ \frac{2xy}{x^2+y^2}=0 \cdots ㉡$
한편, $y\neq0$이므로 ㉡에서 $x=0$이다.
㉠에서 $y^2-1=1$ $\therefore y=\pm\sqrt{2}$
따라서 $z=\pm\sqrt{2}i$이므로 $z^2=(\pm\sqrt{2}i)^2=-2$

55

a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_{20}은 각각 1, i, $1+i$ 중 하나의 값을 갖는다.

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{20}=14+13i$

일 때, ${a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2+\cdots+{a_{20}}^2=a+bi$인 두 실수 a, b의 합 $a+b$의 값을 구하시오. 답 15

해 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_{20} 중에서 1의 개수를 x, i의 개수를 y, $1+i$의 개수를 z라 하면 $x+y+z=20 \cdots ㉠$이고
$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{20}=1\times x+i\times y+(1+i)\times z$
$=x+z+(y+z)i=14+13i$
두 복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$x=7$, $y=6$, $z=7$이다.
$1^2=1$, $i^2=-1$, $(1+i)^2=2i$이므로
${a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2+\cdots+{a_{20}}^2$
$=1^2\times7+i^2\times6+(1+i)^2\times7=1\times7+(-1)\times6+2i\times7$
$=1+14i=a+bi$
따라서 $a=1$, $b=14$이므로 $a+b=1+14=15$

56

0이 아닌 세 복소수 α, β, γ가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\alpha+\beta+\gamma=0$
(나) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=0$

이때, $\frac{\beta}{\alpha}+\overline{\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)}$의 값은?

$\left(\text{단, } \overline{\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)}\text{는 } \frac{\alpha}{\gamma}\text{의 켤레복소수이다.}\right)$

① $-i$ ✓② -1 ③ 0
④ i ⑤ 1

해 조건 (가)에서 $\alpha+\beta=-\gamma$이므로
조건 (나)에 대입하면 $\alpha\beta=\gamma^2$
조건 (나)에 대입하고 양변을 α^2으로 나누면 $\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2+\frac{\beta}{\alpha}+1=0$
$\therefore \frac{\beta}{\alpha}=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 또는 $\frac{\beta}{\alpha}=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$
$\therefore \frac{\beta}{\alpha}+\overline{\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)}=\frac{\beta}{\alpha}+\overline{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)}=-1$

57

0이 아닌 실수 a, b, c에 대하여 $\frac{ab}{c}=-1$일 때, $\frac{\sqrt{a}\sqrt{b}}{\sqrt{c}}$의 값은?

① -1 ② i ③ $-i$
④ -1 또는 i ✓⑤ $-i$ 또는 i

해 $\frac{ab}{c}=-1$, 즉 $ab=-c$에서
(i) $a>0$, $b>0$일 때 $\frac{\sqrt{a}\sqrt{b}}{\sqrt{c}}=\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{c}}=\frac{\sqrt{-c}}{\sqrt{c}}=-\sqrt{\frac{-c}{c}}=-i$
(ii) $a>0$, $b<0$일 때 $\frac{\sqrt{a}\sqrt{b}}{\sqrt{c}}=\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{c}}=\frac{\sqrt{-c}}{\sqrt{c}}=\sqrt{\frac{-c}{c}}=i$
(iii) $a<0$, $b>0$일 때 $\frac{\sqrt{a}\sqrt{b}}{\sqrt{c}}=\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{c}}=\frac{\sqrt{-c}}{\sqrt{c}}=\sqrt{\frac{-c}{c}}=i$
(iv) $a<0$, $b<0$일 때 $\frac{\sqrt{a}\sqrt{b}}{\sqrt{c}}=-\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{c}}=-\frac{\sqrt{-c}}{\sqrt{c}}=-\left(-\sqrt{\frac{-c}{c}}\right)=i$

58

실수가 아닌 복소수 z에 대하여 $z+\frac{1}{z}$이 실수일 때, $z\bar{z}$의 값을 구하시오. (단, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수이다.) 답 1

해 $z+\frac{1}{z}$이 실수이면 $z+\frac{1}{z}=\overline{\left(z+\frac{1}{z}\right)}=\bar{z}+\frac{1}{\bar{z}}$이므로

$z-\bar{z}+\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{\bar{z}}\right)=0$

$z-\bar{z}-\frac{z-\bar{z}}{z\bar{z}}=0$ $\therefore (z-\bar{z})\left(1-\frac{1}{z\bar{z}}\right)=0$

이때, z가 실수가 아닌 복소수이므로 $z\neq\bar{z}$

$\therefore z\bar{z}=1$

59

α, ω가 실수도 순허수도 아닌 복소수일 때, [보기]에서 순허수인 것만을 있는 대로 고른 것은?

| 보기 |

ㄱ. $\alpha^2-(\bar{\alpha})^2$

ㄴ. $\alpha\bar{\omega}+\bar{\alpha}\omega$

ㄷ. $\alpha\bar{\omega}-\bar{\alpha}\omega$

✓① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해 복소수 z에 대하여 $\bar{z}=z$이면 z는 실수 … ㉠이고,

$z+\bar{z}=0$, 즉 $\bar{z}=-z$이면 $z=0$ 또는 z는 순허수 … ㉡이다.

실수, 순허수도 아닌 α, ω에 대하여 $\alpha-\bar{\alpha}\neq0$, $\alpha+\bar{\alpha}\neq0$ … ㉢

ㄱ. $\overline{\alpha^2-(\bar{\alpha})^2}=\overline{\alpha^2}-\overline{(\bar{\alpha})^2}=(\bar{\alpha})^2-\alpha^2=-\{\alpha^2-(\bar{\alpha})^2\}\neq0$ (∵ ㉢)

이므로 ㉡에 의하여 $\alpha^2-(\bar{\alpha})^2$은 순허수이다.

ㄴ. $\overline{\alpha\bar{\omega}+\bar{\alpha}\omega}=\bar{\alpha}\omega+\alpha\bar{\omega}$이므로 ㉠에 의하여 $\alpha\bar{\omega}+\bar{\alpha}\omega$는 실수이다.

ㄷ. 【반례】 $\alpha=\omega$이면 $\alpha\bar{\omega}-\bar{\alpha}\omega=\alpha\bar{\alpha}-\bar{\alpha}\alpha=0$이 되어 실수가 된다.

60

자연수 a, b에 대하여 $\left(\frac{\sqrt{b}}{1+ai}\right)^4=-1$일 때, $\left(\frac{-\sqrt{b}}{1-ai}\right)^{10}$의 값은?

① $-i$ ② -1 ③ 0

✓④ i ⑤ 1

해 $\left(\frac{\sqrt{b}}{1+ai}\right)^4=\left\{\left(\frac{\sqrt{b}}{1+ai}\right)^2\right\}^2=-1$ … ㉠에서

$\left(\frac{\sqrt{b}}{1+ai}\right)^2$은 순허수이므로 그 실수부분이 0이다.

자연수 a, b에 대하여 $1-a^2=0$이므로 $a=1$

㉠에 대입하면 $\left(\frac{\sqrt{b}}{1+i}\right)^4=-1$이므로 $b=2$ (∵ b는 자연수)

$\therefore \left(\frac{-\sqrt{b}}{1-ai}\right)^{10}=\left(\frac{-\sqrt{2}}{1-i}\right)^{10}=i$

61

$\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$일 때, 자연수 n에 대하여 함수

$$f(n)=\frac{\omega^{2n}}{\omega^n+1}$$

이라 하자. $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(10)$의 값은?

① -10 ✓② $-\frac{11}{2}$ ③ 0

④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 10

해 $\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$에서 $\omega^2+\omega+1=0$, $\omega^3=1$

자연수 k에 대하여

(i) $n=3k$일 때 $f(n)=\frac{\omega^{2n}}{\omega^n+1}=\frac{1}{2}$

(ii) $n=3k+1$일 때 $f(n)=\frac{\omega^{2n}}{\omega^n+1}=\frac{\omega^2}{\omega+1}=-1$ (∵ $\omega^2+\omega+1=0$)

(iii) $n=3k+2$일 때 $f(n)=\frac{\omega^{2n}}{\omega^n+1}=\frac{\omega}{\omega^2+1}=-1$ (∵ $\omega^2+\omega+1=0$)

$\therefore f(1)+f(2)+\cdots+f(10)=\frac{1}{2}\times3+(-1)\times7$

$=-\frac{11}{2}$

정답 및 해설 50~51p



05 이차방정식

개념 강의▶

중요도 ★★★

1 방정식의 뜻

문자를 포함하는 등식 중에서 문자가 특정한 값을 가질 때만 성립하는 등식을 방정식이라 하고, 등호가 성립하도록 하는 문자의 특정한 값을 그 방정식의 근 또는 해라 한다. ❶

❶ 등식 ┬ 항등식: 항상 성립하는 등식
└ 방정식: 특정한 값에서만 성립하는 등식

First Class Tip

*** 한 근이 주어진 방정식**

① $f(x)=0$의 한 근이 α이면 $\Rightarrow f(\alpha)=0$
$f(\alpha)=0$이면 $\Rightarrow \alpha$는 $f(x)=0$의 한 근이다.
② $f(2x+3)=0$의 한 근이 α이면 $\Rightarrow f(2\alpha+3)=0$
$f(2\alpha+3)=0$이면 $\Rightarrow 2\alpha+3$은 $f(x)=0$의 한 근이다.

참고 이차방정식 $f(x)=0$의 근과 $f(ax+b)=0$의 근의 관계 (a, b는 상수, $a\neq 0$)
이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 α, β일 때,
$f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$이므로
이차방정식 $f(ax+b)=0$의 두 근은
$ax+b=\alpha$, $ax+b=\beta$에서 $x=\dfrac{\alpha-b}{a}$ 또는 $x=\dfrac{\beta-b}{a}$

2 이차방정식의 풀이

(1) 인수분해를 이용한 풀이

$(ax-b)(cx-d)=0$ $(ac\neq 0)$의 근은

$x=\dfrac{b}{a}$ 또는 $x=\dfrac{d}{c}$

(2) 완전제곱식을 이용한 풀이

$(x-p)^2=q$의 근은 $x=p\pm\sqrt{q}$

(3) 근의 공식을 이용한 풀이 ❷

① $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$의 근은

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

② $ax^2+2b'x+c=0$ $(a\neq 0)$의 근은

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{(b')^2-ac}}{a}$$

❷ 이차항의 계수가 무리수이면 이차항의 계수를 유리화한 후 인수분해 또는 근의 공식을 이용한다.

(4) 절댓값 기호를 포함한 방정식 ❸

$$|A|=\begin{cases} A & (A\geq 0) \\ -A & (A<0) \end{cases}$$

를 이용하여 절댓값 기호를 없앤 후, 방정식을 푼다.

❸ $|f(x)|+|g(x)|=0$
$\Rightarrow f(x)=0$, $g(x)=0$

First Class Tip

*** $|f(x)|=k$ 꼴의 방정식의 풀이**

먼저, 절댓값 안의 x에 대한 식의 부호를 파악해야 한다.
즉, $f(x)\geq 0$, $f(x)<0$일 때로 x의 값의 범위를 나누어야 한다.
따라서 $f(x)=0$인 x의 값을 기준으로 구간을 나눈 다음
방정식을 푼다.

3 이차방정식의 근의 판별

(1) 계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서
$D=b^2-4ac$를 **판별식**이라 한다.

(2) **이차방정식의 근의 판별**

① $D>0 \iff$ 서로 다른 두 실근
② $D=0 \iff$ 중근 (실근)
③ $D<0 \iff$ 서로 다른 두 허근

} 실근을 가질 때, $D\geq 0$

4 이차방정식의 근과 계수의 관계

(1) 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면
$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$ ❹

(2) 두 수 α, β를 근으로 갖고, x^2의 계수가 1인 이차방정식은
$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$

❹ $|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{|a|}$
(단, α, β는 실수)

5 이차방정식의 켤레근

(1) 계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 한 근이 $p+qi$이면
다른 한 근은 $p-qi$이다. (단, p, q는 실수, $q\neq 0$이다.)

(2) 계수가 유리수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 한 근이 $p+q\sqrt{m}$이면
다른 한 근은 $p-q\sqrt{m}$이다. (단, p, q는 유리수, $q\neq 0$, $\sqrt{m}$은 무리수이다.) ❺

❺ 계수가 유리수라는 조건이 없으면 이차방정식의 한 근이 $p+q\sqrt{m}$일 때, 다른 한 근이 반드시 $p-q\sqrt{m}$이 되는 것은 아니다.

6 이차방정식의 실근의 부호

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하고 이 이차방정식의 판별식을 $D=b^2-4ac$라 하면

(1) 두 근이 모두 양수일 때,
$D\geq 0$, $\alpha+\beta>0$, $\alpha\beta>0$

(2) 두 근이 모두 음수일 때,
$D\geq 0$, $\alpha+\beta<0$, $\alpha\beta>0$

(3) 두 근이 서로 다른 부호일 때,
$\alpha\beta<0$



FIRST CLASS

핵심 유형 연습

◀ 동영상 강의

핵심유형 07 이차방정식의 풀이

01 출제율 ❯❯❯

이차방정식 $(x-2)(x+k)=5$의 서로 다른 두 실근을 α, β라 할 때, $(\alpha-2)(\beta-2)(\alpha+k)(\beta+k)$의 값을 구하시오. (단, k는 상수이다.) 답 25

해 이차방정식 $(x-2)(x+k)=5$의 두 근이 α, β이므로
$(\alpha-2)(\alpha+k)=5$, $(\beta-2)(\beta+k)=5$
$\therefore (\alpha-2)(\beta-2)(\alpha+k)(\beta+k)$
$=\{(\alpha-2)(\alpha+k)\}\{(\beta-2)(\beta+k)\}$
$=5\times5=25$

02 출제율 ❯❯❯

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근의 합이 2이고, 방정식 $f(4x-a)=0$의 두 근의 합이 3일 때, 상수 a의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4
✓④ 5 ⑤ 6

해 방정식 $f(4x-a)=0$의 두 근을 γ, δ라 하면
$4\gamma-a$, $4\delta-a$는 방정식 $f(x)=0$의 두 근이다.
방정식 $f(x)=0$의 두 근의 합이 2이므로
$(4\gamma-a)+(4\delta-a)=2$ $\therefore \gamma+\delta=\frac{a+1}{2}$
$\gamma+\delta=\frac{a+1}{2}=3$ $\therefore a=5$

03 출제율 ❯❯❯

이차방정식
$(x+999)^2-3(x+999)+2=0$
의 서로 다른 두 근을 α, β라 할 때, $(\alpha+998)(\beta+998)$의 값은?

✓① 0 ② 2 ③ 3
④ 998 ⑤ 999

해 $(x+999)^2-3(x+999)+2=0$에서
$x+999=X$라 하면
$X^2-3X+2=0$, $(X-1)(X-2)=0$
$\therefore X=1$ 또는 $X=2$
$x+999=X$에서 $x=X-999$이므로
$x=-998$ 또는 $x=-997$
$\therefore (\alpha+998)(\beta+998)=0$

핵심유형 08 이차방정식의 근의 판별

04 출제율 ❯❯❯

이차방정식 $(a-1)x^2-2(a-3)x+a-3=0$이 실근을 가지도록 하는 모든 자연수 a의 값의 합은?

① 2 ② 3 ③ 4
✓④ 5 ⑤ 6

해 이차방정식 $(a-1)x^2-2(a-3)x+a-3=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(a-3)^2-(a-1)(a-3)\geq0$ $\therefore a\leq3$
또한, $(a-1)x^2-2(a-3)x+a-3=0$이 이차방정식이므로
$a\neq1$
이때, a는 자연수이므로 $a=2$ 또는 $a=3$
따라서 모든 자연수 a의 값의 합은 $2+3=5$

05 출제율 ❯❯❯

모든 실수 x에 대하여 다항식 $f(x)$가
$\{f(x)+5\}^2=(x+a)(x-3a)+16$
을 만족시킬 때, $f(5)$의 최댓값은?

① -4 ② -2 ③ 0
✓④ 2 ⑤ 4

해 (i) $a=2$일 때,
$\{f(x)+5\}^2=(x+2)(x-6)+16=(x-2)^2$이므로
$f(x)=x-7$ 또는 $f(x)=-x-3$
(ii) $a=-2$일 때,
$\{f(x)+5\}^2=(x-2)(x+6)+16=(x+2)^2$이므로
$f(x)=x-3$ 또는 $f(x)=-x-7$
(i), (ii)에서 모든 $f(5)$의 값은 -2, -8, 2, -12이므로 $f(5)$의 최댓값은 2이다.

06 출제율 ❯❯❯

이차식 $x^2-xy-2y^2-ax-3y+1$이 x, y에 대한 두 일차식의 곱으로 인수분해되기 위한 모든 실수 a의 값의 합은?

① 0 ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
✓④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

해 이차방정식 $x^2-(y+a)x-2y^2-3y+1=0$의 판별식을 D라 하면
주어진 식은 $\left(x-\frac{y+a+\sqrt{D}}{2}\right)\left(x-\frac{y+a-\sqrt{D}}{2}\right)$로
인수분해된다.
x, y의 일차식이 되려면 $D=9y^2+2(a+6)y+a^2-4$가 완전제곱식이 되어야 하므로 방정식 $9y^2+2(a+6)y+a^2-4=0$의 판별식을 D'이라 하면 $D'=0$이 되어야 한다.
$\frac{D'}{4}=(a+6)^2-9(a^2-4)=0$이므로 $2a^2-3a-18=0$
따라서 모든 상수 a의 값의 합은 근과 계수의 관계에 의하여 $\frac{3}{2}$이다.

핵심유형 09 이차방정식의 근과 계수의 관계

07 출제율 ›››

이차방정식 $x^2-2x+5=0$의 두 근을 α, β라 할 때, 다음 식의 값을 구하시오. 답 16

$(\alpha^2+2\beta+5)(\beta^2+2\alpha+5)$

해 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=5$
또한, α, β가 근이므로 $\alpha^2-2\alpha+5=0$, $\beta^2-2\beta+5=0$
즉, $\alpha^2+5=2\alpha$, $\beta^2+5=2\beta$이므로
$(\alpha^2+2\beta+5)(\beta^2+2\alpha+5)=(2\beta+2\alpha)(2\alpha+2\beta)$
$=4(\alpha+\beta)^2=4\times2^2=16$

08 출제율 ›››

x에 대한 이차방정식 $x^2-4x+k^2-2k+4=0$의 두 근의 차가 2일 때, 상수 k의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
✓④ 1 ⑤ 2

해 이차방정식 $x^2-4x+k^2-2k+4=0$의 두 근의 차가 2이므로 두 근을 α, $\alpha+2$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+(\alpha+2)=4$ $\therefore \alpha=1$
이때, 다른 한 근은 $\alpha+2=3$
또한, $\alpha(\alpha+2)=3$에서 $k^2-2k+4=3$이므로
$k^2-2k+1=0$, $(k-1)^2=0$ $\therefore k=1$

09 출제율 ›››

이차방정식 $x^2+2(m-5)x-12=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $|\alpha|:|\beta|=1:3$이 되도록 하는 모든 실수 m의 값의 곱을 구하시오. 답 21

해 $x^2+2(m-5)x-12=0$의 두 근을 α, -3α라 하면
$\alpha-3\alpha=-2(m-5)$
$\alpha\times(-3\alpha)=-12$
$\therefore \alpha=-2$ 또는 $\alpha=2$
$\alpha=-2$일 때, $m=3$
$\alpha=2$일 때, $m=7$
따라서 모든 실수 m의 값의 곱은 21이다.

핵심유형 10 이차방정식의 켤레근

10 출제율 ›››

다항식 $f(x)=x^2+ax+b$에 대하여 $f(1+i)=2$일 때, $f(2)$의 값은? (단, a, b는 실수이다.)

① 2 ✓② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

해 $f(1+i)-2=0$에서 $f(x)-2=0$
즉, $x^2+ax+b-2=0$의 한 근이 $1+i$이고
a, b는 실수이므로 다른 한 근은 $1-i$이다.
$-a=(1+i)+(1-i)=2$ $\therefore a=-2$
$b-2=(1+i)(1-i)=2$ $\therefore b=4$
따라서 $f(x)=x^2-2x+4$이므로
$f(2)=4-4+4=4$

11 출제율 ›››

다항식 $f(x)=x^2-px+q$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 다항식 $f(x)$를 $x+1$로 나눈 나머지는 1이다.
(나) 자연수 a에 대하여 이차방정식 $f(x)=0$의 한 근은 $a+\sqrt{3}$이다.

p^2+q^2의 값을 구하시오. (단, p, q는 정수이다.) 답 8

해 조건 (가)에서 $f(-1)=1+p+q=1$이므로 $p+q=0$ … ㉠
조건 (나)에서 $a-\sqrt{3}$도 이차방정식 $x^2-px+q=0$의 근이므로
근과 계수의 관계에 의하여 $p=2a$, $q=a^2-3$ … ㉡
㉠, ㉡에서 $p+q=2a+a^2-3=0$
a는 자연수이므로 $a=1$
$a=1$을 ㉡에 대입하면 $p=2$, $q=-2$
$\therefore p^2+q^2=2^2+(-2)^2=8$

12 출제율 ›››

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근 α, β에 대하여 α는 허수이고, $\frac{\beta^2}{\alpha}$은 실수이다. $\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^3$의 값은?

(단, a, b, c는 실수이다.)

① -1 ② 0 ✓③ 1
④ $-i$ ⑤ i

해 계수가 실수인 이차방정식의 한 허근이 α이므로 $\overline{\alpha}$도 근이다.
$\therefore \beta=\overline{\alpha}$ … ㉠
$\frac{\beta^2}{\alpha}$이 실수이므로 $\frac{\beta^2}{\alpha}=\overline{\left(\frac{\beta^2}{\alpha}\right)}=\frac{\overline{\beta}^2}{\overline{\alpha}}$
$\overline{\alpha}\overline{\beta}^2=\alpha\overline{\beta}^2$이므로 $\beta\beta^2=\alpha\alpha^2$ ($\because$ ㉠) $\therefore \beta^3=\alpha^3$
$\therefore \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^3=\frac{\beta^3}{\alpha^3}=\frac{\alpha^3}{\alpha^3}=1$

09 DAY

정답 및 해설 52~54p

핵심유형 11 이차방정식의 실근의 부호

13 출제율 ❯❯❯

x에 대한 이차방정식 $x^2-(a^2-3a-4)x-a+2=0$의 두 실근의 절댓값은 같고 부호는 서로 다를 때, 실수 a의 값을 구하시오. 답 4

해 주어진 이차방정식의 두 근을 α, β라 하면
$\alpha+\beta=a^2-3a-4=0$
$\therefore a=4$ 또는 $a=-1$ … ㉠
$\alpha\beta=-a+2<0$
$\therefore a>2$ … ㉡
㉠, ㉡에 의하여 $a=4$

14 출제율 ❯❯❯

이차방정식 $2x^2-3x+3-k=0$의 두 근이 모두 양수일 때, 정수 k의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ✓⑤ 2

해 이차방정식 $2x^2-3x+3-k=0$의 두 근을 α, β라 하면
(i) $D=(-3)^2-4\times2\times(3-k)\geq0$에서 $k\geq\frac{15}{8}$
(ii) $\alpha+\beta=\frac{3}{2}>0$이므로 항상 만족시킨다.
(iii) $\alpha\beta=\frac{3-k}{2}>0$ $\therefore k<3$
(i)~(iii)에 의하여 k의 값의 범위는 $\frac{15}{8}\leq k<3$이므로 정수 k의 값은 2이다.

15 출제율 ❯❯❯

이차방정식 $x^2+px+2p-8=0$의 두 실근 α, β가 다음 부등식을 만족시킬 때, 모든 정수 p의 개수를 구하시오. 답 3

$$\alpha+\beta<|\alpha+\beta|<|\alpha|+|\beta|$$

해 (i) $\alpha+\beta<|\alpha+\beta|$에서 $\alpha+\beta<0$이므로
$\alpha+\beta=-p<0$ $\therefore p>0$ … ㉠
(ii) $|\alpha+\beta|<|\alpha|+|\beta|$에서 $\alpha\beta<0$이므로
$\alpha\beta=2p-8<0$ $\therefore p<4$ … ㉡
㉠, ㉡에서 $0<p<4$
따라서 정수 p의 개수는 1, 2, 3의 3이다.

핵심유형 12 이차방정식 세우기

16 출제율 ❯❯❯

이차방정식 $x^2+2x-6=0$의 서로 다른 두 근 α, β에 대하여 이차다항식 $f(x)$가
$f(\alpha)=3$, $f(\beta)=3$, $f(3)=\alpha\beta$
를 만족시킬 때, $f(-3)$의 값을 구하시오. 답 6

해 근과 계수의 관계에 의해 $\alpha\beta=-6$
다항식 $f(x)-3$의 이차항의 계수를 k $(k\neq0)$라 하면
$f(x)-3=k(x-\alpha)(x-\beta)=k(x^2+2x-6)$
$\therefore f(x)=k(x^2+2x-6)+3$
$f(3)=k(9+6-6)+3=-6$ $\therefore k=-1$
따라서 구하는 값은 $f(-3)=-(9-6-6)+3=6$

17 출제율 ❯❯❯

이차방정식 $x^2-x-1=0$의 서로 다른 두 근을 α, β라 할 때, 이차식 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

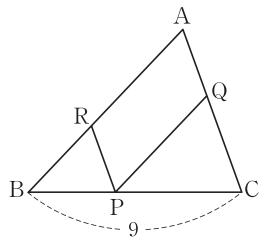
(가) $f(x)$의 이차항의 계수는 1이다.
(나) $f(\alpha)=2\alpha+1$, $f(\beta)=2\beta+1$

$f(3)$의 값을 구하시오. 답 12

해 이차방정식 $x^2-x-1=0$의 두 근이 α, β이므로
$x^2-x-1=(x-\alpha)(x-\beta)$ … ㉠
조건 (나)에 의하여 α, β는 이차방정식 $f(x)=2x+1$, 즉 $f(x)-2x-1=0$의 두 근이다.
조건 (가)에서 $f(x)$의 이차항의 계수가 1이므로
$f(x)-2x-1=(x-\alpha)(x-\beta)=x^2-x-1$ ($\because$ ㉠)
따라서 $f(x)=x^2+x$이므로 $f(3)=9+3=12$

18 출제율 ❯❯❯

그림과 같이 삼각형 ABC의 변 BC 위에 점 P를 잡아 P에서 변 AB, AC에 평행하게 그은 두 직선이 삼각형 ABC의 각 변과 만나는 점을 각각 Q, R라 할 때, 평행사변형 ARPQ의 넓이와 삼각형 ABC의 넓이의 비는 4 : 9이다. $\overline{BC}=9$일 때, $\overline{BP}$의 길이는? (단, $\overline{BP}<\overline{CP}$)



① 2 ② $\frac{12}{5}$ ✓③ 3
④ $\frac{18}{5}$ ⑤ 4

해 $\overline{BP}=x$라 하면 세 삼각형 ABC, RBP, QPC의 넓이의 비는
$9^2:x^2:(9-x)^2$이므로
두 삼각형 RBP와 QPC의 넓이의 합과 삼각형 ABC의 넓이의 비는
5 : 9이다.
즉, $(x^2+x^2-18x+81):81=5:9$이므로 $x=3$ 또는 $x=6$
이때, $\overline{BP}<\overline{CP}$이므로 $x=3$



FIRST CLASS

실전 유형 훈련

◀ 동영상 강의

핵심유형 07 이차방정식의 풀이

19

이차방정식 $x^2-6x+1=0$의 한 근을 $\frac{a-b}{a+b}$라 할 때, $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$의 값은?

(단, a, b는 $a+b\neq0$, $ab\neq0$인 실수이다.)

① $\frac{1}{2}$ ✓② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$

④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

해 $x^2-6x+1=0$의 근 $x=\frac{a-b}{a+b}=\frac{\frac{a}{b}-1}{\frac{a}{b}+1}$이라 할 때,

$\frac{a}{b}=t$라 하고 전개하여 정리하면 $t^2=2=\left(\frac{a}{b}\right)^2$

$\therefore \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}=\frac{\frac{a^2}{b^2}-1}{\frac{a^2}{b^2}+1}=\frac{2-1}{2+1}=\frac{1}{3}$

20

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근이 α, β이고, 이차방정식 $ax^2-bx+c=0$의 근이 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$일 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값을 구하시오. 답 5

(단, a, b, c는 상수이고 $ac\neq0$이다.)

해 $f(x)=ax^2+bx+c$라 하면 $f(-x)=ax^2-bx+c$이므로

$f(x)=0$의 두 근이 α, β이면

$f(-x)=0$의 두 근은 $-\alpha$, $-\beta$

따라서 $\alpha+\beta=-\alpha$, $\alpha\beta=-\beta$이므로 $\alpha=-1$, $\beta=2$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=(-1)^2+2^2=5$

21

x에 대한 방정식 $a(ax-1)-(x-1)=0$이 근을 갖지 않을 때, 이차방정식 $x^2-(1-2a)x+5a+1=0$의 두 근 α, β에 대하여 $|\alpha|+|\beta|$의 값은?

(단, a는 상수이다.)

① 4 ✓② 5 ③ 6

④ 7 ⑤ 8

해 $(a+1)(a-1)x=a-1$

이 방정식은 $a=-1$일 때 근을 갖지 않으며

$a=1$일 때 근은 모든 실수이다.

따라서 $a=-1$이므로

$x^2-3x-4=0$, $(x+1)(x-4)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=4$

$\therefore |\alpha|+|\beta|=|-1|+|4|=5$

22

이차방정식 $|x-2|^2+2|x-2|-8=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $|\alpha-2|+|\beta-2|$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3

✓④ 4 ⑤ 5

해 $|x-2|^2+2|x-2|-8=0$에서

$|x-2|=t\ (t\geq0)$라 하면 $t^2+2t-8=0$

$(t+4)(t-2)=0$ $\therefore t=-4$ 또는 $t=2$

이때, $t\geq0$이므로 $t=2$

즉, $|x-2|=2$이므로

$x-2=2$ 또는 $x-2=-2$ $\therefore x=0$ 또는 $x=4$

$\therefore |\alpha-2|+|\beta-2|=|0-2|+|4-2|=4$

23

다음은 'p가 짝수, q가 홀수이면 방정식 $x^2+px-2q=0$은 정수인 근을 갖지 않는다.'는 것을 증명한 것이다.

(i) x가 홀수이면 x^2은 홀수이고, $px-2q$는 짝수이다.
따라서 $x^2+px-2q$는 홀수이므로 (가)이(가) 될 수 없다.

(ii) x가 짝수이면 x^2+px는 (나)의 배수이고 $2q$는 (나)의 배수가 아니다. 그런데 $x^2+px=2q$이므로 모순이다.

(i), (ii)에서 이 방정식은 정수인 근을 갖지 않는다.

위의 증명 과정에서 (가), (나)에 알맞은 수를 차례로 a, b라 할 때, a^2+b^2의 값을 구하시오. 답 16

해 $a=0$, $b=4$이므로 $a^2+b^2=0+16=16$

10 DAY

24

이차방정식 $mx^2+6x+n=0$의 두 근이 모두 유리수가 되도록 하는 자연수 m, n의 순서쌍 (m, n)의 개수를 구하시오. 답 9

해 근의 공식에 의하여 $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{9-mn}}{m}$의 값이 유리수가 되려면 $\sqrt{9-mn}$이 유리수가 되어야 하므로 $9-mn$이 제곱수이어야 한다.

(i) $9-mn=0$이면 $mn=9$

$\therefore (m, n)=(1, 9), (3, 3), (9, 1)$

(ii) $9-mn=1$이면 $mn=8$

$\therefore (m, n)=(1, 8), (2, 4), (4, 2), (8, 1)$

(iii) $9-mn=4$이면 $mn=5$

$\therefore (m, n)=(1, 5), (5, 1)$

따라서 순서쌍 (m, n)의 개수는 9이다.

25

두 이차방정식 $x^2+ax+b=0$과 $x^2+bx+a=0$은 하나의 공통근을 갖는다. 두 방정식의 근 중 공통근이 아닌 근이 각각 α, β이고 $|\alpha|:|\beta|=3:1$일 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a-b$의 최댓값은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$

✓④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

해 공통근을 γ라 하고 두 식을 변끼리 빼면 $(a-b)(\gamma-1)=0$

$a=b$이면 두 방정식은 두 개의 공통근을 가지므로 $\gamma=1$

이 값을 대입하면 $1+a+b=0$ … ㉠

방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 1, α이므로 $\alpha=b$

마찬가지로 $x^2+bx+a=0$의 두 근이 1, β이므로 $\beta=a$

$|\alpha|:|\beta|=3:1$에서 $b=3a$ 또는 $b=-3a$

(i) $b=3a$일 때, ㉠에서 $a=-\frac{1}{4}$, $b=-\frac{3}{4}$ $\therefore a-b=\frac{1}{2}$

(ii) $b=-3a$일 때, ㉠에서 $a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{3}{2}$ $\therefore a-b=2$

(i), (ii)에서 $a-b$의 최댓값은 2이다.

핵심유형 08 이차방정식의 근의 판별

26

x에 대한 이차방정식 $4x^2+(4k-2m)x+k^2-k+2n=0$이 실수 k의 값에 관계없이 항상 중근을 가질 때, 실수 m, n에 대하여 $40(m+n)$의 값을 구하시오. 답 45

해 x에 대한 이차방정식 $4x^2+2(2k-m)x+k^2-k+2n=0$이 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(2k-m)^2-4(k^2-k+2n)=0$

$(-4m+4)k+m^2-8n=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$-4m+4=0$이고 $m^2-8n=0$ $\therefore m=1$, $n=\frac{1}{8}$

$\therefore 40(m+n)=40+5=45$

27

방정식

$x^2+(2y+3)x+(3y^2+3y+k)=0$

을 만족시키는 실수 x, y가 존재할 때, 정수 k의 최댓값은?

① 0 ② 1 ✓③ 2

④ 3 ⑤ 4

해 $x^2+(2y+3)x+(3y^2+3y+k)=0$에서 x가 실수이므로 이 이차방정식은 실근을 갖는다.

즉, 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(2y+3)^2-4(3y^2+3y+k)\geq 0$

$-8y^2+9-4k\geq 0$ $\therefore 8y^2-9+4k\leq 0$ … ㉠

한편, 실수 y에 대하여 $8y^2\geq 0$이므로 ㉠을 만족시키는 실수 y가 존재할 조건은 $-9+4k\leq 0$ $\therefore k\leq\frac{9}{4}$

따라서 정수 k의 최댓값은 2이다.

28

x에 대한 이차방정식 $x^2-2(a-1)x+a^2+2a-3=0$이 실근을 가질 때, 그 실근의 최댓값을 구하시오. 답 1

(단, a는 실수이다.)

해 x에 대한 이차방정식 $x^2-2(a-1)x+a^2+2a-3=0$의 실근을 t라 하면

$t^2-2(a-1)t+a^2+2a-3=0$

즉, $a^2-2(t-1)a+t^2+2t-3=0$ … ㉠

이때, a는 실수이므로 a에 대한 이차방정식 ㉠이 실근을 가져야 한다.

이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(t-1)^2-(t^2+2t-3)\geq 0$

$-4t+4\geq 0$, 즉 $t\leq 1$

따라서 주어진 x에 대한 이차방정식의 실근 t의 최댓값은 1이다.

핵심유형 09 이차방정식의 근과 계수의 관계

29

이차방정식 $x^2-2x-2=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\dfrac{\alpha^3}{\alpha+1}+\dfrac{\beta^3}{\beta+1}$의 값은?

① -4 ② -2 ③ 0

④ 2 ✓⑤ 4

해 이차방정식 $x^2-2x-2=0$의 두 근을 α, β라 하면

$\alpha^2-2\alpha-2=0$에서 $\alpha^2=2(\alpha+1)$, $\frac{1}{\alpha+1}=\frac{2}{\alpha^2}$

마찬가지로 $\beta^2-2\beta-2=0$에서 $\frac{1}{\beta+1}=\frac{2}{\beta^2}$

또, 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=2$이므로

$\frac{\alpha^3}{\alpha+1}+\frac{\beta^3}{\beta+1}=\frac{2\alpha^3}{\alpha^2}+\frac{2\beta^3}{\beta^2}=2(\alpha+\beta)=4$

30

이차방정식 $x^2-x+1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\left(1+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}\right)\left(1+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta^2}\right)$의 값은?

① -4 ② -2 ③ 1
④ 2 ✓⑤ 4

해 α, β가 이차방정식 $x^2-x+1=0$의 두 근이므로
$\alpha^2-\alpha+1=0$
위 식을 α^2으로 나누면 $1-\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}=0$
$\therefore 1+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}=\frac{2}{\alpha}$
마찬가지의 방법으로 $1+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta^2}=\frac{2}{\beta}$
한편, 근과 계수의 관계에서 두 근의 곱 $\alpha\beta=1$이므로
$\left(1+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}\right)\left(1+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta^2}\right)=\frac{2}{\alpha}\times\frac{2}{\beta}=\frac{4}{\alpha\beta}=4$

31

이차방정식 $x^2+(p-3)x+1=0$의 두 근 α, β가 다음 식을 만족시킬 때, 실수 p의 값의 합은?

$$(1+3\alpha+\alpha^2)(1+3\beta+\beta^2)=1$$

① 3 ② 6 ③ 9
✓④ 12 ⑤ 15

해 이차방정식 $x^2+(p-3)x+1=0$의 두 근이 α, β이므로
$\alpha^2+(p-3)\alpha+1=0$
양변에 $(6-p)\alpha$를 더하면 $\alpha^2+3\alpha+1=(6-p)\alpha$
마찬가지의 방법으로 $\beta^2+3\beta+1=(6-p)\beta$
또한, 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha\beta=1$
$\therefore (1+3\alpha+\alpha^2)(1+3\beta+\beta^2)=(6-p)^2\alpha\beta=(6-p)^2$
즉, $(6-p)^2=1$에서 $6-p=1$ 또는 $6-p=-1$
$\therefore p=5$ 또는 $p=7$
따라서 실수 p의 값의 합은 $5+7=12$

32

이차방정식 $x^2+2x-4=0$의 두 근이 α, β일 때, $\alpha^3+2\alpha^2+3\alpha\beta+4\beta$의 값은?

① -16 ② -17 ③ -18
④ -19 ✓⑤ -20

해 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=-4$
또한, α는 $x^2+2x-4=0$의 근이므로
$\alpha^2+2\alpha-4=0$, 즉 $\alpha^2+2\alpha=4$
$\therefore \alpha^3+2\alpha^2+3\alpha\beta+4\beta=\alpha(\alpha^2+2\alpha)+3\alpha\beta+4\beta$
$=4\alpha+3\alpha\beta+4\beta$
$=4(\alpha+\beta)+3\alpha\beta$
$=-8-12=-20$

33

이차방정식 $x^2+ax-1=0$의 두 실근의 절댓값의 합이 $2\sqrt{5}$일 때, 양의 실수 a의 값을 구하시오. 답 4

해 두 실근을 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면
$|\alpha|+|\beta|=2\sqrt{5}$
$\alpha^2+2|\alpha\beta|+\beta^2=20$
$\therefore \alpha^2+\beta^2=18$
또한,
$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-a)^2-2\times(-1)$
$=a^2+2$
이므로 $a^2+2=18$, $a^2=16$
$\therefore a=4$ ($\because a>0$)

34

방정식 $|x^2+(a-2)x-2|=1$의 모든 근의 합이 0일 때, 상수 a의 값은?

① 1 ✓② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

해 (i) $x^2+(a-2)x-2=1$일 때,
$x^2+(a-2)x-3=0$이므로 두 근의 합은 $-(a-2)$이다.
(ii) $x^2+(a-2)x-2=-1$일 때,
$x^2+(a-2)x-1=0$이므로 두 근의 합은 $-(a-2)$이다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 방정식의 모든 근의 합은 $-2(a-2)$이므로
$-2(a-2)=0$ $\therefore a=2$

35

소수 p, q에 대하여 방정식 $x^2-px+q=0$의 근이 모두 정수일 때, p^2+q^2의 값을 구하시오. 답 13

해 두 정수인 근을 α, $\beta(\alpha\le\beta)$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=p$ … ㉠
$\alpha\beta=q$ … ㉡
p, q가 소수이므로 $\alpha+\beta>0$, $\alpha\beta>0$
즉, α, β는 자연수이다.
또, q가 소수이므로 ㉡에서 $\alpha=1$, $\beta=q$이다.
㉠에 대입하면 $1+q=p$
따라서 p, q는 연속하는 두 자연수인 소수이므로
$q=2$, $p=3$
$\therefore p^2+q^2=3^2+2^2=13$

정답 및 해설 56~57p

36

자연수 k에 대하여 방정식 $x^2-5=2k|x|$가 정수인 두 근 α, β를 갖는다. 최고차항의 계수가 1인 이차식 $f(x)$에 대하여 $f(\alpha)$, $f(\beta)$를 근으로 갖는 이차방정식이 $x^2-20x+75=0$일 때, $kf(0)$의 값은?

① -10 ② -20 ✓③ -30
④ -40 ⑤ -50

해 $x^2=|x|^2$이므로 $|x|^2-2k|x|-5=0$
이때, $|x|=t$ $(t\geq 0)$라 하면 $t^2-2kt-5=0$
위 식이 정수인 근을 가지므로 $t\geq 0$인 한 근은 $t=1$ 또는 $t=5$
(i) $t=1$이 근인 경우, k가 자연수가 아니므로 성립하지 않는다.
(ii) $t=5$가 근인 경우, $25-10k-5=0$ $\therefore k=2$
(i), (ii)에서 $k=2$이고 $f(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면
두 근의 합은 $f(5)+f(-5)=50+2b=20$
$\therefore kf(0)=2\times(-15)=-30$

37

이차방정식 $x^2+4x+1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2$의 값은?

✓① -6 ② -4 ③ -3
④ -2 ⑤ -1

해 $x^2+4x+1=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=-4$, $\alpha\beta=1$
따라서 $\alpha<0$, $\beta<0$이므로 $\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}=-\sqrt{\alpha\beta}$
$\therefore (\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=(\sqrt{\alpha})^2+(\sqrt{\beta})^2+2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}=\alpha+\beta-2\sqrt{\alpha\beta}$
$=-4-2=-6$

38

이차방정식 $x^2-ax+1=0$의 서로 다른 두 실근을 α, β라 할 때, [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, a는 상수이다.)

| 보기 |
ㄱ. $|\alpha+\beta|=|\alpha|+|\beta|$
ㄴ. $\alpha^2+\beta^2>2$
ㄷ. $\alpha>1$이면 $\beta>1$이다.

① ㄱ ② ㄴ ✓③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해 ㄱ. $\alpha\beta=1>0$이므로 α와 β는 서로 같은 부호이다.
$\therefore |\alpha+\beta|=|\alpha|+|\beta|$ (참)
ㄴ. $\alpha+\beta=a$, $\alpha\beta=1$이므로 $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=a^2-2$
이때, $D=a^2-4>0$에서 $a^2>4$이므로 $\alpha^2+\beta^2=a^2-2>2$ (참)
ㄷ. $\alpha\beta=1$에서 $\alpha=\frac{1}{\beta}$이므로 $\alpha>1$이면 $0<\beta<1$ (거짓)

핵심유형 10 이차방정식의 켤레근

39

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 한 근이 $1+\sqrt{2}i$일 때, 이차방정식 $cx^2+bx-a=0$의 두 근 α, β에 대하여 $3(|\alpha|+|\beta|)$의 값은? (단, a, b, c는 실수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3
✓④ 4 ⑤ 5

해 a, b, c가 실수이므로 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 한 근이 $1+\sqrt{2}i$이면 다른 한 근은 $1-\sqrt{2}i$이다.
$-\frac{b}{a}=2$, $\frac{c}{a}=3$ $\therefore b=-2a$, $c=3a$
$cx^2+bx-a=0$에서 $3x^2-2x-1=0$ ($\because a\neq 0$)
$\therefore x=-\frac{1}{3}$ 또는 $x=1$ $\therefore 3(|\alpha|+|\beta|)=3\times\left(\frac{1}{3}+1\right)=4$

40

다음 조건을 만족시키는 허수 z가 존재하도록 하는 두 정수 m, n에 대하여 $m+n$의 최댓값은?
(단, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

(가) $z^2=mz+n$
(나) $z+\bar{z}=6$

✓① -4 ② -3 ③ -2
④ -1 ⑤ 0

해 조건 (가)에서 z는 이차방정식 $x^2-mx-n=0$ … ㉠의 근이고, $\bar{z}$도 방정식의 근이다.
근과 계수의 관계에 의하여 $z+\bar{z}=m=6$
㉠에 대입하면 $x^2-6x-n=0$
이 방정식의 판별식을 D라 하면 방정식이 허근을 가지므로
$\frac{D}{4}=9+n<0$ $\therefore n<-9$
따라서 $m+n<6-9=-3$이고 m, n이 정수이므로
$m+n$의 최댓값은 -4이다.

41

이차방정식 $x^2-px+2p=0$의 근이 허근이고 근의 세제곱이 실수일 때, 실수 p의 값을 구하시오. 답 2

해 계수가 실수인 이차방정식의 한 허근을 α라 하면
$\alpha^2-p\alpha+2p=0$을 만족시키므로 $\alpha^2=p\alpha-2p$에서
$\alpha^3=p\alpha^2-2p\alpha=p(p\alpha-2p)-2p\alpha=(p^2-2p)\alpha-2p^2$
이때, α가 허수이고, α^3이 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여 $p^2-2p=0$, $p(p-2)=0$ $\therefore p=0$ 또는 $p=2$
한편, $p=0$이면 $\alpha^3=0$에서 $\alpha=0$이므로 α가 허근이라는 사실에 모순이다.
$\therefore p=2$

42

계수가 실수인 이차방정식 $f(x)=0$이 다음 조건을 만족시킬 때, $f(10)$의 값을 구하시오. 답 83

(가) 이차항의 계수는 1이다.
(나) 두 허근 α, β를 가지고, $\alpha^2+2\beta=1$이다.

해 $\alpha^2+2\beta=1$에서 $(\alpha+bi)^2+2(\alpha-bi)=1$
두 복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$\alpha^2-b^2+2\alpha=1$ … ㉠
$2b(\alpha-1)=0$ … ㉡
㉡에서 $b\neq0$이므로 $\alpha=1$
㉠에서 $b=\sqrt{2}$ 또는 $b=-\sqrt{2}$
즉, $\alpha=1+\sqrt{2}i$, $\beta=1-\sqrt{2}i$ 또는 $\alpha=1-\sqrt{2}i$, $\beta=1+\sqrt{2}i$
따라서 근과 계수의 관계에 의하여 $f(x)=x^2-2x+3$이므로
$f(10)=100-20+3=83$

핵심유형 11 이차방정식의 실근의 부호

43

이차방정식 $x^2+\sqrt{p}x+p-3=0$의 두 근이 모두 음수가 되도록 하는 정수 p의 값을 구하시오. 답 4

해 (i) $D=(\sqrt{p})^2-4(p-3)\geq0$
$-3p+12\geq0$ $\therefore p\leq4$
(ii) 두 근의 합이 음수이므로
$-\sqrt{p}<0$ $\therefore p>0$
(iii) 두 근의 곱이 양수이므로
$p-3>0$ $\therefore p>3$
(i)~(iii)에 의하여 $3<p\leq4$이므로 정수 $p=4$

44

이차방정식 $x^2-2mx-2m-6=0$의 두 실근 중 적어도 하나는 양의 실수가 되도록 하는 정수 m의 최솟값은?

✓① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

해 두 실근을 α, β라 하면 두 실근이 모두 0 이하가 되는 경우는
(i) $\alpha+\beta=2m\leq0$ $\therefore m\leq0$
(ii) $\alpha\beta=-2m-6\geq0$ $\therefore m\leq-3$
(iii) $\frac{D}{4}=m^2+2m+6=(m+1)^2+5>0$
따라서 두 근 중 적어도 하나가 양의 실수가 되려면 $m>-3$이므로
정수 m의 최솟값은 -2이다.

45

이차방정식 $ax^2+2bx-(a-b)=0$에 대하여 [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, a, b는 상수이다.)

| 보기 |

ㄱ. a, b가 모두 양수이면 양의 두 실근을 갖는다.
ㄴ. a, b가 모두 음수이면 음의 두 실근을 갖는다.
ㄷ. a, b가 서로 다른 부호이면 서로 다른 부호의 실근을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ✓③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

해 ㄱ. a, b가 모두 양수이면 $-\frac{b}{a}<0$에서 두 근의 합이 음수이므로
적어도 하나의 음의 실근을 갖는다. (거짓)
ㄴ. 【반례】 $a=-4$, $b=-2$이면 a, b가 모두 음수이지만
$-4x^2-2x+2=0$에서
$x=-1$ 또는 $x=\frac{1}{2}$이므로 음의 두 실근을 갖지 않는다. (거짓)

핵심유형 12 이차방정식 세우기

46

이차다항식 $f(x)$에 대하여 방정식 $f(x)+x-2=0$의 두 근을 α, β라 하자. $\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=-4$이고 $f(1)=6$일 때, $f(2)$의 값은?

① 0 ② 2 ✓③ 4
④ 6 ⑤ 8

해 0이 아닌 상수 k에 대하여
$f(x)+x-2=k(x^2-2x-4)$ … ㉠
또한, $f(1)=6$이므로 $x=1$을 ㉠에 대입하면
$f(1)+1-2=k(1^2-2-4)=5$
$-5k=5$ $\therefore k=-1$
따라서 $f(x)=-x^2+x+6$이므로 $f(2)=4$

47

$f(x)=4x^2-4x+k$일 때, 방정식 $f(2x-1)=0$의 두 근의 합은? (단, k는 상수이다.)

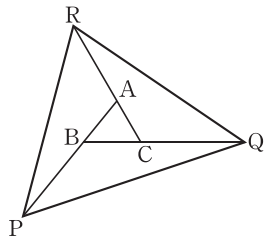
① $\frac{1}{2}$ ② 1 ✓③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

해 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을 α, β라 하고,
이차방정식 $f(2x-1)=0$의 두 근을 γ, δ라 하면
$\alpha=2\gamma-1$, $\beta=2\delta-1$
따라서 $\gamma=\frac{\alpha+1}{2}$, $\delta=\frac{\beta+1}{2}$이고, 이차방정식
$4x^2-4x+k=0$의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=1$이므로
$\gamma+\delta=\frac{\alpha+1}{2}+\frac{\beta+1}{2}=\frac{\alpha+\beta+2}{2}=\frac{3}{2}$

정답 및 해설 58~60p

48

그림과 같이 삼각형 ABC의 세 변 AB, BC, CA의 연장선 위에 $\frac{\overline{AP}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{BQ}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{CR}}{\overline{CA}}=k$를 만족시키도록 세 점 P, Q, R를 각각 잡아 삼각형 PQR를 만든다. 이때, 삼각형 PQR의 넓이가 삼각형 ABC의 넓이의 19배가 되게 하는 k의 값을 구하시오. (단, $k>1$)



답 3

해 삼각형 ABC의 넓이를 1이라 하고 각 영역별 넓이를 구하면

$\triangle PQR=3(k-1)^2+3(k-1)+1$

$=3k^2-3k+1$

$=19\times\triangle ABC=19$

$3k^2-3k+1=19$에서

$3k^2-3k-18=0$, $k^2-k-6=0$

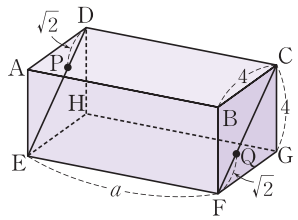
$(k+2)(k-3)=0$ $\therefore k=3$ ($\because k>1$)

49

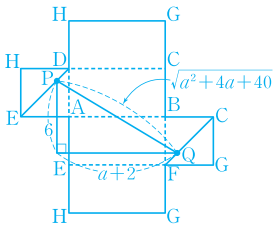
교육청 기출

그림과 같이 밑면의 두 변의 길이가 각각 a ($a>5$)와 4이고 높이가 4인 직육면체 ABCD−EFGH에서 선분 DE와 CF 위에 각각 $\overline{DP}=\overline{FQ}=\sqrt{2}$인 점 P와 점 Q를 잡는다. 점 P에서 직육면체의 겉면을 따라 점 Q에 도달하는 최단거리가 $2\sqrt{34}$일 때, $30a$의 값을 구하시오.

답 240



해



$\sqrt{a^2+4a+40}=2\sqrt{34}$에서 $a=8$ $\therefore 30a=240$

서술형

50

이차방정식 $x^2-2x-k=0$이 허근을 가지고, 이차방정식 $x^2+5x-k=0$이 실근을 가지도록 하는 정수 k의 개수를 구하시오.

답 5

해 이차방정식 $x^2-2x-k=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=(-1)^2-1\times(-k)<0$ $\therefore k<-1$ … ㉠

한편, 이차방정식 $x^2+5x-k=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=5^2-4\times1\times(-k)\geq0$ $\therefore k\geq-\frac{25}{4}$ … ㉡

㉠, ㉡에서 $-\frac{25}{4}\leq k<-1$

따라서 정수 k의 개수는 -6, -5, -4, -3, -2의 5이다.

51

이차방정식 $x^2-px+q=0$의 두 근이 α, β이고, 이차방정식 $x^2-3px+4(q-1)=0$의 두 근이 α^2, β^2일 때, 양수 p의 값을 구하시오.

답 4

해 이차방정식 $x^2-px+q=0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha+\beta=p$, $\alpha\beta=q$

이차방정식 $x^2-3px+4(q-1)=0$의 두 근이 α^2, β^2이므로

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=3p$에서 $p^2-3p-2q=0$

$(\alpha\beta)^2=4(q-1)$에서 $q^2-4q+4=(q-2)^2=0$ $\therefore q=2$

$q=2$를 $p^2-3p-2q=0$에 대입하면 $p^2-3p-4=0$

이때, p는 양수이므로 $p=4$이다.

52

이차방정식 $x^2-x-5=0$의 두 근 α, β에 대하여 이차함수 $f(x)=x^2+px+q$가 $f(1-\alpha)=4\beta$와 $f(1-\beta)=4\alpha$를 만족시킬 때, p^2+q^2의 값을 구하시오. (단, p, q는 상수이다.)

답 34

해 $x^2-x-5=(x-\alpha)(x-\beta)$

또, 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=1$

$f(1-\alpha)=4\beta$에서 $f(\beta)=4\beta$

$f(1-\beta)=4\alpha$에서 $f(\alpha)=4\alpha$

$f(x)-4x=(x-\alpha)(x-\beta)=x^2-x-5$에서 $p=3$, $q=-5$

$\therefore p^2+q^2=3^2+(-5)^2=34$



FIRST CLASS

고난도 도전 문제

◀ 동영상 강의

53

이차방정식 $x^2-5x+m=0$의 두 근이 서로 다른 정수가 되도록 하는 모든 자연수 m의 값의 곱을 구하시오. 답 24

해 이차방정식의 판별식을 D라 하면 $D>0$이어야 한다.

즉, $D=25-4m>0$ $\therefore m<\frac{25}{4}$

한편, 근이 정수가 되려면 $\sqrt{25-4m}$이 유리수가 되어야 하므로 $25-4m$은 완전제곱수이다.

$\therefore m=4$ 또는 $m=6$

따라서 모든 자연수 m의 값의 곱은 $4\times6=24$이다.

54

계수가 실수인 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근 α, β가 $(\alpha-2)(\beta-2)=2$를 만족시킨다고 하자. 이차방정식 $f(x-2)=0$의 두 근을 γ, δ라 할 때, $\gamma^2+\delta^2$의 최솟값은?

① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ✓⑤ 12

해 $\gamma^2+\delta^2=(\alpha+2)^2+(\beta+2)^2$
$=(\alpha+\beta)^2-2\{\alpha\beta-2(\alpha+\beta)\}+8$
$=(\alpha+\beta)^2-2\times(-2)+8$
$=(\alpha+\beta)^2+12\geq12$

따라서 $\gamma^2+\delta^2$의 최솟값은 12이다.

55

이차방정식 $x^2+x+3=0$의 두 근 α, β에 대하여 이차식 $f(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1)=3$
(나) $f(\alpha)=\beta$, $f(\beta)=\alpha$

$f(3)$의 값을 구하시오. 답 11

해 $\alpha+\beta=-1$, $\alpha\beta=3$이므로 $\beta=-\alpha-1$, $\alpha=-\beta-1$이고 조건 (나)에 의하여 $f(\alpha)=\beta=-\alpha-1$, $f(\beta)=\alpha=-\beta-1$

이차방정식 $f(x)+x+1=0$의 두 근이 α, β이므로

$f(x)+x+1=k(x-\alpha)(x-\beta)=k(x^2+x+3)$ (k는 상수)

$f(1)=3=5k-2$ $\therefore k=1$

따라서 $f(x)=x^2+2$이므로 $f(3)=9+2=11$

56

이차방정식 $x^2-\sqrt{3}x+1=0$의 두 근 α, β에 대하여

$$(1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{10})(1+\beta+\beta^2+\cdots+\beta^{10})$$

의 값을 구하시오. 답 1

해 $\alpha^2-\sqrt{3}\alpha+1=0$, 즉 $\alpha^2+1=\sqrt{3}\alpha$

양변을 제곱한 후 정리하면 $\alpha^4-\alpha^2+1=0$

$(\alpha^2+1)(\alpha^4-\alpha^2+1)=0$ $\therefore \alpha^6=-1$

$1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{10}=1+\alpha+\cdots+\alpha^5-(1+\alpha+\cdots+\alpha^4)=\alpha^5$

$1+\beta+\beta^2+\cdots+\beta^{10}=\beta^5$

$\therefore \alpha^5\beta^5=(\alpha\beta)^5=1^5=1$

정답 및 해설 60~62p

57

이차방정식 $x^2+ax+b=0$은 연속하는 두 홀수를 근으로 가지고, 이차방정식 $x^2+bx+a=0$은 자연수인 근을 가질 때, 실수 a, b에 대하여 a^2+b^2의 값은? (단, $a\neq0$)

① 5 ② 10 ③ 13
④ 17 ✓⑤ 25

해 이 이차방정식이 자연수인 근을 가지므로 그 근을 $m(m>0)$이라 하면 $m^2+\frac{a^2-4}{4}m+a=0$
이 식을 a에 대하여 내림차순으로 정리하면 $ma^2+4a+4m^2-4m=0$
위 식을 a에 대한 이차방정식으로 보고 그 판별식을 D라 하면 a는 실수이므로 $\frac{D}{4}=4-m(4m^2-4m)\geq0$ $\therefore m^2(m-1)\leq1$
이를 만족시키는 자연수 $m=1$뿐이다.
$m=1$을 대입하면 $a(a+4)=0$
그런데 $a\neq0$이므로 $a=-4$, $b=\frac{(-4)^2-4}{4}=3$
$\therefore a^2+b^2=(-4)^2+3^2=25$

58

0이 아닌 세 실수 a, b, c에 대하여 두 이차방정식
$ax^2+2bx+3c=0$, $2bx^2+3cx+a=0$
이 공통인 실근을 가질 때, [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $a<b<c$)

| 보기 |
ㄱ. 공통인 실근은 1이다.
ㄴ. 방정식 $ax^2+2bx+3c=0$은 음의 실근을 가진다.
ㄷ. 두 이차방정식은 모두 서로 다른 두 실근을 가진다.

① ㄱ ✓② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해 ㄱ. 두 이차방정식의 공통인 실근을 p라 하면
$ap^2+2bp+3c=0$ … ㉠
$2bp^2+3cp+a=0$ … ㉡
㉠$\times p-$㉡을 하면 $a(p-1)(p^2+p+1)=0$
따라서 공통의 실근은 1이다. (참)
ㄴ. ㉠에 $p=1$을 대입하면 $a+2b+3c=0$ … ㉢
즉, $2b=-a-3c$이므로
$ax^2-(a+3c)x+3c=0$, $(x-1)(ax-3c)=0$
$\therefore x=1$ 또는 $x=\frac{3c}{a}$
이때, $a<b<c$와 ㉢에 의해 $a<0<c$이므로 $x=\frac{3c}{a}<0$
따라서 이차방정식 $ax^2+2bx+3c=0$은 음의 실근을 가진다. (참)

59

이차방정식 $mx^2-20x+n=0$의 두 근이 모두 소수가 되도록 하는 자연수 m, n의 순서쌍 (m, n)의 개수를 구하시오. 답 6

해 $p+q=\frac{20}{m}$, $pq=\frac{n}{m}$
(i) $m=1$이면 $p+q=20$이므로 $p=3$, $q=17$ $\therefore pq=n=51$
$p=7$, $q=13$ $\therefore pq=n=91$
(ii) $m=2$이면 $p+q=10$이므로
$p=3$, $q=7$에서 $pq=\frac{n}{2}=21$ $\therefore n=42$
$p=5$, $q=5$에서 $pq=\frac{n}{2}=25$ $n=50$
(iii) $m=4$이면 $p+q=5$이므로 $p=2$, $q=3$에서 $pq=\frac{n}{4}=6$ $\therefore n=24$
(iv) $m=5$이면 $p+q=4$이므로 $p=2$, $q=2$에서 $pq=\frac{n}{5}=4$ $\therefore n=20$
따라서 순서쌍 (m, n)의 개수는
$(1, 51)$, $(1, 91)$, $(2, 42)$, $(2, 50)$, $(4, 24)$, $(5, 20)$의 6이다.

60

x에 대한 이차방정식
$(k+a)^2x^2-(2k^2+3k+2)x+(k^2+ak+b)=0$
(단, a, b는 실수)
은 실수 k의 값에 관계없이 $x=1$을 근으로 가진다.
이 방정식의 1이 아닌 근을 α라 할 때, α의 최솟값을 구하시오. 답 $\frac{3}{4}$

해 $x=1$이 이차방정식의 근이므로 대입하고 k에 대하여 정리하면
$(3a-3)k+(a^2+b-2)=0$
이 식이 k에 대한 항등식이므로
$a=1$, $b=1$
이 값을 주어진 식에 대입하면
$(x-1)\{(k+1)^2x-(k^2+k+1)\}=0$
따라서 $x=1$이 아닌 다른 근 α에 대해
$(k^2+2k+1)\alpha-(k^2+k+1)=0$이다.
이 식을 k에 대하여 내림차순으로 정리하면
$(\alpha-1)k^2+(2\alpha-1)k+(\alpha-1)=0$
$\alpha-1\neq0$이므로 위 식을 k에 대한 이차방정식으로 보고
이 방정식의 판별식을 D라 하면 k는 실수이므로
$D=(2\alpha-1)^2-4(\alpha-1)^2\geq0$
$4\alpha-3\geq0$ $\therefore \alpha\geq\frac{3}{4}$
따라서 1이 아닌 근 α의 최솟값은 $\frac{3}{4}$이다.

정답 및 해설 62~63p



일상 생활에서 사용되는 수의 단위

수를 세는 단위

현재는 길이나 면적, 무게를 나타낼 때 국제단위계라고도 하는 SI 단위를 사용하는데
길이를 사용하는 m,시간을 나타내는 s, 무게를 나타내는 kg 등이 있다.
그렇다면 국제단위계 말고도 우리 주변에서 사용하는 단위로는 무엇이 있을까?
많이 알려진 것으로는 건물의 면적을 나타내는 평, 한 묶음의 단위로 사용되는 다스 등이 있다.
그 외에도 많은 일상 단위가 있는데 살펴보도록 하자.

자(척), 장, 치(촌), 푼 : 1척$=\frac{1}{10}$ 장$=$10촌$=$100푼$=$30.3 cm

평 : 가로세로 6자의 넓이. 1평$=$3.3058 m^2

단보, 정보 : 땅 넓이의 단위. 1정보$=$10단보$=$3000평

마지기 : 논밭 넓이의 단위로 한 마지기는 볍씨 한 말의 모 또는 씨앗을 심을 만한 넓이이다.
단위는 지방마다 다르나 논은 약 150~300평, 밭은 약 100평 정도이다.

리 : 거리의 단위로 1리는 약 0.393 km에 해당함.

되, 홉, 말, 섬 : 부피의 단위. 1되$=$10홉$=\frac{1}{10}$ 말$=\frac{1}{100}$ 섬$=$약 1.8리터

짝 : 북어나 명태를 묶어 세는 단위. 한 짝$=$북어나 명태 600마리

마리 : 짐승이나 물고기, 벌레 따위를 세는 단위

매 : 젓가락 한 쌍을 세는 단위

장 : 종이나 널빤지 따위를 세는 단위

모 : 두부, 묵 등 네모지게 썰어 놓은 것을 세는 단위

뭇 : ① 볏단을 세는 단위 ② 생선을 묶어 세는 단위. 한 뭇$=$생선 열 마리
③ 미역을 묶어 세는 단위. 한 뭇$=$미역 열 장

벌 : 옷이나 그릇의 짝을 이룬 단위

우리 : 기와를 세는 단위. 한 우리$=$기와 2000장

접 : 채소나 과일 따위를 묶어 세는 단위. 한 접$=$100개

채 : 집, 이불, 큰 기구, 기물, 가구 따위를 세는 단위

첩 : 약봉지에 싼 약의 뭉치를 세는 단위

축 : 오징어를 묶어 세는 단위. 한 축$=$오징어 스무 마리

켤레 : 신, 버선, 방망이 따위의 두 짝을 한 벌로 세는 단위

코 : 낙지 스무 마리를 이르는 말

쾌 : 북어를 묶어 세는 단위. 한 쾌$=$북어 스무 마리

톨 : 밤이나 곡식의 낱알을 세는 단위

톳 : 김을 묶어 세는 단위. 한 톳$=$김 100장

필 : 동물을 세는 단위



06 이차방정식과 이차함수

개념 강의▶

중요도 ★★★

1 이차함수의 그래프❶

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프에서

(1) 이차항의 계수 a는 그래프의 모양을 결정한다.

① $a>0$이면 아래로 볼록, $a<0$이면 위로 볼록한 모양이다.

② a의 절댓값이 클수록 폭이 좁아진다.

(2) 일차항의 계수 b는 a와 함께 축의 위치를 결정한다.

$y=ax^2+bx+c$, 즉 $y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$에서 축의 방정식은

$x=-\frac{b}{2a}$이다.❷

즉, 축은 $ab>0$이면 y축의 왼쪽, $ab<0$이면 y축의 오른쪽에 위치한다.

(3) 상수항 c는 그래프와 y축과의 교점, 즉 y절편을 결정한다.

(4) **꼭짓점의 좌표**

$f(x)=ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$에서 꼭짓점의 좌표는

$\left(-\frac{b}{2a},\ -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$이다.

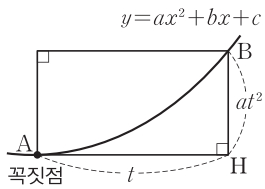
❶ 이차함수의 그래프가 가지는 가장 중요한 성질은 '대칭성'이다. 즉, '축에 대칭'인 그래프이다.
이차함수 ⇒ 축에 대칭

❷ **축의 방정식**
$x=-\frac{b}{2a} \Leftarrow \frac{\text{(두 근의 합)}}{2}$

First Class Tip

*** a의 절댓값과 비례 관계**

그림과 같이 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프의 꼭짓점 A에서 x축의 방향으로 t만큼 떨어진 점 H를 지나고 y축에 평행한 직선이 함수의 그래프와 만나는 점을 B라 하면 $\overline{AH}:\overline{BH}=t:|a|t^2$이 성립한다.



2 이차함수의 그래프와 x축과의 교점

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 x축과 만날 때
이차함수의 그래프와 x축과의 교점 $(\alpha, 0)$에 대하여
$a\alpha^2+b\alpha+c=0$을 만족시킨다.
즉, α는 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 실근이다.

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축과의 교점	이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 해	판별식 $D=b^2-4ac$
서로 다른 두 점 $(\alpha, 0)$, $(\beta, 0)$	서로 다른 두 실근	$D>0$
접점 $(\alpha, 0)$	중근	$D=0$
만나지 않는다.	허근	$D<0$

3 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 위치 관계는
이차방정식 $ax^2+(b-m)x+c-n=0$의 판별식 D의 부호에 따라 다음과 같다.

- $D>0$이면 서로 다른 두 점에서 만난다.
- $D=0$이면 한 점에서 만난다. (접한다.)

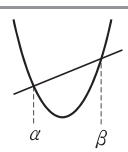
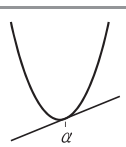
} 두 도형이 만난다.

- $D<0$이면 만나지 않는다.

First Class Tip

*** 이차함수의 그래프와 직선의 교점❸**

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 위치 관계와 이차방정식 $ax^2+(b-m)x+c-n=0$의 해는 다음과 같다.

		
서로 다른 두 실근 $x=\alpha$, $x=\beta$	중근 $x=\alpha$	허근

❸ 실근의 개수나 실근의 범위를 물으면
⇒ **그래프를 그려 찾는다.**

4 이차함수의 최대 · 최소❹

(1) 이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$는

$a>0$이면 최솟값은 $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$이고, 최댓값은 없다.

$a<0$이면 최솟값은 없고, 최댓값은 $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$이다.

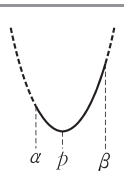
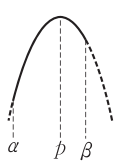
(2) x의 값의 범위가 주어진 이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$는 축의 위치에 따라 최대·최소가 결정된다.

❹ 공통부분이 있는 함수의 최대·최소는 공통부분을 하나의 문자로 치환하여 정리한다.
이때, **치환한 문자의 제한범위**를 반드시 확인해야 한다.

First Class Tip

*** 정해진 범위에서 이차함수의 최대·최소**

$\alpha\le x\le\beta$에서 축이 $x=p$인 이차함수 $y=ax^2+bx+c$에 대하여 최대·최소는 다음과 같다.

$a>0$	 최대: $f(\beta)$ 최소: $f(p)$	 최대: $f(\beta)$ 최소: $f(\alpha)$
$a<0$	 최대: $f(p)$ 최소: $f(\alpha)$	 최대: $f(\alpha)$ 최소: $f(\beta)$

핵심유형 13 이차함수의 그래프

01 출제율 ❯❯

자연수 a, b에 대하여 이차함수
$f(x)=a(x-2)(x-b)$
가 $f(0)=6$, $f(3)>0$을 만족시킬 때, $f(6)$의 값은?

① 20 ② 30 ③ 40
④ 50 ✓⑤ 60

해 $f(0)=2ab=6$이므로 $ab=3$
(i) $a=1$, $b=3$일 때, $f(3)=0$이므로 성립하지 않는다.
(ii) $a=3$, $b=1$일 때, $f(3)>0$이므로 성립한다.
(i), (ii)에 의하여
$f(x)=3(x-2)(x-1)$이므로 $f(6)=3\times4\times5=60$

02 출제율 ❯❯

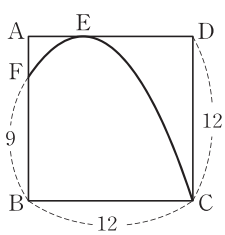
이차함수 $y=x^2+ax-2a$의 그래프는 실수 a의 값에 관계없이 항상 점 P를 지난다. 점 P를 지나고 x축에 평행한 직선이 함수 $y=x^2+ax-2a$의 그래프와 두 점에서 만날 때, 두 교점 중 P가 아닌 점을 Q라 하자. 점 Q의 x좌표가 6일 때, 상수 a의 값은?

✓① -8 ② -4 ③ 0
④ 4 ⑤ 8

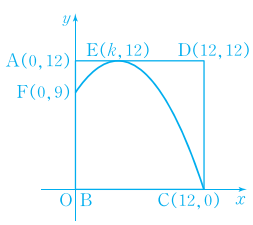
해 P(2, 4), Q(6, 4)
즉, 함수 $y=x^2+ax-2a$의 그래프의 축은 $x=4$이다.
$-\frac{a}{2}=4$ $\therefore a=-8$

03 출제율 ❯❯

그림은 한 변의 길이가 12인 정사각형 ABCD에 나타낸 이차함수의 그래프의 일부이다. 이 그래프는 변 AD와 꼭짓점 E에서 접하고 점 C와 점 F를 지나며 $\overline{BF}=9$이다.
선분 AE의 길이를 구하시오. 답 4



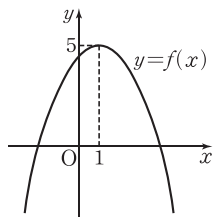
해 이차함수는 $y=a(x-k)^2+12$의 그래프가 점 F(0, 9), C(12, 0)을 지나므로
$k^2+8k-48=0$ $\therefore k=4$ ($\because k>0$)
$\therefore \overline{AE}=k=4$



핵심유형 14 이차함수의 그래프와 이차방정식

04 출제율 ❯❯❯

그림과 같이 이차함수 $y=f(x)$는 $x=1$일 때, 최댓값 5를 가진다. 방정식 $f(2x-p)=0$의 모든 실근의 합이 2일 때, 상수 p의 값은?



✓① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

해 $f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)$
이차함수의 축이 $x=1$이므로 $\frac{\alpha+\beta}{2}=1$
방정식 $f(2x-p)=0$에서 $x=\frac{\alpha+p}{2}$ 또는 $x=\frac{\beta+p}{2}$
방정식 $f(2x-p)=0$의 모든 실근의 합이 2이므로
$\frac{\alpha+p}{2}+\frac{\beta+p}{2}=1+p=2$ $\therefore p=1$

05 출제율 ❯❯❯

이차함수 $y=x^2-2ax+3a+1$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점 A, B에서 만날 때, $\overline{AB}=6$이 되도록 하는 양수 a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ✓⑤ 5

해 이차함수의 그래프의 축이 $x=a$이고 $\overline{AB}=6$이므로
실근은 $a+3$, $a-3$이다.
근과 계수의 관계에 의하여
$(a+3)(a-3)=3a+1$ $\therefore a=5$ ($\because a>0$)

06 출제율 ❯❯❯

이차함수 $y=x^2-2ax+b$의 그래프가 x축과 만나는 서로 다른 두 점의 좌표가 $(-2, 0)$, $(a+3, 0)$일 때, 상수 a, b에 대하여 $a-b$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8
✓④ 9 ⑤ 10

해 이차함수 $y=x^2-2ax+b$의 그래프의 축이 $x=a$이므로 x축과 점 $(a+3, 0)$에서 만나면 x축과 만나는 다른 한 점의 좌표는 $(a-3, 0)$이다.
즉, $a-3=-2$이므로 $a=1$ … ㉠
즉, 이차방정식 $x^2-2ax+b=0$의 두 실근이 -2, 4이므로
$b=-2\times4=-8$ … ㉡
㉠, ㉡에서 $a-b=1-(-8)=9$

핵심유형 15 이차함수의 그래프와 직선의 교점

07 출제율 ›››

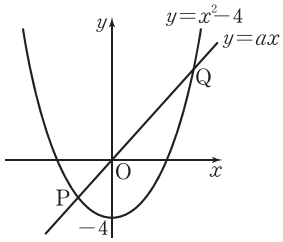
이차함수 $y=(x-k)^2$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 서로 다른 두 점 A, B에서 만난다. 두 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하자. 선분 CD의 길이가 5일 때, 상수 k의 값은?

① 1 ② 2 ✓③ 3
④ 4 ⑤ 5

해 직선 $y=x+k$ 위의 두 점 $A(\alpha, \alpha+k)$, $B(\alpha+5, \alpha+5+k)$는 이차함수 $y=(x-k)^2$의 그래프와 직선 $y=x+k$의 교점이므로
$(x-k)^2=x+k$, 즉 $x^2-(2k+1)x+k^2-k=0$에서
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+(\alpha+5)=2k+1$, $\alpha(\alpha+5)=k^2-k$
$\therefore k=3$

08 출제율 ›››

이차함수 $y=x^2-4$의 그래프와 직선 $y=ax$ $(a>0)$가 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하자. 원점 O에 대하여 $\overline{OP}\times\overline{OQ}=20$이 성립할 때, $a\times\overline{PQ}$의 값을 구하시오. 답 20



해 $x^2-ax-4=0$에서 근과 계수의 관계에 의해
$\alpha+\beta=a$, $\alpha\beta=-4$
$\overline{OP}=-\alpha\sqrt{1+a^2}$, $\overline{OQ}=\beta\sqrt{1+a^2}$이므로
$\overline{OP}\times\overline{OQ}=-\alpha\beta(1+a^2)=20$
$\alpha\beta=-4$를 대입하면 $a=2$ $(\because a>0)$
$\overline{PQ}=\overline{OP}+\overline{OQ}=(\beta-\alpha)\sqrt{1+a^2}=2\sqrt{5}\times\sqrt{5}=10$
$\therefore a\times\overline{PQ}=2\times10=20$

09 출제율 ›››

자연수 n에 대하여 직선 $y=x+2n$이 이차함수 $y=x^2-5x+9$의 그래프와 만나는 두 점의 x좌표를 각각 α, β $(\alpha<\beta)$라 하자. $\frac{|\alpha|+|\beta|}{2}$의 값이 자연수가 되도록 하는 100 이하의 자연수 n의 개수를 구하시오.

해 $x^2-5x+9=x+2n$에서 $\alpha=3-\sqrt{2n}$, $\beta=3+\sqrt{2n}$ 답 10

(i) $1\le n\le4$인 경우, $\frac{|\alpha|+|\beta|}{2}=\frac{\alpha+\beta}{2}=3$
n의 개수는 1, 2, 3, 4의 4이다.

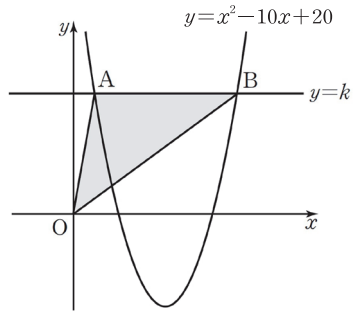
(ii) $4<n\le100$인 경우, $\frac{|\alpha|+|\beta|}{2}=\frac{-\alpha+\beta}{2}=\sqrt{2n}$
자연수 k에 대하여 $n=2\times k^2$이라 하면 $4<n=2\times k^2\le100$,
$2<k^2\le50$을 만족시키는 k의 값은 2, 3, 4, 5, 6, 7이므로 n의 개수는 8, 18, 32, 50, 72, 98의 6이다.

따라서 자연수 n의 개수는 $4+6=10$

핵심유형 16 이차함수의 활용

10 출제율 ›››

그림과 같이 이차함수 $y=x^2-10x+20$의 그래프와 직선 $y=k$가 만나는 두 점을 각각 A, B라 하자. 삼각형 AOB의 넓이가 44일 때, 양수 k의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) 답 11



해 두 점 A, B의 좌표를 각각 $(5-\alpha, k)$, $(5+\alpha, k)$라 하면 $\overline{AB}=2\alpha$
점 $A(5-\alpha, k)$가 이차함수 $y=(x-5)^2-5$의 그래프 위의 점이므로
대입하면 $k=\alpha^2-5$ … ㉠
삼각형 AOB의 넓이가 44이므로 $\frac{1}{2}\times2\alpha\times k=\alpha k=44$ … ㉡
㉠, ㉡을 연립하면 $(\alpha-4)(\alpha^2+4\alpha+11)=0$
$\alpha^2+4\alpha+11=(\alpha+2)^2+7>0$이므로 $\alpha=4$ $\therefore k=\alpha^2-5=11$

11 출제율 ›››

이차방정식 $x^2-mx+1=0$의 한 근은 -1보다 크고 다른 한 근은 -3과 -1 사이에 존재하도록 하는 정수 m의 값은?

✓① -3 ② -1 ③ 1
④ 3 ⑤ 5

해 $f(-3)=9+3m+1>0$에서 $m>-\frac{10}{3}$
$f(-1)=1+m+1<0$에서 $m<-2$
$\therefore -\frac{10}{3}<m<-2$
따라서 정수 m의 값은 -3이다.

12 출제율 ›››

이차방정식 $ax(x-4)=13$의 서로 다른 두 근이 모두 3보다 작을 때, 정수 a의 값은?

✓① -4 ② -2 ③ 0
④ 2 ⑤ 4

해 서로 다른 두 근이 모두 3보다 작으려면
$f(2)>0$, $f(3)<0$을 만족시키면 된다.
$f(2)=-4a-13>0$에서 $a<-\frac{13}{4}$
$f(3)=-3a-13<0$에서 $a>-\frac{13}{3}$
$-\frac{13}{3}<a<-\frac{13}{4}$이므로 정수 a의 값은 -4이다.

11 DAY

핵심유형 17 이차함수의 최대 · 최소

13 출제율 ❯❯❯

이차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근은 -3과 5이다.
(나) $2\le x\le 4$에서 이차함수 $f(x)$의 최댓값은 30이다.

$f(-2)$의 값을 구하시오. 답 14

해 조건 (가)에서 $f(x)=a(x+3)(x-5)$이고
조건 (나)에서 $-3<2\le x\le 4<5$인 구간에서의 함숫값이 양수이므로
그래프가 위로 볼록한 이차함수이다.
함수의 최댓값은
$f(2)=a(2+3)(2-5)=-15a=30 \quad \therefore a=-2$
$\therefore f(-2)=-2(-2+3)(-2-5)=14$

14 출제율 ❯❯❯

함수 $f(x)=x^2-4x+2$에 대하여 $0\le x\le 3$에서 $f(f(x))$의 최솟값은?

① -6 ② -5 ③ -4
④ -3 ✓⑤ -2

해 $f(x)=x^2-4x+2=(x-2)^2-2$
$0\le x\le 3$에서 $-2\le f(x)\le 2$이므로 $f(x)=t$라 하면
$f(f(x))=f(t)=t^2-4t+2=(t-2)^2-2 \ (-2\le t\le 2)$
따라서 $t=2$일 때, $f(f(x))$의 최솟값은 -2이다.

15 출제율 ❯❯❯

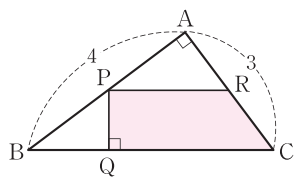
$-2\le x\le 3$에서 정의된 이차함수 $f(x)$가
$f(0)=f(2),\ f(-1)+|f(1)|=0$
을 만족시킨다. 함수 $f(x)$의 최솟값이 -14일 때, $f(3)$의 값을 구하시오. 답 -4

해 $f(x)=a(x-1)^2+b$
이차함수 $f(x)$의 대칭축이 $x=1$이므로 $f(-1)\ne f(1)$
즉, $f(-1)+|f(1)|=0$에서 $f(-1)+f(1)=0$
(i) $a>0$인 경우
$f(1)<f(-1)$이 되어 조건을 만족시키지 않는다.
(ii) $a<0$인 경우
$f(-2)=9a+b=-14$이고
$f(-1)+f(1)=(4a+b)+b=4a+2b=0$이므로 두 식을 연립하면 $a=-2,\ b=4$
(i), (ii)에서 $f(x)=-2(x-1)^2+4$이므로
$f(3)=-2\times(3-1)^2+4=-8+4=-4$이다.

핵심유형 18 이차함수의 최대 · 최소의 활용

16 출제율 ❯❯❯

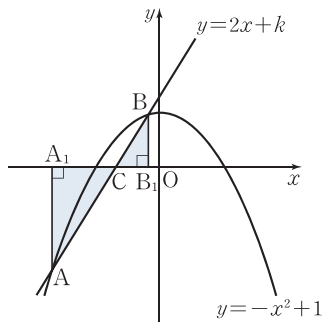
그림과 같이 $\angle A=90^\circ$이고 $\overline{AB}=4$, $\overline{AC}=3$인 직각삼각형 ABC가 있다. 변 AB 위의 한 점 P에서 변 BC에 내린 수선의 발을 Q라 하고, 점 P를 지나고 변 BC와 평행한 직선이 변 AC와 만나는 점을 R라 하자. 사각형 PQCR의 넓이의 최댓값을 M이라 할 때, $82M$의 값을 구하시오.
(단, 점 P는 꼭짓점 A와 꼭짓점 B가 아니다.) 답 300



해 세 삼각형 ABC, APR, QBP가 모두 닮음이므로
$\overline{AP}=4a$, $\overline{AR}=3a$, $\overline{PR}=5a$ $(0<a<1)$, $\overline{QB}=4b$, $\overline{QP}=3b$, $\overline{BP}=5b$ $(0<b<1)$라 하면 $4a+5b=4$ … ㉠
사다리꼴 PQCR의 넓이를 S라 하면
$S=\frac{1}{2}\times\{5a+(5-4b)\}\times 3b=\frac{3}{2}b\left(10-\frac{41}{4}b\right)\left(0<b<\frac{4}{5}\right)$
따라서 사각형 PQCR의 넓이는 $b=\frac{20}{41}$일 때, 최댓값 $\frac{150}{41}$을 가지므로 $82M=300$

17 출제율 ❯❯❯ 교육청 기출

그림과 같이 $-2<k<2$인 실수 k에 대하여 이차함수 $y=-x^2+1$의 그래프와 직선 $y=2x+k$가 만나는 두 점을 각각 A, B라 할 때, A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 A_1, B_1이라 하고, 직선 $y=2x+k$와 x축이 만나는 점을 C라 하자. 두 삼각형 ACA_1과 BCB_1의 넓이의 합이 $\frac{3}{2}$일 때, 상수 k의 값이 $p+q\sqrt{7}$이다.
$10p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 유리수이다.) 답 39



해 두 점 A, B의 x좌표를 각각 α, β라 하면 $A(\alpha, 2\alpha+k)$, $B(\beta, 2\beta+k)$,
α, β는 이차방정식 $-x^2+1=2x+k$, 즉 $x^2+2x+k-1=0$의 근이므로 $\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=k-1$
두 삼각형 ACA_1과 BCB_1의 넓이의 합이 $\frac{3}{2}$이므로
$\left(\alpha+\frac{k}{2}\right)^2+\left(\beta+\frac{k}{2}\right)^2=\frac{3}{2}$, $k^2-8k+9=0$
이때, $-2<k<2$이므로 $k=4-\sqrt{7}$
따라서 $p=4$, $q=-1$이므로 $10p+q=39$

핵심유형 13 이차함수의 그래프

18

함수 $f(x)=ax^2+bx+c$의 그래프는 축이 직선 $x=2$이고, x축과 점 $(-1, 0)$에서 만난다. 상수 a, b, c가 $a+b+c=16$을 만족시킬 때, $f(4)$의 값을 구하시오. 답 10

해 이차방정식 $f(x)=0$의 두 실근이 -1, 5이므로
$f(x)=ax^2+bx+c=a(x+1)(x-5)$ … ㉠
$a+b+c=16$에서 $f(1)=a+b+c=16$
㉠에 $x=1$을 대입하면 $f(1)=a(1+1)(1-5)=-8a=16$
$\therefore a=-2$
따라서 $f(x)=-2(x+1)(x-5)$이므로
$f(4)=-2(4+1)(4-5)=10$

19

두 함수 $y=\frac{1}{2}x^2$, $y=-(x-1)^2+a$의 그래프가 제1사분면에서 만나는 점의 y좌표가 $\frac{2}{3}a$일 때, 상수 a의 값을 구하시오. $\left(\text{단, } a>\frac{1}{2}\right)$ 답 3

해 제1사분면에서 만나는 점의 좌표를 $\left(t, \frac{2}{3}a\right)$라 하면
$a=\frac{3}{4}t^2$ … ㉠, $a=3(t-1)^2$ … ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면 $\frac{3}{4}t^2=3(t-1)^2$ $\therefore t=\frac{2}{3}$ 또는 $t=2$
㉠에 의하여 $a>\frac{1}{2}$이므로 $a=3$

20

이차함수 $y=x^2-5x+p$의 그래프가 서로 다른 두 점 $A(a, b)$, $B(b, a)$를 지날 때, 정수 p의 최댓값은?

① 4 ② 5 ③ 6
✓④ 7 ⑤ 8

해 이차방정식 $x^2-5x+p=-x+a+b$, 즉 $x^2-4x+p-a-b=0$이 서로 다른 두 실근 a, b를 가진다는 것이므로 $a+b=4$
$y=-x^2+4x+4$의 그래프와 직선 $y=p$가 서로 다른 두 교점을 가지므로 이차함수 $y=-x^2+4x+4=-(x-2)^2+8$에서 $p<8$
따라서 정수 p의 최댓값은 7이다.

21

이차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $2f(x)+f(1-x)=3x^2+6$을 만족시킬 때, [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

| 보기 |
ㄱ. $f(0)=1$
ㄴ. 이차함수 $f(x)$의 그래프의 꼭짓점은 제2사분면에 있다.
ㄷ. 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(-2-x)$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
✓④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해 $2f(x)+f(1-x)=3x^2+6$ … ㉠
㉠에 x대신 $1-x$를 대입하면
$2f(1-x)+f(x)=3(1-x)^2+6$ … ㉡
㉠$\times 2-$㉡을 하면 $f(x)=x^2+2x+1=(x+1)^2$
ㄷ. $f(x)=(x+1)^2$에서 함수 $f(x)$의 그래프는 직선 $x=-1$에 대하여 대칭이다.
따라서 $f(-1+x)=f(-1-x)$가 성립하고
이 식에 x대신 $x+1$을 대입하면
$f(x)=f(-2-x)$ (참)

22

이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(5)-f(3)$의 값은?
(단, a, b, c는 상수이다.)

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(4-x)=f(2+x)$
(나) $f(1)-f(2)=6$

① 5 ✓② 8 ③ 11
④ 14 ⑤ 17

해 $f(4-x)=f(2+x)$에 x대신 $x+1$을 대입하면
$f(3-x)=f(3+x)$
즉, 축이 $x=3$이므로
$-\frac{b}{2a}=3$, $b=-6a$
따라서 $f(x)=ax^2-6ax+c$
조건 (나)의 $f(1)-f(2)=6$에서 $a=2$, $f(x)=2x^2-12x+c$
$\therefore f(5)-f(3)=(50-60+c)-(18-36+c)=8$

12 DAY

정답 및 해설 67~69p

핵심유형 14 이차함수의 그래프와 이차방정식

23

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 두 점에서 만난다. 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 두 교점 사이의 거리를 $2l$이라 할 때, 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=6$의 두 교점 사이의 거리는 $2(l+1)$이고 직선 $y=16$의 두 교점 사이의 거리는 $2(l+2)$가 된다. l의 값을 구하시오. 답 1

해 이차함수 $f(x)$의 이차항의 계수를 a라 하면 $f(x)=a(x+l)(x-l)$
$f(x)-6=a(x+l)(x-l)-6$이므로 $al^2+6=a(l+1)^2$
$\therefore 2al+a=6$
$f(x)-16=a(x+l)(x-l)-16$이므로 $al^2+16=a(l+2)^2$
$\therefore 4al+4a=16$ $\therefore l=1$

24

두 이차함수 $f(x)=x^2-ax$, $g(x)=-x^2+bx-10$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a>0$
(나) 함수 $f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 두 교점을 A, B라 할 때, 함수 $g(x)$의 그래프가 점 B를 지난다.
(다) 함수 $g(x)$의 그래프가 선분 AB를 2 : 3으로 내분하는 점을 지난다.

$a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수) 답 12

해 이차방정식 $g(x)=-x^2+bx-10=0$의 두 근이 $\frac{2}{5}a$와 a이므로
$\frac{2}{5}a\times a=10$, $\frac{2}{5}a+a=b$
$a>0$이므로 $a=5$, $b=7$ $\therefore a+b=12$

25

이차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(-1)=0$
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq f(1)$이다.

[보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

| 보기 |
ㄱ. $f(3)=0$
ㄴ. $f(0)=m$이라 할 때, x에 대한 방정식 $f(x)=mx$의 두 실근의 합은 -1이다.
ㄷ. 실수 k의 값에 관계없이 방정식 $f(x)=kx$의 두 실근의 곱은 항상 일정하다.

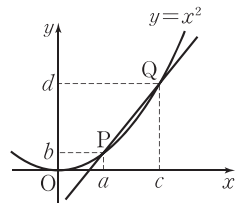
① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ✓⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해 조건 (나)에서 이차함수 $f(x)$의 그래프는 축이 $x=1$이고 아래로 볼록하다.
ㄴ. ㄱ에 의해 $f(x)=a(x+1)(x-3)$ $(a>0)=ax^2-2ax-3a$
라 하면 $f(0)=m$에서 $m=-3a$이다.
방정식 $f(x)=mx$에서 $ax^2-2ax-3a=-3ax$
즉 $x^2+x-3=0$이므로 두 실근의 합은 -1이다. (참)
ㄷ. $f(x)=kx$에서 ㄴ에 의해 $ax^2-(2a+k)x-3a=0$이므로
두 실근의 곱은 -3으로 일정하다. (참)

핵심유형 15 이차함수의 그래프와 직선의 교점

26

이차함수 $y=x^2$의 그래프 위의 두 점 $P(a, b)$, $Q(c, d)$에 대하여 $\sqrt{b}+\sqrt{d}=1$일 때, 직선 PQ의 기울기는? (단, $0<a<c$)



① $\frac{1}{2}$ ✓② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

해 두 점 P, Q가 이차함수 $y=x^2$의 그래프 위의 점이므로
$b=a^2$, $d=c^2$에서 $a=\sqrt{b}$, $c=\sqrt{d}$ ($\because 0<a<c$)이다.
따라서 $\overline{PQ}$의 기울기는 $\frac{d-b}{c-a}=\frac{d-b}{\sqrt{d}-\sqrt{b}}=\sqrt{d}+\sqrt{b}=1$

27

직선 $y=2x+k$가 이차함수 $y=x^2$의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만나고, 이 두 점 사이의 거리가 $2\sqrt{10}$일 때, 상수 k의 값은?

① -1 ✓② 1 ③ 2
④ 3 ⑤ 4

해 이차방정식 $2x+k=x^2$, 즉 $x^2-2x-k=0$의 두 근을 α, β라 하면
두 그래프의 교점의 좌표는 $(\alpha, 2\alpha+k)$, $(\beta, 2\beta+k)$이므로
$\sqrt{(\alpha-\beta)^2+(2\alpha-2\beta)^2}=2\sqrt{10}$
$\therefore |\alpha-\beta|=2\sqrt{2}$
이때, $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$이므로
$(2\sqrt{2})^2=2^2-4\times(-k)$, $8=4+4k$ $\therefore k=1$

28

곡선 $y=x^2-x-1$과 직선 $y=2x+1$의 두 교점을 각각 $P(a, b)$, $Q(c, d)$라 할 때, bd의 값은?

① -2 ✓② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

해 곡선 $y=x^2-x-1$과 직선 $y=2x+1$의 교점의 x좌표는
$x^2-x-1=2x+1$에서 $x^2-3x-2=0$
$a+c=3$, $ac=-2$이고 $b=2a+1$, $d=2c+1$이므로
$bd=(2a+1)(2c+1)=4ac+2(a+c)+1$
$=4\times(-2)+2\times3+1=-1$

29

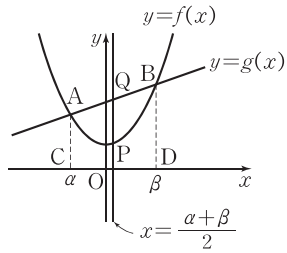
이차함수 $y=x^2$의 그래프가 직선 $y=m(x+2)$와 서로 다른 두 점 P, Q에서 만나고, 원점 O에 대하여 선분 OP와 선분 OQ가 서로 수직일 때, 상수 m의 값은?

① $-\frac{1}{2}$ ② 0 ✓③ $\frac{1}{2}$
④ 1 ⑤ $\frac{3}{2}$

해 $x^2=m(x+2)$에서 $x^2-mx-2m=0$의 서로 다른 두 실근을 α, β라 하면 $\alpha+\beta=m$, $\alpha\beta=-2m$
한편, $P(\alpha, \alpha^2)$, $Q(\beta, \beta^2)$이라 하면 직선 OP와 직선 OQ의 기울기는 각각 α, β이므로 $\alpha\beta=-1$ $\therefore m=\frac{1}{2}$

30

이차함수 $f(x)=3x^2+px+q$와 일차함수 $g(x)$에 대하여 그림과 같이 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 두 점 $A(\alpha, f(\alpha))$, $B(\beta, f(\beta))$에서 만나고,



직선 $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$가 두 그래프와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. $\overline{PQ}=6$일 때, 두 점 $C(\alpha, 0)$, $D(\beta, 0)$에 대하여 $\overline{CD}$의 길이는?

✓① $2\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ $\sqrt{3}+1$
④ $\sqrt{3}+2$ ⑤ $2\sqrt{2}+1$

해 $f(x)-g(x)=3x^2+px+q-g(x)=3(x-\alpha)(x-\beta)$
이때, $\overline{PQ}=6$이므로 $g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=6$
$(\alpha-\beta)^2=8$ $\therefore \overline{CD}=|\alpha-\beta|=2\sqrt{2}$

31

일차함수 $y=h(x)$에 접하는 두 이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$에 대하여 두 함수 $y=f(x)$, $y=h(x)$의 그래프가 접하는 점의 x좌표를 p $(p>0)$, 두 함수 $y=g(x)$, $y=h(x)$의 그래프가 접하는 점의 x좌표를 $4p$라 하자. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\frac{|\alpha-\beta|}{p}$의 값은?

(가) 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 최고차항의 계수는 각각 1과 4이다.
(나) 방정식 $f(x)=g(x)$는 두 근 α, β를 갖는다.

① 1 ② 2 ③ 3
✓④ 4 ⑤ 5

해 이차방정식 $f(x)-h(x)=0$은 $x=p$인 중근을 가지므로
$f(x)=(x-p)^2+h(x)$
같은 방법으로 $g(x)=4(x-4p)^2+h(x)$
$f(x)-g(x)=(x-p)^2-4(x-4p)^2$
$=(x-p)^2-(2x-8p)^2$
$=(3x-9p)(-x+7p)$
$=-3(x-3p)(x-7p)=0$
따라서 α, β의 값은 $\alpha=3p$, $\beta=7p$ 또는 $\alpha=7p$, $\beta=3p$이므로
$\frac{|\alpha-\beta|}{p}=\frac{|\pm4p|}{p}=\frac{4p}{p}$ $(\because p>0)=4$

12 DAY

32

이차함수 $y=x^2-2ax+a^2+2a-1$의 그래프가 a의 값에 관계없이 직선 $y=mx+n$과 접할 때, 상수 m, n에 대하여 $m+n$의 값은?

① -4 ② -2 ③ -1
✓④ 0 ⑤ 2

해 $x^2-2ax+a^2+2a-1=mx+n$, 즉
$x^2-(2a+m)x+a^2+2a-n-1=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(2a+m)^2-4(a^2+2a-n-1)$
$=4am+m^2-8a+4n+4$
$=(4m-8)a+m^2+4n+4=0$
이 식이 a의 값에 관계없이 성립하므로 $4m-8=0$이고,
$m^2+4n+4=0$
두 식을 연립하여 풀면 $m=2$, $n=-2$ $\therefore m+n=0$

33

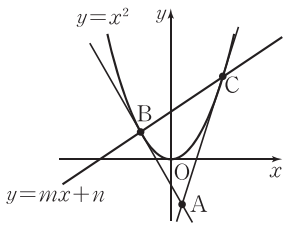
함수 $f(x)=|x^2-4x-5|$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 서로 다른 네 점에서 만나도록 하는 자연수 k의 개수는?

① 3 ② 4 ③ 5
✓④ 6 ⑤ 7

해 (i) 직선 $y=x+k$가 점 $(-1, 0)$을 지나는 경우
$0=-1+k$ $\therefore k=1$
(ii) 직선 $y=x+k$가 함수 $f(x)=|x^2-4x-5|$의 그래프에 접하는 경우
$-(x^2-4x-5)=x+k$에서 $x^2-3x+k-5=0$
$D=9-4(k-5)=0$ $\therefore k=\frac{29}{4}$
(i), (ii)에 의하여 조건을 만족시키는 k의 값의 범위는 $1<k<\frac{29}{4}$
따라서 자연수 k의 개수는 2, 3, 4, 5, 6, 7의 6이다.

34

그림과 같이 점 $A\left(\frac{1}{2}, -2\right)$에서 이차함수 $y=x^2$의 그래프에 두 개의 접선을 그을 수 있다.
이 두 개의 접선이 각각 이 이차함수와 접하는 점을 B, C라 하자. 두 점 B, C를 지나는 직선의 방정식이 $y=mx+n$일 때, 상수 m, n에 대하여 $m+n$의 값을 구하시오. 답 3



해 두 점 B, C의 x좌표를 각각 α, β라 하고 점 B에서 함수 $y=x^2$에 접하는 직선의 방정식을 $y=ax+b$라 하자.
$x^2-ax-b=(x-\alpha)^2$에서
$y=x^2-(x-\alpha)^2 \cdots$ ㉠, $y=x^2-(x-\beta)^2 \cdots$ ㉡
㉠과 ㉡의 두 직선이 모두 점 $A\left(\frac{1}{2}, -2\right)$를 지나므로 이차방정식 $-2=\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2$의 두 실근이 α, β이다. 이차함수 $y=x^2$의 그래프와 직선 $y=x+2$의 교점의 x좌표가 α, β이므로
$mx+n=x+2$ $\therefore m+n=1+2=3$

35

이차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$와 이차항의 계수가 2인 이차함수 $g(x)$가 있다. 기울기가 1인 일차함수 $h(x)$가 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$에 모두 접한다. 두 함수 $y=f(x)$, $y=h(x)$의 그래프가 접하는 점의 x좌표를 α, 두 함수 $y=g(x)$, $y=h(x)$의 그래프가 접하는 점의 x좌표를 β라 할 때, 다음 조건이 성립한다.

(가) $\alpha+\beta=2$
(나) 두 이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 두 교점의 x좌표의 합은 8이다.
(다) $f(1)+g(1)=9$

$f(2)+g(2)$의 값을 구하시오. 답 12

해 $g(x)-f(x)=2(x-\beta)^2-(x-\alpha)^2$
두 이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 두 교점의 x좌표를 m, n이라 하면 $4\beta-2\alpha=8$
조건 (가)에서 $\alpha+\beta=2 \Rightarrow \alpha=0$, $\beta=2$
$h(x)=x+p$라 하면 $f(1)=1+1+p=4$ $\therefore p=2$
$f(x)=(x-0)^2+h(x)=x^2+x+2$,
$g(x)=2(x-2)^2+h(x)=2(x-2)^2+x+2$ $\therefore f(2)+g(2)=12$

핵심유형 16 이차함수의 활용

36

이차방정식 $x^2-2x+a=0$의 근 중에서 적어도 한 근이 -2와 2 사이에 존재하는 실수 a의 값의 범위가 $\alpha<a\leq\beta$일 때, $\beta-\alpha$의 값은?

① 3 ② 6 ✓③ 9
④ 12 ⑤ 15

해 $f(x)=x^2-2x+a$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 -2와 2 사이에 적어도 하나 존재하려면 $f(1)\leq0$이고, $f(-2)>0$이어야 한다.
$f(1)=a-1\leq0$에서 $a\leq1$
$f(-2)=8+a>0$에서 $a>-8$
따라서 $-8<a\leq1$이므로 $\alpha=-8$, $\beta=1$
$\therefore \beta-\alpha=9$

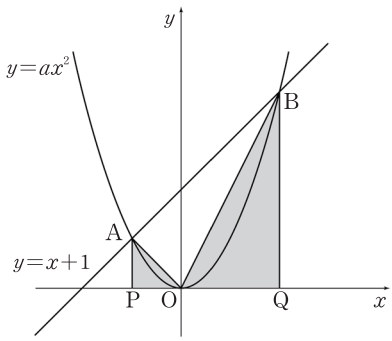
37

이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 -3과 0 사이에 있고 다른 한 근은 0과 2 사이에 있을 때, 정수 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수를 구하시오. 답 11

해 $f(-3)=9-3a+b>0$, $f(0)=b<0$,
$f(2)=4+2a+b>0$이므로 $-2<a<3$
$a=-1$일 때, 순서쌍 (a, b)는 $(-1, -1)$
$a=0$일 때, 순서쌍 (a, b)는 $(0, -3)$, $(0, -2)$, $(0, -1)$
$a=1$일 때, 순서쌍 (a, b)는 $(1, -5)$, $(1, -4)$, $(1, -3)$, $(1, -2)$, $(1, -1)$
$a=2$일 때, 순서쌍 (a, b)는 $(2, -2)$, $(2, -1)$
따라서 순서쌍 (a, b)의 개수는 $1+3+5+2=11$이다.

38

다음 그림과 같이 함수 $y=ax^2$ $(a>0)$의 그래프와 직선 $y=x+1$이 서로 다른 두 점 A, B에서 만난다. 두 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 P, Q라 하고, △AOP, △BOQ, △AOB의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3이라 하자. $S_1+S_2=2S_3$일 때, 상수 a의 값은?



✓① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

해 두 점 A, B의 x좌표를 각각 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면 $\alpha+\beta=\frac{1}{a}$ … ㉠

$S_1=-\frac{1}{2}(\alpha^2+\alpha)$, $S_2=\frac{1}{2}(\beta^2+\beta)$에서

$S_1+S_2=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)(\beta+\alpha+1)$

$S_3=\square APQB-(S_1+S_2)=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)$

이때, $S_1+S_2=2S_3$이므로 $\alpha+\beta=1$

㉠에서 $\frac{1}{a}=1$이므로 $a=1$

핵심유형 17 이차함수의 최대 · 최소

39

임의의 실수 a에 대하여 항상 이차함수 $y=x^2-3ax+4a$의 그래프와 직선 $y=ax+b$가 접할 때, 실수 b의 최댓값은?

① 0 ✓② 1 ③ 2
④ 3 ⑤ 4

해 이차방정식 $x^2-3ax+4a=ax+b$가 중근을 갖는다.

이차방정식 $x^2-4ax+4a-b=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4a^2-4a+b=0$이므로

$b=-4a^2+4a=-4\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+1$

따라서 $a=\frac{1}{2}$일 때, b의 최댓값은 1이다.

40

두 함수 $f(x)=x^2-2x+2$, $g(x)=-x^2-2ax-2a+2$가 임의의 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1)\geq g(x_2)$를 만족시킬 때, 실수 a의 값을 구하시오. 답 1

해 $f(x)=(x-1)^2+1\geq 1$

$g(x)=-(x+a)^2+a^2-2a+2\leq a^2-2a+2$

에서 $a^2-2a+2\leq 1$이므로 $(a-1)^2\leq 0$ $\therefore a=1$

41

함수 $f(x)=x-1$에 대하여 $-1\leq x\leq 5$에서 함수 $f(x)\times f(|x-2|)$의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 1 ② 2 ③ 3
✓④ 4 ⑤ 5

해 $-1\leq x<2$일 때,

$f(x)\times f(|x-2|)=f(x)\times f(-x+2)=-(x-1)^2$

이므로 $x=1$일 때 최댓값 0, $x=-1$일 때 최솟값 -4를 갖는다.

$2\leq x\leq 5$일 때,

$f(x)\times f(|x-2|)=f(x)\times f(x-2)=(x-2)^2-1$

이므로 $x=2$일 때 최솟값 -1, $x=5$일 때 최댓값 8을 갖는다.

따라서 함수 $f(x)\times f(|x-2|)$의 최댓값은 8, 최솟값은 -4이고 그 합은 $8+(-4)=4$

42

$0\leq x\leq 2$에서 이차함수 $f(x)=x^2-2ax+a^2$의 최댓값과 최솟값의 차가 2가 되도록 하는 모든 상수 a의 값의 합을 구하시오. 답 2

해 (i) $a<0$일 때 $a=\frac{1}{2}$ (모순)

(ii) $0\leq a\leq 1$일 때 $a=2-\sqrt{2}$ $(\because a\leq 1)$

(iii) $1<a\leq 2$일 때 $a=\sqrt{2}$ $(\because a>1)$

(iv) $a>2$일 때 $a>2$ (모순)

따라서 모든 상수 a의 값의 합은 $(2-\sqrt{2})+\sqrt{2}=2$이다.

12 DAY

◇ 정답 및 해설 71~73p

43

이차함수 $f(x)=x^2-2x+a$에 대하여 $f(x)$의 최솟값과 $f(f(x))$의 최솟값이 서로 같을 때, 정수 a의 최댓값은?

✓① 2　② 3　③ 4
④ 5　⑤ 6

해 $f(x)=x^2-2x+a=(x-1)^2+a-1$은 $x=1$일 때 최솟값 $a-1$을 갖는다.
$f(x)=t$라 하면
$f(f(x))=f(t)=t^2-2t+a$ $(t\geq a-1)$의 꼭짓점의 t좌표 1은
$1\geq a-1$일 때, $f(t)$의 최솟값이 $f(1)=a-1$이 되어
$f(x)$의 최솟값과 같아지므로
$1\geq a-1$　∴ $a\leq 2$
따라서 정수 a의 최댓값은 2이다.

44

$(x-1)^2+y^2=4$를 만족시키는 실수 x, y에 대하여 x^2+2y^2의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값은?

① 10　✓② 11　③ 12
④ 13　⑤ 14

해 $(x-1)^2+y^2=4$에서 $y^2=4-(x-1)^2$
이때, x, y가 실수이므로 $y^2=4-(x-1)^2\geq 0$
∴ $-1\leq x\leq 3$
한편, $x^2+2y^2=x^2+2\{4-(x-1)^2\}=-x^2+4x+6$에서
$M=f(2)=10$
$m=f(-1)=1$　∴ $M+m=11$

45

$0\leq x\leq 6$에서 이차함수 $f(x)=-(x+2a)^2+b$의 최댓값이 6일 때, 두 실수 a, b에 대하여 $8a+b$의 최솟값은?

① -20　✓② -22　③ -24
④ -26　⑤ -28

해 축 $x=-2a$의 위치에 따라 최댓값을 가지는 x의 값을 찾는다.
$-2a\leq 0$, 즉 $a\geq 0$인 경우, $f(0)=-4a^2+b=6$에서 $b=4a^2+6$
$8a+b=4a^2+8a+6=4(a+1)^2+2$의 최솟값은 $a=0$일 때 6이다.
$0<-2a\leq 6$, 즉 $-3\leq a<0$인 경우, $f(-2a)=b=6$
$8a+b=8a+6$은 $a=-3$일 때 최솟값 -18을 갖는다.
$6<-2a$, 즉 $a<-3$인 경우,
$f(6)=-(6+2a)^2+b=-4a^2-24a-36+b=6$에서
$b=4a^2+24a+42$
$8a+b=4a^2+32a+42=4(a+4)^2-22$의 최솟값은 $a=-4$일 때 -22이다.
따라서 $8a+b$의 최솟값은 $a=-4$일 때 -22이다.

46

실수 t에 대하여 $t\leq x\leq t+2$에서 이차함수 $f(x)=x^2+2x-3$의 최댓값을 $M(t)$, 최솟값을 $m(t)$라 하자. $g(t)=M(t)-m(t)$라 할 때, t에 대한 방정식 $g(t)-a=0$의 실근의 개수가 1이 되도록 하는 상수 a의 값을 구하시오. 답 1

해 $g(t)=\begin{cases}-4t-8 & (t\leq -3)\\ (t+1)^2 & (-3<t\leq -2)\\ (t+3)^2 & (-2<t\leq -1)\\ 4t+8 & (t>-1)\end{cases}$
방정식 $g(t)=a$의 실근의 개수는 함수 $y=g(t)$의 그래프와 직선 $y=a$가 만나는 점의 개수와 같다.
따라서 t에 대한 방정식 $g(t)=a$의 실근의 개수가 1이 되도록 하는 상수 a의 값은 1이다.

47

이차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(-4)=0$
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\leq f(-2)$이다.

실수 p에 대하여 $p\leq x\leq p+2$에서 함수 $f(x)$의 최솟값을 $g(p)$라 할 때, 함수 $g(p)$의 최댓값이 6이다. $f(-2)$의 값은?

① 4　② 5　③ 6
④ 7　✓⑤ 8

해 $g(p)=\begin{cases}f(p) & (p\leq -3)\\ f(p+2) & (p>-3)\end{cases}$
따라서 $g(p)$의 최댓값은 $f(-3)$이다.
$f(-3)=6$에서
$a\times(-3)\times(-3+4)=-3a=6$
따라서 $a=-2$이므로 $f(-2)$의 값은
$f(-2)=-2\times(-2)\times(-2+4)=8$

48

정수 a에 대하여 이차함수 $f(x)=(x-a)^2$이 다음 조건을 만족시킬 때, 모든 정수 a의 값의 합을 구하시오. 답 18

(가) $3\leq x\leq 18$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 0이다.
(나) $3\leq x\leq 9$에서 함수 $f(x)$의 최댓값과 $9\leq x\leq 18$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 같다.

해 (i) $a=3$인 경우
조건 (나)를 만족시킨다.
(ii) $3<a\leq 9$인 경우
$3\leq x\leq 9$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(3)$ 또는 $f(9)$이고
$9\leq x\leq 18$에서 조건 (나)에 의해 $f(3)\leq f(9)$이다.
$f(3)-f(9)\leq 0$에서 $3<a\leq 6$
(iii) $9<a\leq 18$인 경우
$f(3)>0$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.
(i), (ii), (iii)에 의해 조건을 만족시키는 정수 a의 값은
3, 4, 5, 6이고 모든 정수 a의 값의 합은 $3+4+5+6=18$

핵심유형 18 이차함수의 최대 · 최소의 활용

49

이차함수 $y=x^2$의 그래프 위의 두 점 A$(-1, 1)$, B$(3, 9)$와 이차함수 $y=x^2$의 그래프 위를 움직이는 점 P(t, t^2)에 대하여 삼각형 APB의 넓이가 최대가 되는 실수 t의 값은? (단, $-1<t<3$)

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$

✓④ 1 ⑤ $\frac{4}{3}$

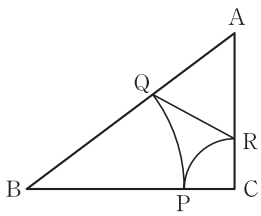
해 직선 AB와 평행하면서 $y=x^2$의 그래프에 접하는 직선의 방정식을 $y=2x+k$라 하면 $x^2=2x+k$에서 $x^2-2x-k=0$

판별식을 D라 하면 $\frac{D}{4}=1+k=0$ $\therefore k=-1$

따라서 점 P의 좌표는 $(1, 1)$이므로 $t=1$

50

$\overline{AB}=10$, $\overline{BC}=8$, $\overline{CA}=6$인 삼각형 ABC가 있다. 그림과 같이 선분 BC 위의 한 점 P에 대하여 중심이 B이고 반지름이 $\overline{BP}$인 원이 선분 AB와 만나는 점을 Q, 중심이 C이고 반지름이 $\overline{CP}$인 원이 선분 CA와 만나는 점을 R라 하자. $\overline{QR}^2$의 값이 최소일 때, 선분 BP의 길이를 구하시오. 답 6



해 $\overline{BP}=r$라 하고 점 Q에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{QR}^2=\overline{HR}^2+\overline{QH}^2=\frac{64}{25}(r-5)^2+\frac{16}{25}(10-r)^2$

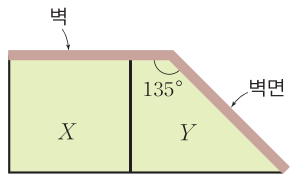
$=\frac{16}{5}(r^2-12r+40)$

따라서 $r=6$, 즉 $\overline{BP}=6$일 때 $\overline{QR}^2$의 값은 최소이다.

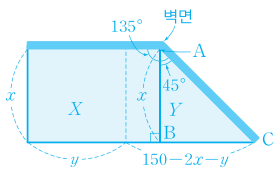
51

교육청 기출

그림과 같이 135°로 꺾인 벽면이 있는 땅에 길이가 150 m인 철망으로 울타리를 설치하여 직사각형 모양의 농장 X와 사다리꼴 모양의 농장 Y를 만들려고 한다. 농장 X의 넓이가 농장 Y의 넓이의 2배일 때, 농장 Y의 넓이의 최댓값을 S(m²)라 하자. S의 값을 구하시오. (단, 벽면에는 울타리를 설치하지 않고, 철망의 폭은 무시한다.) 답 750



해



X의 넓이는 Y의 넓이의 2배이므로

$xy=x(300-5x-2y)$에서 $y=100-\frac{5}{3}x$

Y의 넓이는

$\frac{1}{2}xy=\frac{1}{2}x\left(100-\frac{5}{3}x\right)=-\frac{5}{6}x^2+50x=-\frac{5}{6}(x-30)^2+750$

따라서 $x=30$일 때, Y의 넓이의 최댓값 S는 750이다.

서술형

52

이차방정식 $x^2+2(a-2)x+a^2-a+10=0$의 두 실근을 α, β라 할 때, $(\alpha-1)(\beta-1)$의 최솟값을 구하시오. 답 9 (단, a는 실수이다.)

해 이차방정식 $x^2+2(a-2)x+a^2-a+10=0$

판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a-2)^2-(a^2-a+10)=-3a-6\geq 0$

$\therefore a\leq -2$

$(\alpha-1)(\beta-1)=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1$

$=a^2-a+10+2a-4+1$

$=a^2+a+7$

$a\leq -2$에서 $a=-2$일 때 $(\alpha-1)(\beta-1)$의 최솟값은 9이다.

53

직선 $y=kx-ka+a^2$이 실수 k의 값에 관계없이 이차함수 $y=x^2+2x-4$의 그래프와 만날 때, 실수 a의 최댓값을 구하시오. 답 2

해 방정식 $x^2+2x-4=kx-ka+a^2$이 실근을 갖는다.

판별식을 D라 하면 $D=(k-2)^2+4(a^2-ka+4)\geq 0$이므로

$k^2-4(a+1)k+4a^2+20\geq 0$

이차함수 $y=k^2-4(a+1)k+4a^2+20$의 최솟값이 0 이상이어야 한다.

이차항의 계수가 양수이고 축이 $k=2(a+1)$이므로

$4(a+1)^2-8(a+1)^2+4a^2+20\geq 0$

$\therefore a\leq 2$

따라서 실수 a의 최댓값은 2이다.

54

직선 $y=4x+a$가 이차함수 $f(x)=x^2-3$의 그래프와 점 $(p, f(p))$에서 접하고, 이차함수 $g(x)=-x^2-2x+b$의 그래프와 점 $(q, g(q))$에서 접한다. $(p+q)-(a+b)$의 값을 구하시오. 답 22

해 이차방정식 $x^2-3=4x+a$가 중근 p를 가지므로

$x^2-4x-a-3=(x-p)^2$에서 $p=2$, $a=-7$

이차방정식 $-x^2-2x+b=4x+a$가 중근 q를 가지므로

$x^2+6x+a-b=(x-q)^2$에서 $q=-3$, $b=-16$

$\therefore (p+q)-(a+b)=(2-3)-(-7-16)=22$

12 DAY

55

이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 원점을 지나는 직선 l이 두 점 $(2, f(2))$, $(5, f(5))$에서 만난다. 원점에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 두 접선의 접점의 x좌표를 각각 α, β라 할 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값은?

① 5 ② 10 ③ 15
✓④ 20 ⑤ 25

해 상수 a, b, c, m에 대하여 $f(x)=ax^2+bx+c$, 직선 l을 $y=mx$라 하면 이차방정식 $ax^2+bx+c=mx$, 즉 $ax^2+(b-m)x+c=0$의 두 근이 2, 5이므로 두 근의 곱은 $\frac{c}{a}=10$이다.
원점에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선을 $y=nx$라 하면 이차방정식 $ax^2+bx+c=nx$, 즉 $ax^2+(b-n)x+c=0$이 중근을 가지고, 근과 계수의 관계에서 두 근의 곱은 $\frac{c}{a}=10$으로 기울기 n에 관계없이 항상 일정하다.
따라서 $\alpha^2=10$, $\beta^2=10$이므로 $\alpha^2+\beta^2=20$

56

이차함수 $y=-x^2+ax+b$의 그래프가 x축과 만나지 않을 때, [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, a, b는 실수이다.)

| 보기 |
ㄱ. $a^2+4b\geq 0$
ㄴ. 임의의 실수 k에 대하여 $k^2>ak+b$가 항상 성립한다.
ㄷ. $|a|<|b-1|$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
✓④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해 ㄷ. ㄱ의 $a^2<-4b$의 양변에서 $(b-1)^2$을 빼면
$a^2-(b-1)^2<-4b-(b-1)^2=-b^2-2b-1=-(b+1)^2\leq 0$
따라서 $a^2-(b-1)^2<0$이므로 $a^2<(b-1)^2$에서
$|a|<|b-1|$이다. (참)

57

두 함수 $f(x)=x^2+ax+2b$, $g(x)=bx+2a$의 그래프가 서로 다른 두 점 A, B에서 만난다. $\overline{AB}=3\sqrt{b^2+1}$일 때, $f(-2)$의 값을 구하시오. (단, $b>a$) 답 22

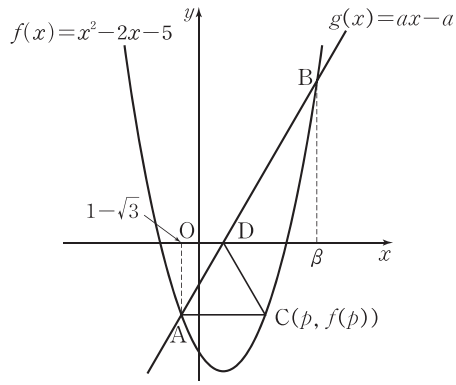
해 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표를 α, β라 하자.
$f(x)-g(x)=x^2+(a-b)x+2(b-a)$이므로
$b-a=t$ $(t>0)$라 하면
$\alpha+\beta=b-a=t$, $\alpha\beta=2(b-a)=2t$
$\overline{AB}=|\alpha-\beta|\sqrt{b^2+1}=3\sqrt{b^2+1}$이므로 $|\alpha-\beta|=3$
$|\alpha-\beta|^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$이므로
$t^2-8t-9=0$ $\therefore t=9$ $(\because t>0)$
$\therefore f(-2)=4-2a+2b=4+2t=22$

58

그림과 같이 이차함수 $f(x)=x^2-2x-5$와 일차함수 $g(x)=ax-a$의 두 교점 A, B와 점 $C(p, f(p))$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 두 점 A, B의 x좌표는 각각 $1-\sqrt{3}$, β이다.
(나) 일차함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축의 교점 D에 대하여 삼각형 DAC는 정삼각형이다.

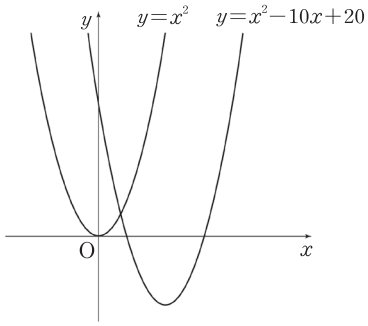
p^2-2a의 값을 구하시오. (단, $a>0$) 답 4



해 조건 (가)에서 $x^2-(a+2)x+a-5=0$의 두 근이 $1-\sqrt{3}$, β이므로
$a+2=\beta+1-\sqrt{3}$, $a-5=\beta-\sqrt{3}\beta$에서 $\beta=1+2\sqrt{3}$, $a=\sqrt{3}$
점 $C(p, f(p))$에 대하여 삼각형 DAC가 정삼각형이 되려면 점 A를 지나며 x축에 평행한 직선이 이차함수 $y=f(x)$와 만나는 점이 C인 경우이다. 따라서 점 C의 좌표는 $(1+\sqrt{3}, -3)$이므로 $p=1+\sqrt{3}$
$\therefore p^2-2a=(1+\sqrt{3})^2-2\sqrt{3}=4$

59

양수 k에 대하여 직선 $y=k$와 이차함수 $y=x^2$의 그래프가 만나는 두 점을 각각 A, B라 하고, 직선 $y=k$와 이차함수 $y=x^2-10x+20$의 그래프가 만나는 두 점을 각각 C, D라 하자. [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, 점 A의 x좌표는 점 B의 x좌표보다 작고, 점 C의 x좌표는 점 D의 x좌표보다 작다.)



| 보기 |

ㄱ. $k=4$일 때, $\overline{AB}+\overline{CD}=10$이다.
ㄴ. k의 값에 관계없이 $\overline{CD}^2-\overline{AB}^2$의 값은 일정하다.
ㄷ. $\overline{AB}=2\overline{BD}$이면 $k=\frac{2}{3}(5+\sqrt{10})$이다.

① ㄱ ✓② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해 ㄷ. $A(-\sqrt{k}, k)$, $B(\sqrt{k}, k)$에서 $\overline{AB}=2\sqrt{k}$이므로
$\overline{AB}=2\overline{BD}$에서 $\overline{BD}=\sqrt{k}$
따라서 점 D의 좌표는 $D(2\sqrt{k}, k)$
점 D가 함수 $y=x^2-10x+20$의 그래프 위의 점이므로
$k=(2\sqrt{k})^2-20\sqrt{k}+20$, $3(\sqrt{k})^2-20\sqrt{k}+20=0$ ($\because k=(\sqrt{k})^2$)
근의 공식에 의해 $\sqrt{k}=\frac{10\pm\sqrt{100-60}}{3}$
$\therefore \sqrt{k}=\frac{2}{3}(5+\sqrt{10})$ ($\because k>5$) (거짓)

60

두 이차함수 $f(x)$, $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

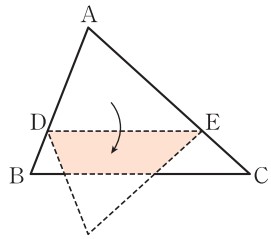
(가) $f(x)g(x)=(x^2-3x+2)(x^2+6x+8)$
(나) 함수 $y=g(x)$는 $x=0$에서 최솟값을 갖는다.

x에 대한 방정식 $f(x)-g(x)=0$이 서로 다른 두 정수 m, n을 근으로 가질 때, m^2+n^2의 값을 구하시오. 답 17

해 $f(x)-g(x)=0$의 양변에 a를 곱하면
$(a^2-1)x^2+3a^2x-4(a^2-1)=0$
근과 계수의 관계에 의해
$m+n=-\frac{3a^2}{a^2-1}$, $mn=-4$
$(m, n)=(4, -1)$, $(-1, 4)$인 경우
$x=4$, $x=-1$을 근으로 갖는다.
$\therefore m^2+n^2=4^2+(-1)^2=17$

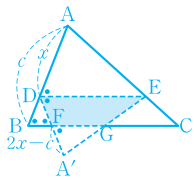
61

그림과 같이 넓이가 6인 예각삼각형 ABC에서 변 BC에 평행한 직선이 두 변 AB, AC와 만나는 점을 각각 D, E라 할 때, 선분 DE를 접는 선으로 하여 이 삼각형을 접어 겹치는 부분, 즉 색칠한 부분의 넓이를 최대로 하려고 한다. 이때, 최대 넓이는?



✓① 2 ② 3 ③ $2\sqrt{3}$
④ 4 ⑤ $3\sqrt{2}$

해 $y=\triangle A'DE-\triangle A'FG=\frac{6x^2}{c^2}-\frac{6(2x-c)^2}{c^2}$
$=\frac{6}{c^2}\left\{-3\left(x-\frac{2}{3}c\right)^2+\frac{c^2}{3}\right\}$
따라서 $x=\frac{2}{3}c$일 때 y의 최댓값은 2이다.



62

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $y=f(x)$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동하면 이차함수 $y=g(x)$의 그래프와 일치하고, 방정식 $f(x)=g(x)$는 서로 다른 두 실근 α, β $(\alpha<\beta)$를 갖는다. 함수 $h(x)$가

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & (x<\alpha \text{ 또는 } x>\beta) \\ g(x) & (\alpha\le x\le\beta) \end{cases}$$

일 때, 함수 $h(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $h(x)=h(\beta)$는 서로 다른 세 실근을 가지고, 세 실근의 합은 -2이다.
(나) 함수 $h(x)$의 최솟값이 -4이다.

이때, $h(1)+h(3)$의 값을 구하시오. 답 16

해 $f(x)=(x+1)^2-5$, $g(x)=-(x-1)^2+5$이므로
$h(x)=\begin{cases} (x+1)^2-5 & (x<-2 \text{ 또는 } x>2) \\ -(x-1)^2+5 & (-2\le x\le 2) \end{cases}$
$\therefore h(1)+h(3)=(-0+5)+(16-5)=16$

12 DAY



07 여러 가지 방정식

개념 강의▶

중요도 ★★○

1 방정식의 여러 가지 풀이❶

(1) 인수분해 공식에 의한 풀이 (복호동순)

$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

$a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3$

$a^4 + a^2b^2 + b^4 = (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)$

(2) 인수정리에 의한 풀이

$f(x)=0$에 대하여 $f(\alpha)=0$이면 $f(x)$는 $x-\alpha$를 인수로 갖는다는 성질을 이용하여 $f(x)$를 인수분해한다.

(3) 복이차방정식의 풀이

$ax^4+bx^2+c=0$의 풀이

(i) $x^2=t$로 치환하여 푼다.

(ii) 인수분해가 되지 않을 때에는 A^2-B^2의 꼴로 변형하여 푼다.

First Class Tip

*** 복이차방정식을 이차방정식으로 이해하기**

$ax^4+bx^2+c=0$	$aX^2+bX+c=0$
서로 다른 네 실근	서로 다른 두 양의 실근 $D>0,\ \alpha+\beta>0,\ \alpha\beta>0$
서로 다른 두 실근, 두 허근	부호가 다른 두 실근 $\alpha\beta<0$
서로 다른 세 실근	0과 한 개의 양의 실근 $\alpha+\beta>0,\ \alpha\beta=0$

(4) 상반방정식 $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$의 풀이❷

(i) 양변을 x^2으로 나눈 다음 $x+\frac{1}{x}=t$로 치환한 후 t를 구한다.

(ii) $x+\frac{1}{x}=t$를 이차방정식으로 고친 후 $x^2-tx+1=0$을 풀어 x의 값을 구한다.

(iii) 상반방정식이 $ax^4-bx^3+cx^2+bx+a=0$일 때는 $x-\frac{1}{x}=t$로 치환한 후 풀어 x의 값을 구한다.

2 삼차방정식의 근과 계수의 관계

(1) 세 수 α, β, γ를 세 근으로 하는 삼차방정식은

$a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=0$, 즉

$ax^3-a(\alpha+\beta+\gamma)x^2+a(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-a\alpha\beta\gamma=0$

(2) 삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근을 α, β, γ라 하면

$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}$, $\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$❸

❶ 복소수 범위에서 n차다항식의 근의 개수는 n이다.
특별한 언급이 없으면 삼차방정식과 사차방정식의 근은 복소수 범위에서 구한다.

❷ **홀수차 상반방정식의 풀이**
$x^3+3x^2+3x+1=0$,
$x^5+2x^4+3x^3+3x^2+2x+1=0$
등과 같은 홀수차 상반식은 항상 $x+1$을 인수로 가지므로
(홀수차 상반식)
$=(x+1)\times$(짝수차 상반식)
의 꼴로 바꾼 후 푼다.

❸ **다항방정식의 근과 계수의 관계**
n차방정식
$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$
$=0$에서
(1) (모든 근의 합)$=-\frac{a_{n-1}}{a_n}$
(2) (모든 근의 곱)
$=(-1)^n\times\frac{a_0}{a_n}$

3 다항방정식의 켤레근

다항방정식 $f(x)=0$에서

(1) $f(x)$의 계수가 모두 실수일 때,
이 방정식의 한 근이 $p+qi$이면 $p-qi$도 근이다. (단, p, q는 실수)

(2) $f(x)$의 계수가 모두 유리수일 때,
이 방정식의 한 근이 $r+s\sqrt{m}$이면 $r-s\sqrt{m}$도 근이다.
(단, r, s는 유리수, $\sqrt{m}$은 무리수)

4 $x^3=1$의 한 허근 ω

$x^3=1$의 한 허근이 ω이면 다음이 성립한다.

- 세 근은 ω, ω^2, ω^3이다. ❹
- $\omega^2+\omega+1=0$
- $\omega+\overline{\omega}=-1$, $\omega\overline{\omega}=1$, $\omega^3=1$, $\overline{\omega}^3=1$
- $\omega^2=\overline{\omega}$, $\overline{\omega}^2=\omega$, $\dfrac{1}{\omega}=\omega^2=\overline{\omega}$

❹ **방정식 $x^n=1$의 한 허근 α**
n이 3 이상의 자연수일 때, 방정식 $x^n=1$의 한 허근이 α이면 α, α^2, α^3, $\cdots$, α^{n-1}, $\alpha^n(=1)$은 모두 방정식 $x^n=1$의 서로 다른 근이다.

13 DAY

5 연립방정식

(1) 일차식과 이차식의 연립방정식
일차식을 x 또는 y의 식으로 정리하여 이차식에 대입한다.

(2) 이차식과 이차식의 연립방정식 ❺
이차식 중 한 식을 인수분해하여 구한 일차식을 이차식에 대입한다.

(3) x, y의 대칭식인 연립방정식
$x+y=a$, $xy=b$일 때, x, y는 이차방정식 $t^2-at+b=0$의 두 근임을 이용한다.

❺ **연립이차방정식의 풀이**
두 이차식이 모두 인수분해가 되지 않을 경우에는 다음의 방법으로 접근하면 편리하다.
(1) 상수항을 소거한다.
(2) 이차항을 소거한다.

6 부정방정식

(1) 부정방정식
일반적으로 (미지수의 개수)>(방정식의 개수)인 방정식 또는 연립방정식을 부정방정식이라 한다.

(2) 부정방정식의 풀이
① 정수 조건의 부정방정식 : (일차식)×(일차식)=(정수)의 꼴로 변형한 후, 약수와 배수의 관계를 이용하여 푼다.
② 실수 조건의 부정방정식 :
- 이차방정식에서는 한 문자의 내림차순으로 정리한 후, (판별식)≥0을 이용하여 푼다.
- $A^2+B^2=0$의 꼴로 변형한 후, $A=0$, $B=0$임을 이용하여 푼다.

핵심유형 19 삼차 · 사차방정식의 풀이

01 출제율 ❯❯❯

x에 대한 삼차방정식 $(x-a)\{x^2+(1-a)x+6\}=0$이 서로 다른 세 실근 2, α, β를 가질 때, $\alpha+\beta$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① 3 ② 5 ③ 7
✓④ 9 ⑤ 11

해 (i) 2가 $x-a=0$의 근일 경우
$D=1-24<0$이므로 방정식 $(x-2)(x^2-x+6)=0$은 서로 다른 세 실근을 갖지 않는다.
(ii) 2가 $x^2+(1-a)x+6=0$의 근일 경우
$(x-6)(x-2)(x-3)=0$
이므로 서로 다른 세 실근 2, 3, 6을 갖는다.
(i), (ii)에 의해 $\alpha+\beta=9$이다.

02 출제율 ❯❯

삼차방정식 $x^3+(4-k)x^2-3kx-k^2=0$이 중근 α를 가질 때, 실수 α, k에 대하여 $\alpha+k$의 값은? (단, $k<0$)

① 10 ② 5 ③ 0
④ -5 ✓⑤ -10

해 삼차방정식이 중근을 가지기 위해서는 $x^2+4x+k=0$이 중근을 갖거나 $x^2+4x+k=0$이 $x=k$를 근으로 가질 때이다.
(i) 이차방정식 $x^2+4x+k=0$의 판별식을 D라 하면 $\frac{D}{4}=0$이지만 $k=4$이므로 모순이다.
(ii) $k^2+5k=0$
따라서 중근은 $\alpha=k=-5$이므로
$\alpha+k=-10$

03 출제율 ❯❯

x에 대한 사차방정식
$$x^4+x^3+(a-2)x^2-ax=0$$
의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 합은?

① 2 ② 1 ③ -1
✓④ -2 ⑤ -3

해 (i) $x=0$이 사차방정식의 중근인 경우
사차방정식의 서로 다른 세 실근은 $x=0$(중근), $x=1$, $x=-2$
(ii) $x=1$이 사차방정식의 중근인 경우
사차방정식의 서로 다른 세 실근은 $x=0$, $x=1$(중근), $x=-3$
(iii) $x^2+2x+a=0$이 $x\neq0$이고 $x\neq1$인 중근을 갖는 경우
사차방정식의 서로 다른 세 실근은 $x=0$, $x=1$, $x=-1$(중근)
(i), (ii), (iii)에 의하여 실수 a의 값은 -3, 0, 1이고
그 합은 $-3+0+1=-2$이다.

핵심유형 20 복이차방정식 · 상반방정식의 풀이

04 출제율 ❯❯

x에 대한 방정식 $x^4-2ax^2+a^2-4=0$이 실근과 허근을 모두 가질 때, 정수 a의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3
✓④ 4 ⑤ 5

해 $x^4-2ax^2+a^2-4=0$에서 $(x^2-a+2)(x^2-a-2)=0$
따라서 $x^2=a-2$ 또는 $x^2=a+2$
이때, 사차방정식이 실근과 허근을 모두 가지므로 $a-2<0$, $a+2\geq0$
즉, $-2\leq a<2$
따라서 정수 a의 개수는 -2, -1, 0, 1의 4이다.

05 출제율 ❯❯

사차방정식 $9x^4+24x^3-2x^2+24x+9=0$의 한 실근 α에 대하여 $\alpha+\frac{1}{\alpha}=-\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. 답 13
(단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

해 주어진 식의 양변을 x^2으로 나누면
$9x^2+24x-2+\frac{24}{x}+\frac{9}{x^2}=0$
$x+\frac{1}{x}=t$라 하면 실근을 가질 조건은 $|t|>2$이므로 $t=-\frac{10}{3}$
따라서 $\alpha+\frac{1}{\alpha}=-\frac{10}{3}$에서 $-\frac{q}{p}=-\frac{10}{3}$이므로
$p+q=3+10=13$

06 출제율 ❯❯❯

사차방정식 $x^4-3x^3-6x^2+3x+1=0$을 만족시키는 실수 x의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+2m$의 값은?

✓① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

해 $x^4-3x^3-6x^2+3x+1=0$의 양변을 x^2으로 나누면
$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2-3\left(x-\frac{1}{x}\right)-4=0$
$\therefore x-\frac{1}{x}=-1$ 또는 $x-\frac{1}{x}=4$
따라서 $M=2+\sqrt{5}$, $m=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$이므로
$M+2m=2+\sqrt{5}+(-1-\sqrt{5})=1$

핵심유형 21 고차방정식의 근과 계수의 관계

07 출제율 ❯❯❯

삼차방정식 $x^3-x^2+3x-2=0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $\frac{\beta+\gamma}{\alpha}+\frac{\gamma+\alpha}{\beta}+\frac{\alpha+\beta}{\gamma}$의 값은?

① $-\frac{1}{2}$ ✓② $-\frac{3}{2}$ ③ $-\frac{5}{2}$
④ $-\frac{7}{2}$ ⑤ $-\frac{9}{2}$

해 삼차방정식 $x^3-x^2+3x-2=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 근과 계수에 의하여 $\alpha+\beta+\gamma=1$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3$, $\alpha\beta\gamma=2$

$\therefore \frac{1-\alpha}{\alpha}+\frac{1-\beta}{\beta}+\frac{1-\gamma}{\gamma}=\frac{1}{\alpha}-1+\frac{1}{\beta}-1+\frac{1}{\gamma}-1$

$=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}-3$

$=\frac{3}{2}-3=-\frac{3}{2}$

08 출제율 ❯❯❯

삼차방정식 $x^3-2x^2-4=0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)$의 값은?

① -3 ② 1 ③ 3
④ 5 ✓⑤ 7

해 삼차방정식 $x^3-2x^2-4=0$의 세 근이 α, β, γ이므로
$x^3-2x^2-4=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$
이 식에 $x=-1$을 대입하면
$(-1-\alpha)(-1-\beta)(-1-\gamma)=(-1)^3-2\times(-1)^2-4=-7$
$-(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)=-7$ $\therefore (\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)=7$

09 출제율 ❯❯❯

세 실수 a, b, c에 대하여 삼차다항식

$$P(x)=\frac{1}{64}x^3+ax^2+bx+c$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) x에 대한 삼차방정식 $P(4x-1)=0$은 한 실근과 서로 다른 두 허근을 가지고, 서로 다른 두 허근의 곱은 3이다.
(나) x에 대한 삼차방정식 $P(2x-1)=0$은 실근 2와 서로 다른 두 허근을 가지고, 서로 다른 두 허근의 합은 4이다.

$P(7)$의 값은?

✓① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

해 방정식 $P(4x-1)=0$의 한 실근을 α, 서로 다른 두 허근을 β, γ라 하면 방정식 $P(2x-1)=0$의 세 근은 2α, 2β, 2γ
조건 (가), (나)에 의하여 α, β, γ를 세 근으로 하고 삼차항의 계수가 1인 삼차방정식 $P(4x-1)=(x-1)(x^2-2x+3)$이므로
양변에 $x=2$를 대입하면
$P(7)=(2-1)(4-4+3)=3$

핵심유형 22 방정식의 켤레근

10 출제율 ❯❯❯

사차방정식 $(x^2-2x-1)(x^2-2x+3)-5=0$의 서로 다른 두 허근을 α, β라 할 때, $\alpha\overline{\alpha}+\beta\overline{\beta}$의 값은?
(단, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ✓⑤ 8

해 $x^2-2x-2=0$ 또는 $x^2-2x+4=0$
두 이차방정식의 판별식을 각각 D_1, D_2라 하면
$\frac{D_1}{4}=1+2>0$, $\frac{D_2}{4}=1-4<0$이므로 두 허근 α, β는 방정식 $x^2-2x+4=0$의 서로 다른 두 허근이다.
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha\beta=4$
또 켤레근의 성질에 의하여 $\overline{\alpha}=\beta$, $\overline{\beta}=\alpha$이므로
$\alpha\overline{\alpha}+\beta\overline{\beta}=\alpha\beta+\beta\alpha=2\alpha\beta=8$

11 출제율 ❯❯❯

이차방정식 $2x^2-bx+12=0$과 한 근이 $1+\sqrt{2}i$인 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$이 공통인 실근을 가질 때, $a+b+c$의 값은? (단, a, b, c는 실수이다.)

✓① -7 ② -5 ③ -3
④ -1 ⑤ 1

해 두 방정식의 공통인 실근을 α라 하면
삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$의 세 근은 $1+\sqrt{2}i$, $1-\sqrt{2}i$, α이다.
근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+a=-2$, $2\alpha-b=-3$, $3\alpha+c=0$
$a=-6$, $b=11$, $c=-12$이므로 $a+b+c=-7$

12 출제율 ❯❯❯

계수가 실수인 삼차식 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)$는 $x-3$으로 나누어떨어진다.
(나) 삼차방정식 $f(x)=0$의 한 근이 i이다.

이때, 삼차방정식 $f(2x-1)=0$의 세 근의 곱을 구하시오. 답 1

해 조건 (가), (나)에서 삼차방정식 $f(x)=0$의 세 근은 3, i, $-i$이다.
이때, α가 방정식 $f(x)=0$의 근이면
$\frac{\alpha+1}{2}$은 방정식 $f(2x-1)=0$의 근이므로
방정식 $f(2x-1)=0$의 세 근은 $\frac{3+1}{2}$, $\frac{i+1}{2}$, $\frac{-i+1}{2}$이다.
따라서 방정식 $f(2x-1)=0$의 세 근의 곱은
$\frac{3+1}{2}\times\frac{i+1}{2}\times\frac{-i+1}{2}=\frac{(i+1)(-i+1)}{2}=1$이다.

정답 및 해설 81~83p

핵심유형 23 $x^3=\pm1$의 한 허근

13 출제율 ›››

$x^3=1$의 한 허근을 ω라 할 때, 자연수 n에 대하여 함수 $f(n)=\dfrac{\omega^{2n}}{\omega^n+1}$이라 하자.
$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(10)$의 값은?

① -10 ✓② $-\dfrac{11}{2}$ ③ 0
④ $\dfrac{7}{2}$ ⑤ 10

해 n이 3의 배수일 때 $f(n)=\dfrac{1}{2}$.
n이 3의 배수가 아닐 때 $f(n)=-1$이다.
$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(10)$
$=3\times\left(-1-1+\dfrac{1}{2}\right)-1=-\dfrac{11}{2}$

14 출제율 ›››

$x+\dfrac{1}{x}=-1$의 한 허근을 ω라 하면
$1+2\omega+3\omega^2+4\omega^3+5\omega^4+6\omega^5+7\omega^6=a+b\omega$
일 때, $2(a^2+b^2)$의 값은? (단, a, b는 실수이다.)

① 14 ② 17 ③ 20
④ 23 ✓⑤ 26

해 $\omega+\dfrac{1}{\omega}=-1$의 양변에 ω를 곱하면 $\omega^2+\omega+1=0$
$(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0$ $\therefore \omega^3=1$
(주어진 식)$=1+2\omega+3\omega^2+4+5\omega+6\omega^2+7$
$=12+7\omega+9\omega^2$
$=3-2\omega$
따라서 $a=3$, $b=-2$이므로 $2(a^2+b^2)=26$

15 출제율 ›››

사차항의 계수가 1인 사차식 $P(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $P(1)=1$, $P(2)=8$
(나) 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 한 허근 ω에 대하여 $P(\omega)=1$, $P(\overline{\omega})=1$이다.

다항식 $P(x)$를 $x-3$으로 나눈 나머지를 구하시오. 답 53

해 $P(x)-x^3=(x-1)(x-2)(x-\omega)(x-\overline{\omega})$
$=(x-1)(x-2)(x^2+x+1)$
$\therefore P(x)=(x-1)(x-2)(x^2+x+1)+x^3$
따라서 다항식 $P(x)$를 $x-3$으로 나눈 나머지는
$P(3)=(3-1)(3-2)(3^2+3+1)+3^3=53$

핵심유형 24 연립방정식의 풀이

16 출제율 ›››

연립방정식 $\begin{cases}a^2x+(2a-1)y=a\\2x+(a+1)y=2\end{cases}$의 해가 모든 실수일 때의 a의 값을 α, 해가 없을 때의 a의 값을 β, γ라 하자. $\alpha-\beta-\gamma$의 값은?

① 1 ② 2 ✓③ 3
④ 4 ⑤ 5

해 $\dfrac{a^2}{2}=\dfrac{2a-1}{a+1}$을 만족시키는 a의 값 중에서
$\dfrac{a^2}{2}=\dfrac{a}{2}$를 만족시키면 α, 만족시키지 않으면 β, γ이다.
$\dfrac{a^2}{2}=\dfrac{2a-1}{a+1}$에서 $a^2(a+1)=2(2a-1)$, $(a-1)(a^2+2a-2)=0$
$\dfrac{a^2}{2}=\dfrac{a}{2}$에서 $a(a-1)=0$
$\therefore \alpha=1$, $\beta+\gamma=-2$ $\therefore \alpha-\beta-\gamma=\alpha-(\beta+\gamma)=1-(-2)=3$

17 출제율 ›››

좌표평면에서 연립방정식 $\begin{cases}x^2+y^2+x+y=2\\x^2+xy+y^2=1\end{cases}$의 해의 순서쌍 (x, y)를 꼭짓점으로 하는 사각형의 넓이는?

① 1 ✓② $\dfrac{3}{2}$ ③ 2
④ $\dfrac{5}{2}$ ⑤ 3

해 $x+y=u$, $xy=v$라 하면 $u^2-2v+u=2$, $u^2-v=1$
(i) $(u, v)=(0, -1)$일 때, x, y는 $t^2-1=0$의 해이다.
$\therefore x=\pm1$, $y=\mp1$ (복호동순)
(ii) $(u, v)=(1, 0)$일 때, x, y는 $t^2-t=0$의 해이다.
$\therefore x=1$, $y=0$ 또는 $x=0$, $y=1$
따라서 구하는 사각형의 넓이는
$3\times\dfrac{1}{2}\times1\times1=\dfrac{3}{2}$

18 출제율 ›››

연립방정식 $\begin{cases}xy=k\\x^2+4y^2=8\end{cases}$을 만족시키는 실수 x, y가 존재하도록 하는 실수 k의 값의 범위가 $a\le k\le b$일 때, ab의 값은? (단, a, b는 상수)

① -1 ② -2 ③ -3
✓④ -4 ⑤ -5

해 $x^2+4y^2=8$의 양변에 $\pm4xy$를 각각 더하면
$(x+2y)^2=8+4xy$ 또는 $(x-2y)^2=8-4xy$
여기에 $xy=k$를 대입하면 (완전제곱식)≥0이므로
$(x+2y)^2=8+4k\ge0$ 또는 $(x-2y)^2=8-4k\ge0$
$\therefore -2\le k\le2$
따라서 $a=-2$, $b=2$이므로 $ab=-4$

핵심유형 25 여러 가지 방정식의 활용

19 출제율 ❯❯❯

3개의 서로 다른 구의 부피의 합과 부피가 같은 하나의 구를 만들었더니 원래의 세 구의 반지름의 길이와 새로 만들어진 구의 반지름의 길이가 연속인 네 자연수가 되었다. 새로 만들어진 구의 반지름의 길이는?

① 4 ② 5 ✓③ 6
④ 7 ⑤ 8

해 원래의 세 구의 반지름의 길이를 각각 $r-1$, r, $r+1$이라 하면 새로 만들어진 구의 반지름의 길이는 $r+2$이므로

$\frac{4}{3}\pi(r-1)^3+\frac{4}{3}\pi r^3+\frac{4}{3}\pi(r+1)^3=\frac{4}{3}\pi(r+2)^3$ $\therefore r=4$

따라서 새로 만들어진 구의 반지름의 길이는 $r+2=6$이다.

20 출제율 ❯❯❯

의영이는 문항별 배점이 각각 2점, 3점, 4점으로 구성된 교내 수학경시대회에서 20문항을 맞혀서 55점을 받았다. 또한, 이렇게 맞힌 20문항 중에서 3점 문항의 개수가 4점 문항의 개수의 3배가 된다고 한다. 이때, 의영이가 맞힌 2점짜리 문항의 개수는?

① 2 ② 4 ③ 6
✓④ 8 ⑤ 10

해 의영이가 맞힌 2점, 3점, 4점짜리 문항의 개수를 각각 x개, $3y$개, y개라 하면

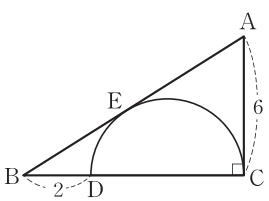
$x+3y+y=20$에서 $x+4y=20$

$2x+3(3y)+4y=55$에서 $2x+13y=55$

$\therefore x=8$, $y=3$

21 출제율 ❯❯❯

그림과 같이 변 AB를 빗변으로 하는 직각삼각형 ABC가 있다. 변 BC 위의 한 점 D에 대하여 선분 CD를 지름으로 하는 반원이 변 AB 위의 한 점 E에서 변 AB와 접한다. $\overline{BD}=2$, $\overline{AC}=6$일 때, 이 반원의 반지름의 길이를 구하시오. 답 3



해 반원의 중심을 O라 하고 반지름의 길이를 r라 하면

$\overline{BE}^2=\overline{OB}^2-\overline{OE}^2=4r+4$

삼각형 OBE와 삼각형 ABC는 닮음이므로

$\overline{OE}^2:\overline{BE}^2=\overline{AC}^2:\overline{BC}^2$

즉, $r^2:(4r+4)=6^2:(2r+2)^2$이므로

$(r-3)(r^2+4r+12)=0$ $\therefore r=3$

핵심유형 26 부정방정식

22 출제율 ❯❯❯

$ab=2a-3b+10$을 만족시키는 정수 a, b에 대하여 $a+b$의 최댓값은?

① 1 ② 2 ③ 3
✓④ 4 ⑤ 5

해 $(a+3)(b-2)=4$

$a+3$	$b-2$	⇒	a	b	⇒	$a+b$
1	4		-2	6		4
4	1		1	3		4
2	2		-1	4		3

따라서 $a+b$의 최댓값은 4이다.

23 출제율 ❯❯❯

x에 대한 이차식 $x^2+3(a-1)x+2a^2-3a-b^2$이 완전제곱식일 때, 실수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① 1 ② 2 ✓③ 3
④ 4 ⑤ 5

해 x에 대한 이차방정식

$x^2+3(a-1)x+2a^2-3a-b^2=0$의 판별식을 D라 할 때

$D=9(a-1)^2-4(2a^2-3a-b^2)=0$

$a^2-6a+9+4b^2=0$

$\therefore (a-3)^2+(2b)^2=0$

이때, a, b는 실수이므로 $a-3=0$, $2b=0$이다.

따라서 $a=3$, $b=0$이므로 $a+b=3$

24 출제율 ❯❯❯

x에 대한 이차방정식 $x^2-mx+m+4=0$의 두 근이 모두 정수가 되게 하는 모든 실수 m의 값의 합은?

① 3 ✓② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

해 방정식 $x^2-mx+m+4=0$의 두 정수근을 α, β라 하면 근과 계수의 관계에 의해서

$\alpha\beta=\alpha+\beta+4$에서 $(\alpha-1)(\beta-1)=5$

$\alpha-1$	$\beta-1$	⇒	$\alpha+\beta$
5	1		8
1	5		8
-5	-1		-4
-1	-5		-4

따라서 가능한 모든 실수 m의 값의 합은 $8+(-4)=4$이다.

정답 및 해설 83~86p

핵심유형 19 삼차 · 사차방정식의 풀이

25

삼차방정식

$x^3+x^2+x-3=0$

의 두 허근을 α, β라 할 때, $(\alpha+1)(\beta+1)$의 값은?

① 1 ✓② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

해 $x^3+x^2+x-3=0$에서
$(x-1)(x^2+2x+3)=0$
두 허근 α, β는 이차방정식 $x^2+2x+3=0$의 두 근이므로
$\therefore (\alpha+1)(\beta+1)=\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1$
$=3+(-2)+1=2$

26

사차방정식 $x(x+1)(x+2)(x+3)=24$의 모든 허근의 곱은?

① 2 ② 4 ✓③ 6
④ 8 ⑤ 10

해 $x(x+1)(x+2)(x+3)=24$에서
$(x^2+3x-4)(x^2+3x+6)=0$
$(x-1)(x+4)(x^2+3x+6)=0$
따라서 허근은 이차방정식 $x^2+3x+6=0$의 두 근이므로 모든 허근의 곱은 6이다.

27

삼차방정식 $ax^3-5ax^2+4(a+6)x-24=0$이 1 이상의 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 자연수 a의 값을 구하시오. 답 7

해 $ax^3-5ax^2+4(a+6)x-24=0$에서 $(x-1)(ax^2-4ax+24)=0$
$ax^2-4ax+24=0$이 1보다 큰 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로
$x=1$일 때, $-3a+24>0$
$x=2$일 때, $-4a+24<0$
따라서 $6<a<8$이므로 자연수 a의 값은 7이다.

28

삼차방정식 $x^3-2x^2-kx+2k=0$의 세 근을 α, β, γ라 하자. α, β 중 실수는 하나뿐이고 $\alpha^2=-2\beta$일 때, $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$의 값은? (단, k는 0이 아닌 실수이다.)

① −5 ✓② −4 ③ −3
④ −2 ⑤ −1

해 $(x-2)(x^2-k)=0$
(i) $\alpha=2$일 때
α, β 중 실수는 하나뿐이라는 조건을 만족시키지 않는다.
(ii) $\beta=2$일 때
α, γ는 방정식 $x^2=k$의 근이므로
$k=\alpha^2=-2\beta=-4$이고 $\gamma^2=k=-4$
(i), (ii)에서 $\alpha^2=-4$, $\beta=2$, $\gamma^2=-4$
$\therefore \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(-4)+2^2+(-4)=-4$

29

사차방정식 $x^2(x+1)^2=x^2+x+6$의 모든 실근의 곱은?

① −5 ✓② −3 ③ 1
④ 3 ⑤ 5

해 $x^2(x+1)^2=x^2+x+6$에서
$x^2+x-3=0$ 또는 $x^2+x+2=0$
두 이차방정식 중 실근을 갖는 것은 $x^2+x-3=0$이므로
모든 실근의 곱은 −3이다.

30

이차함수 $f(x)=x^2+2kx+k$ (k는 실수)에 대하여 방정식 $\{f(x)\}^2-(2x+3)f(x)+2(2x+1)=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다. $f(1)>5$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. 답 14

해 $\{f(x)-2\}\{f(x)-(2x+1)\}=0$
(i) $f(x)-2=0$일 때, 서로 다른 두 실근을 갖는다.
(ii) $f(x)-(2x+1)=0$일 때,
i) $x^2+2(k-1)x+k-1=0$이 중근을 가질 때,
$k=1$이면 $f(1)=1+3k=4<5$가 되어 조건을 만족시키지 않는다.
$k=2$이면 $f(1)=4+5k=14>5$가 되어 주어진 조건을 만족시킨다.
ii) $f(x)-2=0$과 $f(x)-(2x+1)=0$이 공통근 α를 가질 때,
$f(1)<5$가 되어 조건을 만족시키지 않는다.
$k=2$이고 $f(x)=x^2+4x+2$이므로 $f(2)=4+8+2=14$

핵심유형 20 복이차방정식 · 상반방정식의 풀이

31

사차방정식 $x^4-4x^2+a-1=0$이 서로 다른 네 실근을 갖도록 하는 모든 자연수 a의 값의 합은?

① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ✓⑤ 9

해 $x^2=t$라 하면 주어진 방정식은
$t^2-4t+a-1=0$ … ㉠
이때, 사차방정식이 서로 다른 네 실근을 가지려면 방정식 ㉠이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 하므로 $1<a<5$
따라서 자연수 a의 값은 2, 3, 4이므로 그 합은 9이다.

32

방정식 $2x^5-7x^4+5x^3+5x^2-7x+2=0$의 서로 다른 모든 실근의 합은?

① 2 ✓② $\frac{5}{2}$ ③ 3
④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

해 $(x+1)(2x^4-9x^3+14x^2-9x+2)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $2x^4-9x^3+14x^2-9x+2=0$
$2x^4-9x^3+14x^2-9x+2=0$일 때,
$x+\frac{1}{x}=t$라 하면 $t=\frac{5}{2}$ 또는 $t=2$
$t=\frac{5}{2}$일 때, $x=2$ 또는 $x=\frac{1}{2}$, $t=2$일 때, $x=1$(중근)
따라서 주어진 방정식의 서로 다른 실근은
$x=-1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$이므로

33

$(-1)+2+\frac{1}{2}+1=\frac{5}{2}$이다.

x에 대한 사차방정식 $x^4-2(m+8)x^2+m^2=0$의 네 실근 x_1, x_2, x_3, x_4가

$x_2-x_1=x_3-x_2=x_4-x_3$

을 만족시킬 때, 모든 상수 m의 값의 합은?

① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ✓⑤ 9

해 주어진 방정식의 네 근은
$x_1=a-3k$, $x_2=a-k$, $x_3=a+k$, $x_4=a+3k$라 할 수 있다.
네 근의 합은 $x_1+x_2+x_3+x_4=4a=0$ $\therefore a=0$
$(x-k)(x+k)(x-3k)(x+3k)=0$
$x^4-10k^2x^2+9k^4=0$ $\therefore m=12$ 또는 $m=-3$
따라서 모든 상수 m의 값의 합은
$12+(-3)=9$

핵심유형 21 고차방정식의 근과 계수의 관계

34

삼차방정식 $x^3-2x+3=0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$의 값은?

✓① −9 ② −6 ③ −3
④ 3 ⑤ 6

해 삼차방정식 $x^3-2x+3=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta+\gamma=0$
$\therefore \alpha^3+\beta^3+\gamma^3=(2\alpha-3)+(2\beta-3)+(2\gamma-3)=-9$

35

삼차방정식 $x^3-3x^2-1=0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $\alpha^2(\beta+\gamma)+\beta^2(\gamma+\alpha)+\gamma^2(\alpha+\beta)$의 값은?

✓① −3 ② −2 ③ −1
④ 0 ⑤ 1

해 $\alpha^2(\beta+\gamma)+\beta^2(\gamma+\alpha)+\gamma^2(\alpha+\beta)$
$=\alpha^2(3-\alpha)+\beta^2(3-\beta)+\gamma^2(3-\gamma)$
$=-(\alpha^3-3\alpha^2)-(\beta^3-3\beta^2)-(\gamma^3-3\gamma^2)$
$\alpha^3-3\alpha^2=1$, $\beta^3-3\beta^2=1$, $\gamma^3-3\gamma^2=1$이므로
(주어진 식)$=-1-1-1=-3$

36

−1이 아닌 서로 다른 실수 a, b, c가

$$\frac{a^3-3a}{a+1}=\frac{b^3-3b}{b+1}=\frac{c^3-3c}{c+1}$$

를 만족시킬 때, $a+b+c$의 값은?

① −1 ② $-\frac{1}{2}$ ✓③ 0
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

해 $\frac{a^3-3a}{a+1}=\frac{b^3-3b}{b+1}=\frac{c^3-3c}{c+1}=k$ ($k\neq0$인 상수)라 하면
$a^3-(3+k)a-k=0$, $b^3-(3+k)b-k=0$, $c^3-(3+k)c-k=0$
삼차방정식 $x^3-(3+k)x-k=0$의 세 근이 a, b, c이므로
$a+b+c=0$

14 DAY

37

x에 대한 삼차방정식 $x^3+px^2+2x+q=0$의 근이 연속한 세 정수일 때, $(p+q)^2$의 값을 구하시오. 답 9

해 근과 계수의 관계에 의해
$(\alpha-1)+\alpha+(\alpha+1)=-p$
$(\alpha-1)\alpha+\alpha(\alpha+1)+(\alpha+1)(\alpha-1)=2$
$\therefore \alpha=1$ 또는 $\alpha=-1$
(i) $\alpha=1$이면, $p=-3\alpha=-3$, $q=0$
(ii) $\alpha=-1$이면, $p=-3\alpha=3$, $q=0$
(i), (ii)에서 $(p+q)^2=9$

38

$a+b+c=0$을 만족시키는 실수 a, b, c에 대하여 [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

| 보기 |

ㄱ. 세 실수 a, b, c를 근으로 하고 최고차항의 계수가 1인 삼차방정식은
$x^3+(ab+bc+ca)x-abc=0$이다.
ㄴ. $a^3=abc-(ab+bc+ca)a$
ㄷ. $a^3+b^3+c^3=3abc$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ✓⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해 ㄴ. 실수 a가 삼차방정식 $x^3+(ab+bc+ca)x-abc=0$의 한 근이므로
$a^3+(ab+bc+ca)a-abc=0$ $\therefore a^3=abc-(ab+bc+ca)a$ (참)
ㄷ. 마찬가지로 두 실수 b, c도 삼차방정식
$x^3+(ab+bc+ca)x-abc=0$의 근이므로
$a^3=abc-(ab+bc+ca)a$ … ㉠, $b^3=abc-(ab+bc+ca)b$ … ㉡
$c^3=abc-(ab+bc+ca)c$ … ㉢
㉠+㉡+㉢을 하면 $a^3+b^3+c^3=3abc-(ab+bc+ca)(a+b+c)$
그런데 $a+b+c=0$이므로 $a^3+b^3+c^3=3abc$ (참)

핵심유형 22 방정식의 켤레근

39

허수 $i+1$과 $i-1$이 사차방정식
$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$의 두 근일 때,
실수 a, b, c, d에 대하여 $a+b+c+d$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
✓④ 4 ⑤ 5

해 $x^4+ax^3+bx^2+cx+d$
$=(x-i-1)(x+i-1)(x-i+1)(x+i+1)$
이 식은 x의 항등식이므로 $x=1$을 대입하면
$1+a+b+c+d=(-i)\times i\times(2-i)\times(2+i)=5$
$\therefore a+b+c+d=4$

40

사차방정식 $x^4+2x^3+mx^2+(n-3)x-2=0$이 두 실근과 두 허근 α, α^2을 가질 때, 실수 m, n에 대하여 $m+n$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ✓⑤ 2

해 $\alpha^2=\overline{\alpha}$이므로 $\alpha^4=(\overline{\alpha})^2=\overline{(\alpha^2)}=(\overline{\alpha})=\alpha$ $\therefore \alpha^3=1$ ($\because \alpha\neq 0$)
$x^4+2x^3+mx^2+(n-3)x-2$
$=(x^2+x+1)(x^2+ax-2)$ (a는 상수)
$\therefore m+n=0+2=2$

41

계수가 모두 실수인 삼차식 $f(x)$와 이차식 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)$와 $g(x)$는 모두 최고차항의 계수가 1이다.
(나) 방정식 $f(x)=0$의 한 근이 $1+2i$이다.
(다) 방정식 $f(x)=0$과 방정식 $g(x)=0$을 모두 만족시키는 근이 오직 한 개 있다.

$f(1)=-4$일 때, 방정식 $f(x)+g(x)=0$의 모든 근의 합은?

① -4 ② -3 ③ 0
✓④ 3 ⑤ 4

해 $f(x)=(x-1-2i)(x-1+2i)(x-a)$
$=(x^2-2x+5)(x-2)$ ($\because f(1)=-4$)
$g(x)=(x-2)(x-b)$ (b는 a가 아닌 실수)라 하면
$f(x)+g(x)=0$, 즉 $x^3-3x^2+(7-b)x+2b-10=0$의 모든 근의 합은 근과 계수의 관계에 의해 3이다.

42

삼차방정식 $x^3-5x+2=0$을 만족시키는 x의 값 중 두 개가 삼차방정식 $x^3+(a-1)x^2-(a-b)x-b=0$의 근일 때, 유리수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

✓① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2
④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

해 $x^3-5x+2=0$에서 $(x-2)(x^2+2x-1)=0$
$x^3+(a-1)x^2-(a-b)x-b=0$에서
$(x-1)(x^2+ax+b)=0$
$x^2+ax+b=x^2+2x-1$이 x에 대한 항등식이므로
$a=2$, $b=-1$ $\therefore a+b=1$

43

사차방정식 $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$의 4개의 근 중에서 두 근 z, ω가 $z+\omega=3+3i$, $z\omega=5i$를 만족시킬 때, ad의 값은? (단, a, b, c, d는 실수이다.)

① -180 ✓② -150 ③ -120
④ -90 ⑤ -60

해 계수가 실수인 사차방정식의 네 근은 z, ω, $\overline{z}$, $\overline{\omega}$이다.
$-a=z+\omega+\overline{z}+\overline{\omega}=(z+\omega)+\overline{(z+\omega)}$
$=(3+3i)+\overline{(3+3i)}=(3+3i)+(3-3i)=6$
$\therefore a=-6$
$d=z\times\omega\times\overline{z}\times\overline{\omega}=(z\times\omega)\times\overline{(z\times\omega)}$
$=(5i)\times\overline{(5i)}=(5i)\times(-5i)=25$
$\therefore ad=-150$

핵심유형 23 $x^3=\pm1$의 한 허근

44

삼차방정식 $x^3+1=0$의 한 허근을 ω라 할 때, $\omega^2-\omega+\omega\overline{\omega}$의 값은? (단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

① -2 ② -1 ✓③ 0
④ 1 ⑤ 2

해 $x^3+1=0$에서 $(x+1)(x^2-x+1)=0$
$\omega^3=-1$, $\omega^2-\omega+1=0$ $\therefore \omega^2-\omega=-1$
$x^2-x+1=0$의 근과 계수의 관계에 의하여 $\omega\overline{\omega}=1$이므로
$\omega^2-\omega+\omega\overline{\omega}=(\omega^2-\omega)+(\omega\overline{\omega})=(-1)+1=0$

45

방정식 $x^{10}=1$에서 1이 아닌 9개의 근을 ω_1, ω_2, ω_3, …, ω_9라 할 때, $(1-\omega_1)(1-\omega_2)(1-\omega_3)\cdots(1-\omega_8)(1-\omega_9)$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ✓⑤ 10

해 $x^{10}=1$에서 $x^{10}-1=0$이므로 $(x-1)(x^9+x^8+\cdots+x+1)=0$
$x^9+x^8+\cdots+x+1=(x-\omega_1)(x-\omega_2)\cdots(x-\omega_9)$
$\therefore (1-\omega_1)(1-\omega_2)\cdots(1-\omega_9)=10$

46

3의 배수가 아닌 자연수 n과 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 두 근 α, β에 대하여 이차식 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)$의 이차항의 계수는 1이다.
(나) $\frac{1+\alpha^n}{1+\beta^n}$, $\frac{1+\beta^n}{1+\alpha^n}$은 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이다.

이때, $f(\alpha^n+\beta^n)$의 값은?

✓① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

해 n이 3의 배수가 아니면 $\alpha^n+\beta^n=-1$, $\alpha^n\beta^n=(\alpha\beta)^n=1$
따라서 이차항의 계수가 1이고 α^n, β^n을 두 근으로 하는 이차방정식은
$x^2-(\alpha^n+\beta^n)x+\alpha^n\beta^n=0$, $x^2+x+1=0$
따라서 $f(x)=x^2+x+1$이므로 $f(\alpha^n+\beta^n)=f(-1)=1$

47

사차방정식 $x^4+x^2+1=0$의 한 근을 ω라 할 때,
$(2-\omega)(2-\omega^2)(2-\omega^3)(2-\omega^4)(2-\omega^5)(2-\omega^6)$
의 값을 구하시오. (단, $\omega^3<0$) 답 63

해 $\omega^2-\omega+1=0$, $\omega^3=-1$
$\therefore (2-\omega)(2-\omega^2)(2-\omega^3)(2-\omega^4)(2-\omega^5)(2-\omega^6)$
$=(2-\omega)(2-\omega^2)(2+1)(2+\omega)(2+\omega^2)(2-1)$
$=3(4-\omega^2)(4-\omega^4)=3\{16-4(\omega^2-\omega)+\omega^6\}$
$=3(16+4+1)=63$

핵심유형 24 연립방정식의 풀이

48

연립방정식 $\begin{cases}4x-ay=16\\ ax-y=a^3\end{cases}$의 해가 $x=\alpha$, $y=\beta$일 때, $\sqrt{\alpha+\beta}+\sqrt{\alpha-\beta}$의 값은? (단, a는 $0<a<2$인 상수이다.)

① 3 ✓② 4 ③ $2\sqrt{2}$
④ $2\sqrt{3}$ ⑤ 5

해 연립방정식에서 $\alpha=4+a^2$, $\beta=4a$
$\therefore \sqrt{\alpha+\beta}+\sqrt{\alpha-\beta}=\sqrt{(a+2)^2}+\sqrt{(a-2)^2}$
$=|a+2|+|a-2|$
$=(a+2)-(a-2)=4$

정답 및 해설 88~90p

49

연립방정식 $\begin{cases}(x-1)(x-4)=y\\(x-y-2)(x-y-3)=2\end{cases}$를 만족시키는 실수 x, y에 대하여 $x+y$의 최댓값은?

① 6 ② 7 ③ 8
✓④ 9 ⑤ 10

해 $(x-y-2)(x-y-3)=2$에서 $x-y-1=0$ 또는 $x-y-4=0$
(i) $y=x-1$일 때, $\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=5\\y=4\end{cases}$
(ii) $y=x-4$일 때, $\begin{cases}x=2\\y=-2\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=4\\y=0\end{cases}$
(i), (ii)에 의하여 $x+y$의 최댓값은 9이다.

50

삼차방정식 $(x-1)(x-4)^2=a$가 중근을 가질 때, 실수 a의 값은? (단, $a\neq0$)

① 3 ✓② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

해 삼차방정식 $x^3-9x^2+24x-16-a=0$의 세 근을 α, α, β라 하면
$2\alpha+\beta=9$, $\alpha^2+2\alpha\beta=24$, $\alpha^2\beta=16+a$
$\therefore \alpha=2$ 또는 $\alpha=4$
(i) $\alpha=2$일 때, $\beta=5$이고 $a=4$
(ii) $\alpha=4$일 때, $\beta=1$이고 $a=0$
(i), (ii)에 의하여 $a\neq0$인 실수 a의 값은 4이다.

51

연립방정식 $\begin{cases}2x^2+3xy+2y^2=4\\x^2+xy+y^2=k\end{cases}$를 만족시키는 실수 x, y가 존재하기 위한 실수 k의 값의 범위가 $a\leq k\leq b$일 때, 실수 a, b에 대하여 $7ab$의 값은?

① 32 ② 36 ③ 40
④ 44 ✓⑤ 48

해 $x^2+y^2=3k-4$, $xy=4-2k$이므로
$(x-y)^2=(3k-4)-2(4-2k)$
$=7k-12\geq0$
에서 $k\geq\frac{12}{7}$
$(x+y)^2=(3k-4)+2(4-2k)$
$=-k+4\geq0$
에서 $k\leq4$
따라서 $\frac{12}{7}\leq k\leq4$이므로 $a=\frac{12}{7}$, $b=4$
$\therefore 7ab=48$

핵심유형 25 여러 가지 방정식의 활용

52

다음 조건을 만족시키는 3개의 수도꼭지 A, B, C를 틀어 물통을 가득 채우려고 한다.

(가) 수도꼭지 3개를 모두 틀면 물통을 가득 채울 때 1시간이 걸린다.
(나) A를 잠그고 B와 C를 틀면 물통을 가득 채울 때 2시간이 걸린다.
(다) B를 잠그고 A와 C를 틀면 물통을 가득 채울 때 1시간 30분이 걸린다.

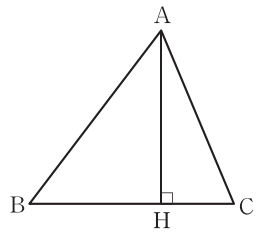
C를 잠그고 A와 B를 틀어 물통을 가득 채울 때 걸리는 시간은?

① $\frac{4}{3}$시간 ② $\frac{5}{4}$시간 ✓③ $\frac{6}{5}$시간
④ $\frac{7}{6}$시간 ⑤ $\frac{8}{7}$시간

조건 (나)에서 $b+(1-a-b)=\frac{1}{2}$ $\therefore a=\frac{1}{2}$
조건 (다)에서 $a+(1-a-b)=\frac{2}{3}$ $\therefore b=\frac{1}{3}$
$a+b=\frac{5}{6}$이므로 구하는 시간은 $\frac{1}{\frac{5}{6}}=\frac{6}{5}$(시간)

53

그림과 같이 삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발 H에 대하여 $\overline{AH}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{AB}$의 길이가 이 순서대로 연속된 자연수일 때, 삼각형 ABC의 넓이를 구하시오. 답 84



해 $\overline{BH}=x$, $\overline{CH}=y$라 하면 $\overline{AB}^2-\overline{BH}^2=\overline{AC}^2-\overline{CH}^2$에서
$(x+y+1)^2-x^2=(x+y-1)^2-y^2$ $\therefore y=x-4$
$\overline{AB}^2-\overline{BH}^2=\overline{AH}^2$이므로 $x=9$, $y=5$ ($\because x>0$, $y>0$)
삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{AH}=\frac{1}{2}\times14\times12=84$

54

삼차방정식
$x^3-12x^2+(k+27)x-3k=0$
의 서로 다른 세 실근이 직각삼각형의 세 변의 길이일 때, 상수 k의 값을 구하시오. 답 20

해 $(x-3)(x^2-9x+k)=0$
이차방정식 $x^2-9x+k=0$의 두 근을 α, β ($\alpha>\beta>0$)라 하면
직각삼각형의 빗변의 길이는 α이다.
$\alpha^2=3^2+\beta^2$, $\alpha+\beta=9$이므로 $k=\alpha\beta=20$이다.

핵심유형 26 부정방정식

55

이차방정식 $x^2+mx+m-6=0$의 서로 다른 두 근이 모두 정수가 되도록 하는 모든 상수 m의 값의 합을 구하시오. 답 4

해 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-m$, $\alpha\beta=m-6$
두 식을 연립하면 $(\alpha+1)(\beta+1)=-5$
(i) $\alpha+1=1$, $\beta+1=-5$일 때, $\alpha=0$, $\beta=-6$
(ii) $\alpha+1=-5$, $\beta+1=1$일 때, $\alpha=-6$, $\beta=0$
(iii) $\alpha+1=5$, $\beta+1=-1$일 때, $\alpha=4$, $\beta=-2$
(iv) $\alpha+1=-1$, $\beta+1=5$일 때, $\alpha=-2$, $\beta=4$
따라서 모든 상수 m의 값의 합은
$6+(-2)=4$

56

x에 대한 삼차방정식

$$x^3-11x^2+mx-m=0$$

의 세 근이 모두 자연수가 되게 하는 상수 m의 값은?

① 13 ② 24 ③ 25
✓④ 36 ⑤ 42

해 $\beta\gamma=\frac{\alpha(11-\alpha)}{\alpha-1}=\frac{-\alpha^2+11\alpha}{\alpha-1}$

$=-\alpha+10+\frac{10}{\alpha-1}$

따라서 $\alpha-1$은 10의 약수인 1, 2, 5, 10 중 하나이고,

$\alpha=11$이면 $-\alpha+10+\frac{10}{\alpha-1}=0$이므로 성립하지 않으므로

α는 2, 3, 6 중 하나이다.

같은 방법으로 β, γ도 2, 3, 6 중 하나이다.

그 중 ㉠을 만족시키는 값은 $\alpha=2$, $\beta=3$, $\gamma=6$뿐이다.

따라서 ㉡에 의해 $m=\alpha\beta\gamma=2\times3\times6=36$

57

이차방정식

$$a^2x^2+2a(b-2)x+ab-2a-3=0$$

이 중근을 가지도록 하는 자연수 a, b에 대하여 $a+b$의 최댓값을 구하시오. 답 9

해 $\frac{D}{4}=0$에서 $(b-2)^2-a(b-2)+3=0$

$(b-2)(a-b+2)=3$

(i) $\begin{cases}b-2=1\\a-b+2=3\end{cases}$ 일 때, $a=4$, $b=3 \Rightarrow a+b=7$

(ii) $\begin{cases}b-2=3\\a-b+2=1\end{cases}$ 일 때, $a=4$, $b=5 \Rightarrow a+b=9$

(i), (ii)에 의하여 $a+b$의 최댓값은 9이다.

서술형

58

실수 x, y, z가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x+y+z=2$
(나) $x^2+y^2+z^2=54$
(다) $xyz=-50$

$x^3+y^3+z^3$의 값을 구하시오. 답 8

해 조건 (가), (나)에서
$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$
$\therefore xy+yz+zx=-25$
최고차항의 계수가 1이고 x, y, z를 세 근으로 하는
삼차방정식은 $t^3-2t^2-25t+50=0$
$x^3=2x^2+25x-50$, $y^3=2y^2+25y-50$
$z^3=2z^2+25z-50$
$\therefore x^3+y^3+z^3=2(x^2+y^2+z^2)+25(x+y+z)-150=8$

59

다음 조건을 만족시키는 실수 a, b, c에 대하여 $a+b+c=p+\sqrt{q}$이다. pq의 값을 구하시오. 답 20
(단, p, q는 유리수이다.)

(가) $a>0$이고 b, c는 유리수이다.
(나) a는 방정식 $(4-2x+x^2)(3+2x-x^2)=10$의 근이다.
(다) $a+b$는 방정식 $x^2-6x+c=0$의 근이다.

해 $(4-2x+x^2)(3+2x-x^2)=10$에서 $x=1\pm\sqrt{2}$ 또는 $x=1\pm i$
조건 (가)에서 $a=1+\sqrt{2}$
$a+b=b+1+\sqrt{2}$가 계수가 유리수인 방정식 $x^2-6x+c=0$의
근이면 $b+1-\sqrt{2}$도 이 방정식의 근이다.
$(b+1+\sqrt{2})+(b+1-\sqrt{2})=6$ $\therefore b=2$
$(b+1+\sqrt{2})(b+1-\sqrt{2})=c$ $\therefore c=7$
$a+b+c=10+\sqrt{2}$
$\therefore pq=10\times2=20$

60

다음 연립방정식을 만족시키는 실수 x, y, z에 대하여 $x+2y+3z$의 값을 구하시오. 답 2

$$\begin{cases}x+y+z=1\\x^2+y^2+z^2=\frac{1}{3}\end{cases}$$

해 $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$에서
$xy+yz+zx=\frac{1}{3}$
$x^2+y^2+z^2=xy+yz+zx$이므로
$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=0$
$\frac{1}{2}\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}=0$
x, y, z가 실수이므로 $x=y=z$이고 $x+y+z=1$에서
$x=y=z=\frac{1}{3}$

정답 및 해설 91~94p $\therefore x+2y+3z=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+1=2$



FIRST CLASS

고난도 도전 문제

◀ 동영상 강의

61

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $\alpha\beta\gamma\neq0$)

| 보기 |

ㄱ. 방정식 $ax^3-bx^2+cx-d=0$의 세 근은 $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$이다.

ㄴ. 방정식 $a(x+1)^2+b(x+1)^2+c(x+1)+d=0$의 세 근은 $\alpha+1$, $\beta+1$, $\gamma+1$이다.

ㄷ. 방정식 $ax^3+2bx^2+4cx+8d=0$의 세 근은 2α, 2β, 2γ이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ✓③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해 ㄴ. $a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d=0$에서
$a(\alpha-1+1)^3+b(\alpha-1+1)^2+c(\alpha-1+1)+d=0$
따라서 $\alpha-1$이 삼차방정식
$a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d=0$의 한 근이므로 방정식
$a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d=0$의 세 근은 $\alpha-1$, $\beta-1$, $\gamma-1$이다. (거짓)

62

삼차방정식 $x^3+2x^2+3x+4=0$의 세근을 α, β, γ라 할 때, $(\alpha^2+\alpha+1)(\beta^2+\beta+1)(\gamma^2+\gamma+1)$의 값은?

① 4 ② 5 ③ 6
✓④ 7 ⑤ 8

해 $x^3+2x^2+3x+4=x(x^2+x+1)+(x^2+x+1)+x+3$
$=(x^2+x+1)(x+1)+x+3=0$
$(\alpha^2+\alpha+1)(\beta^2+\beta+1)(\gamma^2+\gamma+1)$
$=\left(-\frac{\alpha+3}{\alpha+1}\right)\left(-\frac{\beta+3}{\beta+1}\right)\left(-\frac{\gamma+3}{\gamma+1}\right)$
$=-\frac{(\alpha+3)(\beta+3)(\gamma+3)}{(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)}$
또한, $x^3+2x^2+3x+4=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$에서
$(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)=-2$, $(\alpha+3)(\beta+3)(\gamma+3)=14$이므로
(주어진 식)$=-\frac{14}{-2}=7$

63

사차방정식 $x^4-3x^2+k=0$의 네 근 중 두 근의 합이 1일 때, 실수 k의 값은?

✓① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

해 방정식의 네 근을 $\pm\alpha$, $\pm\beta$라 하자.
$X=x^2$이라 하면 이차방정식 $X^2-3X+k=0$의 두 근은 α^2, β^2이므로
$\alpha^2+\beta^2=3$, $\alpha^2\beta^2=k$
$\alpha+\beta=1$이라 해도 일반성을 잃지 않으므로
$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta$에서 $1^2=3+2\alpha\beta$
$\therefore k=(\alpha\beta)^2=1$

64

이차함수 $f(x)=x^2-2kx+k^2+k$에 대하여 방정식 $f(f(x))=0$이 서로 다른 실근과 허근을 갖도록 하는 정수 k의 최댓값은?

① -2 ✓② -1 ③ 1
④ 2 ⑤ 3

해 $f(x)=t$라 하고 t에 대한 이차방정식 $f(t)=0$의 두 실근을 α, β $(\alpha\geq\beta)$라 하자.
방정식 $f(f(x))=0$이 서로 다른 실근과 허근을 가지기 위해서는 두 이차방정식 $f(x)=\alpha$, $f(x)=\beta$가 하나는 서로 다른 두 실근을 가지고 다른 하나는 허근을 가져야 한다.
즉, $(\alpha-k)(\beta-k)<0$에서
$\alpha+\beta=2k$, $\alpha\beta=k^2+k$를 대입하면
$k^2+k-2k^2+k^2<0$ $\therefore k<0$
따라서 정수 k의 최댓값은 -1이다.

65

연립방정식 $\begin{cases} x^2+y^2-4(x+y)=7 \\ xy+x^2+y^2=k \end{cases}$를 만족시키는 실수 x, y가 존재할 때, $x+y$의 값이 항상 음수가 되도록 하는 실수 k의 값의 범위를 $m \le k < n$이라 하자. $m+n$의 값을 구하시오. (단, m, n은 상수이다.) 답 5

해 $x+y=s$, $xy=t$라 하면 $\begin{cases} s^2-2t-4s=7 \\ s^2-t=k \end{cases}$

$f(s)=s^2+4s+7=(s+2)^2+3$, $g(s)=2k$라 하면

두 교점의 x좌표가 모두 음수가 되도록 하는 실수 k의 값의 범위는

$3 \le 2k < 7$ $\therefore \frac{3}{2} \le k < \frac{7}{2}$

따라서 $m=\frac{3}{2}$, $n=\frac{7}{2}$이므로 $m+n=5$

66

삼차방정식

$x^3-(a+4)x^2+5ax-a^2=0$

에 대하여 [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, a는 0이 아닌 실수이다.)

| 보기 |

ㄱ. $a>4$이면 한 실근과 두 허근을 갖는다.
ㄴ. $a=-4$이면 모든 실근의 합은 0이다.
ㄷ. 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 합은 7이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ✓⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

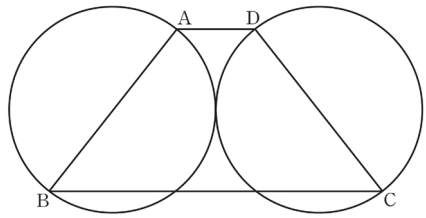
해 $(x-a)(x^2-4x+a)=0$

이차방정식 $x^2-4x+a=0$의 판별식을 D라 하면 $\frac{D}{4}=4-a$

ㄷ. (i) $x^2-4x+a=0$이 a와 a가 아닌 실근을 갖는 경우
$x=1$ 또는 $x=3$(중근)이므로 $a=3$이면 서로 다른 실근의 개수가 2이다.
(ii) $x^2-4x+a=0$이 a가 아닌 중근을 갖는 경우
$x=4$ 또는 $x=2$(중근)이므로 $a=4$이면 서로 다른 실근의 개수가 2이다.
(i), (ii)에서 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 합은 $3+4=7$ (참)

67

그림과 같이 $\overline{AD}=2$인 등변사다리꼴 ABCD에 대하여 선분 AB를 지름으로 하는 원과 선분 CD를 지름으로 하는 원이 오직 한 점에서 만난다. 사각형 ABCD의 넓이와 둘레의 길이를 각각 S, l이라 하면 $S^2=2l+160$이다. 원의 반지름의 길이를 구하시오. 답 2
(단, $\overline{AD}<\overline{BC}$, $\overline{AB}=\overline{CD}$)



해 $S^2=\left\{\frac{1}{2}\times(\overline{BC}+\overline{AD})\times\overline{DH}\right\}^2$

$=\frac{1}{4}\times\{(4r-2)+2\}^2\times(8r-4)$

$=16r^2(2r-1)$

$l=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{AD}$

$=2r+(4r-2)+2r+2=8r$

$S^2=2l+160$에서

$16r^2(2r-1)=16r+160$, $2r^3-r^2-r-10=0$

$(r-2)(2r^2+3r+5)=0$ $\therefore r=2$

68

모든 항의 계수와 상수항이 실수인 두 다항식 $P(x)$와 $Q(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $P(x)Q(x)$는 사차식이다.
(나) $P(x)Q(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=0$, $x=1$, $x=2$ 뿐이다.
(다) 모든 실수 x에 대하여 $P(x)-\{Q(x)\}^3=-8x+8$이다.

$P(3)+Q(3)$의 값을 구하시오. 답 52

해 $P(1)=Q(1)=0$이므로

$P(x)=px(x-1)(x-2)$, $Q(x)=q(x-1)$

$P(x)-\{Q(x)\}^3=-8(x-1)$이므로

$p-q^3=0$, $-q^3+8=0$

두 식을 연립하여 풀면 $p=8$, $q=2$

따라서 $P(x)=8x(x-1)(x-2)$, $Q(x)=2(x-1)$이고

$P(3)+Q(3)=48+4=52$

14 DAY

정답 및 해설 94~96p



08 여러 가지 부등식

개념 강의▶

중요도 ★★★

1 부등식

(1) **부등식**

부등호를 사용하여 수나 식의 값의 대소 관계를 나타낸 식을 **부등식**이라 한다.

(2) **부등식의 기본 성질**❶

실수 a, b, c에 대하여

① $a>b$, $b>c$이면 $a>c$이다.

② $a>b$이면 $a+c>b+c$, $a-c>b-c$이다.

③ $a>b$, $c>0$이면 $ac>bc$, $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$이다.

$a>b$, $c<0$이면 $ac<bc$, $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$이다.

(3) **부등식의 연산**

a, b, c, d가 양수이고 $a\le x\le b$, $c\le y\le d$일 때

① $a+c\le x+y\le b+d$ ② $a-d\le x-y\le b-c$

③ $a\times c\le x\times y\le b\times d$ ④ $\frac{a}{d}\le\frac{x}{y}\le\frac{b}{c}$

❶ **대소 비교**

$A>0$, $B>0$일 때,

① $A-B>0\iff A>B$

② $A^n-B^n>0\iff A>B$

③ $\frac{A}{B}>1\iff A>B$

2 연립부등식의 풀이

(1) **부등식 $ax>b$의 풀이**

① $a>0$이면 $x>\frac{b}{a}$ ② $a<0$이면 $x<\frac{b}{a}$

③ $a=0$일 때, (i) $b\ge0$이면 해가 없다.

(ii) $b<0$이면 x는 모든 실수이다.

(2) **연립부등식의 풀이**

(i) 각각의 부등식을 푼다.

(ii) 각 부등식의 해의 공통부분을 구한다.

(iii) $A<B<C$인 꼴은 $\begin{cases}A<B\\B<C\end{cases}$의 꼴로 고쳐서 푼다.

(3) **연립부등식** $\begin{cases}f(x)\ge0\\g(x)>0\end{cases}$의 해가 $\alpha\le x<\beta$이면 α는 $f(x)=0$의 근이고, β는 $g(x)=0$의 근이다.

First Class Tip

*** 절댓값 기호를 포함한 부등식**❷

$a>0$, $b>0$일 때,

① $|x|<a$이면 $-a<x<a$

② $|x|>a$이면 $x<-a$ 또는 $x>a$

③ $a<|x|<b$이면 $-b<x<-a$ 또는 $a<x<b$

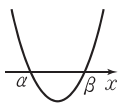
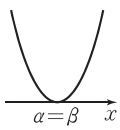
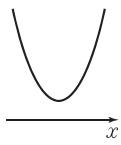
❷ **절댓값 기호를 포함한 부등식의 범위**

① 절댓값 기호를 포함한 일차부등식은 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 미지수의 값을 기준으로 범위를 나눈다.

② $|x-a|+|x-b|<c$ $(a<b)$의 꼴은 $x<a$, $a\le x<b$, $x\ge b$와 같이 x의 값의 범위를 나누어 푼다.

3 이차함수의 그래프와 이차부등식의 해

이차방정식 $ax^2+bx+c=0\,(a>0)$❸의 판별식을 $D=b^2-4ac$, 두 실근을 α, β라 하자.

D의 부호	$D>0$	$D=0$	$D<0$
$y=ax^2+bx+c$의 그래프			
$ax^2+bx+c>0$	$x<\alpha$ 또는 $x>\beta$	$x\neq\alpha$인 모든 실수	모든 실수
$ax^2+bx+c<0$	$\alpha<x<\beta$	해가 없다.	해가 없다.
$ax^2+bx+c\geq0$	$x\leq\alpha$ 또는 $x\geq\beta$	모든 실수	모든 실수
$ax^2+bx+c\leq0$	$\alpha\leq x\leq\beta$	$x=\alpha$	해가 없다.

❸ $a<0$인 경우에는 이차부등식의 양변에 -1을 곱하여 이차항의 계수를 양수로 바꾸어 푼다. 이때, 부등호의 방향이 바뀜에 주의한다.

First Class Tip

*** 이차부등식 세우기**

$\alpha<\beta$인 실수 α, β에 대하여
① 해가 $\alpha<x<\beta \iff (x-\alpha)(x-\beta)<0$
② 해가 $x<\alpha$ 또는 $x>\beta \iff (x-\alpha)(x-\beta)>0$

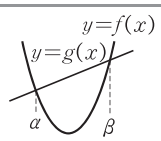
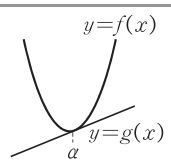
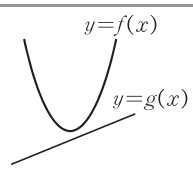
4 항상 성립하는 이차부등식❹

$D=b^2-4ac$라 할 때, 모든 실수 x에 대하여
(1) $ax^2+bx+c>0$이 성립할 조건 $\iff a>0$이고 $D<0$
(2) $ax^2+bx+c<0$이 성립할 조건 $\iff a<0$이고 $D<0$
(3) $ax^2+bx+c\geq0$이 성립할 조건 $\iff a>0$이고 $D\leq0$
(4) $ax^2+bx+c\leq0$이 성립할 조건 $\iff a<0$이고 $D\leq0$

❹ 모든 실수 x에 대하여 부등식 $ax^2+bx+c>0$이 성립할 조건을 구할 때, 이 부등식이 이차부등식이라는 말이나 $a\neq0$이라는 조건이 없으면 $a=0$일 경우도 함께 고려해야 한다.

5 두 함수의 그래프의 위치 관계와 부등식

이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$의 위치 관계와 부등식의 해가 다음과 같다.

위치 관계			
$f(x)=g(x)$	$x=\alpha$ 또는 $x=\beta$	$x=\alpha$	해가 없다.
$f(x)>g(x)$	$x<\alpha$ 또는 $x>\beta$	$x\neq\alpha$인 모든 실수	모든 실수
$f(x)<g(x)$	$\alpha<x<\beta$	해가 없다.	해가 없다.

15 DAY



FIRST CLASS

핵심 유형 연습

◀ 동영상 강의

핵심유형 27 부등식의 성질

01 출제율 ❯❯

$a<b$이고 $\frac{1}{a}<1<\frac{1}{b}$인 실수 a, b에 대하여 [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

| 보기 |

ㄱ. $a>1$　　ㄴ. $a^2<b^2$　　ㄷ. $a^2b>ab^2$

① ㄱ　　✓② ㄷ　　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해 ㄱ. $a>0$이면 $b<1<a$가 되어 조건 $a<b$에 맞지 않는다. (거짓)
ㄴ. [반례] $a=-1$, $b=\frac{1}{2}$이면 $a<b$이고 $\frac{1}{a}<1<\frac{1}{b}$이지만 $a^2>b^2$이다. (거짓)

02 출제율 ❯❯

$0<\frac{b}{a}<1$을 만족시키는 실수 a, b에 대하여 [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

| 보기 |

ㄱ. $b<a$　　ㄴ. $\frac{b}{a}<\frac{a}{b}$　　ㄷ. $ab<a^2$

① ㄱ　　② ㄴ　　③ ㄱ, ㄴ
✓④ ㄴ, ㄷ　　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해 ㄱ. [반례] $a=-2$, $b=-1$인 경우 $0<\frac{b}{a}<1$은 만족시키지만 $b>a$이므로 성립하지 않는다. (거짓)
ㄴ. $0<\frac{b}{a}<1$에서 각 변에 $\frac{a}{b}$를 곱하면 $0<1<\frac{a}{b}$ (참) ㄷ. $0<\frac{b}{a}<1$의 각 변에 a^2을 곱하면 $0<ab<a^2$ (참)

03 출제율 ❯❯

실수 a, b, c에 대하여
$(b-a)(b-c)<0$, $a(a-c)<0$
이 성립할 때, [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

| 보기 |

ㄱ. b는 a와 c 사이에 있다.
ㄴ. a, b, c 중 적어도 2개는 서로 다른 부호이다.
ㄷ. a, b, c 중 가장 큰 수는 c이다.

✓① ㄱ　　② ㄷ　　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해 ㄴ. $a>0$이면 $0<a<b<c$
$a<0$이면 $c<b<a<0$ (거짓)
ㄷ. [반례] ㄴ에서 $c<b<a<0$인 경우 c가 가장 작은 수이다. (거짓)

핵심유형 28 (연립)일차부등식의 풀이

04 출제율 ❯❯

연립부등식 $\begin{cases}4x-1\geq 2x+a\\ x+1>2x+b\end{cases}$의 해가 $-1\leq x<5$일 때, 상수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하시오. 답 12

해 연립부등식의 해는 $\frac{a+1}{2}\leq x<-b+1$이므로
$\frac{a+1}{2}=-1$, $-b+1=5$
$\therefore ab=(-3)\times(-4)=12$

05 출제율 ❯❯❯

부등식 $2x-a<bx-3$의 해가 존재하지 않도록 하는 실수 a, b에 대하여 $a+b$의 최댓값을 구하시오. 답 5

해 $2x-a<bx-3$에서 $(2-b)x<a-3$
이때, 이 부등식의 해가 존재하지 않아야 하므로
$2-b=0$, $a-3\leq 0$　　$\therefore a\leq 3$, $b=2$
따라서 $a+b$의 최댓값은 $3+2=5$이다.

06 출제율 ❯❯

부등식 $x+3<y<25-2x$를 만족시키는 소수 x, y에 대하여 $x+y$의 최댓값을 구하시오. 답 21

해 $x+3<y<25-2x$에서
$x+3<25-2x$이므로 $x<\frac{22}{3}$
이때, x는 소수이므로 2, 3, 5, 7이 가능하다.
$x=2$일 때, $5<y<21$이므로 소수 y는 7, 11, 13, 17, 19
따라서 $x=2$, $y=19$일 때 $x+y$는 최댓값 21을 갖는다.

핵심유형 29 절댓값을 포함한 부등식의 풀이

07 출제율 ❯❯❯

부등식 $|ax-1|<b$의 해가 $-2<x<1$이다. 이때, 상수 a, b에 대하여 ab의 값은?

✓① -6 ② -3 ③ 2
④ 3 ⑤ 6

해 $1-b<ax<1+b$

(i) $a>0$일 때, $\frac{1-b}{a}=-2$, $\frac{1+b}{a}=1$
두 식을 연립하여 풀면 $a>0$인 조건에 맞지 않는다.

(ii) $a<0$일 때, $\frac{1+b}{a}=-2$, $\frac{1-b}{a}=1$
두 식을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=3$

(iii) $a=0$일 때, 조건에 맞지 않는다.

(i)~(iii)에서 $a=-2$, $b=3$ $\therefore ab=-6$

08 출제율 ❯❯❯

연립부등식 $|x-2|<|x-4|<|x-8|$의 해는?

✓① $x<3$ ② $x>3$ ③ $x<4$
④ $x>4$ ⑤ $x<5$

해 $|x-2|<|x-4|$의 양변을 제곱하여 풀면
$x<3$ … ㉠
같은 방법으로 $|x-4|<|x-8|$에서
$x<6$ … ㉡
㉠, ㉡의 공통 범위는 $x<3$

09 출제율 ❯❯❯

부등식 $(x-9)|x-n|\le 0$을 만족시키는 자연수 x가 10개일 때, 자연수 n의 최솟값을 구하시오. 답 10

해 $|x-n|\ge 0$이므로 $x-9\le 0$ 또는 $x=n$
자연수 x가 10개이려면 n은 9보다 큰 자연수이어야 한다.
따라서 n의 최솟값은 10이다.

핵심유형 30 이차부등식의 풀이

10 출제율 ❯❯❯

이차부등식 $(a+b)x^2+2x+(a-b)>0$의 해가 $-\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}$일 때, 상수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하시오. 답 35

해 $-\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2} \iff \left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)<0$
$\iff (3x+1)(2x-1)<0$
$\iff 6x^2-x-1<0$
$\iff -12x^2+2x+2>0$
$\iff (a+b)x^2+2x+(a-b)>0$
$a=-5$, $b=-7$ $\therefore ab=35$

11 출제율 ❯❯❯

이차부등식 $(a+b)x^2+(b+c)x+(c+a)>0$의 해가 $1<x<2$일 때, 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$의 해는 $\alpha<x<\beta$이다. $\alpha+\beta$의 값은?

① 0 ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
✓④ $\frac{2}{3}$ ⑤ 1

해 $(a+b)x^2+(b+c)x+(c+a)$
$=(a+b)(x-1)(x-2)$
$=(a+b)x^2-3(a+b)x+2(a+b)=0$
의 두 근이 1, 2이므로 $a=-3c$, $b=2c$
$ax^2+bx+c>0$에서 $3x^2-2x-1>0$ $\therefore -\frac{1}{3}<x<1$
$\therefore \alpha+\beta=-\frac{1}{3}+1=\frac{2}{3}$

12 출제율 ❯❯❯

부등식 $x^2+14x+48\le 0$을 만족시키는 x의 값이 모두 부등식 $x^2-ax-2a^2>0$을 만족시키도록 하는 모든 정수 a의 개수를 구하시오. 답 8

해 $x^2+14x+48\le 0$에서 $-8\le x\le -6$
$x^2-ax-2a^2>0$에서 $(x+a)(x-2a)>0$
(i) $a\ge 0$일 때,
$-6<-a$에서 $0\le a<6$
(ii) $a<0$일 때,
$-6<2a$에서 $-3<a<0$
(i), (ii)에서 $-3<a<6$
따라서 정수 a의 개수는 -2, -1, …, 4, 5의 8이다.

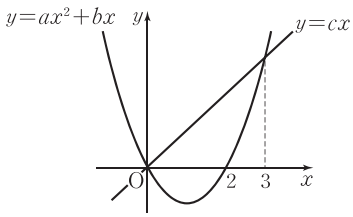
15 DAY

정답 및 해설 97~99p

핵심유형 31 이차함수와 이차부등식의 관계

13 출제율 ❯❯❯

그림은 이차함수 $y=ax^2+bx$의 그래프와 직선 $y=cx$를 나타낸 것이다. 부등식 $ax^2+cx+b<0$의 해는?

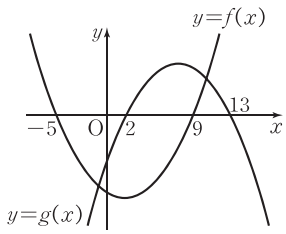


① $0<x<3$ ② $-1<x<2$
✓③ $-2<x<1$ ④ $-3<x<0$
⑤ $-3<x<1$

해 $ax^2+bx=0$에서 $ax(x-2)=0$ $\therefore b=-2a$
$ax^2+(b-c)x=0$에서 $ax(x-3)=0$ $\therefore b-c=-3a$
$ax^2+cx+b<0$에서 $ax^2+ax-2a<0$
이때, $a>0$이므로 $x^2+x-2<0$에서 $(x+2)(x-1)<0$
$\therefore -2<x<1$

14 출제율 ❯❯❯

이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 부등식 $f(x)g(x)>0$을 만족시키는 정수 x의 개수를 구하시오. 답 9



해 $\begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} f(x)<0 \\ g(x)<0 \end{cases}$
$\therefore -5<x<2$ 또는 $9<x<13$
따라서 정수 x의 개수는 -4, -3, -2, -1, 0, 1, 10, 11, 12의 9이다.

15 출제율 ❯❯❯

$-2\le x\le 2$일 때, 부등식 $x^2-6x\ge a^2-6a$가 항상 성립하기 위한 모든 정수 a의 값의 합은?

① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ✓⑤ 9

해 $-2\le x\le 2$에서 $f(x)=x^2-6x=(x-3)^2-9$라 하면
함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최솟값 $f(2)=-8$을 갖는다.
주어진 조건을 만족시키기 위해서는 $a^2-6a\le -8$이어야 하므로
$(a-2)(a-4)\le 0$ $\therefore 2\le a\le 4$
따라서 정수 a는 2, 3, 4이므로 그 합은
$2+3+4=9$

핵심유형 32 항상 성립하는 이차부등식

16 출제율 ❯❯❯

두 함수 $f(x)=ax^2+2ax+1$, $g(x)=2x^2+4x-5$가 있다. 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>g(x)$가 성립하기 위한 정수 a의 개수는?

① 3 ② 4 ③ 5
✓④ 6 ⑤ 7

해 $f(x)-g(x)=ax^2+2ax+1-2x^2-4x+5$
$=(a-2)x^2+2(a-2)x+6$
(i) $a=2$일 때, $f(x)-g(x)=6>0$이므로 성립한다.
(ii) $a-2>0$이고 방정식 $f(x)-g(x)=0$에서
$\frac{D}{4}=(a-2)^2-6(a-2)<0$ $\therefore 2<a<8$
(i), (ii)에서 $2\le a<8$
따라서 정수 a의 개수는 2, 3, 4, 5, 6, 7의 6이다.

17 출제율 ❯❯❯

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ $(a>0)$에서 $D=b^2-4ac$라 할 때, 이차부등식의 해에 대한 설명 중 [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

| 보기 |
ㄱ. $D>0$일 때, $ax^2+bx+c<0$의 해는 없다.
ㄴ. $D<0$일 때, $ax^2+bx+c\ge 0$의 해는 모든 실수이다.
ㄷ. $D=0$일 때, $ax^2+bx+c\le 0$의 해는 $x=-\frac{b}{2a}$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
✓④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해 ㄱ. $D>0$이면 방정식 $ax^2+bx+c=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다. 이때, 두 실근을 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면
$ax^2+bx+c<0$의 해는 $\alpha<x<\beta$이다. (거짓)

18 출제율 ❯❯❯

이차함수 $y=x^2-2ax+2am-2m+b$의 그래프가 실수 m의 값에 관계없이 x축보다 위쪽에 있을 때, 자연수 a, b에 대하여 ab의 최솟값은?

① 1 ✓② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

해 $x^2-2ax+2am-2m+b=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=a^2-2am+2m-b<0$
$(2-2a)m+a^2-b<0$에서 $2-2a=0$이고, $a^2-b<0$
$a=1$이고, $b>a^2$이므로 $b>1$ $\therefore ab>1$
이때, a, b가 자연수이므로 ab의 최솟값은 2이다.

핵심유형 33 연립부등식의 풀이

19 출제율 ❯❯❯

연립부등식 $\begin{cases} x^2-2x+a\le 0 \\ x^2-4x+b<0 \end{cases}$의 해가 $-1<x\le 4$일 때, 상수 a, b에 대하여 ab의 값은?

① 10 ② 20 ③ 30
✓④ 40 ⑤ 50

해 $x=4$는 방정식 $x^2-2x+a=0$의 근이고, … ㉠
$x=-1$은 방정식 $x^2-4x+b=0$의 근이다. … ㉡
㉠에서 $16-8+a=0$ $\therefore a=-8$
㉡에서 $1+4+b=0$ $\therefore b=-5$
$\therefore ab=40$

20 출제율 ❯❯❯

연립부등식 $\begin{cases} x^2-2x-3<0 \\ (x-a)(x-a-2)<0 \end{cases}$의 해가 존재하도록 하는 정수 a의 개수를 구하시오. 답 5

해 부등식 $x^2-2x-3<0$에서 $-1<x<3$
$(x-a)(x-a-2)<0$에서 $a<x<a+2$
연립부등식의 해가 존재하려면 $a<3$, $-1<a+2$이어야 하므로 $-3<a<3$
따라서 정수 a의 개수는 $-2, -1, 0, 1, 2$의 5이다.

21 출제율 ❯❯◇

이차부등식 $x^2-kx-2\le 0$, $x^2-5x+4<0$을 모두 만족시키는 정수가 단 하나만 존재하도록 하는 상수 k의 값의 범위가 $\alpha\le k<\beta$일 때, $\alpha+\beta$의 값은?

① $-\frac{10}{3}$ ② $-\frac{5}{3}$ ③ 0
④ $\frac{5}{3}$ ✓⑤ $\frac{10}{3}$

해 $f(x)=x^2-kx-2$라 하면 $f(2)=2-2k\le 0$에서 $k\ge 1$
$f(3)=7-3k>0$에서 $k<\frac{7}{3}$
$\therefore \alpha+\beta=1+\frac{7}{3}=\frac{10}{3}$

핵심유형 34 여러 가지 부등식의 활용

22 출제율 ❯❯❯

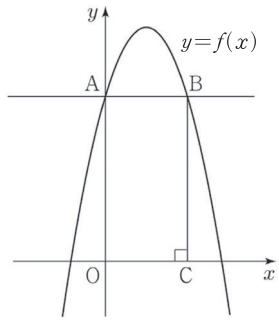
어느 역사동호회에서 답사여행을 가는데 승합차 한 대에 7명씩 타면 2명이 남고, 9명씩 타면 승합차가 1대 남는다고 한다. 승합차는 최소 몇 대인가?

① 5대 ✓② 6대 ③ 7대
④ 8대 ⑤ 9대

해 승합차가 x대라 하면 한 대에 7명씩 타면 2명이 남으므로 사람 수는 $(7x+2)$명이다.
$9(x-2)+1\le 7x+2\le 9(x-2)+9$에서 $\frac{11}{2}\le x\le\frac{19}{2}$
따라서 승합차는 최소 6대이다.

23 출제율 ❯❯◇

그림과 같이 이차함수 $f(x)=-x^2+(k+1)x+2k+4$ $(k>0)$의 그래프가 y축과 만나는 점을 A라 하자. 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 B라 하고, 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 C라 하자. 사각형 OABC의 넓이를 $S(k)$라 할 때, 부등식 $12\le S(k)\le 60$을 만족시키는 모든 자연수 k의 값의 합을 구하시오. (단, O는 원점이다.) 답 10



해 $S(k)=(k+1)(2k+4)=2(k+1)(k+2)$
$12\le 2(k+1)(k+2)\le 60$
$2\times 3\le (k+1)(k+2)\le 5\times 6$
따라서 $1\le k\le 4$인 모든 자연수 k의 값의 합은
$1+2+3+4=10$

24 출제율 ❯❯❯

두 영양제 A, B에 포함된 비타민과 칼슘의 함유량이 다음 표와 같다. 하루에 한 알씩 A, B 중 하나를 선택하여 복용하는데, 30일 동안 섭취한 비타민의 총 용량이 230 mg 이상, 칼슘의 총 용량이 500 mg 이상이려면 30일 중 적어도 a일은 A 영양제를 선택하여 복용해야 한다고 한다. 상수 a의 값을 구하시오. 답 20

영양제	비타민(mg)	칼슘(mg)
A	6	20
B	16	10

해 A 영양제를 30일 중 x일 선택하여 복용한다고 하면
$\begin{cases} 6x+16(30-x)\ge 230 \cdots ㉠ \\ 20x+10(30-x)\ge 500 \cdots ㉡ \end{cases}$
㉠에서 $10x\le 250$ $\therefore x\le 25$
㉡에서 $10x\ge 200$ $\therefore x\ge 20$
따라서 A 영양제를 적어도 20일은 선택하여 복용해야 한다.
$\therefore a=20$

15 DAY



FIRST CLASS

실전 유형 훈련

◀ 동영상 강의

핵심유형 27 부등식의 성질

25

$a>b>1$인 실수 a, b에 대하여 [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

| 보기 |

ㄱ. $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　　ㄴ. $\frac{b}{a^2}<\frac{a}{b^2}$

ㄷ. $ab>a+b-1$

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ　✓⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해 ㄱ. $a>b>1$이므로 양변을 ab로 나누면 $\frac{1}{b}>\frac{1}{a}$ (참)

ㄴ. $a^3>b^3$의 양변을 a^2b^2으로 나누면 $\frac{a}{b^2}>\frac{b}{a^2}$ (참)

ㄷ. $ab-(a+b-1)=(a-1)(b-1)>0$ (참)

26

서로 다른 양수 a, b, c에 대하여 부등식

$a+b-2c>b+c-2a>c+a-2b$

가 성립할 때, [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

| 보기 |

ㄱ. $a+b>2c$　ㄴ. $b+c>2a$　ㄷ. $c+a<2b$

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ

✓④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄴ, ㄷ

해 $x=a+b-2c$, $y=b+c-2a$, $z=c+a-2b$라 하면

ㄱ. $x>0$이므로 $a+b>2c$ (참)

ㄴ. 【반례】 $a=4$, $b=5$, $c=2$이면 주어진 부등식은 성립하지만 $b+c<2a$ (거짓)

ㄷ. $z<0$이므로 $c+a<2b$ (참)

핵심유형 28 (연립)일차부등식의 풀이

27

$2x+y=-2x-y+6$일 때, $1<y-2x<8$을 만족시키는 정수 x, y의 순서쌍 (x, y)의 개수를 구하시오. 답 2

해 $2x+y=-2x-y+6$에서

$2y=-4x+6$　$\therefore y=-2x+3$

이것을 $1<y-2x<8$에 대입하면 $-\frac{5}{4}<x<\frac{1}{2}$

정수 x는 -1, 0이므로 구하는 순서쌍의 개수 $(-1, 5)$, $(0, 3)$의 2이다.

28

실수 x, y, z에 대하여 다음 조건을 만족시키는 x의 값의 범위가 $a<x<b$일 때, $14(b-a)$의 값을 구하시오. 답 65

(가) $x+5y=4$, $2y+3z=6$

(나) $x<2y<3z$

해 $3z=6-2y$이므로 $x<2y<6-2y$

$y=\frac{4-x}{5}$를 부등식에 대입하면 $x<2\times\frac{4-x}{5}<6-2\times\frac{4-x}{5}$

연립부등식 $\begin{cases}5x<8-2x\\8-2x<22+2x\end{cases}$에서 $-\frac{7}{2}<x<\frac{8}{7}$

$\therefore 14(b-a)=14\times\left(\frac{8}{7}+\frac{7}{2}\right)=65$

핵심유형 29 절댓값을 포함한 부등식의 풀이

29

상수 a, b에 대하여 부등식 $(a+b)x+2a-3b<0$의 해가 $x>-\frac{3}{4}$일 때, 부등식 $|bx-a|<b-a$를 만족시키는 정수 x의 최댓값을 구하시오. 답 4

해 $(a+b)x+2a-3b<0$의 해가 $x>-\frac{3}{4}$이므로 $a+b<0$

$\frac{3b-2a}{a+b}=-\frac{3}{4}$이므로 $a=3b$

부등식 $|bx-a|<b-a$에서 $|bx-3b|<-2b$이고,

$b<0$이므로 $2b<bx-3b<-2b$

$1<x<5$ ($\because b<0$)

따라서 정수 x의 최댓값은 4이다.

30

부등식 $|2|x-1|-|x+2||<8$의 정수인 해의 개수는?

① 11　② 12　③ 13

④ 14　✓⑤ 15

해 (i) $x\geq1$일 때,

$|2(x-1)-(x+2)|=|x-4|<8$

$x\geq1$이므로 공통 범위는 $1\leq x<12$

(ii) $-2\leq x<1$일 때,

$|-2(x-1)-(x+2)|=|-3x|<8$

$-2\leq x<1$이므로 공통 범위는 $-2\leq x<1$

(iii) $x<-2$일 때,

$|-2(x-1)+(x+2)|=|-x+4|<8$

$x<-2$이므로 공통 범위는 $-4<x<-2$

(i)~(iii)에서 해는 $-4<x<12$이므로 정수인 해의 개수는

$12-(-4)-1=15$

핵심유형 30 이차부등식의 풀이

31
x에 대한 부등식 $x^2-(a+2)x+2a<0$의 정수인 해의 개수가 3이 되도록 하는 모든 정수 a의 값의 합을 구하시오. 답 4

해 (i) $a<2$이면 해는 $a<x<2$
(ii) $a=2$이면 $(x-2)^2<0$이 되어 해가 없으므로 성립하지 않는다.
(iii) $a>2$이면 해는 $2<x<a$
(i)~(iii)에 의하여 $a=-2$ 또는 $a=6$이므로
정수 a의 값의 합은 $(-2)+6=4$

32
이차부등식 $x^2-ax+12\le0$의 해가 $\alpha\le x\le\beta$이고, 이차부등식 $x^2-5x+b\ge0$의 해가 $x\le\alpha-1$ 또는 $x\ge\beta-1$일 때, 상수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하시오. 답 42

해 부등식 $x^2-ax+12\le0$의 해가 $\alpha\le x\le\beta$이므로
$\alpha+\beta=a$, $\alpha\beta=12$ … ㉠
$x^2-(\alpha+\beta-2)x+(\alpha-1)(\beta-1)\ge0$
$x^2-5x+b\ge0$과 같으므로
$\alpha+\beta-2=5$, $(\alpha-1)(\beta-1)=b$ … ㉡
㉠, ㉡에서 $a=7$, $b=6$ $\therefore ab=42$

33
양수 a, b에 대하여 이차방정식 $x^2+ax+b=0$이 서로 다른 두 실근 α, β를 가질 때, 부등식 $bx^2+ax+1<0$의 해는? (단, $\alpha<\beta$)

① $-\alpha<x<-\beta$ ② $-\beta<x<-\alpha$
③ $\frac{1}{\alpha}<x<\frac{1}{\beta}$ ✓④ $\frac{1}{\beta}<x<\frac{1}{\alpha}$
⑤ $x<\frac{1}{\beta}$ 또는 $x>\frac{1}{\alpha}$

해 근과 계수의 관계에서 $\alpha+\beta=-a$, $\alpha\beta=b$
$bx^2+ax+1<0$에서
$\alpha\beta x^2-(\alpha+\beta)x+1<0$, $(\alpha x-1)(\beta x-1)<0$
$\left(x-\frac{1}{\alpha}\right)\left(x-\frac{1}{\beta}\right)<0$
따라서 부등식의 해는 $\frac{1}{\beta}<x<\frac{1}{\alpha}$

34
이차방정식 $x^2-12x+3a=0$의 두 실근 α, β가 $\frac{1}{3}\le\frac{\beta}{\alpha}\le3$을 만족시킬 때, 실수 a의 최댓값을 구하시오. 답 12 (단, $a\neq0$)

해 $\left(\frac{\beta}{\alpha}-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha}-3\right)\le0$, $\left(\beta-\frac{1}{3}\alpha\right)(\beta-3\alpha)\le0$에서
$(\alpha+\beta)^2-\frac{16}{3}\alpha\beta\le0$ … ㉠
$\alpha+\beta=12$, $\alpha\beta=3a$이므로 ㉠에 대입하면
$9\le a\le12$이므로 실수 a의 최댓값은 12이다.

핵심유형 31 이차함수와 이차부등식의 관계

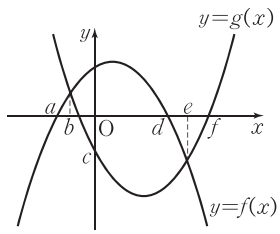
35
이차함수 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 한 점 $(0, 0)$에서만 만난다.
(나) 부등식 $f(x)+g(x)>0$의 해는 $x\neq2$인 모든 실수이다.

함수 $y=f(x)-g(x)$의 최솟값은 -16일 때, $f(3)+g(2)$의 값을 구하시오. 답 10

해 $f(x)-g(x)=ax^2-\{-4a(x-1)\}$
$=a(x+2)^2-8a$
에서 $-8a=-16$ $\therefore a=2$
따라서 $f(x)=2x^2$, $g(x)=-8(x-1)$이므로
$f(3)+g(2)=18+(-8)=10$

36
두 이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 부등식 $\{f(x)\}^2<f(x)g(x)$의 해는?



✓① $a<x<b$ 또는 $d<x<e$
② $a<x<b$ 또는 $e<x<f$
③ $b<x<c$ 또는 $d<x<e$
④ $b<x<c$ 또는 $e<x<f$
⑤ $a<x<c$ 또는 $d<x<f$

해 (i) $f(x)>0$이고 $f(x)<g(x)$일 때, $a<x<b$
(ii) $f(x)<0$이고 $f(x)>g(x)$일 때, $d<x<e$

16 DAY

37

$a<b$인 상수 a, b에 대하여

$$(a-1)(a-2)=(b-1)(b-2)$$

일 때, 부등식 $(x-1)(x-2)<(a-1)(a-2)$를 만족시키는 x의 값의 범위는?

① $x<a$　② $x>a$

③ $x>b$　④ $x<a$ 또는 $x>b$

✓⑤ $a<x<b$

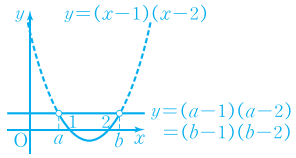
해 $y=(x-1)(x-2)$에 $x=a$, $x=b$를 대입하면

$y=(a-1)(a-2)$

$=(b-1)(b-2)$

이므로

$(x-1)(x-2)<(a-1)(a-2)$를 만족시키는 x의 값의 범위는 $a<x<b$



38

교육청 기출

다음 조건을 만족시키는 이차함수 $f(x)$에 대하여 $f(3)$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M-m$의 값은?

(가) 부등식 $f\left(\frac{1-x}{4}\right)\le 0$의 해가 $-7\le x\le 9$이다.

(나) 모든 실수 x에 대하여 부등식

$f(x)\ge 2x-\frac{13}{3}$이 성립한다.

① $\frac{7}{4}$　② $\frac{11}{6}$　③ $\frac{23}{12}$

④ 2　✓⑤ $\frac{25}{12}$

해 $f(t)=k(t-2)(t+2)(k>0)$라 하면

조건 (나)에서 이차부등식 $kx^2-2x-4k+\frac{13}{3}\ge 0$의 해는 모든 실수이다.

$\frac{D}{4}=4k^2-\frac{13}{3}k+1\le 0$에서 $\frac{1}{3}\le k\le\frac{3}{4}$

$f(3)=5k$이므로

$\frac{5}{3}\le f(3)\le\frac{15}{4}$

$M-m=\frac{15}{4}-\frac{5}{3}=\frac{25}{12}$

핵심유형 32 항상 성립하는 이차부등식

39

부등식 $(a-1)x^2+2(a-1)x-5\ge 0$을 만족시키는 실수 x가 존재하지 않도록 하는 정수 a의 개수는?

① 2　② 3　③ 4

✓④ 5　⑤ 6

해 모든 실수 x에 대하여 $(a-1)x^2+2(a-1)x-5<0$ … ㉠

(i) $a=1$일 때, $-5<0$이므로 부등식 ㉠은 항상 성립한다.

(ii) $a\ne 1$일 때, ㉠이 성립하려면 $a-1<0$이고,

$\frac{D}{4}=(a-1)^2+5(a-1)<0$　∴ $-4<a<1$

(i), (ii)에 의하여 $-4<a\le 1$이므로 주어진 조건을 만족시키는 정수 a의 개수는 -3, -2, -1, 0, 1의 5이다.

40

임의의 실수 x, y에 대하여 이차부등식

$$x^2+4xy+4y^2+10x+ay+b>0$$

이 항상 성립하도록 하는 정수 a, b에 대하여 $a+b$의 최솟값을 구하시오. 답 46

해 주어진 식을 x에 대하여 정리하면

$x^2+2(2y+5)x+(4y^2+ay+b)>0$

$x^2+2(2y+5)x+(4y^2+ay+b)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(2y+5)^2-(4y^2+ay+b)<0$

∴ $(20-a)y+25-b<0$

$20-a=0$이고 $25-b<0$　∴ $a=20$, $b>25$

따라서 정수 a, b에 대하여 $a=20$, $b=26$일 때 $a+b$의 최솟값은 $20+26=46$이다.

41

$x+y=1$을 만족시키는 모든 실수 x, y에 대하여 이차부등식 $x^2+axy+ay^2\ge 0$이 성립하기 위한 실수 a의 범위는?

① $-4<a<4$　② $-4\le a<0$

③ $-4\le a\le 4$　④ $0<a<4$

✓⑤ $0\le a\le 4$

해 $x^2+ax(1-x)+a(1-x)^2\ge 0$

$x^2-ax+a\ge 0$ … ㉠

㉠이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$D=a^2-4a\le 0$　∴ $0\le a\le 4$

핵심유형 33 연립부등식의 풀이

42

연립부등식 $\begin{cases} 2x-1 \geq a \\ (x-3)(x-b) \leq 0 \end{cases}$의 해가 $4 \leq x \leq 7$일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오. 답 14

해 (i) $2x-1 \geq a$에서 $x \geq \frac{a+1}{2}$

(ii) $(x-3)(x-b) \leq 0$에서 $3 \leq x \leq b$

$\frac{a+1}{2}=4$, $b=7$에서 $a=7$, $b=7$

$\therefore a+b=7+7=14$

43

연립부등식

$$\begin{cases} |x-k| \leq 5 \\ x^2-2x-15>0 \end{cases}$$

을 만족시키는 모든 정수 x의 개수가 2가 되도록 하는 정수 k의 값의 합은?

① -3 ② -1 ③ 0

④ 1 ✓⑤ 3

해 $k-5 \leq x \leq k+5$ … ㉠, $x<-3$ 또는 $x>5$ … ㉡

(i) $k+5 \leq 5$일 때,

$k=0$이면 -5, -4의 2개이고,

$k<0$이면 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $k-5<-3$이고 $k+5>5$일 때,

$k=1$이면 ㉠, ㉡을 모두 만족시키는 정수 x는 -4, 6의 2개이다.

(iii) $k-5 \geq -3$일 때,

$k=2$이면 6, 7의 2개이고,

$k>2$이면 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 조건을 만족시키는 정수 k의 값의 합은

$0+1+2=3$이다.

핵심유형 34 여러 가지 부등식의 활용

44

운송 거리가 $100x$ km일 때, 트럭은 x^2-x+4(만 원), 철도는 $3x+16$(만 원), 선박은 $x+32$(만 원)의 비용이 든다고 한다. 이 제품을 철도로 운송하는 것이 다른 교통수단으로 운송하는 것보다 비용이 적게 드는 운송 거리의 구간의 길이가 l km일 때, l의 값을 구하시오. (단, $x>0$이고 운송 수단은 한 종류만 이용할 수 있다.) 답 200

해 (i) $3x+16<x^2-x+4$에서 $x>6$ ($\because x>0$) … ㉠

(ii) $3x+16<x+32$에서 $0<x<8$ ($\because x>0$) … ㉡

㉠, ㉡에서 $6<x<8$

따라서 철도가 다른 교통 수단보다 비용이 적게 드는 운송 거리는 600 km에서 800 km 사이이다.

$\therefore l=200$

45

A 인터넷 카페의 4월 회원 수는 260명 미만이었고, 남녀의 비는 2 : 3이었다. 5월에 남자 회원보다 여자 회원이 2배 더 가입하여 5월 말 현재 남녀의 비는 5 : 8이고, 전체 회원 수는 320명이 넘었다. 5월 말 현재 전체 회원 수를 구하시오. 답 325

해 4월 남녀 회원 수를 각각 $2a$, $3a$라 하고

5월에 더 가입한 남녀 회원 수를 각각 x, $2x$라 하자.

$$\begin{cases} 2a+3a<260 \\ 5a+3x>320 \end{cases}$$

$(2a+x) : (3a+2x)=5 : 8$ $\therefore a=2x$

$24.6 \cdots < x < 26$에서 x는 자연수이므로 $x=25$

따라서 5월 말 현재 전체 회원 수는 $5a+3x=13x=325$(명)

46

어느 제품의 가격을 현재의 x %만큼 인상하면 판매량이 현재의 $\frac{4}{5}x$ %만큼 줄어든다고 한다. 현재 매출액보다 줄지 않도록 가격을 인상하려고 할 때, 가격인상률 x의 최댓값을 구하시오. 답 25

해 현재의 가격을 a원, 판매량을 b개라 하면

인상 후에도 매출액이 줄지 않으려면

$a\left(1+\frac{x}{100}\right) \times b\left(1-\frac{x}{125}\right) \geq ab$이므로 $0 \leq x \leq 25$

따라서 가격인상률 x의 최댓값은 25이다.

16 DAY

정답 및 해설 103~106p

47

중고차 A, B의 가격과 휘발유 1 L당 주행거리가 다음 표와 같다. 앞으로 휘발유 가격이 1 L당 1200원으로 일정하다고 가정할 때, 차의 가격과 휘발유의 가격만을 고려하여 중고차 A를 구입하는 것보다 중고차 B를 구입하는 것이 더 경제적이려면 중고차 B를 구입한 후 최소 몇 km를 넘게 타야 하는가?

	차의 가격	1 L당 주행거리
A	4백만 원	12 km
B	5백만 원	15 km

① 2만 km ② 3만 km ③ 4만 km
✓④ 5만 km ⑤ 6만 km

해 차량을 구입한 후 주행거리를 x km라 하면
$4000000+1200\times\frac{x}{12}>5000000+1200\times\frac{x}{15}$
$\therefore x>50000$
따라서 최소 5만 km를 넘게 타야 한다.

48

어떤 시험의 문항 수는 30개이고 각 문항별 배점은 2점, 3점, 4점의 세 종류이다. 30문항을 모두 맞히면 100점이 되도록 할 때, 들어갈 수 있는 2점짜리 문항 수의 최솟값과 최댓값의 합은? (단, 각 배점 종류별 문항이 적어도 한 문항씩 포함되도록 한다.)

① 8 ② 9 ✓③ 10
④ 11 ⑤ 12

해 2점, 3점, 4점짜리 문항의 개수를 각각 x, y, z라 하면
$x+y+z=30$ … ㉠
$2x+3y+4z=100$ … ㉡
$x\geq1$, $y\geq1$, $z\geq1$ … ㉢
㉡−㉠×3을 하면 $-x+z=10$ $\therefore z=x+10$
이것을 ㉠에 대입하면 $2x+y=20$ $\therefore y=20-2x$
㉢에서 $z=x+10\geq1$, $y=20-2x\geq1$
$\therefore -9\leq x\leq\frac{19}{2}$
따라서 x는 자연수이므로 최솟값과 최댓값의 합은 10이다.

서술형

49

이차방정식 $x^2+(m-4)x+3-mk=0$이 m의 값에 관계없이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 자연수 k의 값을 구하시오. 답 2

해 이차방정식 $x^2+(m-4)x+3-mk=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(m-4)^2-4(3-mk)>0$
$\therefore m^2+4(k-2)m+4>0$
이차방정식 $m^2+4(k-2)m+4=0$의 판별식을 D'이라 하면
$\frac{D'}{4}=4(k-2)^2-4<0$
$4(k-1)(k-3)<0$ $\therefore 1<k<3$
따라서 자연수 k의 값은 2이다.

50

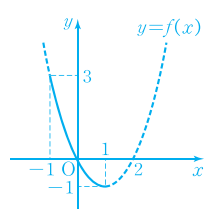
연립부등식 $\begin{cases}x^2+x-6<0\\x^2-(a+4)x+4a\geq0\end{cases}$을 동시에 만족시키는 정수 x는 -2뿐일 때, 정수 a의 값을 p라 하자. p^2의 값을 구하시오. 답 4

해 $x^2+x-6<0$에서 $-3<x<2$
$x^2-(a+4)x+4a\geq0$에서 $a<4$이고, 이때 $x\leq a$ 또는 $x\geq4$이다.
따라서 주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x가 -2뿐이려면
$-2\leq a<-1$이어야 하므로 정수 a는 $p=-2$이다. $\therefore p^2=4$

51

$-1\leq x\leq1$에서 부등식 $x+a\leq x^2\leq2x+b$가 항상 성립할 때, 상수 a, b에 대하여 $b-a$의 최솟값을 p라 하자. $4p$의 값을 구하시오. 답 13

(ii) $g(x)=x^2-2x$라 하면
$g(x)=(x-1)^2-1$
$-1\leq x\leq1$에서 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같으므로
$-1\leq g(x)\leq3$에서 $-1\leq x^2-2x\leq3$
$\therefore b\geq3$



(i), (ii)에 의하여 $b-a\geq\frac{13}{4}$이므로 $b-a$의 최솟값 $p=\frac{13}{4}$ $\therefore 4p=13$



FIRST CLASS

고난도 도전 문제

◀ 동영상 강의

52

$|a|<1$, $|b|<1$, $|c|<1$을 만족시키는 실수 a, b, c에 대하여 [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

| 보기 |

ㄱ. $ab+1>a+b$
ㄴ. $abc+1>a+bc$
ㄷ. $abc+2>a+b+c$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ✓⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해 ㄱ. $ab+1-(a+b)$
$=(a-1)(b-1)>0$ ($\because$ $|a|<1$, $|b|<1$) (참)
ㄴ. ㄱ에 의하여 $abc+1>a+bc$ (참)
ㄷ. $abc+1>a+bc$ ($\because$ ㄴ)
ㄱ에 의하여 $bc+1>b+c$
$\therefore$ $abc+2>a+bc+1>a+b+c$ (참)

53

$|p|\le 2$를 만족시키는 모든 실수 p에 대하여 부등식 $x^2+px+1>2x+p$가 성립하도록 하는 실수 x의 범위를 구하면?

① $x<-1$ ② $x>1$
③ $-1<x<1$ ✓④ $x<-1$ 또는 $x>3$
⑤ $x<1$ 또는 $x>3$

해 $f(p)=(x-1)p+(x^2-2x+1)$이라 하면 $|p|\le 2$에서 항상 $f(p)>0$이 되도록 하는 x의 범위를 구하는 문제가 된다.
(i) $p=-2$일 때,
$f(-2)=-2(x-1)+(x^2-2x+1)$
$=(x-1)(x-3)>0$
$\therefore$ $x<1$ 또는 $x>3$
(ii) $p=2$일 때,
$f(2)=2(x-1)+(x^2-2x+1)$
$=(x+1)(x-1)>0$
$\therefore$ $x<-1$ 또는 $x>1$
(i), (ii)의 공통범위를 구하면
$x<-1$ 또는 $x>3$

54

$(x+1)(x-2)$를 소수점 아래 첫째 자리에서 반올림한 것이 $1+4x$와 같을 때, 모든 실수 x의 값의 합을 구하시오. 답 5

해 $1+4x=m$ (m은 정수)이라 하면 $x=\frac{m-1}{4}$
$m-\frac{1}{2}\le(x+1)(x-2)<m+\frac{1}{2}$이므로
$16m-8\le m^2-6m-27<16m+8$
각 변에 $-16m+148$을 더하면 $11^2<140\le(m-11)^2<156<13^2$
$(m-11)^2=12^2$이므로 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{11}{2}$
따라서 모든 실수 x의 값의 합은 5이다.

55

부등식 $(m^2-2m)x-(2m^2-4m-5)\ge 0$이 실수 m의 값에 관계없이 항상 성립하도록 하는 모든 정수 x의 값의 합을 구하시오. 답 27

해 주어진 부등식을 m에 대하여 정리하면
$(x-2)m^2-2(x-2)m+5\ge 0$
(i) $x-2>0$일 때,
$\frac{D}{4}=(x-2)^2-5(x-2)\le 0$이므로 $2\le x\le 7$
이때, $x>2$이므로 $2<x\le 7$
(ii) $x=2$일 때, $5\ge 0$으로 항상 성립하므로 $x=2$
따라서 모든 정수 x의 값의 합은 $2+3+4+5+6+7=27$

16 DAY

◇ 정답 및 해설 106~107p

56

$ax^2+2bx+c\geq 0$, $bx^2+2cx+a\geq 0$, $cx^2+2ax+b\geq 0$이 임의의 실수 x에 대하여 모두 성립할 때, 부등식 $ax^2-2cx-3b\leq 0$의 정수인 해의 개수를 구하시오.

답 5 (단, a, b, c는 0이 아닌 상수이다.)

해 $a>0$, $b^2-ac\leq 0$ … ㉠
$b>0$, $c^2-ab\leq 0$ … ㉡
$c>0$, $a^2-bc\leq 0$ … ㉢
㉠+㉡+㉢을 하면
$\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}\leq 0$이므로 $a=b=c$
즉, 주어진 부등식 $ax^2-2cx-3b\leq 0$은
$a(x^2-2x-3)\leq 0$이므로 $-1\leq x\leq 3$
따라서 정수인 해의 개수는 -1, 0, 1, 2, 3의 5이다.

57

다음 부등식을 만족시키는 두 자리 수 n의 개수를 구하시오. 답 27

(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

$$n-10\left[\frac{n}{10}\right]<3$$

해 두 자리 자연수 n의 십의 자리의 수를 m, 일의 자리의 수를 k라 하면
$n=10m+k$ $(1\leq m\leq 9,\ 0\leq k\leq 9)$
이때, $\frac{n}{10}=m+\frac{k}{10}$이고, $0\leq\frac{k}{10}<1$이므로 $\left[\frac{n}{10}\right]=m$이다.
$\therefore n-10\left[\frac{n}{10}\right]=(10m+k)-10m=k<3$
따라서 두 자리 자연수의 개수는 10, 11, 12, 20, 21, 22, …, 92의 $3\times 9=27$이다.

58

함수 $f(x)=x^2+2x-3$에 대하여 부등식 $f(x)-\frac{|f(x)|}{3}\leq m(x+3)$을 만족시키는 정수 x의 개수가 6이 되도록 하는 정수 m의 값을 구하시오. 답 1

(단, $m>-5$)

해 $g(x)=f(x)-\frac{|f(x)|}{3}$라 하면
(i) $g(2)\leq 5m$에서
$\frac{2}{3}f(2)\leq 5m$, $\frac{2}{3}(2^2+2\times 2-3)\leq 5m$ $\therefore m\geq\frac{2}{3}$
(ii) $g(3)>6m$에서
$\frac{2}{3}f(3)>6m$, $\frac{2}{3}(3^2+2\times 3-3)>6m$ $\therefore m<\frac{4}{3}$
(i), (ii)에서 $\frac{2}{3}\leq m<\frac{4}{3}$이므로 정수 m의 값은 1이다.

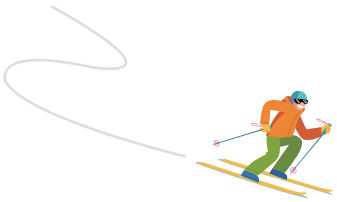
59

x에 대한 부등식
$(2x-a^2)(2x-5a-2)\leq 0$
의 해가 $\alpha\leq x\leq\beta$이다. 두 실수 α, β가 다음 조건을 만족시킬 때, 모든 실수 a의 값의 합을 구하시오. 답 4

(가) $\beta-\alpha$는 자연수이다.
(나) $\alpha\leq x\leq\beta$를 만족시키는 정수 x의 개수는 2이다.

해 이차부등식 $(2x-a^2)(2x-5a-2)\leq 0$의 해는
Ⅰ) $\frac{5}{2}a+1\leq x\leq\frac{1}{2}a^2$ 또는 Ⅱ) $\frac{1}{2}a^2\leq x\leq\frac{5}{2}a+1$이고
(i) α, β가 모두 정수이면 $\beta-\alpha=1$,
(ii) α, β가 모두 정수가 아닌 실수이면 $\beta-\alpha=2$이어야 한다.
Ⅰ), Ⅱ)에 의해 조건을 만족시키는 모든 실수 a의 값의 합은
$-1+0+\frac{5+\sqrt{17}}{2}+\frac{5-\sqrt{17}}{2}=4$

정답 및 해설 107~109p



Ⅲ 경우의 수

09 순열과 조합

경우의 수는 경우를 나누거나, 수형도, 사전식으로
배열 등의 방법으로 구할 수 있는데
자리의 배치, 수의 배열, 물건의 배분, 경로 계산 등
여러 경우의 수를 구할 때 광범위하게 쓰입니다.
경우의 수를 바탕으로 확률을 구하거나
통계를 내기도 하는 등
실생활에서 자료를 분석하고 수집하는데
중요한 기반이 됩니다.





09 순열과 조합

개념 강의▶

중요도 ★★★

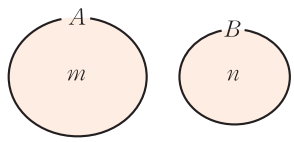
1 경우의 수❶

(1) **사건** : 어떤 실험이나 관찰에 의하여 일어나는 결과
(2) **경우의 수** : 어떤 사건이 일어나는 가짓수

❶ 경우의 수의 기본은 **경우를 나누어 세는 것**이다. 경우 나누기가 복잡하면 수형도를 이용한다.

2 합의 법칙

(1) 두 사건 A, B가 동시에 일어나지 않을 때,
사건 A가 일어나는 경우의 수가 m,
사건 B가 일어나는 경우의 수가 n이면
사건 A 또는 사건 B가 일어나는 경우의 수는
$m+n$이다.



(2) 합의 법칙은 어느 두 사건도 동시에 일어나지 않는 셋 이상의 사건에 대해서도 성립한다.

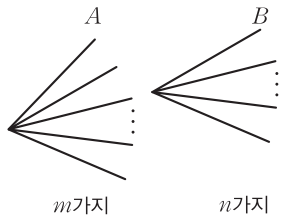
First Class Tip

*** 두 사건이 동시에 일어나는 경우**

두 사건 A, B가 일어나는 경우의 수가 각각 m, n이고
두 사건 A, B가 동시에 일어나는 경우의 수가 l일 때,
사건 A 또는 사건 B가 일어나는 경우의 수는 $m+n-l$이다.

3 곱의 법칙

두 사건 A, B에 대하여 사건 A가 일어나는 경우의 수가 m이고 그 각각에 대하여 사건 B가 일어나는 경우의 수가 n일 때, 두 사건 A, B가 동시에 일어나는 경우의 수는 $m \times n$이다.❷



❷ **경우의 수를 셀 때,**
~이거나 또는 ⇒ 더한다.
~이고 그리고 ⇒ 곱한다.

4 여러 가지 경우의 수 구하는 방법

(1) **경로에 대한 경우의 수**
① 같은 경로에 여러 가지 길이 있는 경우 : 곱의 법칙 이용
② 경로가 다른 경우 : 합의 법칙 이용

(2) **도형에 색칠하는 경우의 수**
① 중앙 또는 가장 많은 면과 인접한 부분부터 칠하고, 이웃한 면에 같은 색을 칠하지 않도록 하여 경우의 수를 곱한다.
② 도형에 색칠할 때, 문제의 조건에 따라 같은 색을 다시 칠할 수 있는 경우와 다시 칠할 수 없는 경우를 구분하여 경우의 수를 구한다.

5 순열의 수

(1) **순열의 뜻** ❸

서로 다른 n개에서 $r(0<r\le n)$개를 택하여 일렬로 배열하는 것을 n개에서 r개를 택하는 **순열**이라 하고, 이 순열의 수를 기호로 ${}_nP_r$와 같이 나타낸다.

(2) **순열의 수의 성질**

① ${}_nP_r=n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times(n-r+1)$ (단, $0<r\le n$)

② ${}_nP_r=\dfrac{n!}{(n-r)!}$ (단, $0\le r\le n$)

③ ${}_nP_n=n!$, $0!=1$, ${}_nP_0=1$

④ ${}_nP_r={}_{n-1}P_r+r\times{}_{n-1}P_{r-1}$ (단, $1\le r<n$) ❹

❸ 순열은 뽑아서 나열하는 것이다.

$${}_nP_r=\underset{\Downarrow}{{}_nC_r}\times\underset{\Downarrow}{r!}$$

❹ ${}_{n-1}P_r+r\times{}_{n-1}P_{r-1}$

$=\dfrac{(n-1)!}{(n-r-1)!}+r\times\dfrac{(n-1)!}{(n-r)!}$

$=\dfrac{(n-1)!\times(n-r)}{(n-r-1)!\times(n-r)}+r\times\dfrac{(n-1)!}{(n-r)!}$

$=\dfrac{(n-1)!}{(n-r)!}\times\{(n-r)+r\}$

$=\dfrac{n!}{(n-r)!}={}_nP_r$

6 조합의 수

(1) **조합의 뜻**

서로 다른 n개에서 순서를 생각하지 않고 $r(0<r\le n)$개를 택하는 것을 n개에서 r개를 택하는 **조합**이라 하고, 이 조합의 수를 기호로 ${}_nC_r$와 같이 나타낸다.

(2) **조합의 수의 성질**

① ${}_nC_r=\dfrac{{}_nP_r}{r!}=\dfrac{n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times(n-r+1)}{r!}=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ (단, $0\le r\le n$)

② ${}_nC_n=1$, ${}_nC_0=1$

③ ${}_nC_r={}_nC_{n-r}$ (단, $0\le r\le n$)

④ ${}_nC_r={}_{n-1}C_r+{}_{n-1}C_{r-1}$ (단, $1\le r<n$) ❺

❺ ${}_{n-1}C_r+{}_{n-1}C_{r-1}$

$=\dfrac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!}+\dfrac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}$

$=\dfrac{(n-1)!\times(n-r)}{r!(n-r-1)!\times(n-r)}+\dfrac{(n-1)!\times r}{(r-1)!(n-r)!\times r}$

$=\dfrac{(n-1)!}{r!(n-r)!}\times\{(n-r)+r\}$

$=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}={}_nC_r$

First Class Tip

*** 조 나누기**

서로 다른 n개의 대상을 p개, q개, r개$(p+q+r=n)$의 세 개의 조로 나누는 방법의 수

① p, q, r가 모두 다른 수일 때,

${}_nC_p\times{}_{n-p}C_q\times{}_{n-p-q}C_r$

② p, q, r 중 두 수가 같을 때,

${}_nC_p\times{}_{n-p}C_q\times{}_{n-p-q}C_r\times\dfrac{1}{2!}$

*** 나누어 주기**

서로 다른 n개의 대상을 p개, q개, r개$(p+q+r=n)$의 세 개의 묶음으로 나누어 서로 다른 세 집단에게 나누어 주는 방법의 수

① p, q, r가 모두 다른 수일 때,

${}_nC_p\times{}_{n-p}C_q\times{}_{n-p-q}C_r\times3!$

② p, q, r 중 두 수가 같을 때,

${}_nC_p\times{}_{n-p}C_q\times{}_{n-p-q}C_r\times\dfrac{1}{2!}\times3!$



FIRST CLASS

핵심 유형 연습

◀ 동영상 강의

핵심유형 01 합의 법칙

01 출제율 ❯❯❯

세 자연수 a, b, c가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a+b+c=14$
(나) $abc=72$

이때, 순서쌍 (a, b, c)의 개수를 구하시오. 답 6

해 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 $(2, 6, 6)$, $(6, 2, 6)$, $(6, 6, 2)$, $(8, 3, 3)$, $(3, 8, 3)$, $(3, 3, 8)$의 6이다.

02 출제율 ❯❯❯

키가 서로 다른 5명이 가로로 일렬로 줄을 섰을 때, 왼쪽에서 세 번째 자리에 위치한 사람의 키가 그 사람의 양 옆에 있는 두 사람의 키보다 작은 경우의 수를 구하시오. 답 40

해 5명을 키가 큰 순서대로 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5라 하고, 줄을 선 자리를 왼쪽부터 ①, ②, ③, ④, ⑤라 하자.
(i) ③ 자리에 a_3이 위치한 경우의 수는 $2\times2=4$
(ii) ③ 자리에 a_4가 위치한 경우의 수는 $2\times6=12$
(iii) ③ 자리에 a_5가 위치한 경우의 수는 $4\times3\times2\times1=24$
$\therefore 4+12+24=40$

03 출제율 ❯❯❯

다음 조건을 만족시키는 다항식 $f(x)$의 개수를 구하시오. 답 70

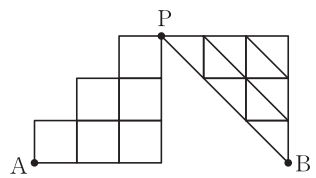
(가) $f(x)$는 7차식이다.
(나) 모든 항의 계수와 상수항은 1 또는 -1이다.
(다) $f(x)$는 $x+1$로 나누어떨어진다.

해 $f(x)=a_7x^7+a_6x^6+\cdots+a_1x+a_0$ ($a_i=1$ 또는 $a_i=-1$이고, $i=0, 1, 2, \cdots, 7$)이라 하면
$a_0+a_2+a_4+a_6=a_1+a_3+a_5+a_7$
구하는 경우의 수는
$1+16+36+16+1=70$

핵심유형 02 곱의 법칙

04 출제율 ❯❯❯

그림과 같은 도로망에서 다음 조건을 만족시키면서 A 지점에서 출발하여 B 지점에 도착하는 경로의 수를 구하시오. 답 308



(가) A 지점에서 P 지점까지는 →, ↑ 방향으로만 이동할 수 있다.
(나) P 지점에서 B 지점까지는 →, ↘, ↓ 방향으로만 이동할 수 있다.

해 A지점에서 출발하여 B지점에 도착하는 경로의 수는 곱의 법칙에 의하여 $14\times22=308$이다.

05 출제율 ❯❯❯

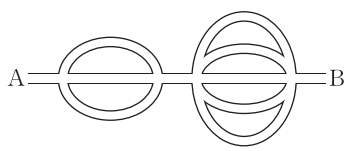
18581, 44944와 같이 거꾸로 읽어도 처음과 똑같은 수를 회문수라 한다. 다섯 자리의 자연수 중 회문수의 개수는?

① 500 ② 600 ③ 700
④ 800 ✓⑤ 900

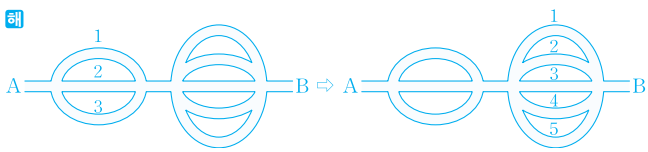
해 만의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 3, …, 9의 9개이고, 천의 자리와 백의 자리에 올 수 있는 숫자는 0, 1, 2, 3, …, 9의 10개이다. 한편, 십의 자리와 일의 자리의 숫자는 각각 천의 자리, 만의 자리의 숫자와 서로 같으므로 구하는 자연수의 개수는
$9\times10\times10=900$이다.

06 출제율 ❯❯❯

그림과 같은 도로망이 있다. A 지점에서 출발하여 모든 도로를 한 번씩만 거쳐서 B 지점에 도달하는 방법의 수는? (단, 교차점은 반복하여 지날 수 있다.)



① 15 ② 90 ③ 120
④ 210 ✓⑤ 720

해


따라서 구하는 경우의 수는 $(3\times2\times1)\times(5\times4\times3\times2\times1)=720$

핵심유형 03 경우 나누기, 수형도

07 출제율 ❯❯❯

7개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 중 서로 다른 3개의 수를 사용하여 세 자리의 자연수를 만들 때, 6의 배수가 되는 경우의 수는?

① 33 ② 36 ✓③ 39
④ 42 ⑤ 45

해 (i) 일의 자리의 수가 0인 경우는 10
(ii) 일의 자리의 수가 2인 경우는 10
(iii) 일의 자리의 수가 4인 경우는 10
(iv) 일의 자리의 수가 6인 경우의 수는 9
∴ 10+10+10+9=39

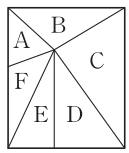
08 출제율 ❯❯❯

a, a, b, b, c, c의 6개의 문자를 일렬로 배열할 때, 같은 문자끼리는 이웃하지 않도록 배열하는 경우의 수를 구하시오. 답 30

해 맨 앞에 a를 배열하는 경우는 10가지이다.
맨 앞에 b, c를 배열하는 경우도 a와 마찬가지로 각각 10가지씩이므로
구하는 경우의 수는 $3\times10=30$

09 출제율 ❯❯❯

그림과 같이 A, B, C, D, E, F의 6개의 영역이 있다. 서로 다른 5가지의 색을 전부 또는 일부를 사용하여 이웃하는 두 영역이 구분되도록 색칠하는 방법의 수는?



① 4020 ✓② 4100 ③ 4280
④ 4360 ⑤ 4440

해 서로 다른 5가지의 색을 각각 a, b, c, d, e라 하자.
먼저 영역 A에 칠하는 색을 a라 하면
(i) 나머지 5개의 영역에 a를 사용하지 않는 경우
$4\times3\times3\times3\times3=324$
(ii) 나머지 5개의 영역에 a를 1번 사용하는 경우 $3\times144=432$
(iii) 나머지 5개의 영역에 a를 2번 사용하는 경우 $4\times4\times4=64$
(i)~(iii)에서 A에 칠한 색을 a라 했을 때 나머지를 칠하는 방법의 수는
$324+432+64=820$
∴ $820\times5=4100$

핵심유형 04 순열의 수

10 출제율 ❯❯❯

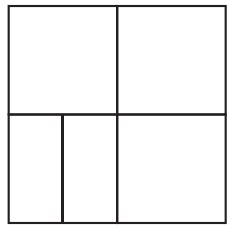
다음 조건을 각각 만족시키는 두 자연수 m, n에 대하여 $m+n$의 값을 구하시오. (단, $m\geq2$, $n\geq3$) 답 8

(가) ${}_{2m}P_3=28\times{}_mP_2$
(나) $5({}_nP_3+{}_{n+1}P_4)=12\times{}_{n+1}P_3$

해 ${}_{2m}P_3-28\times{}_mP_2=0$에서 $2m(2m-1)(2m-2)-28m(m-1)=0$
$4m(m-1)(2m-8)=0$ ∴ $m=4$ (∵ $m\geq2$)
${}_5({}_nP_3+{}_{n+1}P_4)-12\times{}_{n+1}P_3=0$에서
$5\{n(n-1)(n-2)+(n+1)n(n-1)(n-2)\}-12(n+1)n(n-1)=0$
$n(n-1)(5n+8)(n-4)=0$ ∴ $n=4$ (∵ $n\geq3$)
∴ $m+n=4+4=8$

11 출제율 ❯❯❯

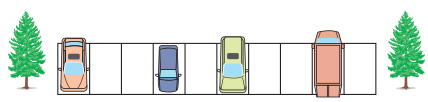
그림과 같이 경계가 구분된 5개 영역에 서로 다른 4가지의 색으로 색칠하려고 한다. 서로 다른 4가지의 색 중 1가지의 색으로는 이웃한 두 개의 영역에, 나머지 3가지의 색으로는 남은 3개의 영역에 색칠하려고 한다. 이와 같이 서로 다른 4가지 색을 칠하는 방법의 수를 구하시오. (단, 변을 공유하는 두 영역을 서로 이웃한 영역이라 한다.) 답 144



해 (i) 먼저 같은 색을 칠할 이웃한 두 영역을 선택하는 경우의 수는
그림과 같이 6
(ii) 4가지 색을 칠하는 방법의 수는 4!
(i), (ii)에 의하여 색을 칠하는 방법의 수는 $6\times4!=144$

12 출제율 ❯❯❯

그림과 같이 10대를 주차할 수 있는 일렬로 된 빈 주차장에 서로 다른 4대의 차를 주차하려고 한다. 차를 주차할 때에는 반드시 주차공간에 맞게 주차한다고 할 때, 4대의 차들이 이웃하지 않도록 주차공간에 주차하는 방법의 수는?



① 120 ② 720 ③ 760
✓④ 840 ⑤ 1440

해 네 자동차를 각각 A, B, C, D라 하고, 빈 자리를 ○라 하면
○○○○○○의 양 끝과 사이사이에 네 자동차를 배열하는 경우와
같으므로 구하는 방법의 수는 ${}_7P_4=840$

17 DAY

핵심유형 05 조합의 수

13 출제율 ❯❯❯

1, 2, 3, 4, 5가 적힌 5개의 공이 각각 들어 있는 두 개의 주머니 A, B에서 각각 3개의 공을 꺼낼 때, 꺼낸 6개의 공에 적힌 수의 합이 홀수인 경우의 수를 구하시오. (단, 공을 꺼내는 순서는 고려하지 않는다.) 답 48

해 (i) 주머니 A에서 꺼낸 세 개의 공에 적힌 수의 합이 짝수인 경우는
${}_3C_2 \times {}_2C_1 = 6$
(ii) 주머니 B에서 꺼낸 세 개의 공에 적힌 수의 합이 홀수인 경우는
${}_5C_3 - 6 = 4$
따라서 주머니 A에서 꺼낸 세 공에 적힌 수의 합이 짝수, 주머니 B에서 꺼낸 세 공에 적힌 수의 합이 홀수인 경우의 수는 $6 \times 4 = 24$
따라서 구하는 경우의 수는 $24 + 24 = 48$

14 출제율 ❯❯❯

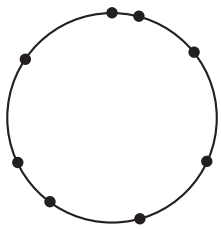
다음을 만족시키는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. 답 12

$${}_{48}C_{n^2} = {}_{48}C_{7n-12}$$

해 (i) $n^2 = 7n - 12$에서 $n^2 - 7n + 12 = 0$ $\therefore n = 3$ 또는 $n = 4$
(ii) $n^2 + 7n - 12 = 48$에서 $n^2 + 7n - 60 = 0$
$\therefore n = 5$ ($\because n$은 자연수)
따라서 모든 자연수 n의 값의 합은 $3 + 4 + 5 = 12$

15 출제율 ❯❯❯

그림과 같이 원 위에 8개의 점이 놓여 있다. 이 점들을 연결한 선분들이 원 내부에 만드는 교점의 개수를 구하시오. (단, 어느 세 선분도 원 내부의 한 점에서 만나지 않는다.) 답 70



해 8개의 점 중 4개의 점을 선택하면 원 내부의 교점이 한 개 생기므로 구하는 교점의 개수는 ${}_8C_4 = 70$

핵심유형 06 여러 가지 순열과 조합의 수

16 출제율 ❯❯❯

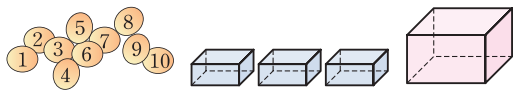
다음 조건을 모두 만족시키도록 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7을 나열하는 방법의 수를 구하시오. 답 864

(가) 세 번째 자리 수는 홀수이다.
(나) 짝수끼리는 이웃하지 않는다.

해 (i) 세 번째 자리에 올 수 있는 홀수는 4가지
(ii) 짝수끼리 이웃하지 않으므로 첫 번째와 두 번째에 홀수, 짝수가 각각 1개씩, 네 번째 이후에 홀수와 짝수가 각각 2개씩 와야 한다.
$\therefore {}_3C_1 \times {}_3C_1 = 9$
(iii) 첫 번째와 두 번째 수를 나열하는 방법의 수는 $2! = 2$
네 번째 이후에 나열하는 방법의 수는 홀수 2개를 나열한 후 짝수 2개를 홀수 사이에 끼워 넣으면 되므로
$\therefore 4 \times 9 \times 2 \times 12 = 864$

17 출제율 ❯❯❯

그림과 같이 1부터 10까지의 수가 적힌 10개의 공과 상자 4개가 있다. 4개의 상자 중 3개는 크기와 모양이 같고, 나머지 한 상자는 다른 상자보다 크다. 10개의 공을 4개의 상자에 3개, 3개, 3개, 1개로 나누어 담으려고 할 때, 나누어 담는 방법의 수는?



① 2800 ② 4200 ③ 6800
④ 8400 ✓⑤ 11200

해 (i) 큰 상자에 공을 1개 담는 경우
$${}_{10}C_1 \times \left({}_9C_3 \times {}_6C_3 \times {}_3C_3 \times \frac{1}{3!} \right) = 2800$$
(ii) 큰 상자에 공을 3개 담는 경우
$${}_{10}C_3 \times \left({}_7C_3 \times {}_4C_3 \times {}_1C_1 \times \frac{1}{2!} \right) = 8400$$
$\therefore 2800 + 8400 = 11200$

18 출제율 ❯❯❯

서로 다른 종류의 볼펜 4자루와 같은 종류의 노트 2권을 5명의 학생에게 남김없이 나누어 주려고 한다. 아무것도 받지 못하는 학생이 없도록 볼펜과 노트를 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. 답 960

해 (i) 1명의 학생이 노트 2권을 받는 경우
$5 \times 4! = 120$
(ii) 1명의 학생이 볼펜 2자루를 받는 경우
${}_4C_2 \times 5 \times {}_4P_2 \times 1 = 360$
(iii) 1명의 학생이 볼펜 1자루와 노트 1권을 받는 경우
${}_5P_4 \times {}_4C_1 = 480$
(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는
$120 + 360 + 480 = 960$



FIRST CLASS

실전 유형 훈련

◀ 동영상 강의

핵심유형 01 합의 법칙

19

한 개의 주사위를 두 번 던져서 나오는 눈의 수를 차례로 a, b라 할 때, 다음 조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b)의 개수를 구하시오. 답 27

> $a+b$가 홀수이거나 ab가 홀수이다.

해 $a+b$와 ab가 모두 홀수인 경우는 존재하지 않으므로
구하는 순서쌍 (a, b)의 개수는 합의 법칙에 의하여
$18+9=27$

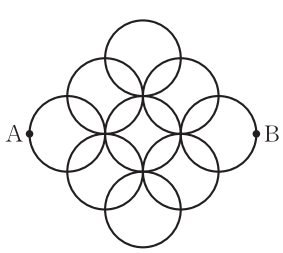
20

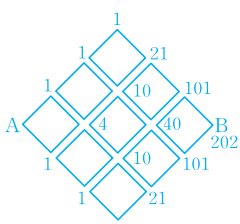
한 개의 주사위를 두 번 던져서 나온 눈의 수를 차례로 a, b라 할 때, 이차함수 $y=x^2$의 그래프와 직선 $ax+by+1=0$이 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수를 구하시오. 답 17

해 이차방정식 $bx^2+ax+1=0$의 판별식을 D라 할 때, $D=a^2-4b>0$에서 $a^2>4b$
(i) $a=3$일 때, $b=1, 2$ (ii) $a=4$일 때, $b=1, 2, 3$
(iii) $a=5$일 때, $b=1, 2, 3, 4, 5, 6$ (iv) $a=6$일 때, $b=1, 2, 3, 4, 5, 6$
따라서 구하는 순서쌍 (a, b)의 개수는 17이다.

21

그림과 같이 반지름의 길이가 같은 9개의 원들이 서로 외접하거나 원의 둘레를 4등분하는 두 점에서 만나고 있다. 원의 둘레를 따라 A 지점에서 B 지점까지 최단거리로 가는 경우의 수를 구하시오. (단, 전체 도형은 직선 AB에 대하여 대칭이다.) 답 202



해


22

다음은 n단의 계단을 오르는데 1단 또는 2단을 섞어서 오르는 방법의 수를 $f(n)$이라 할 때, $f(8)$의 값을 구하는 과정이다.

> 처음에 1단을 오르고 남은 $(n-1)$단의 계단을 오르는 방법은 $f(n-1)$가지이고, 처음에 2단을 오르고 남은 $(n-2)$단의 계단을 오르는 방법은 $f(n-2)$가지이다.
> 이때, 이 두 경우는 동시에 일어날 수 없으므로
> $f(n)=f(n-1)+f(n-2)$ $(n\geq 3)$
> 1단의 계단을 오르는 방법은 1가지
> 2단의 계단을 오르는 방법은 (1단, 1단), (2단)의 2가지이므로
> $f(1)=1$, $f(2)=2$
> $f(3)=$ (가) ←3
> $f(4)=$ (나) ←5
> ⋮
> $\therefore f(8)=$ (다) ←34

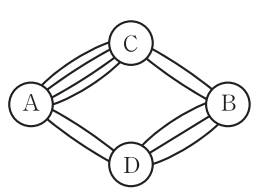
위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 a, b, c라 할 때, $a+b+c$의 값을 구하시오. 답 42

해 $f(3)=f(2)+f(1)=3$, $f(4)=f(3)+f(2)=5$
$f(8)=f(7)+f(6)=34$ $\therefore a+b+c=3+5+34=42$

핵심유형 02 곱의 법칙

23

그림과 같이 네 도시를 연결하는 도로가 있다. 갑, 을 두 사람이 A도시에서 출발하여 B도시로 가려고 한다. 두 사람이 같은 도로를 지나지 않고 가는 방법의 수는? (단, 같은 도시를 두 번 이상 지나지 않는다.)



① 48 ② 92 ③ 108
✓④ 132 ⑤ 140

해 (i) 갑이 A→C→B로 가는 경우
$8\times 9=72$
(ii) 갑이 A→D→B로 가는 경우
$6\times 10=60$
$\therefore 72+60=132$

정답 및 해설 112~114p

24

0, 1, 2, 3, 4, 5의 숫자 중 서로 다른 3개의 숫자를 사용하여 네 자리 수를 만들려고 한다.
이때, 1201, 2123과 같이 같은 숫자끼리는 이웃하지 않도록 하는 네 자리 수의 개수를 구하시오. 답 300

해 (i) A B A C 꼴인 경우
A에는 0이 올 수 없으므로 5가지,
B에는 A에 사용된 수를 제외한 5가지,
C에는 A, B에 사용된 수를 제외한 4가지이므로
경우의 수는 $5\times5\times4=100$
(ii) A B C A 꼴인 경우
$5\times5\times4=100$
(iii) A B C B 꼴인 경우
$5\times5\times4=100$
(i)~(iii)에 의하여 구하는 경우의 수는 $100+100+100=300$

25

수능 기출

같은 종류의 사탕 5개를 3명의 아이에게 1개 이상씩 나누어 주고, 같은 종류의 초콜릿 5개를 1개의 사탕을 받은 아이에게만 1개 이상씩 나누어 주려고 한다. 사탕과 초콜릿을 남김없이 나누어 주는 경우의 수는?

① 27 ② 24 ③ 21
④ 18 ✓⑤ 15

해 (i) 1개의 사탕을 받은 2명의 아이에게 초콜릿 5개를 1개 이상씩 나누어 주는 경우의 수는 $3\times4=12$
(ii) 1개의 사탕을 받은 아이 1명에게 초콜릿 5개를 모두 주므로 경우의 수는 $3\times1=3$
따라서 구하는 경우의 수는 $12+3=15$이다.

핵심유형 03 경우 나누기, 수형도

26

$(x^{10}+x^9+\cdots+x+1)(x^5+x^3+x)(x^4+x^2+1)$의 전개식에서 x^8의 계수는?

① 5 ② 6 ③ 7
✓④ 8 ⑤ 9

해 $8=a+b+c$로 나타내는 경우를 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c) $(a=0, 1, 2, \cdots, 10, b=1, 3, 5, c=0, 2, 4)$로 나타내면
(i) $c=0$일 때, $(7, 1, 0)$, $(5, 3, 0)$, $(3, 5, 0)$
(ii) $c=2$일 때, $(5, 1, 2)$, $(3, 3, 2)$, $(1, 5, 2)$
(iii) $c=4$일 때, $(3, 1, 4)$, $(1, 3, 4)$
(i)~(iii)에 의하여 x^8의 계수는 8이다.

27

한 개의 주사위를 네 번 던져서 나온 눈의 수를 차례로 a, b, c, d라 하자. 이때, $(a-b)(b-c)(c-d)(d-a)\neq0$을 만족시키는 a, b, c, d의 순서쌍 (a, b, c, d)의 총 개수는?

① 480 ② 520 ③ 560
④ 600 ✓⑤ 630

해 (i) $a=c$일 때, a, b, c, d가 될 수 있는 경우의 수는 각각 6, 5, 1, 5이므로 경우의 수는 $6\times5\times1\times5=150$
(ii) $a\neq c$일 때, a, b, c, d가 될 수 있는 경우의 수는 각각 6, 5, 4, 4이므로 경우의 수는 $6\times5\times4\times4=480$
(i), (ii)에 의하여 순서쌍 (a, b, c, d)의 총 개수는 $150+480=630$

28

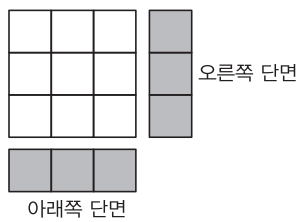
$a+b+c=24$를 만족시키는 세 자연수 a, b, c를 세 변의 길이로 하는 삼각형 중 이등변삼각형의 개수는?
(단, 합동인 삼각형은 하나로 센다.)

✓① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

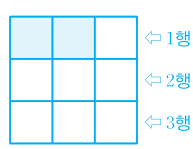
해 $c=2$일 때, $a=b=11$
$c=4$일 때, $a=b=10$
$c=6$일 때, $a=b=9$
$c=8$일 때, $a=b=8$
$c=10$일 때, $a=b=7$
따라서 주어진 조건을 만족시키는 이등변삼각형의 개수는 5이다.

29

그림과 같이 정육면체 모양의 투명한 유리상자 9개가 놓여 있다. 이 상자를 오른쪽 및 아래쪽 어디에서 보아도 모두 검게 보이도록 검은 물감이 든 4개의 유리상자를 놓는 방법의 수를 구하시오. 답 45

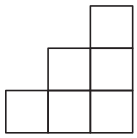


해 1행에 검은 상자 2개를 넣었을 경우 구하는 방법의 수는 $3\times5=15$
2행에 검은 상자 2개를 넣는 경우와 3행에 검은 상자 2개를 넣는 경우 역시 1행에 검은 상자를 2개 넣는 방법의 수와 같으므로
구하는 방법의 수는 $15\times3=45$



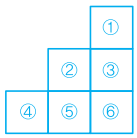
30

그림과 같은 도형을 서로 다른 세 가지의 색 전부 또는 일부를 사용하여 색칠하는 방법의 수는? (단, 한 변을 공유하는 두 영역에는 같은 색을 칠하지 않는다.)



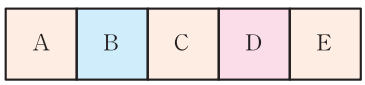
① 60 ② 66 ✓③ 72
④ 78 ⑤ 84

해 (i) ③, ⑤에 같은 색을 칠하는 경우
$3\times16=48$
(ii) ③, ⑤에 서로 다른 색을 칠하는 경우
$6\times1\times4=24$
(i), (ii)에 의하여 구하는 방법의 수는 $48+24=72$



31

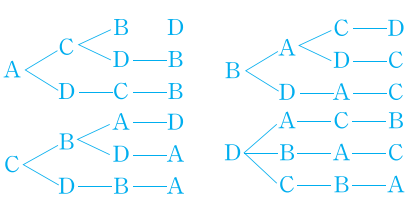
그림과 같이 이웃하고 있는 A, B, C, D, E의 5개의 정사각형에 서로 다른 3가지의 색을 칠하여 구분하는 방법의 수를 구하시오. (단, 이웃하는 정사각형에는 다른 색을 칠하되, 3가지 색을 모두 사용해야 한다.) 답 42



해 세 가지 색을 각각 ①, ②, ③이라 A에 ①, B에 ②를 칠하는 경우는 7가지이므로 구하는 방법의 수는
$\underline{3}\times\underline{2}\times7=42$
A B

32

네 개의 문자 A, B, C, D를 일렬로 배열하려고 한다. A 바로 다음 자리에 B가 올 수 없고, B 바로 다음 자리에 C가 올 수 없고, C 바로 다음 자리에 A가 올 수 없도록 하여 네 개의 문자를 배열하는 경우의 수를 구하시오. 답 12

해


33

1부터 1000까지의 자연수가 하나씩 적힌 카드 1000장 중에서 한 장을 뽑을 때, 카드에 적힌 수가 다음 세 조건을 만족시키는 경우의 수는?

(가) 카드에 적힌 수는 홀수이다.
(나) 카드에 적힌 수는 3의 배수이다.
(다) 카드에 적힌 수는 5의 배수가 아니다.

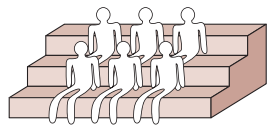
① 114 ② 124 ✓③ 134
④ 144 ⑤ 154

해 백의 자리 수, 십의 자리 수를 3으로 나눈 나머지를 각각 a, b라 하면
(i) □□1일 때, (a, b)가 (2, 0)인 경우의 수는 $3\times4=12$
(1, 1)인 경우의 수는 $3\times3=9$, (0, 2)인 경우의 수는 $4\times3=12$
$\therefore 12+9+12=33$
조건을 만족시키는 경우의 수는 $33+34+33+34=134$

핵심유형 04 순열의 수

34

그림과 같이 6명의 친구들이 계단에 3명씩 2줄로 앉아 사진을 찍으려고 한다. 앉는 방법의 수를 구하시오. 답 720



해 각 자리에 순번을 정하면 6명이 일렬로 앉는 경우의 수와 같다.
따라서 앉는 방법의 수는
$6!=720$

35

2층 건물인 어느 고시원에는 1인실 방이 각 층에 4개씩 있다. 각 층의 방에는 1호실에서 4호실까지 번호가 붙어 있다. 6명의 고시생에게 다음 규칙대로 방을 배정하려고 할 때, 방을 배정하는 방법의 수는?

[규칙 1] 각 층에서 앞번호의 방을 비워 놓고 뒷번호의 방을 배정하지 않는다.
[규칙 2] 각 층의 방을 모두 채울 필요는 없다.

① 720 ② 1440 ✓③ 2160
④ 2880 ⑤ 3600

해 (i) 1층에서 1, 2, 3, 4호실을 사용하고, 2층에서 1, 2호실을 사용하는 경우 $\Rightarrow 6!$
(ii) 1층에서 1, 2, 3호실을 사용하고, 2층에서 1, 2, 3호실을 사용하는 경우 $\Rightarrow 6!$
(iii) 1층에서 1, 2호실을 사용하고, 2층에서 1, 2, 3, 4호실을 사용하는 경우 $\Rightarrow 6!$
$\therefore 3\times6!=2160$

정답 및 해설 114~116p

36

서군이네 반 30명의 학생 중 학급 대항 줄다리기 선수 10명을 일렬로 세우려고 한다. 가능한 경우의 수를 회장인 서군이가 다음과 같이 생각해 보았다.

> 우리 반 전체 30명에서 10명을 일렬로 세우는 것은 다음 두 가지 경우로 나눌 수 있다.
> (i) 내가 들어가지 않고 나를 뺀 나머지에서 10명을 일렬로 세우는 경우
> (ii) 나를 뺀 나머지 29명에서 9명을 일렬로 세우고 그 9명의 사이사이 또는 양 끝에 내가 들어가는 경우
> (i), (ii)에서 ${}_{30}\mathrm{P}_{10}={}_{(가)}\mathrm{P}_{10}+\boxed{(나)}\times{}_{(가)}\mathrm{P}_{(다)}$이다.

(가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 a, b, c라 할 때, $a+b+c$의 값을 구하시오. 답 48

해 $a=29$, $b=10$, $c=9$이므로
$a+b+c=29+10+9=48$

37

그림과 같이 10개의 정사각형으로 두 개의 열을 이룬 도형이 있다.



A를 포함한 5가지의 서로 다른 색을 모두 사용하여 다음 규칙에 따라 10개 중에서 5개의 정사각형에 색칠하는 방법의 수는?

> (가) 색칠된 정사각형끼리는 변을 공유하지 않는다.
> (나) A는 2열의 정사각형에 칠한다.

① 198 ② 204 ③ 210
✓④ 216 ⑤ 222

해 각 열에 색칠된 정사각형의 개수를 (1열, 2열)로 나타내면
(i) (4, 1)일 때, $4!=24$
(ii) (3, 2)일 때,
칠하는 5곳을 정하는 방법의 수는 $2\times4=8$
각 경우에 A를 제외한 나머지 4곳에 칠하는 색을 정하는 방법의 수는 $4!=24$
$\therefore 8\times24=192$
(i), (ii)에서 $24+192=216$

38

9개의 알파벳 A, B, C, D, E, F, G, H, I를 일렬로 나열할 때, 다음 조건을 만족시키도록 나열하는 방법의 수는 $a\times3!\times6!$이다. 자연수 a의 값을 구하시오. 답 26

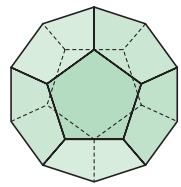
> 모든 자음의 왼쪽, 오른쪽 중 적어도 한 쪽에는 다른 자음이 있다.

해 (i) 2개, 2개, 2개가 이웃하게 나열하는 방법 : 4가지
(ii) 3개, 3개가 이웃하게 나열하는 방법 : 6가지
(iii) 2개, 4개가 이웃하게 나열하는 방법 : 6가지
(iv) 4개, 2개가 이웃하게 나열하는 방법 : 6가지
(v) 6개 모두 이웃하게 나열하는 방법 : 4가지
(i)~(v)에서 자음을 이웃하여 배열하는 방법의 수는 26
이때, 각각의 경우에서 자음과 모음을 배열하는 방법의 수는 각각 6!, 3!이므로 구하는 방법의 수는 $26\times3!\times6!$ $\therefore a=26$

핵심유형 05 조합의 수

39

그림과 같이 정십이면체의 꼭짓점의 개수는 20개, 모서리의 개수는 30개이다. 이때, 정십이면체의 두 꼭짓점을 연결하여 직선을 그었을 때, 내부를 통과하는 선분의 개수를 구하시오. 답 100



해 모서리의 개수는 30, 모서리가 아닌 한 면 위의 선분의 개수는 ${}_5\mathrm{C}_2-5=5$이므로 정십이면체의 내부를 통과하는 선분의 개수는 ${}_{20}\mathrm{C}_2-30-12\times5=100$

40

키가 서로 다른 6명의 사람들에게 1번부터 6번까지의 등번호를 붙이려 한다. 이때, 1, 3, 5번 번호를 붙인 사람은 순서대로 키가 작아지고, 2번 번호를 붙인 사람이 6번 번호를 붙인 사람보다 키가 큰 경우의 수를 구하시오. 답 60

해 먼저 6명 중에 세 명을 선택하여 키가 큰 순서대로 1, 3, 5번의 번호를 부여하는 경우의 수는 ${}_6\mathrm{C}_3$
나머지 세 사람 중에 두 사람을 선택하여 큰 사람에게 2번, 작은 사람에게 6번의 번호를 부여하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_2$
그리고 나머지 한 사람에게 4번의 번호를 부여하는 경우의 수는 1
$\therefore {}_6\mathrm{C}_3\times{}_3\mathrm{C}_2\times1=60$

47

어느 대기실에 3인용 좌석 3개가 사이에 통로를 두고 놓여 있다.

1	2	3	통로	4	5	6	통로	7	8	9

이 9개의 좌석에 세 사람이 어느 두 사람도 이웃하지 않도록 앉는 방법의 수를 구하시오. (단, 통로를 사이에 두고 앉은 경우에는 이웃하지 않은 것으로 본다.) 답 270

해 (i) 좌석의 번호가 이웃하지 않게 앉는 경우
${}_7P_3=7\times6\times5=210$
(ii) 통로를 사이에 두고 앉는 경우
① (3번, 4번)에 앉는 경우, ${}_3P_2\times5=30$
② (6번, 7번)에 앉는 경우, ①과 같으므로 그 방법의 수는 30
(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는 $210+30+30=270$

48

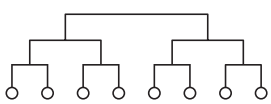
흰색이 3개, 검은색이 4개인 모양과 크기가 같은 7개의 블록이 있다. 이 7개의 블록을 붙여 막대기를 만드는 방법의 수를 구하시오. (단, 같은 색의 블록끼리의 구별이 없고, 막대기를 회전하여 같은 것은 하나로 본다.) 답 19



해 좌우를 구별한다고 할 때 막대기를 만드는 방법의 수는 전체 7개 중 검은색이 위치한 4곳을 선택하는 경우의 수이므로 ${}_7C_4=35$
이때, 좌우대칭인 막대기를 만드는 방법의 수는 ${}_3C_2=3$
즉, 좌우비대칭인 막대기의 수는 $35-3=32$
따라서 좌우의 구별이 없이 막대기를 만드는 방법의 수는 $\frac{32}{2}+3=16+3=19$

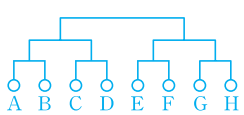
49

8명의 씨름 선수가 다음 대진표와 같이 토너먼트 시합을 한다. 8명 사이에는 실력차가 있고, 시합에서는 언제나 실력이 뛰어난 사람이 이긴다고 하자. 이때, 실력이 제5위인 사람이 결승전에 진출할 수 있도록 대진표를 만드는 방법의 수는? (단, 대진표에서의 위치와는 상관없이 시합하는 상대가 같은 대진표는 같은 것으로 한다.)



✓① 9 ② 10 ③ 30
④ 45 ⑤ 90

해 실력이 제 5 위인 사람을 A자리에 배정하면 6, 7, 8위 중 한 명이 B에, 나머지 선수가 C, D에 배정되는 경우의 수는 ${}_3C_1=3$

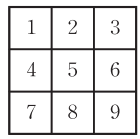


1, 2, 3, 4위가 E, F, G, H에 배정되는 경우의 수는 ${}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{2!}=3$
따라서 대진표를 만드는 방법의 수는 곱의 법칙에 의하여 $3\times3=9$

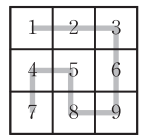
서술형

50

[그림 1]과 같이 9개의 정사각형이 인접해 있는 도형이 있다. 번호가 n인 정사각형을 출발하여 이웃한 사각형으로만 옮겨 다니며 모든 사각형을 한 번씩만 지나는 경우의 수를 a_n이라 하자. [그림 2]는 a_1의 경우 중 한 가지 예이다. 이때, $a_1+a_2+\cdots+a_8+a_9$의 값을 구하시오. 답 40



[그림 1]



[그림 2]

해 $a_1=4\times2=8$
$a_2=0$
$a_5=2\times4=8$
대칭성에 의해 $a_1=a_3=a_7=a_9$이고 $a_2=a_4=a_6=a_8$이므로
$a_1+a_2+\cdots+a_8+a_9=4a_1+4a_2+a_5=32+0+8=40$

51

다음 조건을 모두 만족시키는 자연수 n, r에 대하여 $n+r$의 값을 구하시오. 답 7

(가) ${}_8C_{r-1}={}_8C_{3r+1}$
(나) ${}_nC_r+{}_nC_{r+1}=2\times{}_{2n}C_{r-1}$

해 조건 (가)에서 $r-1=3r+1$ 또는 $r-1+3r+1=8$이므로
$r=2$ ($\because$ r는 자연수)
$r=2$를 조건 (나)에 대입하면 ${}_nC_2+{}_nC_3=2\times{}_{2n}C_1$
$\therefore$ $n=5$ ($\because$ n은 자연수)
$\therefore$ $n+r=7$

52

10개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 중에서 서로 다른 3개의 숫자를 택하여 다음 조건을 만족시키도록 세 자리 자연수를 만들려고 한다.

각 자리 수 중 어느 두 수의 합도 9가 아니다.

예를 들어 108은 조건을 만족시키지 않는다. 조건을 만족시키는 세 자리 자연수의 개수를 구하시오. 답 432

해 5개의 쌍 중에서 세 쌍을 뽑는 경우의 수는 ${}_5C_3=10$
뽑힌 세 쌍에서 각각 하나의 수를 택하는 경우의 수는 $2\times2\times2=8$
택한 세 수를 나열하는 경우의 수는 $3!=6$
따라서 어느 두 수의 합도 9가 아니게 세 수를 나열하는 경우의 수는 $10\times8\times6=480$
0이 맨 앞에 오는 경우의 수는 $8\times6=48$
따라서 구하는 세 자리 자연수의 개수는 $480-48=432$



FIRST CLASS

고난도 도전 문제

◀ 동영상 강의

53

상자 속에 1, 2, 3, 4, 5의 숫자가 각각 적혀 있는 다섯 장의 카드가 있다. 이 상자에서 한 장의 카드를 뽑아 탁자 위에 펼쳐 놓은 후, 두 번째 뽑는 카드부터는 다음과 같은 규칙으로 한 장씩 뽑아서 카드를 배열한다.

> [규칙 1] 새로 뽑은 카드의 숫자가 탁자에 놓여 있는 맨 오른쪽 카드의 숫자보다 크면 그 카드를 버리고 다음 카드를 뽑는다.
> [규칙 2] 새로 뽑은 카드의 숫자가 탁자에 놓여 있는 맨 오른쪽 카드의 숫자보다 작으면 그 카드를 탁자에 펼쳐진 카드의 오른쪽에 놓은 후, 다음 카드를 뽑는다.

위의 규칙으로 다섯 장의 카드를 꺼내었을 때, 탁자에 배열되는 카드의 모든 경우의 수는?

① 12 ✓② 16 ③ 20
④ 24 ⑤ 28

해 (i) 처음 꺼낸 카드의 숫자가 1인 경우의 수는 1이다.
(ii) 처음 꺼낸 카드의 숫자가 2인 경우의 수는 1이다.
(iii) 처음 꺼낸 카드의 숫자가 3인 경우의 수는 2이다.
(iv) 처음 꺼낸 카드의 숫자가 4인 경우의 수는 4이다.
(v) 처음 꺼낸 카드의 숫자가 5인 경우의 수는 8이다.
(i)~(v)에 의하여 구하는 경우의 수는 $1+1+2+4+8=16$

54

1부터 n까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 n개의 공이 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 세 개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 공에 적혀 있는 세 수 중 어느 두 수도 연속하지 않는 모든 경우의 수가 35일 때, n의 값을 구하시오. (단, $n \geq 5$) 답 9

해 주머니에서 세 개의 공을 꺼내는 경우의 수에서 세 수가 모두 연속하는 경우의 수와 세 수 중 두 수만 연속하는 경우의 수를 제외하면 된다.

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6}-(n-2)-(n-2)(n-3)$$

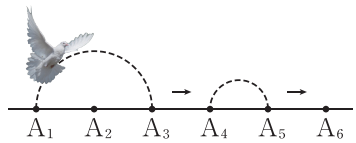
$$=\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{6}=35$$

$\therefore n=9$

55

그림은 한 마리의 훈련된 비둘기가 A_1지점을 출발하여 걸어가거나 날아서 A_6지점에 도달하는 한 가지 방법을 나타낸 것이다.

이 비둘기가 A_1지점을 출발하여 걸어가거나 날아서 A_6지점에 도달하는 모든 경우의 수를 구하시오.
(단, 이 비둘기는 A_i $(i=1, 2, \cdots, 6)$지점에서만 날아가기 시작하거나 하강할 수 있고 A_6지점 방향으로만 갈 수 있다.) 답 89



해 (i) (5)일 경우의 수 : 1
(ii) (4+1)일 경우의 수 : $2\times2=4$
(iii) (3+2)일 경우의 수 : 2
(iv) (3+1+1)일 경우의 수 : $3\times2\times2=12$
(v) (2+2+1)일 경우의 수 : $3\times2=6$
(vi) (2+1+1+1)일 경우의 수 : $4\times2\times2\times2=32$
(vii) (1+1+1+1+1)일 경우의 수 : $2\times2\times2\times2\times2=32$
$\therefore 1+4+2+12+6+32+32=89$

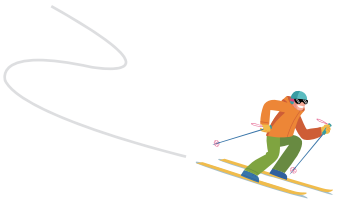
56

두 수 1, 2 중에서 중복을 허락하여 n개의 수를 택하여 일렬로 배열하여 n자리 자연수를 만든다. 이 중 숫자 1끼리는 서로 이웃하지 않도록 배열하여 만든 n자리 자연수의 개수를 $f(n)$이라 할 때, $f(10)$의 값은?

① 55 ② 89 ③ 100
④ 121 ✓⑤ 144

해 $f(n)=f(n-2)+f(n-1)$
이때, $f(1)=2$, $f(2)=3$이므로
$f(3)=f(1)+f(2)=2+3=5$
$f(4)=f(2)+f(3)=3+5=8$
⋮
$\therefore f(10)=f(8)+f(9)$
$=55+89=144$

18 DAY



Ⅳ 행렬

10 행렬의 뜻과 연산

행렬이라는 단어가 생소하게 느껴질 수 있지만
쉽게 생각하면 연립일차방정식의 변수와
계수가 분리되어 있는 모양입니다.
행렬은 벡터, 기하, 해석 등 여러 분야에
사용되므로 이 단원에서 행렬의 정의,
종류, 연산 등을 익혀봅니다.





10 행렬의 뜻과 연산

개념 강의▶

중요도 ★○○

1 행렬의 뜻

(1) 행렬의 뜻과 용어

① 행렬 : 여러 개의 수 또는 문자를 직사각형 모양으로 배열하여 괄호 ( )로 묶은 것

② 성분 : 행렬을 구성하는 각각의 수 또는 문자

③ 행 : 행렬에서 가로줄

④ 열 : 행렬에서 세로줄

⑤ $m\times n$ 행렬 : m개의 행과 n개의 열로 이루어진 행렬❶

⑥ 정사각행렬 : 행과 열의 개수가 서로 같은 행렬

$n\times n$ 행렬 $\Longleftrightarrow$ n차 정사각행렬

⑦ (i, j) 성분 : 행렬의 제i행과 제j열이 만나는 위치의 성분

기호로 a_{ij}와 같이 나타낸다.

❶ 2×2 행렬

	제1열 ⇩	제2열 ⇩
제1행 ⇨	14	10
제2행 ⇨	28	2

(2) 같은 꼴의 행렬

두 행렬에서 행의 개수와 열의 개수가 각각 같을 때,

두 행렬은 **서로 같은 꼴의 행렬**이라 한다.

(3) 서로 같은 행렬

두 행렬 A, B에 대하여

(i) 서로 같은 꼴이고

(ii) 대응하는 성분이 각각 같을 때

$A=B$로 나타내고, **두 행렬은 서로 같다**고 한다.

2 행렬의 덧셈과 뺄셈❷

❷ 두 행렬 A, B가 같은 꼴일 때만 덧셈과 뺄셈이 가능하다.

(1) 행렬의 덧셈과 뺄셈, 실수배

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$이고, k가 실수일 때

$$A+B=\begin{pmatrix} a+p & b+q \\ c+r & d+s \end{pmatrix},\ A-B=\begin{pmatrix} a-p & b-q \\ c-r & d-s \end{pmatrix},\ kA=\begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix}$$

(2) 영행렬

모든 성분이 0인 행렬을 **영행렬**이라 하고, 기호 O로 나타낸다.

(3) 행렬의 연산법칙

같은 꼴의 행렬 A, B, C에 대하여 다음이 성립한다. (단, k, l은 실수)

① 교환법칙 : $A+B=B+A$

② 결합법칙 : $(A+B)+C=A+(B+C)$

③ 분배법칙 : $(k+l)A=kA+lA$, $k(A+B)=kA+kB$

3 행렬의 곱셈

(1) 행렬의 곱셈의 정의

① 두 행렬 A, B에 대하여 행렬 A의 열의 개수와 행렬 B의 행의 개수가 같을 때만 두 행렬 A, B의 곱 AB를 구할 수 있다.
($m\times k$ 행렬)$\times$($k\times n$ 행렬)=($m\times n$ 행렬)❸

② $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$일 때, $AB=\begin{pmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{pmatrix}$

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix}$일 때, $AB=\begin{pmatrix} ap+br \\ cp+dr \end{pmatrix}$

❸ **두 행렬 A, B의 곱**
AB의 (i, j) **성분 결정**
(A의 제i행)$\times$(B의 제j열)
=(AB의 (i, j) 성분)

(2) 행렬의 곱셈에 대한 성질

합과 곱이 정의되는 세 행렬 A, B, C에 대하여
① $(AB)C=A(BC)$
② $A(B+C)=AB+AC$, $(A+B)C=AC+BC$
③ $(kA)B=A(kB)=k(AB)$ (단, k는 실수)

(3) 행렬의 곱셈의 유의점

① $AB\neq BA$ (교환법칙은 성립하지 않는다.)
② $AB=O$라고 해서 $A=O$ 또는 $B=O$인 것은 아니다. (단, O는 영행렬)❹

❹ $AB=O$일 때, A, B를 '영인자'라 한다.

First Class Tip

*** 곱셈의 교환법칙이 성립할 조건**

$X=mA+nE$의 꼴이면 $AX=XA$가 성립한다. (단, m, n은 실수)❺

❺ $X=mA+nE$ (m, n은 실수)의 꼴이면
$AX=A(mA+nE)$
$=mA^2+nA$
$XA=(mA+nE)A$
$=mA^2+nA$
이므로 $AX=XA$가 성립한다.

(4) 행렬의 거듭제곱

A가 정사각행렬이고 m, n이 자연수일 때,
① $A^2=AA$, $A^3=A^2A$, $\cdots$, $A^n=A^{n-1}A$
② $A^mA^n=A^{m+n}$, $(A^m)^n=A^{mn}$

(5) 단위행렬

이차정사각행렬 중 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$을 **단위행렬**이라 하고, 기호 E로 나타낸다.

① 이차정사각행렬 A에 대하여 $AE=EA=A$
② $E^2=E$, $E^3=E$, $\cdots$, $E^n=E$

First Class Tip

*** 곱해서 단위행렬이 되는 행렬**

① $AB=E$, $AC=E$이면 $B=C$이다.
② $AB=E$이면 $BA=E$이다.

(6) 케일리-해밀턴(Cayley-Hamilton)의 정리

행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$일 때, $A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$



FIRST CLASS

핵심 유형 연습

◀ 동영상 강의

핵심유형 01 행렬의 연산

01 출제율 ❯❯❯

두 행렬 $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -2\end{pmatrix}$에 대하여 [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

| 보기 |

ㄱ. $AB=BA$
ㄴ. $A^2+B^2=A-B$
ㄷ. $(A+B)^3=A^3+B^3$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ✓⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해 ㄷ. $(A+B)^2=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 4 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -2\\ 4 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=E$
$\therefore (A+B)^3=(A+B)E=A+B$
이때, ㄴ에서 $A^3=A^2=A$, $B^3=-B^2=B$이므로
$(A+B)^3=A+B=A^3+B^3$ (참)

02 출제율 ❯❯❯

양의 실수 a에 대하여 사차정사각행렬 A, B의 (i, j) 성분 a_{ij}, b_{ij}를 각각

$$a_{ij}=\begin{cases}\frac{1}{a} & (i=j)\\ 0 & (i\neq j)\end{cases},\ b_{ij}=\begin{cases}a^2+2 & (i+j=5)\\ 0 & (i+j\neq 5)\end{cases}$$

로 정의한다. 이때, 행렬 AB의 모든 성분의 합을 $S(a)$라 할 때, $S(a)$의 최솟값을 구하시오. 답 $8\sqrt{2}$

해 $a_{11}b_{14}=a_{22}b_{23}=a_{33}b_{32}=a_{44}b_{41}=\frac{1}{a}\times(a^2+2)=a+\frac{2}{a}$
$\therefore S(a)=4\left(a+\frac{2}{a}\right)$
$a+\frac{2}{a}$는 $a=\frac{2}{a}$일 때 최솟값 $2\sqrt{2}$를 갖는다.
따라서 $S(a)$의 최솟값은 $4\times 2\sqrt{2}=8\sqrt{2}$이다.

03 출제율 ❯❯❯

이차정사각행렬 A, B에 대하여

$$A+B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix},\ A^2-B^2=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 8 & 6\end{pmatrix}$$

일 때, $A-B$의 모든 성분의 합을 구하시오. 답 10

해 $A+B=2E$이므로 $AB=BA$이고
$A^2-B^2=(A+B)(A-B)$이다.
$A^2-B^2=(A+B)(A-B)=2(A-B)=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 8 & 6\end{pmatrix}$
$\therefore A-B=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 4\\ 8 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}$
따라서 $A-B$의 모든 성분의 합은 $1+2+4+3=10$이다.

핵심유형 02 행렬의 곱셈의 변형

04 출제율 ❯❯❯

이차정사각행렬 A가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $A^2+A-4E=O$
(나) $A\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}$

이때, $A\begin{pmatrix}3\\ 5\end{pmatrix}$의 모든 성분의 합을 구하시오. 답 12

(단, O는 영행렬, E는 단위행렬)

해 $A\begin{pmatrix}3\\ 5\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}1+2\\ 2+3\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}+A\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\ 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ 8\end{pmatrix}$
따라서 모든 성분의 합은 $4+8=12$이다.

05 출제율 ❯❯❯

이차정사각행렬 A가 $A^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$을 만족시킬 때, $A\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$은?

✓① $\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix}-1\\ 0\end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix}$
④ $\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$

해 $A\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}+A\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$
$\therefore A\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$

06 출제율 ❯❯❯

이차정사각행렬 A, B에 대하여

$A^2+A=2E$, $AB=2E$

가 성립할 때, $B^2=pA+qE$이다. $p+q$의 값은?

(단, E는 단위행렬이고, p, q는 실수이다.)

① 3 ✓② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

해 $A^2B+AB=2A+2E$, $(A^2+A)B=2A+2E$
$2B=2A+2E$, 즉 $B=A+E$
$\therefore B^2=(A+E)^2=A^2+2A+E^2$
$=(2E-A)+2A+E=A+3E$
따라서 $p=1$, $q=3$이므로 $p+q=4$

핵심유형 03 행렬의 곱셈의 성질

07 출제율 ›››

이차정사각행렬 A, B에 대하여

$A(A-E)=(A-E)B$

를 만족시킬 때, [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, O는 영행렬, E는 단위행렬)

| 보기 |

ㄱ. $(A-E)(A-B)=O$
ㄴ. $A^2(A-E)=(A-E)B^2$
ㄷ. $A(A^2-E)=(A^2-E)B$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ✓⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해 ㄷ. $A(A^2-E)=A(A^2-E^2)=A(A-E)(A+E)$
$=(A+E)A(A-E)=(A+E)(A-E)B$
$=(A^2-E)B$ (참)

08 출제율 ›››

이차정사각행렬 A, B에 대하여 $A+B=AB=2E$가 성립할 때 A^3+B^3은? (단, E는 단위행렬이다.)

① E ✓② $-4E$ ③ $4E$
④ $-3E$ ⑤ $8E$

해 $A^2+AB=2A$, $A^2=2A-AB=2A-2E$
$A^3=2A^2-2A=2(2A-2E)-2A=2A-4E$
또한, $A+B=2E$에서 $AB+B^2=2B$
같은 방법으로 계산하면 $B^3=2B-4E$
$\therefore A^3+B^3=2A+2B-8E=-4E$

09 출제율 ›››

이차정사각행렬 A, B에 대하여 [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, O는 영행렬, E는 단위행렬)

| 보기 |

ㄱ. $A(A-B)=O$이고 $A\neq O$이면 $A=B$이다.
ㄴ. $A(A-B)=O$이고 $AB=E$이면 $A=B$이다.
ㄷ. $A(A-B)=O$이고 $A^2+A+E=O$이면 $A=B$이다.

① ㄴ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
✓④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해 ㄴ. $A(A-B)=O$에서 $A^2=AB$ … ㉠
㉠의 양변의 오른쪽에 B를 곱하면
$A^2B=AB^2$ 즉, $A(AB)=(AB)B$
이때, $AB=E$이므로 $A=B$ (참)

핵심유형 04 케일리-해밀턴의 정리

10 출제율 ›››

행렬 $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ a & 1\end{pmatrix}$에 대하여 $A^2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\9\end{pmatrix}$일 때, 행렬 $A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$은? (단, a는 실수이다.)

① $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$
④ $\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ ✓⑤ $\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$

해 케일리-해밀턴의 정리에 의해
$A^2-2A+E=O$
$2A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=A^2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+E\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\10\end{pmatrix}$
$\therefore A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$

11 출제율 ›››

이차방정식 $x^2-3x-2=0$의 서로 다른 두 실근을 α, β라 할 때, 행렬 $A=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ 3\alpha & \beta\end{pmatrix}$에 대하여

A^3-2A^2+A+2E를 간단히 하면?

(단, O는 영행렬, E는 단위행렬)

✓① $-2E$ ② $-E$ ③ O
④ E ⑤ $2E$

해 케일리-해밀턴의 정리에 의해
$A^2-(\alpha+\beta)A-2\alpha\beta E=O$
즉, $A^2-3A+4E=O$
$\therefore A^3-2A^2+A+2E$
$=(A^3-3A^2+4A)+A^2-3A+2E$
$=A(A^2-3A+4E)+A^2-3A+2E$
$=-2E$

12 출제율 ›››

행렬 $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$가 $A^2-4A+3E=O$를 만족시킬 때, $ad-bc$의 모든 값의 합은? (단, O는 영행렬, E는 단위행렬이고, a, b, c, d는 실수이다.)

① 3 ② 4 ③ 10
④ 12 ✓⑤ 13

해 $A^2-4A+3E=O$ … ㉠
$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$ … ㉡
(i) $a+d=4$일 때, $ad-bc=3$
(ii) $a+d\neq 4$일 때, $A=kE$를 ㉠에 대입하면
$(k^2-4k+3)E=O$이므로 $k=1$ 또는 $k=3$
$A=E$일 때, $ad-bc=1$
$A=3E$일 때, $ad-bc=9$
(i), (ii)에 의해 $3+1+9=13$

19 DAY

◇ 정답 및 해설 123~125p

핵심유형 05 행렬의 거듭제곱

13 출제율 ❯❯❯

두 행렬 $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$에 대하여

$A^n=kE$ (k는 실수)

를 만족시키는 100 이하의 자연수 n의 개수를 구하시오. (단, E는 단위행렬이다.) 답 25

해 $A^2-2A+2E=O$, 즉 $A^2=2A-2E$
$A^3=2A^2-2A=2(2A-2E)-2A=2A-4E$
$A^4=2A^2-4A=2(2A-2E)-4A=-4E$
즉, n이 4의 배수일 때, $A^n=kE$의 꼴이 된다.
따라서 조건을 만족시키는 100 이하의 자연수 n의 개수는
$\frac{100}{4}=25$이다.

14 출제율 ❯❯❯

행렬 $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$에 대하여 $\ll A\gg=a+b+c+d$로 정의하자. 행렬 $A=\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}$에 대하여 $\ll A^m\gg=100$을 만족시키는 m의 개수는? (단, m, n은 자연수이다.)

① 1 ② 3 ✓③ 6
④ 8 ⑤ 12

해 $A^m=\begin{pmatrix}1 & mn\\ 0 & 1\end{pmatrix}$
$\ll A^m\gg=1+mn+1=100$에서 $mn=98$
m, n은 자연수이므로 $98=2\times7^2$의 약수이다.
따라서 자연수 m의 개수는 $2\times3=6$이다.

15 출제율 ❯❯❯

행렬 $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix}$에 대하여 $A^n=a_nA+b_nE$라 할 때, [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이다.)

| 보기 |
ㄱ. $a_{20}+b_{20}=-2$
ㄴ. $a_{30}+b_{30}=1$
ㄷ. $a_{10}+a_{20}+a_{30}=0$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ✓⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해 $A^2+A+E=O$, 즉 $A^2=-A-E$
$A^3=-A^2-A=E$
ㄷ. $A^{10}=(A^3)^3A=A$이므로 $a_{10}=1$
$\therefore a_{10}+a_{20}+a_{30}=1+(-1)+0=0$ (참)

핵심유형 06 행렬의 곱셈의 활용

16 출제율 ❯❯❯

다음은 어느 회사에서 생산한 두 제품 P와 Q의 제품 한 개당 제조원가와 판매가격 및 3월과 4월의 판매량을 나타낸 표이다.

가격 \ 제품명	P	Q
제조원가	a_{11}	a_{12}
판매가격	a_{21}	a_{22}

제품명 \ 판매량	3월	4월
P	b_{11}	b_{12}
Q	b_{21}	b_{22}

위의 표를 각각 행렬 $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$와 $B=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}$로 나타내고, 이 두 행렬의 곱 AB를 $AB=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$라 하자. 제품 한 개당 판매 이익금을 판매가격에서 제조원가를 뺀 값으로 정의할 때, [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

| 보기 |
ㄱ. $a+b$는 3월에 판매된 제품의 제조원가의 총액이다.
ㄴ. $c+d$는 3월과 4월 두 달 동안에 판매된 제품의 판매 총액이다.
ㄷ. $d-b$는 4월에 판매된 제품의 판매 이익금의 총액이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
✓④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해 ㄱ. $a+b$는 3월과 4월 두 달 동안에 판매된 제품의 제조원가의 총액이다. (거짓)

17 출제율 ❯❯❯

어느 대학에서는 수학 영역의 등급이 x, 국어 영역의 등급이 y일 때, x, y를 다음 등식에 대입하여 얻은 p, q의 값의 합으로 환산 점수를 낸다.

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10-x\\ 10-y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p\\ q\end{pmatrix}$$ (단, a, b, c, d는 상수)

A, B, C 세 사람의 등급은 아래 표와 같고 이 등급으로 얻은 환산 점수는 A가 116점, C가 110점이었다. 이때, B가 얻은 환산 점수를 구하시오. 답 104

영역 \ 학생	A	B	C
수학 영역	1등급	3등급	2등급
국어 영역	3등급	1등급	2등급

해 $16(a+b+c+d)=116+S$
$2\times110=116+S$ $\therefore S=104$
따라서 B가 얻은 점수는 104점이다.

핵심유형 01 행렬의 연산

18

이차정사각행렬 A, B가

$$A+B=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 2 & 6\end{pmatrix},\ A-B=\begin{pmatrix}-3 & 5\\ & 2 & 0\end{pmatrix}$$

을 만족시킬 때, 행렬 A^2-B^2의 모든 성분의 합은?

① 25 ② 28 ✓③ 31
④ 34 ⑤ 37

해 $A^2=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 12\\ 8 & 15\end{pmatrix}$

$B^2=\begin{pmatrix}4 & -2\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & -2\\ 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16 & -14\\ 0 & 9\end{pmatrix}$

$\therefore A^2-B^2=\begin{pmatrix}-9 & 26\\ 8 & 6\end{pmatrix}$

따라서 모든 성분의 합은 $(-9)+26+8+6=31$이다.

19

두 행렬 $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}$에 대하여 행렬 AB^2-A^2B의 모든 성분의 합을 구하시오. 답 18

해 AB^2-A^2B

$=A(B^2-AB)=A(B-A)B$

$=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}(-3E)\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}$

따라서 구하는 모든 성분의 합은 18이다.

20

세 행렬 A, B, C에 대하여 $B=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$이고 연산 $ABC+B$가 정의될 때, [보기]에서 연산이 정의되는 것만을 있는 대로 고른 것은?

| 보기 |

ㄱ. BA ㄴ. CB ㄷ. A^2

① ㄱ ② ㄴ ✓③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄷ

해 행렬 A, C의 꼴을 각각 $(m\times p)$, $(q\times n)$ 행렬이라 두면
행렬 B가 3×2 행렬이고 ABC가 정의되므로
$p=3$, $q=2$이고, ABC의 꼴은 $m\times n$ 행렬이다.
또한, $ABC+B$에서 행렬 ABC와 행렬 B는 서로 같은 꼴의 행렬이다.
즉, 행렬 ABC는 3×2 행렬이므로 $m=3$, $n=2$
따라서 행렬 A는 3×3 행렬, 행렬 C는 2×2 행렬이다.
따라서 연산이 정의되는 것은 ㄷ이다.

21

행렬 A의 (i, j) 성분 a_{ij}에 대하여 다음 조건을 만족시키는 삼차정사각행렬 A의 개수를 구하시오. 답 12

(가) $i=j$이면 $a_{ij}=0$, $i\neq j$이면 $a_{ij}=a_{ji}$
(나) 행렬 A의 모든 성분은 정수이고, 모든 성분의 제곱의 합은 4이다.

해 $A=\begin{pmatrix}0 & x & y\\ x & 0 & z\\ y & z & 0\end{pmatrix}$

조건 (나)에서 $2(x^2+y^2+z^2)=4$, $x^2+y^2+z^2=2$
이때, x, y, z는 정수이므로 x^2, y^2, z^2 중 두 개가 1이고 나머지 한 개는 0이다.
0인 것을 택하는 방법의 수는 3이고,
만일 $x^2=1$, $y^2=1$, $z^2=0$이면 x, y는 각각 1 또는 -1이 가능하다.
따라서 조건을 만족시키는 행렬 A의 개수는 $3\times 2\times 2=12$

정답 및 해설 126~127p

22

모든 성분이 0 또는 1인 4×1 행렬 X에 대하여

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&0&1&0\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}m\\n\end{pmatrix}$$

이라 할 때, $m+n$이 홀수가 되도록 하는 행렬 X의 개수를 구하시오. (단, m, n은 정수) 답 8

해 $X=\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}$라 두면 $a+b+c+d=m$, $a+c=n$

$m+n=2(a+c)+b+d$

따라서 $m+n$이 홀수가 되려면 $a+c$에 관계없이 $b+d$가 홀수여야 한다.

즉, $b=1$, $d=0$ 또는 $b=0$, $d=1$의 2가지이고 각각의 경우에 a는 0 또는 1의 2가지, c도 0 또는 1의 2가지가 가능하므로 $m+n$이 홀수가 되도록 하는 행렬 X의 개수는

$2\times2\times2=8$(가지)

23

행렬 $A=\begin{pmatrix}1&a\\1&a\end{pmatrix}$와 이차정사각행렬 B가 다음 조건을 만족시킬 때, 행렬 $A+B$의 $(1, 2)$ 성분과 $(2, 1)$ 성분의 합은?

(가) $\begin{pmatrix}1&-1\end{pmatrix}B=\begin{pmatrix}0&0\end{pmatrix}$이다.

(나) $AB=4B$이고, $BA=5A$이다.

① 6 ② 7 ③ 8

✓④ 9 ⑤ 10

해 $B=\begin{pmatrix}p&q\\r&s\end{pmatrix}$라 하면 조건 (가)에서

$p=r$, $q=s$, $B=\begin{pmatrix}p&q\\p&q\end{pmatrix}$

조건 (나)에서 $(1+a)\begin{pmatrix}p&q\\p&q\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}p&q\\p&q\end{pmatrix}$

이므로 $1+a=4$, 즉 $a=3$이다.

또한, $(p+q)\begin{pmatrix}1&a\\1&a\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}1&a\\1&a\end{pmatrix}$

이므로 $p+q=5$이다.

행렬 $A+B$의 $(1, 2)$ 성분과 $(2, 1)$ 성분의 합은

$(a+q)+(1+p)=a+1+(p+q)$

$=3+1+5=9$

24

두 행렬 $X=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$에 대하여 다음 행렬 중 X^mAX^n의 꼴로 나타낼 수 없는 것은? (단, m, n은 자연수이다.)

① $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ ✓② $\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix}c&d\\a&b\end{pmatrix}$

④ $\begin{pmatrix}b&a\\d&c\end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix}d&c\\b&a\end{pmatrix}$

해 X^mAX^n을 (m, n)의 경우를 나누어 계산하자.

(i) (짝수, 짝수)일 때 : $X^mAX^n=EAE=A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$

(ii) (짝수, 홀수)일 때 : $X^mAX^n=EAX=AX=\begin{pmatrix}b&a\\d&c\end{pmatrix}$

(iii) (홀수, 짝수)일 때 : $X^mAX^n=XAE=XA=\begin{pmatrix}c&d\\a&b\end{pmatrix}$

(iv) (홀수, 홀수)일 때 :

$X^mAX^n=XAX=(XA)X=\begin{pmatrix}c&d\\a&b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d&c\\b&a\end{pmatrix}$

(i)~(iv)에 의해 X^mAX^n의 꼴로 나타낼 수 없는 것은 ②이다.

25

이차정사각행렬 X, Y에 대하여

$[X, Y]=XY-YX$

로 정의한다. A, B, C가 이차정사각행렬일 때, [보기]의 성질 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

| 보기 |

ㄱ. $[B, A]=-[A, B]$

ㄴ. $[aA, B]=a[A, B]$

ㄷ. $[[A, B], C]=[C, [B, A]]$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ✓⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해 ㄷ. $[C, [B, A]]=[C, -[A, B]]$ ($\because$ ㄱ)

$=-[-[A, B], C]$ ($\because$ ㄱ)

$=[[A, B], C]$ ($\because$ ㄴ) (참)

핵심유형 02 행렬의 곱셈의 변형

26

이차정사각행렬 A가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $A^2+3A-E=O$

(나) $A\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$

$(A+3E)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$를 만족시키는 실수 x, y에 대하여 $x+y$의 값을 구하시오. 답 6

(단, O는 영행렬, E는 단위행렬)

해 조건 (가)에서 $A^2+3A=E$ … ㉠

$(A+3E)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$의 양변의 왼쪽에 A를 곱하면

$(A^2+3A)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$

㉠에 의하여

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}=-2A\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$

$=-2\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$ (∵ 조건 (나))

$=\begin{pmatrix}-2\\8\end{pmatrix}$

$\therefore x+y=-2+8=6$

27

이차정사각행렬 A에 대하여

$$A\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\ A\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$$

이 성립할 때, $A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$을 만족시키는 실수 x, y의 합 $x+y$의 값은?

① 1 ② 4 ③ 7

✓④ 10 ⑤ 13

해 $\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$이고

$A\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\ A\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$이므로

$\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}=2A\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}+A\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}+A\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

$=A\begin{pmatrix}4-1\\6+1\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}$

따라서 $A\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$이므로 $x=3$, $y=7$

$\therefore x+y=10$

28

두 행렬 $A=\begin{pmatrix}3&-1\\-2&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}x&y\\4&3\end{pmatrix}$에 대하여

$$AX=B,\ XA=B$$

를 만족시키는 이차정사각행렬 X가 존재할 때, 실수 x, y의 합 $x+y$의 값은?

✓① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5

해 $AX=B$의 양변의 오른쪽에 A를 곱하면 $AXA=BA$이고,

$XA=B$의 양변의 왼쪽에 A를 곱하면 $AXA=AB$이므로

$AB=BA$

$\begin{pmatrix}3&-1\\-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x&y\\4&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x&y\\4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-1\\-2&1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}3x-4&3y-3\\-2x+4&-2y+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x-2y&-x+y\\6&-1\end{pmatrix}$

$-2x+4=6$에서 $x=-1$

$-2y+3=-1$에서 $y=2$

$\therefore x+y=1$

29

이차정사각행렬 A가

$$A\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix},\ A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$$

를 만족시킬 때, 다음 성질을 이용하여 행렬 A의 모든 성분의 합을 구하시오. 답 4

$A\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r\\s\end{pmatrix}$이면

$A\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p&r\\q&s\end{pmatrix}$가 성립한다.

해 $A\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}-A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$에서 $A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ … ㉠

또한, $2A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}-A\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$에서

$A\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}-A\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ … ㉡

㉠, ㉡과 문제의 행렬의 성질에 의해

$A\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\1&1\end{pmatrix}$이고 $AE=A$이므로 $A=\begin{pmatrix}2&0\\1&1\end{pmatrix}$이다.

따라서 행렬 A의 모든 성분의 합은

$2+0+1+1=4$이다.

20 DAY

30

영행렬이 아닌 이차정사각행렬 X, Y가 다음 조건을 만족시킬 때, 실수 a, b에 대하여 $100ab$의 값을 구하시오. (단, a, b는 실수) 답 25

(가) $X+2Y=E$
(나) $XY=O$
(다) $X^3+Y^3=aX+bY$

해 $X+2Y=E$, $X=E-2Y$를 $XY=O$에 대입하면 $(E-2Y)Y=O$,
$Y-2Y^2=O$, 즉 $Y^2=\frac{1}{2}Y$

$\therefore Y^3=\frac{1}{2}Y^2=\frac{1}{4}Y$

$X+2Y=E$, $Y=\frac{1}{2}(E-X)$를 $XY=O$에 대입하면

$\frac{1}{2}X(E-X)=O$, $X-X^2=O$, 즉 $X^2=X$
$\therefore X^3=X^2=X$

따라서 $X^3+Y^3=X+\frac{1}{4}Y$이므로 $a=1$, $b=\frac{1}{4}$

$\therefore 100ab=100\times1\times\frac{1}{4}=25$

31

$A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$를 만족시키는 이차정사각행렬 A에 대하여

$$(A+A^2)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

라 할 때, $a+b$의 값을 구하시오. 답 12

해 실수 x, y에 대하여 $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$로 놓으면

$\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+3y\\2x+4y\end{pmatrix}$에서 $x+3y=2$, $2x+4y=3$

두 식을 연립하여 풀면 $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ … ㉠

한편, $A^2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=AA\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$이므로

$(A+A^2)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+A^2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+A\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$

$=A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+A\left\{\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\right\}$ ($\because$ ㉠)

$=\frac{3}{2}A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\frac{1}{2}A\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+2\\\frac{9}{2}+\frac{5}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix}$

$\therefore a+b=12$

핵심유형 03 행렬의 곱셈의 성질

32

이차정사각행렬 A, B에 대하여 [보기]에서 옳은 것의 개수는? (단, O는 영행렬, E는 단위행렬)

| 보기 |

ㄱ. $A+2B=E$이면 $AB=BA$이다.
ㄴ. $AB=O$이면 $AB=BA$이다.
ㄷ. $A^2B=BA^2$이면 $AB=BA$이다.
ㄹ. $(AB)^2=A^2B^2$이면 $AB=BA$이다.
ㅁ. $(AB)^2=(BA)^2$이면 $AB=BA$이다.

✓① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

해 ㄱ. $A+2B=E$에서 $A=E-2B$
$AB=(E-2B)B=B-2B^2$
$=B(E-2B)=BA$ (참)
ㄹ. 【반례】 $AB=O$이면
$(AB)^2=O$, $A^2B^2=A(AB)B=O$이므로
$(AB)^2=A^2B^2$이지만
ㄴ에 의해 $BA=O$이라고는 할 수 없다. (거짓)

33

수능 기출

다음 세 조건을 만족시키는 영행렬이 아닌 모든 이차정사각행렬 A, B에 대하여 B^3+2BA^3과 항상 같은 행렬은? (단, E는 단위행렬이다.)

(가) $AB=BA$
(나) $(E-B)^2=E-B$
(다) $AB=-B$

① $2A$ ② $-A$ ③ E
④ $2B$ ✓⑤ $-B$

해 조건 (나)의 $(E-B)^2=E-B$에서
$E^2-2B+B^2=E-B$ $\therefore B^2=B$
$\therefore B^3=B^2B=BB=B$
한편, 조건 (가)와 (다)에서 $AB=BA=-B$이므로
$BA^3=(BA)A^2=-BA^2=-(BA)A=BA=-B$
$\therefore B^3+2BA^3=B+2(-B)=B-2B=-B$

34

다음은 이차정사각행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$에 대하여

$AX=XA$

가 성립하면

$X=mA+nE$ (m, n은 실수)

의 꼴로 나타내어짐을 증명하는 과정이다.

(가), (나)에 들어갈 적당한 것을 차례로 나열한 것은?

(단, E는 단위행렬이고, $a\neq d$, $bc\neq 0$)

이차정사각행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$에 대하여 $AX=XA$가 성립하므로

$(A-dE)(X-wE)=(X-wE)(A-dE)$

가 성립한다. 즉,

$\begin{pmatrix} a-d & b \\ c & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-w & y \\ z & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x-w & y \\ z & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a-d & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에서

$(a-d)y=b(x-w)$, $cy=bz$

이때, $a-d\neq 0$, $bc\neq 0$이므로

$\frac{x-w}{a-d}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$ … ㉠

㉠의 값을 k라 두면

$x-w=k(a-d)$, $y=kb$, $z=kc$

$\therefore X-wE=k(\boxed{\text{(가)}})$ ← $A-dE$

$\therefore X=kA+(\boxed{\text{(나)}})E$ ← $w-kd$

따라서 $X=mA+nE$ (m, n은 실수)의 꼴로 나타내어진다.

	(가)	(나)
①	$A-aE$	$w-ka$
②	A	w
③	$A-dE$	w
④	A	$w-kd$
✓⑤	$A-dE$	$w-kd$

해 $\frac{x-w}{a-d}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$ … ㉠

㉠의 값을 k라 두면

$x-w=k(a-d)$, $y=kb$, $z=kc$

$\therefore X-wE=\begin{pmatrix} x-w & y \\ z & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k(a-d) & kb \\ kc & 0 \end{pmatrix}$

$=k\begin{pmatrix} a-d & b \\ c & 0 \end{pmatrix}=k(A-dE)$

$\therefore X=kA+(w-kd)E$

따라서 $X=mA+nE$ (m, n은 실수)의 꼴로 나타내어진다.

35

행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$에 대하여 $T(A)=a+d$로 정의한다.

예를 들면 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$라 할 때, $T(A)=1+4=5$이다.

이차정사각행렬 A, B에 대하여 [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, k는 상수)

| 보기 |

ㄱ. $T(kA)=kT(A)$

ㄴ. $T(A+B)=T(A)+T(B)$

ㄷ. $T(AB)=T(BA)$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ✓⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해 ㄷ. $AB=\begin{pmatrix} ax+bz & ay+bw \\ cx+dz & cy+dw \end{pmatrix}$,

$BA=\begin{pmatrix} ax+cy & bx+dy \\ az+cw & bz+dw \end{pmatrix}$이므로

$T(AB)=(ax+bz)+(cy+dw)$

$=(ax+cy)+(bz+dw)=T(BA)$ (참)

핵심유형 04 케일리-해밀턴의 정리

36

행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$가 $A^2+A-2E=O$를 만족시킬 때, [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

(단, O는 영행렬, E는 단위행렬)

| 보기 |

ㄱ. $A=kE$ (k는 실수)이면 $k=-2$ 또는 $k=1$이다.

ㄴ. $a+d=-1$이면 $ad-bc=-2$이다.

ㄷ. $a+d\neq -1$이면 행렬 A는 오직 하나 존재한다.

① ㄱ ✓② ㄱ, ㄴ ③ ㄴ, ㄷ

④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해 ㄷ. $a+d\neq -1$이면 ㉡에서

$A=\frac{ad-bc+2}{a+d+1}E$

즉, $A=kE$ (k는 실수)의 꼴이므로 ㄱ에 의해

$A=-2E$ 또는 $A=E$의 2개이다. (거짓)

20 DAY

37

행렬 $A=\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$에서 $A^2-2A-3E=O$를 만족시키는 실수 x, y에 대하여 좌표평면 위의 각 점 (x, y)를 연결하여 만들어진 도형의 넓이는?

(단, O는 영행렬, E는 단위행렬)

① 2 ② 4 ③ 6
✓④ 8 ⑤ 10

해 (i) $A=kE$이면
$A=3E$ 또는 $A=-E$이므로 대응하는 점은 $(3, 0)$, $(-1, 0)$
(ii) $A\neq kE$이면
$x=1$, $y=\pm 2$이므로 대응하는 점은 $(1, 2)$, $(1, -2)$
따라서 도형의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 4\times 4=8$

38

다음은 행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$가 $A^3=E$, $A\neq E$를 만족시키면 $a+d=-1$임을 증명하는 과정이다.

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$에서 케일리-해밀턴의 정리에 의해
$A^2=(a+d)A-(ad-bc)E$이므로
A^3
$=(a+d)A^2-(ad-bd)A$
$=\{(a+d)^2-(ad-bc)\}A-(a+d)(ad-bc)E$
이때, $A^3=E$이므로
$\{(a+d)^2-(ad-bc)\}A$ ← 1
$=\{(a+d)(ad-bc)+$ (가) $\}E$
(i) $(a+d)^2-(ad-bc)\neq 0$일 때
$a=d=\dfrac{(a+d)(ad-bc)+\boxed{\text{(가)}}}{(a+d)^2-(ad-bc)}$,
$b=c=$ (나) ← 0
$\therefore a=$ (다) ← 1
따라서 이는 가정에 모순이다.
(ii) $(a+d)^2-(ad-bc)=0$일 때
$(a+d)^3+$ (가) $=0$
$\therefore a+d=-1$

(가), (나), (다)에 들어갈 수를 각각 p, q, r라 할 때, $p+q+r$의 값은?

(단, O는 영행렬, E는 단위행렬이고, a, b, c, d는 실수)

① -1 ② 0 ③ 1
✓④ 2 ⑤ 3

해 $p=1$, $q=0$, $r=1$이므로 $p+q+r=2$

핵심유형 05 행렬의 거듭제곱

39

$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$에서 $A^n=\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$일 때, $|a_n+b_n+c_n+d_n-99|$의 값이 최소가 되게 하는 자연수 n의 값은?

① 5 ✓② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

해 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix} 2^n & 2^n-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$
$\therefore |a_n+b_n+c_n+d_n-99|=|2^n+(2^n-1)+0+1-99|$
$=|2^{n+1}-99|$
이때, $|2^6-99|=|64-99|=35$,
$|2^7-99|=|128-99|=29$이므로 $n+1=7$일 때 최소가 된다.
$\therefore n=6$

40

A가 이차정사각행렬일 때, [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, E는 이차단위행렬이다.)

| 보기 |
ㄱ. $A^3=A^5=E$이면 $A=E$이다.
ㄴ. $A^3=A^6=E$이면 $A=E$이다.
ㄷ. $A^m=A^n=E$를 만족시키는 서로소인 자연수 m, n이 존재하면 $A=E$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ✓③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해 ㄴ. 【반례】 $A=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$이면 $A^3=A^6=E$이지만
$A\neq E$이다. (거짓)
ㄷ. $m>n$이라 하자.
m, n이 서로소이면 $mp-nq=1$인 자연수 p, q가 존재한다.
$A^{mp}=(A^m)^p=E^p=E$이고
$A^{mp}=A^{nq+1}=A^{nq}A=(A^n)^qA=E^qA=A$이므로
$A=E$ (참)

41

두 행렬 $A=\begin{pmatrix} a & a-b \\ 0 & b \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b & b-a \\ 0 & a \end{pmatrix}$에 대하여 [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?
(단, E는 단위행렬이고, a, b는 상수이다.)

| 보기 |

ㄱ. $A^n+B^n=(a^n+b^n)E$
ㄴ. $A^nB^n=a^nb^nE$
ㄷ. $(AB)^n=A^nB^n$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ✓⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해 ㄴ. $A^nB^n=\begin{pmatrix} a^n & a^n-b^n \\ 0 & b^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b^n & b^n-a^n \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix} a^nb^n & 0 \\ 0 & a^nb^n \end{pmatrix}=a^nb^nE$ (참)

ㄷ. $AB=\begin{pmatrix} a & a-b \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & b-a \\ 0 & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ab & 0 \\ 0 & ab \end{pmatrix}=abE$
이므로 $(AB)^n=(abE)^n=a^nb^nE$
$\therefore (AB)^n=A^nB^n$ ($\because$ ㄴ) (참)

42

행렬 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$에 대하여 자연수 m, n은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $A^m=A^n$
(나) m, n은 20 이하의 서로 다른 자연수이다.

$|m-n|$의 최댓값을 p, 최솟값을 q라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오. 답 24

해 행렬 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$에서 케일리-해밀턴의 정리에 의해
$A^2-A+E=O$
양변에 $(A+E)$를 곱하면 $(A+E)(A^2-A+E)=O$ $A^3+E=O$,
$A^3=-E$이므로 $A^6=E$이다.
즉, $A^m=A^n$이 성립하려면 $|m-n|$의 값이 6의 배수가 되어야 한다.
따라서 $|m-n|$의 최댓값은 18, 최솟값은 6이다.
$\therefore p+q=18+6=24$

핵심유형 06 행렬의 곱셈의 활용

43

n이 양의 정수일 때, 정수 x_n, y_n은
$(1+\sqrt{3})^n=x_n+y_n\sqrt{3}$
을 만족시킨다. 행렬 A에 대하여
$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$
이 성립할 때, 행렬 A의 모든 성분의 합을 구하시오. 답 6

해 $x_{n+1}+y_{n+1}\sqrt{3}=(1+\sqrt{3})(x_n+y_n\sqrt{3})$
$=x_n+3y_n+(x_n+y_n)\sqrt{3}$
$\therefore \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_n+3y_n \\ x_n+y_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$
따라서 $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$이므로 $1+3+1+1=6$

44

교육청 기출

어느 제과회사에서는 표와 같이 구성된 '고소한 세트'와 '달콤한 세트'를 판매하고 있다. 각 세트에 들어가는 과자와 사탕의 한 봉 당 가격은 각각 500원, 800원이다. 이 회사에서 판매하는 '고소한 세트' 10개와 '달콤한 세트' 15개를 구입하려고 할 때, 필요한 금액을 나타내는 행렬은? (단, 가격할인이나 포장비용은 고려하지 않는다.)

	과자(봉)	사탕(봉)
고소한 세트	5	1
달콤한 세트	2	4

① $(500\ \ 800)\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix}$
② $(500\ \ 800)\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 15 \\ 10 \end{pmatrix}$
③ $(800\ \ 500)\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix}$
✓④ $(10\ \ 15)\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 500 \\ 800 \end{pmatrix}$
⑤ $(10\ \ 15)\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 800 \\ 500 \end{pmatrix}$

해 전체 금액은
$(10\times5+15\times2\quad 10\times1+15\times4)\begin{pmatrix} 500 \\ 800 \end{pmatrix}$
$=(10\ \ 15)\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 500 \\ 800 \end{pmatrix}$

20 DAY

45

두 개의 큰 물통 A, B에 물이 들어 있다. A에서 20 %의 물을 퍼내어 B에 넣은 다음 다시 B에서 20 %의 물을 퍼내어 A에 넣는 것을 1번의 시행이라 하자. 이러한 시행을 n번 한 후 A에 들어 있는 물의 양을 a_n, B에 들어 있는 물의 양을 b_n이라 하면

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}=\frac{1}{25}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

이 된다. 이때, 행렬 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$는?

✓① $\begin{pmatrix} 21 & 5 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} 21 & 5 \\ 4 & 21 \end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix} 22 & 4 \\ 3 & 21 \end{pmatrix}$

④ $\begin{pmatrix} 23 & 4 \\ 2 & 21 \end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix} 23 & 5 \\ 2 & 20 \end{pmatrix}$

해 $a_{n+1}=\frac{8}{10}a_n+\frac{2}{10}\left(\frac{2}{10}a_n+b_n\right)=\frac{84}{100}a_n+\frac{20}{100}b_n$

$b_{n+1}=\frac{8}{10}\left(\frac{2}{10}a_n+b_n\right)=\frac{16}{100}a_n+\frac{80}{100}b_n$

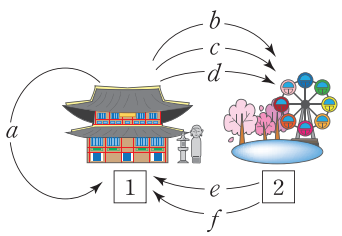
$\therefore \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}=\frac{1}{100}\begin{pmatrix} 84 & 20 \\ 16 & 80 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}=\frac{1}{25}\begin{pmatrix} 21 & 5 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$

46

어느 관광지에는 1, 2 두 지점 사이에 그림과 같이 a, b, c, d, e, f의 관광 코스가 있다. i지점에서 j지점까지 갈 수 있는 관광 코스의 수를 (i, j) 성분으로 하는 이차정사각행렬을 A라 하면 $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$이다.

i지점에서 출발하여 두 코스를 이어서 관광하고, j지점에서 관광을 마치는 방법의 수를 (i, j) 성분으로 하는 행렬은?

(단, 같은 코스를 두 번 관광하는 경우도 포함한다.)



① $2A$ ✓② A^2 ③ $A+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

④ $2A+\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ⑤ $A^2+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

해 $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}\times a_{11}+a_{12}\times a_{21} & a_{11}\times a_{12}+a_{12}\times a_{22} \\ a_{21}\times a_{11}+a_{22}\times a_{21} & a_{21}\times a_{12}+a_{22}\times a_{22} \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}=AA=A^2$

서술형

47

두 행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$에 대하여 $AB=BA$, $A^2=9B^2$이 성립할 때, $(a-b)^2$의 값을 구하시오. 답 9

(단, a, b, c, d는 실수이다.)

해 $A^2=9B^2$이므로 $\begin{pmatrix} a^2+b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2+b^2 \end{pmatrix}=9\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

$a^2+b^2=45$, $2ab=36$

$\therefore (a-b)^2=a^2+b^2-2ab=45-36=9$

48

이차정사각행렬 A에 대하여

$$A\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ A\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

이다. $A^{100}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$를 만족시키는 실수 x, y에 대하여 $\frac{2x+y}{2x-y}$의 값을 구하시오. 답 3

해 $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$A^2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=2A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=2^2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

⋮

$A^{100}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=2^{99}A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=2^{100}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2^{100} \\ 2^{100} \end{pmatrix}$

따라서 $x=y=2^{100}$이므로 $\frac{2x+y}{2x-y}=\frac{3x}{x}=3$

49

$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$일 때, A^{10}의 모든 성분의 합은 $m\times 5^n$이다. 이때, 자연수 m, n의 합 $m+n$의 값을 구하시오. 답 18

(단, m과 5는 서로소이다.)

해 $A^2-5A=O$, 즉 $A^2=5A$

$A^3=A^2\times A=5A^2=5^2A$

⋮

$A^{10}=A^9\times A=5^8A^2=5^9A=5^9\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$5^9(1+2+2+4)=9\times 5^9$ $\therefore m+n=9+9=18$

50

행렬 $A=\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$에 대하여 등식 $A^2+2A-3E=O$를 만족시키는 실수 x, y의 순서쌍 (x, y)의 개수는?

(단, O는 영행렬, E는 단위행렬)

① 1 ② 2 ③ 3

✓④ 4 ⑤ 5

해 (i) $A=kE$일 때,

$(x, y)=(-3, 0)$ 또는 $(x, y)=(1, 0)$

(ii) $A\neq kE$일 때,

$(x, y)=(-1, 2)$ 또는 $(x, y)=(-1, -2)$

(i), (ii)에서 순서쌍 (x, y)의 개수는 4이다.



FIRST CLASS

고난도 도전 문제

◀ 동영상 강의

51

두 이차정사각행렬 A, B와 단위행렬 E에 대하여

$$A^2=E,\ (AB)^2=E$$

일 때, $AB^{10}AB^{10}$과 같은 것은?

① AB ② BA ✓③ E
④ $2E$ ⑤ $10E$

해 $(AB)^2=E$에서 $ABAB=E$
양변의 왼쪽에 A를 곱하면 $A^2BAB=A$
$A^2=E$이므로 $BAB=A$ … ㉠
$AB^{10}AB^{10}=ABB\cdots BBABB\cdots BB$
$=ABB\cdots B(BAB)B\cdots BB$
$=ABB\cdots BAB\cdots BB$ ($\because$ ㉠)
$=ABB\cdots(BAB)\cdots BB$
⋮
$=A(BAB)$
$=AA=E$

52

행렬 $A=\begin{pmatrix}a-1 & 1\\ 2a & a+2\end{pmatrix}$에 대하여 등식 $AX=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$을 만족시키는 2×1 행렬 X가 존재하지 않도록 하는 실수 a의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1
✓④ 2 ⑤ 3

해 $\begin{pmatrix}a-1 & 1\\ 2a & a+2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$에서
$(a-1)x+y=1$, $2ax+(a+2)y=1$
이 연립방정식의 해가 존재하지 않아야 하므로
$\frac{a-1}{2a}=\frac{1}{a+2}\neq\frac{1}{1}$ … ㉠
이때, $a=-1$이면 $\frac{a-1}{2a}=\frac{1}{a+2}=1$이 되어 ㉠이 성립하지 않는다.
$a=2$이면 $\frac{a-1}{2a}=\frac{1}{a+2}=\frac{1}{4}\neq\frac{1}{1}$이 ㉠이 성립한다.
따라서 $a=2$이다.

53

두 이차정사각행렬 A, B가

$$A+aB=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix},\ A+B=2E,\ AB=O$$

를 만족시킬 때, 상수 a의 값은?
(단, O는 영행렬, E는 단위행렬)

① -1 ② $\frac{1}{2}$ ③ 2
✓④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

해 $AB=O$이므로
$A+B=2E$의 양변의 오른쪽에 B를 곱하면
$AB+B^2=2B$ $\therefore B^2=2B$ … ㉠
$A+B=2E$에서 $A=2E-B$이므로
$A+aB=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$에 대입하면 $B=\frac{1}{a-1}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$
㉠에 대입하면 $\frac{1}{(a-1)^2}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\frac{2}{a-1}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$
$\therefore a=\frac{5}{2}$

54

행렬 $A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$일 때, $A^{10}=mA+nE$를 만족시키는 실수 m, n에 대하여 $m+n$의 값은?
(단, E는 단위행렬이다.)

① 0 ✓② 1 ③ 9
④ 10 ⑤ 19

해 케일리-해밀턴의 정리에 의하여 $A^2-2A+E=0$이므로
$A^2-A=A-E$
이 식의 양변에 A를 곱하면 $A^3-A^2=A^2-A=A-E$
같은 방법으로
$A^2-A=A-E$
$A^3-A^2=A-E$
$A^4-A^3=A-E$
⋮
$A^{10}-A^9=A-E$
위 식을 변끼리 더하면 $A^{10}-A=9A-9E$
즉, $A^{10}=10A-9E$이므로 $m=10$, $n=-9$이다.
$\therefore m+n=1$

20 DAY

◇ 정답 및 해설 132~134p

55

행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$에 대하여 $A'=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$라 하자.

$AA'=E$일 때, $(ad-bc)^2$의 값은?

(단, E는 단위행렬이다.)

✓① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5

해 $AA'=E$에서

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$a^2+b^2=c^2+d^2=1$, $ac+bd=0$이다.

$\therefore (ad-bc)^2=a^2d^2+b^2c^2-2abcd$

$=(a^2+b^2)(c^2+d^2)-a^2c^2-b^2d^2-2abcd$

$=(a^2+b^2)(c^2+d^2)-(ac+bd)^2$

$=1\times1-0=1$

56

두 자연보호구역 P_1, P_2에서 두 종류의 동물 q_1, q_2의 서식 여부를 조사하여

q_i가 P_j구역에 살고 있으면 $a_{ij}=1$,

q_i가 P_j구역에 살고 있지 않으면 $a_{ij}=0$ $(i, j=1, 2)$

인 행렬 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$를 만들었다. $A^2=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$일 때, [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

| 보기 |

ㄱ. q_1은 P_1, P_2 중 어느 한 구역에서만 살고 있다.

ㄴ. P_1구역에는 q_1, q_2 중 어느 한 종류만 살고 있다.

ㄷ. P_2구역에는 q_1, q_2 모두 살고 있다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

✓④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해 $A^2=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2+bc \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

에서 $b(a+d)=2$가 되려면 $a=1$, $b=1$, $d=1$이어야 하고

$c(a+d)=0$이 되려면 $c=0$이어야 한다.

$\therefore A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

즉, P_1구역에는 q_1만 살고 있고, P_2구역에는 q_1, q_2 둘 다 살고 있다.

ㄱ. q_1은 P_1, P_2 두 구역에 모두 살고 있다. (거짓)

57

이차정사각행렬 A, B가

$AB+BA=E$, $A^2=B^2=O$

를 만족시킬 때, [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, O는 영행렬, E는 단위행렬)

| 보기 |

ㄱ. $(A+B)^2=E$

ㄴ. $(AB)^2=AB$

ㄷ. 임의의 이차정사각행렬 C에 대하여

$ABC=O$이면 $BC=O$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ✓⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해 ㄴ. $AB+BA=E$에서 $BA=E-AB$이므로

$(AB)^2=ABAB$

$=A(E-AB)B$

$=AB-A^2B^2$

$=AB-O=AB$ (참)

ㄷ. $ABC=O$의 양변의 왼쪽에 B를 곱하면

$BABC=O$

$(E-AB)BC=O$

$BC-AB^2C=O$

$B^2=O$이므로 $BC=O$ (참)

58

행렬 A, B가 $A+B=E$, $AB=O$를 만족시킬 때, [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

(단, O는 영행렬, E는 단위행렬)

| 보기 |

ㄱ. $A^2=A$이고 $B^2=B$이다.

ㄴ. $BA=O$이다.

ㄷ. 임의의 자연수 n에 대하여

$(A+2B)^n=A+2^nB$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ✓⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해 ㄷ. ㄱ에서 $A^2=A$, $B^2=B$이므로

$A^n=A^{n-1}=\cdots=A^2=A$

$B^n=B^{n-1}=\cdots=B^2=B$이고

ㄴ에서

$AB=BA=O$이므로

$(A+2B)^n=A^n+(2B)^n=A^n+2^nB^n=A+2^nB$ (참)

정답 및 해설 135p



memo



memo