올림포스 고난도

공통수학1

정답과 풀이

한눈에 보는 정답

01 다항식의 연산

내신 빈출 필수 문제 본문 8~9쪽

01 ④ 02 ③ 03 ② 04 ② 05 ①
06 ① 07 ⑤ 08 ⑤ 09 ② 10 198
11 몫: $x-1$, 나머지: $2x+2$

내신 고득점 도전 문제 본문 10~11쪽

12 ② 13 ② 14 ⑤ 15 ⑤ 16 ③
17 ④ 18 ⑤ 19 ⑤ 20 ③ 21 $3\sqrt{6}$
22 몫: $\frac{1}{2}(x+1)Q(x)+\frac{R}{2}$, 나머지: $\frac{3}{2}R$

변별력을 만드는 1등급 문제 본문 12~14쪽

23 127 24 ③ 25 ① 26 ⑤ 27 ⑤
28 ③ 29 ④ 30 ① 31 ① 32 ④
33 ④ 34 ① 35 ③ 36 ③ 37 ③

1등급을 넘어서는 상위 1% 본문 15쪽

38 594

02 나머지정리

내신 빈출 필수 문제 본문 18~19쪽

01 ④ 02 ② 03 ① 04 ③ 05 ③
06 ⑤ 07 ③ 08 ① 09 ④ 10 1
11 몫: $x^2-x-\frac{3}{2}$, 나머지: $-\frac{5}{2}$

내신 고득점 도전 문제 본문 20~21쪽

12 ② 13 ⑤ 14 127 15 ① 16 ⑤
17 ④ 18 ② 19 ③ 20 ② 21 $\frac{106}{5}$
22 $3x$

변별력을 만드는 1등급 문제 본문 22~24쪽

23 ④ 24 ① 25 ③ 26 ① 27 54
28 ② 29 ① 30 ④ 31 ⑤ 32 ④
33 ① 34 ③ 35 ② 36 ⑤ 37 ③

1등급을 넘어서는 상위 1% 본문 25쪽

38 9

03 인수분해

내신 빈출 필수 문제 본문 28~29쪽

01 ② 02 ③ 03 ① 04 ⑤
05 ④ 06 ④ 07 $(2z-y)(3x-z)(x-y)$
08 ③ 09 ② 10 98
11 $(x-2)(x+3)(x-1)$

내신 고득점 도전 문제 본문 30~31쪽

12 ④ 13 ④ 14 ④ 15 ② 16 ①
17 $\frac{1}{3}(x^2+3)(x^4+9x^2+21)$
18 $(b^2+c^2)(a^2+b^2)(a^2+c^2)$ 19 ②
20 ④ 21 $a=b$인 이등변삼각형 또는 빗변의 길이가 b인 직각삼각형
22 0.7161

변별력을 만드는 1등급 문제 본문 32~34쪽

23 ④ 24 ② 25 ③ 26 ① 27 ②
28 ② 29 ④ 30 $3(x+y)(z+x)(z+y)$ 31 ①
32 ④ 33 ⑤ 34 ① 35 12 36 2
37 ⑤

1등급을 넘어서는 상위 1% 본문 35쪽

38 2

04 복소수와 이차방정식

내신 빈출 필수 문제 본문 38~41쪽

01 ② 02 ⑤ 03 ③ 04 ① 05 ④
06 ② 07 ③ 08 ① 09 ⑤ 10 ④
11 ⑤ 12 28 cm 13 ② 14 ① 15 ②
16 ⑤ 17 ③ 18 ② 19 ④ 20 ③
21 ① 22 6 23 -22

내신 고득점 도전 문제 본문 42~45쪽

24 ① 25 ③ 26 ④ 27 17 28 ②
29 ⑤ 30 ① 31 ④ 32 5 33 ①
34 ① 35 ③ 36 ④ 37 ① 38 ④
39 4 40 ② 41 ③ 42 ④ 43 ②
44 ⑤ 45 72 46 $x^2-8x+15=0$

변별력을 만드는 1등급 문제 본문 46~48쪽

47 ① 48 ④ 49 ④ 50 ④ 51 ③
52 ⑤ 53 ④ 54 ② 55 ④ 56 ①
57 ⑤ 58 ③

1등급을 넘어서는 상위 1% 본문 49쪽

59 ①

05 이차방정식과 이차함수

내신 빈출 필수 문제 본문 52~55쪽

01 ①	02 ④	03 ①	04 ③	05 ②
06 ④	07 ③	08 ④	09 ⑤	10 ③
11 ④	12 ⑤	13 40	14 ②	15 ②
16 ①	17 ②	18 8	19 ⑤	20 ③
21 ③	22 2	23 8		

내신 고득점 도전 문제 본문 56~59쪽

24 ③	25 ②	26 ④	27 ①	28 ⑤
29 ③	30 ④	31 ②	32 ①	33 ④
34 ⑤	35 ④	36 ②	37 -5	38 ③
39 ②	40 ①	41 ④	42 ③	43 ②
44 ③	45 3	46 9		

변별력을 만드는 1등급 문제 본문 60~62쪽

47 ①	48 ④	49 15	50 ①	51 ③
52 ②	53 ②	54 ③	55 ④	56 ⑤
57 ④	58 ②			

1등급을 넘어서는 상위 1% 본문 63쪽

59 ③

06 여러 가지 방정식과 부등식

내신 빈출 필수 문제 본문 66~69쪽

01 ④	02 ②	03 ③	04 ⑤	05 ①
06 ⑤	07 ②	08 ④	09 ④	10 ③
11 ⑤	12 ④	13 ③	14 ④	15 ①
16 ⑤	17 ④	18 ②	19 ②	20 ④
21 ①	22 -8	23 10		

내신 고득점 도전 문제 본문 70~73쪽

24 ②	25 ①	26 ①	27 ②	28 ③
29 ⑤	30 ②	31 ⑤	32 2	33 ④
34 $a>3$	35 ②	36 ④	37 ④	38 ④
39 ④	40 ①	41 ③	42 ②	43 ⑤
44 ③	45 7	46 $2<k\le 4$		

변별력을 만드는 1등급 문제 본문 74~76쪽

47 ③	48 ④	49 ①	50 ①	51 ④
52 ②	53 ③	54 ⑤	55 ④	56 ②
57 ⑤	58 ③			

1등급을 넘어서는 상위 1% 본문 77쪽

59 16

07 경우의 수

내신 빈출 필수 문제 본문 80~83쪽

01 ③	02 ②	03 ④	04 12	05 4
06 27	07 5	08 24	09 ②	10 144
11 120	12 ⑤	13 144	14 480	15 140
16 4	17 180	18 360	19 45	20 ⑤
21 ①	22 20	23 56		

내신 고득점 도전 문제 본문 84~87쪽

24 7	25 ④	26 110	27 324	28 400
29 106	30 540	31 67	32 144	33 300
34 ⑤	35 480	36 720	37 36	38 ①
39 6	40 13	41 300	42 40	43 ①
44 48	45 100			

변별력을 만드는 1등급 문제 본문 88~90쪽

46 4	47 5	48 44	49 20	50 ③
51 7	52 8	53 84	54 24	55 184
56 624	57 ②	58 10	59 115	60 168

1등급을 넘어서는 상위 1% 본문 91쪽

61 184

08 행렬과 그 연산

내신 빈출 필수 문제 본문 94~95쪽

01 ④	02 100	03 ⑤	04 ⑤	05 ①
06 ⑤	07 5	08 ②	09 ④	
10 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$	11 19			

내신 고득점 도전 문제 본문 96~97쪽

12 ⑤	13 2	14 ③	15 17	16 ⑤
17 4	18 10	19 5	20 7	21 ②
22 ②	23 17	24 2		

변별력을 만드는 1등급 문제 본문 98~100쪽

25 19	26 ②	27 ⑤	28 50	29 4
30 11	31 28	32 30	33 8	34 10
35 4	36 16	37 ③	38 56	39 ⑤

1등급을 넘어서는 상위 1% 본문 101쪽

40 16

01 다항식의 연산

내신 빈출 필수 문제

본문 8~9쪽

01 ④	02 ③	03 ②	04 ②	05 ①
06 ①	07 ⑤	08 ⑤	09 ②	10 198
11 몫: $x-1$, 나머지: $2x+2$				

01 $(A+2B)-3(B-A)$
$=4A-B$
$=4(x^2-2xy+3y^2)-(x^2+xy-y^2)$
$=3x^2-9xy+13y^2$

답 ④

02 $X-2A=B$에서
$X=2A+B$
$=2(x^2-2x-2)+(2x^2+3x-1)$
$=4x^2-x-5$

답 ③

03 $A+B=3x^2-2x+1$ …… ㉠
$A-B=x^2+4x+3$ …… ㉡
㉠+㉡을 하면
$2A=4x^2+2x+4$
즉, $A=2x^2+x+2$
㉠에서
$B=(3x^2-2x+1)-A$
$=(3x^2-2x+1)-(2x^2+x+2)$
$=x^2-3x-1$
이므로
$2A+B=2(2x^2+x+2)+(x^2-3x-1)$
$=5x^2-x+3$
따라서 다항식 $2A+B$의 계산에서 상수항을 포함하는 모든 항의 계수의 합은
$5+(-1)+3=7$

답 ②

04 $(x+a)(3x^2+2x+1)$
$=x(3x^2+2x+1)+a(3x^2+2x+1)$
$=(3x^3+2x^2+x)+(3ax^2+2ax+a)$
$=3x^3+(3a+2)x^2+(2a+1)x+a$
이때 x^2의 계수가 11이므로
$3a+2=11$, $3a=9$, $a=3$
따라서 x의 계수는
$2a+1=2\times3+1=7$

답 ②

05 $(x^2-x-a)(x^2-x-b)$
$=(x^2-x)^2-(a+b)(x^2-x)+ab$
$=(x^4-2x^3+x^2)-4(x^2-x)+1$
$=x^4-2x^3-3x^2+4x+1$

답 ①

06 $(2x-ay)^3$
$=(2x)^3-3(2x)^2\times ay+3\times2x\times(ay)^2-(ay)^3$
$=8x^3-12ax^2y+6a^2xy^2-a^3y^3$
이때 xy^2의 계수가 54이므로
$6a^2=54$, $a^2=9$
그런데 $a>0$이므로
$a=3$
따라서 x^2y의 계수는
$-12a=-12\times3=-36$

답 ①

07 $(x-y-2z)^2$
$=x^2+(-y)^2+(-2z)^2+2x(-y)+2(-y)(-2z)+2(-2z)x$
$=x^2+y^2+4z^2-2xy+4yz-4zx$
$=x^2+y^2+4z^2-2(xy-2yz+2zx)$
$=41-2\times(-7)=55$

답 ⑤

08 $x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$
$=2^3+3xy\times2$
$=8+6xy=12$
에서 $6xy=4$, $xy=\dfrac{2}{3}$
따라서 $x^2+y^2=(x-y)^2+2xy$
$=2^2+2\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{16}{3}$

답 ⑤

09 다항식 x^3+2x^2-2x+2를 다항식 x^2+x+1로 나누면 다음과 같다.

$$
\begin{array}{r|l}
 & x+1 \\
\hline
x^2+x+1 & x^3+2x^2-2x+2 \\
 & x^3+\ \ x^2+\ \ x \\
\hline
 & \qquad x^2-3x+2 \\
 & \qquad x^2+\ \ x+1 \\
\hline
 & \qquad\quad -4x+1
\end{array}
$$

이때 나머지가 $ax+1$이므로
$ax+1=-4x+1$에서 $a=-4$

답 ②

10 $a=3+2\sqrt{2}$, $b=3-2\sqrt{2}$이므로
$a+b=(3+2\sqrt{2})+(3-2\sqrt{2})=6$
…… ❶
$ab=(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})=9-8=1$
…… ❷
따라서 $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$
$=6^3-3\times1\times6$
$=216-18=198$
…… ❸

답 198

단계	채점 기준	비율
❶	$a+b$의 값을 구한 경우	20 %
❷	ab의 값을 구한 경우	20 %
❸	a^3+b^3의 값을 구한 경우	60 %

11 다항식 $f(x)$를 x^2-x+1로 나누었을 때의 몫이 $x+1$, 나머지가 2이므로

$$f(x)=(x^2-x+1)(x+1)+2$$
$$=(x+1)(x^2-x+1)+2$$
$$=(x^3+1)+2$$
$$=x^3+3$$

.... ❶

다항식 $f(x)$를 x^2+x-1로 나누면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|l} & x\ -1 \\ x^2+x-1 & x^3 \qquad\quad +3 \\ & x^3+x^2-\ x \\ \hline & \quad -x^2+\ x+3 \\ & \quad -x^2-\ x+1 \\ \hline & \qquad\quad 2x+2 \end{array}$$

따라서 몫은 $x-1$, 나머지는 $2x+2$이다.

.... ❷

답 몫: $x-1$, 나머지: $2x+2$

단계	채점 기준	비율
❶	$f(x)$를 구한 경우	50 %
❷	몫과 나머지를 각각 구한 경우	50 %

내신 고득점 도전 문제

본문 10~11쪽

12 ② **13** ② **14** ⑤ **15** ⑤ **16** ③
17 ④ **18** ⑤ **19** ⑤ **20** ③ **21** $3\sqrt{6}$
22 몫: $\frac{1}{2}(x+1)Q(x)+\frac{R}{2}$, 나머지: $\frac{3}{2}R$

12 $A+2(A-C)-2(B-A)$
$=A+2A-2C-2B+2A$
$=5A-2B-2C$
$=5(x^3+2x^2+ax+1)-2(2x^3-x^2+x-2)-2(-ax^2+3x+3)$
$=x^3+(2a+12)x^2+(5a-8)x+3$
이때 x의 계수가 2이므로
$5a-8=2$, $a=2$
따라서 x^2의 계수는
$2a+12=2\times2+12=16$

답 ②

13 $[A,\ A+B]$
$=3A-2(A+B)$
$=A-2B$
$=(x^2+x-1)-2(2x^2-3x+2)$
$=-3x^2+7x-5$
따라서 상수항을 포함하는 모든 항의 계수의 합은
$-3+7-5=-1$

답 ②

14 $(10x^{10}-9x^9+8x^8-\cdots+2x^2-x+1)^2$
$=(10x^{10}-9x^9+8x^8-\cdots+2x^2-x+1)\times$
$(10x^{10}-9x^9+8x^8-\cdots+2x^2-x+1)$
의 전개식에서 삼차항은
$-3x^3\times1+2x^2\times(-x)+(-x)\times2x^2+1\times(-3x^3)$
$=-3x^3-2x^3-2x^3-3x^3$
$=-10x^3$
따라서 x^3의 계수는 -10이다.

답 ⑤

15 $(x^2-y^2)(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)$
$=(x-y)(x+y)(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)$
$=\{(x-y)(x^2+xy+y^2)\}\{(x+y)(x^2-xy+y^2)\}$
$=(x^3-y^3)(x^3+y^3)$
$=(30-20)\times(30+20)$
$=10\times50=500$

답 ⑤

16 $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2=4$ ...... ㉠
$4(c^2+bc-ac)=5$에서
$4c^2+4bc-4ac=5$ ...... ㉡
㉠+㉡에서
$(a^2-2ab+b^2)+(4c^2+4bc-4ac)=9$
$a^2+b^2+4c^2-2ab+4bc-4ac=9$
따라서
$(a-b-2c)^2=a^2+(-b)^2+(-2c)^2-2ab+4bc-4ac$
$=a^2+b^2+4c^2-2ab+4bc-4ac$
$=9$

답 ③

17 $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$
$=(ab+bc+ca)^2-2(ab)(bc)-2(bc)(ca)-2(ca)(ab)$
$=(ab+bc+ca)^2-2ab^2c-2abc^2-2a^2bc$
$=(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)$
$=1^2-2\times(-6)\times4=49$

답 ④

18 $a=\sqrt{21}+1$, $b=\sqrt{21}-1$이라 하면
$a-b=(\sqrt{21}+1)-(\sqrt{21}-1)=2$
$ab=(\sqrt{21}+1)(\sqrt{21}-1)=21-1=20$
이므로
$(\sqrt{21}+1)^3-(\sqrt{21}-1)^3$
$=a^3-b^3$
$=(a-b)^3+3ab(a-b)$
$=2^3+3\times20\times2$
$=8+120=128$

답 ⑤

19 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$에서
$6=(x+y)^2-2\times(-1)$
즉, $(x+y)^2=4$
이때 $x+y>0$이므로
$x+y=2$
$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$
$=2^3-3\times(-1)\times2=14$

따라서

x^5+y^5

$=(x^2+y^2)(x^3+y^3)-x^2y^3-y^2x^3$

$=(x^2+y^2)(x^3+y^3)-x^2y^2(x+y)$

$=6\times14-(-1)^2\times2=82$

답 ⑤

20 다항식 x^3+x+4를 x^2+x-1로 나누면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|l} & x\ -1 \\ \hline x^2+x-1 & x^3 \qquad +\ x+4 \\ & x^3+x^2-\ x \\ \hline & \quad -x^2+2x+4 \\ & \quad -x^2-\ x+1 \\ \hline & \qquad\quad 3x+3 \end{array}$$

즉, $x^3+x+4=(x^2+x-1)(x-1)+3x+3$

$x^2+x-1=0$에서 $x>0$이므로

$x=\dfrac{-1+\sqrt{1^2-4\times1\times(-1)}}{2}$

$\ =\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

따라서 x^3+x+4의 값은

$3x+3=3\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)+3=\dfrac{3+3\sqrt{5}}{2}$

답 ③

21 $a^2=2-\sqrt{3}$, $b^2=2+\sqrt{3}$이므로

$a^2+b^2=4$

$a^2b^2=(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=1$

.... ❶

이때 $a>0$, $b>0$이므로

$ab=1$

.... ❷

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

$\qquad=(a+b)^2-2=4$

에서 $(a+b)^2=6$

그런데 $a+b>0$이므로 $a+b=\sqrt{6}$

.... ❸

따라서 $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

$\qquad\qquad=(\sqrt{6})^3-3\times1\times\sqrt{6}=3\sqrt{6}$

.... ❹

답 $3\sqrt{6}$

단계	채점 기준	비율
❶	a^2+b^2, a^2b^2의 값을 각각 구한 경우	25 %
❷	ab의 값을 구한 경우	10 %
❸	$a+b$의 값을 구한 경우	35 %
❹	a^3+b^3의 값을 구한 경우	30 %

22 다항식 $f(x)$를 $x-\dfrac{1}{2}$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 R이므로

$f(x)=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)Q(x)+R$

.... ❶

위 식의 양변에 각각 $x+1$을 곱하면

$(x+1)f(x)$

$=(x+1)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)Q(x)+R(x+1)$

$=\dfrac{1}{2}(x+1)(2x-1)Q(x)+R\left\{\dfrac{1}{2}(2x-1)+\dfrac{3}{2}\right\}$

$=\dfrac{1}{2}(x+1)(2x-1)Q(x)+\dfrac{R}{2}(2x-1)+\dfrac{3}{2}R$

$=(2x-1)\left\{\dfrac{1}{2}(x+1)Q(x)+\dfrac{R}{2}\right\}+\dfrac{3}{2}R$

.... ❷

따라서 몫은 $\dfrac{1}{2}(x+1)Q(x)+\dfrac{R}{2}$, 나머지는 $\dfrac{3}{2}R$이다.

.... ❸

답 몫: $\dfrac{1}{2}(x+1)Q(x)+\dfrac{R}{2}$, 나머지: $\dfrac{3}{2}R$

단계	채점 기준	비율
❶	다항식 $f(x)$를 구한 경우	30 %
❷	다항식 $(x+1)f(x)$를 구한 경우	50 %
❸	다항식 $(x+1)f(x)$를 $2x-1$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 각각 구한 경우	20 %

변별력을 만드는 1등급 문제

본문 12~14쪽

23 127	**24** ③	**25** ①	**26** ⑤	**27** ⑤
28 ③	**29** ④	**30** ①	**31** ①	**32** ④
33 ④	**34** ①	**35** ③	**36** ③	**37** ③

23

$x^7+y^7=(x^3+y^3)(x^4+y^4)-x^3y^3(x+y)$

$x+y=1$, $x^3+y^3=7$일 때, x^7+y^7의 값을 구하시오. 127

Step 1 곱셈 공식의 변형을 이용하여 xy의 값 구하기

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

$\qquad=1^3-3xy\times1$

$\qquad=1-3xy=7$

에서 $xy=-2$

Step 2 곱셈 공식의 변형을 이용하여 x^2+y^2의 값 구하기

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

$\qquad=1^2-2\times(-2)=5$

Step 3 곱셈 공식의 변형을 이용하여 x^4+y^4의 값 구하기

$x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2$

$\qquad=5^2-2\times(-2)^2=17$

Step 4 다항식의 연산을 이용하여 x^7+y^7의 값 구하기

$x^7+y^7=(x^3+y^3)(x^4+y^4)-x^3y^4-y^3x^4$

$\qquad=(x^3+y^3)(x^4+y^4)-x^3y^3(x+y)$

$\qquad=7\times17-(-2)^3\times1=127$

답 127

24 $(\alpha+2)(\alpha^2-2\alpha+4)=\alpha^3+8$

$\alpha^2-2\alpha+4=0$, $\beta^2-2\beta+4=0$일 때, $\alpha^8+\beta^8-128\alpha-128\beta$의 값은?

① -504　② -508　✓③ -512
④ -516　⑤ -520

Step 1 곱셈 공식을 이용하여 α^3, β^3의 값 각각 구하기

$\alpha^2-2\alpha+4=0$에서 $(\alpha+2)(\alpha^2-2\alpha+4)=0$

$\alpha^3+8=0$, $\alpha^3=-8$

같은 방법으로 $\beta^3=-8$

Step 2 다항식의 연산을 이용하여 식의 값 구하기

$\alpha^8+\beta^8-128\alpha-128\beta$

$=(\alpha^3)^2\times\alpha^2+(\beta^3)^2\times\beta^2-128\alpha-128\beta$

$=64\alpha^2+64\beta^2-128\alpha-128\beta$

$=64(\alpha^2-2\alpha)+64(\beta^2-2\beta)$

$=64\times(-4)+64\times(-4)$

$=-256-256=-512$

답 ③

25 $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

$a+b=4$, $ab=5$, $c+d=-4$, $cd=5$일 때, $a^3b^3+a^3c^3+a^3d^3+b^3c^3+b^3d^3+c^3d^3$의 값은?

✓① 234　② 238　③ 242
④ 246　⑤ 250

Step 1 곱셈 공식의 변형을 이용하여 a^3+b^3, c^3+d^3의 값 각각 구하기

$a+b=4$, $ab=5$에서

$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=4^3-3\times5\times4=4$

$c+d=-4$, $cd=5$에서

$c^3+d^3=(c+d)^3-3cd(c+d)=(-4)^3-3\times5\times(-4)=-4$

Step 2 다항식의 연산을 이용하여 식의 값 구하기

$a^3b^3+a^3c^3+a^3d^3+b^3c^3+b^3d^3+c^3d^3$

$=(ab)^3+(cd)^3+a^3c^3+a^3d^3+b^3c^3+b^3d^3$

$=(ab)^3+(cd)^3+(a^3+b^3)(c^3+d^3)$

$=5^3+5^3+4\times(-4)=234$

답 ①

26

다음 조건을 만족시키는 a, b, c에 대하여 다음 중 abc의 값을 p, q로 나타낸 것은?

(가) $a+b+c=p$
(나) $ab+bc+ca=q$
(다) $a^2-2a+abc=b^2-2b+abc=c^2-2c+abc=0$

$a^2+b^2+c^2$
$=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

① $-\frac{2}{3}p^2-p+\frac{2}{3}q$　② $-\frac{2}{3}p^2-\frac{2}{3}p+\frac{1}{3}q$

③ $-\frac{1}{3}p^2-\frac{4}{3}p+\frac{4}{3}q$　④ $-\frac{1}{3}p^2+p+q$

✓⑤ $-\frac{1}{3}p^2+\frac{2}{3}p+\frac{2}{3}q$

Step 1 두 조건 (가), (나)를 이용하여 $a^2+b^2+c^2$의 값 구하기

두 조건 (가), (나)에 의하여

$a^2+b^2+c^2$

$=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

$=p^2-2q$

Step 2 조건 (다)를 이용하여 abc의 값 구하기

조건 (다)에서

$a^2-2a=b^2-2b=c^2-2c=-abc$

이므로

$(a^2+b^2+c^2)-2(a+b+c)=-3abc$

$(p^2-2q)-2p=-3abc$

따라서 $abc=-\frac{1}{3}p^2+\frac{2}{3}p+\frac{2}{3}q$

답 ⑤

27 $ab+bc+ca=\frac{1}{2}\{(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)\}$

$a+b+c=2$, $a^2+b^2+c^2=5$이고 $ab+bc+ca=2abc$일 때, $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$의 값은?

① $\frac{1}{4}$　② $\frac{1}{2}$　③ $\frac{3}{4}$
④ 1　✓⑤ $\frac{5}{4}$

Step 1 곱셈 공식의 변형을 이용하여 $ab+bc+ca$의 값 구하기

$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$에서

$5=2^2-2(ab+bc+ca)$

이므로

$ab+bc+ca=-\frac{1}{2}$

Step 2 abc의 값 구하기

이때 $ab+bc+ca=2abc$이므로

$abc=\frac{1}{2}(ab+bc+ca)=-\frac{1}{4}$

Step 3 곱셈 공식의 변형을 이용하여 식의 값 구하기

따라서

$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$

$=(ab+bc+ca)^2-2(ab^2c+bc^2a+ca^2b)$

$=(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)$

$=\left(-\frac{1}{2}\right)^2-2\times\left(-\frac{1}{4}\right)\times2$

$=\frac{1}{4}+1=\frac{5}{4}$

답 ⑤

28 $a^3+b^3+c^3-3abc=(a^3+b^3)+c^3-3abc$
$=(a+b)^3-3ab(a+b)+c^3-3abc$

$p=a+b+c$, $q=ab+bc+ca$라 할 때, 다음 중 $a^3+b^3+c^3-3abc$를 p, q로 나타낸 것은?

① p^3-pq　② p^3-2pq　✓③ p^3-3pq
④ p^3-4pq　⑤ p^3-5pq

Step 1 주어진 식을 곱셈 공식의 변형을 이용할 수 있도록 나타내기

$a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a^3+b^3)+c^3-3abc$

$=(a+b)^3-3ab(a+b)+c^3-3abc$

Step 2 곱셈 공식의 변형을 이용하여 p, q로 나타내기

$(a+b)^3-3ab(a+b)+c^3-3abc$

$=\{(a+b)^3+c^3\}-3ab(a+b+c)$

$=\{(a+b+c)^3-3(a+b)c(a+b+c)\}-3ab(a+b+c)$

$=(a+b+c)^3-3(a+b+c)\{(a+b)c+ab\}$

$=(a+b+c)^3-3(a+b+c)(ab+bc+ca)$

$=p^3-3pq$

답 ③

29

넓이가 36인 삼각형 ABC의 세 변의 길이 a, b, c가 다음 조건을 만족시킬 때, 삼각형 ABC의 가장 긴 변의 길이는?

(가) $(a+2b)^3-(a-2b)^3=4b(b^2+3c^2)$
(나) $(a^2-b^2)(b^2-c^2)=0$

$(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$
$(x-y)^3=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

Step 1 조건 (가)를 이용하여 a, b, c에 대한 관계식을 구하여 삼각형 ABC의 모양 파악하기

조건 (가)에서

$(a+2b)^3-(a-2b)^3$

$=(a^3+6a^2b+12ab^2+8b^3)-(a^3-6a^2b+12ab^2-8b^3)$

$=12a^2b+16b^3$

이므로

$12a^2b+16b^3=4b(b^2+3c^2)$

$3a^2+4b^2=b^2+3c^2$

즉, $a^2+b^2=c^2$

따라서 삼각형 ABC는 빗변의 길이가 c인 직각삼각형이다.

Step 2 조건 (나)를 이용하여 삼각형 ABC의 모양으로부터 변 사이의 식 구하기

조건 (나)에서

$a^2-b^2=0$ 또는 $b^2-c^2=0$

즉, $a=b$ 또는 $b=c$

그런데 삼각형 ABC는 빗변의 길이가 c인 직각삼각형이므로

$a=b$

Step 3 삼각형 ABC의 가장 긴 변의 길이 구하기

삼각형 ABC의 넓이가 36이므로

$\frac{1}{2}\times a\times b=\frac{1}{2}a^2=36$

$a^2=72$

이때 삼각형 ABC에서 가장 긴 변은 c이므로

$c^2=a^2+b^2$

$\quad=2a^2$

$\quad=2\times72$

$\quad=144$

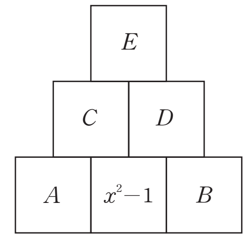
그런데 $c>0$이므로 $c=12$

따라서 삼각형 ABC의 가장 긴 변의 길이는 12이다.

답 ④

30

그림과 같이 6개의 다항식 A, B, C, D, E, x^2-1을 6개의 사각형에 각각 하나씩 배열한 후 이웃한 두 사각형에 배열된 두 다항식의 합이 이웃한 위쪽의 사각형에 배열되도록 한다. 예를 들어 $A+(x^2-1)=C$이다. 6개의 사각형에 배열된 모든 다항식의 합이 $11x^2+6x-2$일 때, 다항식 $A+B$의 상수항이 아닌 모든 항의 계수의 합은?



① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

$A+(x^2-1)+B+C+D+E$
$=11x^2+6x-2$

Step 1 다항식 C, D, E를 차례대로 구하기

$C=A+(x^2-1)$, $D=(x^2-1)+B$

$E=C+D=A+(x^2-1)+(x^2-1)+B$

$\quad=A+B+2(x^2-1)$

Step 2 6개의 사각형에 배열된 다항식의 합 구하기

6개의 사각형에 배열된 다항식의 합은

$A+(x^2-1)+B+C+D+E$

$=A+(x^2-1)+B+C+D+(C+D)$

$=A+(x^2-1)+B+2(C+D)$

$=A+B+(x^2-1)+2\{A+B+2(x^2-1)\}$

$=3A+3B+5(x^2-1)$

Step 3 다항식 $A+B$의 상수항이 아닌 모든 항의 계수의 합 구하기

6개의 사각형에 배열된 다항식의 합이 $11x^2+6x-2$이므로

$3A+3B+5(x^2-1)=11x^2+6x-2$

$3A+3B=6x^2+6x+3$, $A+B=2x^2+2x+1$

따라서 다항식 $A+B$의 상수항이 아닌 모든 항의 계수의 합은

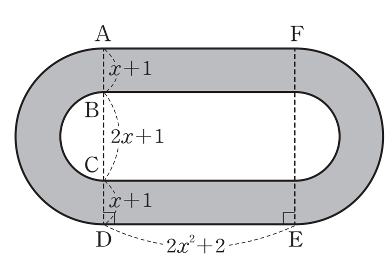
$2+2=4$

답 ①

31

반지름의 길이가 r인 원의 넓이는 πr^2이다.

그림과 같이 곡선 부분이 반원의 호로 이루어진 트랙 모양에서 $\overline{AB}=\overline{CD}=x+1$, $\overline{BC}=2x+1$, $\overline{DE}=2x^2+2$이고 $\overline{AD}$와 $\overline{DE}$는 서로 수직이고, $\overline{FE}$와 $\overline{DE}$도 서로 수직이다. 색칠한 부분의 넓이가 $f(x)+g(x)\pi$일 때, $f(x)-g(x)$는? (단, $f(x)$는 삼차식, $g(x)$는 이차식이고, 상수항을 포함하는 모든 계수는 유리수이다.)



① $4x^3+x^2-x+2$ ② $4x^3+5x^2+5x+2$
③ $4x^3+5x^2-5x+4$ ④ $4x^3+7x^2+9x+6$
⑤ $4x^3+7x^2-9x+8$

Step 1 직선 구간의 넓이 구하기

색칠된 부분 중 직선 구간의 넓이는

$$2(x+1)(2x^2+2)=2x(2x^2+2)+2(2x^2+2)$$
$$=4x^3+4x^2+4x+4$$

Step 2 곡선 구간의 넓이 구하기

색칠된 부분 중 곡선 구간의 넓이는

$$\pi\left\{\frac{(x+1)+(2x+1)+(x+1)}{2}\right\}^2-\pi\left(\frac{2x+1}{2}\right)^2$$
$$=\pi\left(2x+\frac{3}{2}\right)^2-\pi\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$$
$$=\pi\left(4x^2+6x+\frac{9}{4}\right)-\pi\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)$$
$$=\pi(3x^2+5x+2)$$

Step 3 색칠한 부분의 넓이를 구한 후 $f(x)-g(x)$ 구하기

색칠한 부분의 넓이는 직선 구간의 넓이와 곡선 구간의 넓이의 합이므로

$4x^3+4x^2+4x+4+\pi(3x^2+5x+2)$

이때 색칠한 부분의 넓이가 $f(x)+g(x)\pi$이므로

$f(x)=4x^3+4x^2+4x+4$

$g(x)=3x^2+5x+2$

따라서

$f(x)-g(x)$

$=(4x^3+4x^2+4x+4)-(3x^2+5x+2)$

$=4x^3+x^2-x+2$

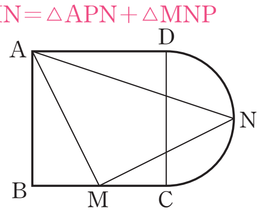
답 ①

32

그림과 같이 한 변의 길이가 $4x+2$인 정사각형 ABCD와 선분 CD를 지름으로 하는 반원이 붙어 있다. 선분 BC의 중점을 M, 반원의 호의 한 점을 N이라 할 때, 삼각형 AMN의 넓이를 $S(x)$라 하자. 다항식 $S(x)$의 최고차항의 계수와 상수항의 합은? (단, $\overset{\frown}{\mathrm{CN}}=\overset{\frown}{\mathrm{DN}}$)

선분 AM의 중점을 P라 하면

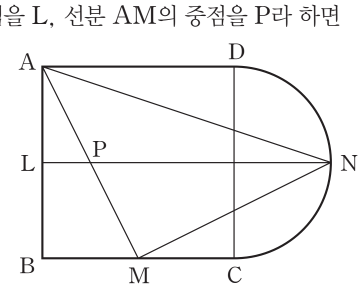
$\triangle\mathrm{AMN}=\triangle\mathrm{APN}+\triangle\mathrm{MNP}$



① 11 ② $\frac{23}{2}$ ③ 12 ✓④ $\frac{25}{2}$ ⑤ 13

Step 1 선분 PN의 길이 구하기

선분 AB의 중점을 L, 선분 AM의 중점을 P라 하면



$\overline{\mathrm{LN}}=4x+2+\frac{1}{2}(4x+2)=6x+3$

$\overline{\mathrm{LP}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{BM}}$

$=\frac{1}{2}(2x+1)=x+\frac{1}{2}$

$\overline{\mathrm{PN}}=\overline{\mathrm{LN}}-\overline{\mathrm{LP}}$

$=(6x+3)-\left(x+\frac{1}{2}\right)=5x+\frac{5}{2}$

Step 2 $S(x)$ 구하기

삼각형 AMN의 넓이 $S(x)$는

$S(x)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PN}}\times\overline{\mathrm{AL}}+\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PN}}\times\overline{\mathrm{LB}}$

$=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PN}}\times\overline{\mathrm{AL}}+\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PN}}\times\overline{\mathrm{AL}}$

$=\overline{\mathrm{PN}}\times\overline{\mathrm{AL}}$

$=\left(5x+\frac{5}{2}\right)(2x+1)$

$=10x^2+5x+5x+\frac{5}{2}=10x^2+10x+\frac{5}{2}$

따라서 다항식 $S(x)$의 최고차항의 계수와 상수항의 합은

$10+\frac{5}{2}=\frac{25}{2}$

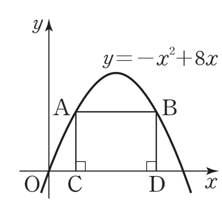
답 ④

33

그림과 같이 이차함수 $y=-x^2+8x$의 그래프 위의 제1사분면에 있는 두 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하자. $\overline{\mathrm{CD}}=t+3$일 때, 네 점 A, B, C, D를 꼭짓점으로 하는 직사각형 ACDB의 넓이를 $f(t)$라 하자. 다항식 $f(t)$의 차수가 홀수인 모든 항의 계수의 합은? (단, $0<t<1$)

$y=-(x-4)^2+16$

두 점 C, D는 대칭축에 대하여 대칭이다.



① 6 ② 7 ③ 8 ✓④ 9 ⑤ 10

Step 1 대칭축 구하기

$y=-x^2+8x=-(x-4)^2+16$

이므로 이차함수 $y=-x^2+8x$의 그래프의 대칭축은 $x=4$이다.

Step 2 점 C의 x좌표와 점 A의 y좌표 구하기

이때 $\overline{\mathrm{CD}}=t+3$이므로 점 C의 x좌표는

$4-\frac{t+3}{2}=\frac{-t+5}{2}$

따라서 점 A의 y좌표는

$-\left(\frac{-t+5}{2}\right)^2+8\left(\frac{-t+5}{2}\right)$

$=-\frac{t^2-10t+25}{4}-4t+20$

$=\frac{-t^2-6t+55}{4}$

Step 3 $f(t)$ 구하기

직사각형 ACDB의 넓이 $f(t)$는

$$f(t)=\left(\frac{-t^2-6t+55}{4}\right)\times(t+3)$$
$$=t\left(\frac{-t^2-6t+55}{4}\right)+3\left(\frac{-t^2-6t+55}{4}\right)$$
$$=-\frac{1}{4}t^3-\frac{9}{4}t^2+\frac{37}{4}t+\frac{165}{4}$$

따라서 다항식 $f(t)$의 차수가 홀수인 모든 항의 계수의 합은

$-\frac{1}{4}+\frac{37}{4}=9$

답 ④

34

다음은 다항식 $3x^3+ax^2+bx+c$를 다항식 $f(x)$로 나누는 과정의 일부이다. $f(2a+3b+c)$의 값은? (단, a, b, c는 상수이다.)

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2-2x+3 \text{ — 몫} \\
\hline
f(x) & 3x^3+ax^2+bx+c \\
 & \boxed{} \\
\hline
 & \boxed{} \\
 & \boxed{} \\
\hline
 & \boxed{} \\
 & 9x+12 \\
\hline
 & -13 \text{ — 나머지}
\end{array}$$

√① -2　　② -1　　③ 0
④ 1　　⑤ 2

Step 1 나눗셈을 식으로 나타내어 $f(x)$ 구하기

다항식 $3x^3+ax^2+bx+c$를 $f(x)$로 나누는 과정에서

$3x^3+ax^2+bx+c=f(x)(x^2-2x+3)-13$

이므로 $f(x)=3x+k$ (k는 상수)로 놓으면

$(3x+k)\times3=9x+12$

$9x+3k=9x+12$

즉, $k=4$

Step 2 나눗셈을 통하여 a, b, c의 값 각각 구하기

다항식 $3x^3+ax^2+bx+c$를 $3x+4$로 나누면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2-2x+3 \\
\hline
3x+4 & 3x^3+\quad ax^2+bx+c \\
 & \boxed{3x^3+\quad 4x^2} \\
\hline
 & \boxed{(a-4)x^2+bx} \\
 & \boxed{-6x^2-8x} \\
\hline
 & \boxed{(b+8)x+c} \\
 & 9x+12 \\
\hline
 & -13
\end{array}$$

즉, $a-4=-6$, $b+8=9$, $c-12=-13$에서

$a=-2$, $b=1$, $c=-1$이므로

$2a+3b+c=-2$

Step 3 $f(2a+3b+c)$의 값 구하기

따라서 $f(x)=3x+4$이므로

$f(2a+3b+c)=f(-2)=-2$

답 ①

35

몫을 $Q(x)$라 하면 $f(x)=(x^2-x+1)Q(x)+2x-1$

다항식 $f(x)$를 x^2-x+1로 나눈 나머지가 $2x-1$일 때, 다항식 $\{f(x)\}^2$을 x^2-x+1로 나눈 나머지는?

① -5　　② -4　　√③ -3
④ -2　　⑤ -1

Step 1 다항식 $f(x)$ 구하기

다항식 $f(x)$를 x^2-x+1로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하면

$f(x)=(x^2-x+1)Q(x)+2x-1$

Step 2 다항식 $\{f(x)\}^2$을 x^2-x+1로 나눈 나머지 구하기

$\{f(x)\}^2$
$=\{(x^2-x+1)Q(x)+2x-1\}^2$
$=(x^2-x+1)^2\{Q(x)\}^2+2(2x-1)(x^2-x+1)Q(x)+(2x-1)^2$
$=(x^2-x+1)^2\{Q(x)\}^2+2(2x-1)(x^2-x+1)Q(x)+4x^2-4x+1$
$=(x^2-x+1)^2\{Q(x)\}^2+2(2x-1)(x^2-x+1)Q(x)$
$\qquad +4(x^2-x+1)-3$
$=(x^2-x+1)[(x^2-x+1)\{Q(x)\}^2+2(2x-1)Q(x)+4]-3$

따라서 다항식 $\{f(x)\}^2$을 x^2-x+1로 나누었을 때의 나머지는 -3이다.

답 ③

36

$f(x)$를 $x-k+1$로 직접 나누어 몫 $Q(x)$를 구한다.

다항식

$f(x)=x^3-(2k-1)x^2+(k^2-k+1)x-k+1$

을 $x-k+1$로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하자. $Q(2)=1$일 때, $f(3)$의 값은? (단, k는 상수이다.)

① 6　　② 7　　√③ 8
④ 9　　⑤ 10

Step 1 $Q(x)$ 구하기

다항식 $f(x)$를 $x-k+1$로 나누면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2-kx+1 \\
\hline
x-k+1 & x^3-(2k-1)x^2+(k^2-k+1)x-k+1 \\
 & x^3-\ (k-1)x^2 \\
\hline
 & \qquad\qquad -kx^2+(k^2-k+1)x \\
 & \qquad\qquad -kx^2+\quad (k^2-k)x \\
\hline
 & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x-k+1 \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x-k+1 \\
\hline
 & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

즉, $Q(x)=x^2-kx+1$이므로

$Q(2)=4-2k+1=1$

$k=2$

Step 2 $f(3)$의 값 구하기

따라서 $f(x)=x^3-3x^2+3x-1$이므로

$f(3)=27-27+9-1=8$

답 ③

37

$f(x)=g(x)Q(x)+R(x)$

상수가 아닌 두 다항식 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(x)$를 $g(x)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)$라 하자. | 보기 |에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

(단, $f(x)$의 차수는 $g(x)$의 차수보다 낮지 않다.)

| 보기 |

ㄱ. $R(x)$의 차수가 2이면 $f(x)$의 차수는 3 이상이다.
ㄴ. $xf(x)$를 $g(x)$로 나눈 몫은 $xQ(x)$이다.
ㄷ. $f(x)+R(x)$를 $g(x)$로 나눈 나머지는 $2R(x)$이다.

① ㄱ ② ㄷ ✓③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

Step 1 나눗셈의 식으로 나타내기

다항식 $f(x)$를 $g(x)$로 나누었을 때의 몫은 $Q(x)$, 나머지는 $R(x)$이므로

$f(x)=g(x)Q(x)+R(x)$

Step 2 참, 거짓 판단하기

ㄱ. $R(x)$의 차수가 2이면 $g(x)$의 차수는 3 이상이다.
따라서 $f(x)$의 차수도 3 이상이다. (참)

ㄴ. [반례] $f(x)=x+1$, $g(x)=x$라 하면 $Q(x)=1$이다.
따라서 $xf(x)=x^2+x$를 $g(x)=x$로 나눈 몫은 $x+1$이므로 $xQ(x)$가 아니다. (거짓)

ㄷ. $f(x)+R(x)=g(x)Q(x)+2R(x)$이고 $2R(x)$의 차수는 $g(x)$의 차수보다 낮으므로 $f(x)+R(x)$를 $g(x)$로 나눈 나머지는 $2R(x)$이다. (참)

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

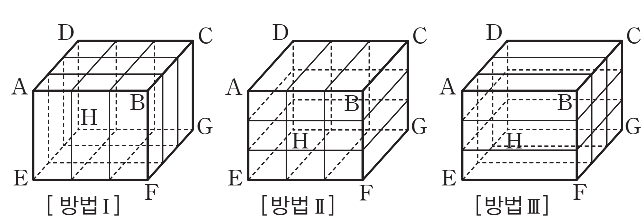
1등급을 넘어서는 상위 1%

본문 15쪽

38

□ABCD, □AEFB, □BFGC의 넓이를 각각 a, b, c라 놓고 식을 세운다.

그림과 같이 직육면체 ABCD$-$EFGH를 세 방법 Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ으로 같은 크기의 9개의 직육면체로 잘랐을 때, 잘라낸 9개의 직육면체 중 한 직육면체의 겉넓이가 세 방법 Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ에 대하여 각각 $58x^2+82x+22$, $54x^2+74x+22$, $42x^2+82x+26$이다. 직육면체 ABCD$-$EFGH의 겉넓이가 px^2+qx+r일 때, $p+q+r$의 값을 구하시오. (단, p, q, r은 상수이다.) 594



문항 파헤치기

직육면체의 각 면의 넓이를 a, b, c로 놓고 각 방법으로 자른 작은 직육면체의 입체의 겉넓이를 x에 대한 식으로 나타낸다.

풀이

Step 1 [방법 Ⅰ]에 의하여 잘린 직육면체 중 한 직육면체의 겉넓이를 식으로 나타내기

직사각형 ABCD의 넓이를 a, 직사각형 AEFB의 넓이를 b, 직사각형 BFGC의 넓이를 c라 하자.

[방법 Ⅰ]에 의하여 잘린 직육면체 중 한 직육면체의 겉넓이는

$\frac{a}{9}\times2+\frac{b}{3}\times2+\frac{c}{3}\times2=58x^2+82x+22$

$\frac{a}{9}+\frac{b}{3}+\frac{c}{3}=29x^2+41x+11$

$a+3b+3c=261x^2+369x+99$ …… ㉠

Step 2 [방법 Ⅱ]에 의하여 잘린 직육면체 중 한 직육면체의 겉넓이를 식으로 나타내기

[방법 Ⅱ]에 의하여 잘린 직육면체 중 한 직육면체의 겉넓이는

$\frac{a}{3}\times2+\frac{b}{9}\times2+\frac{c}{3}\times2=54x^2+74x+22$

$\frac{a}{3}+\frac{b}{9}+\frac{c}{3}=27x^2+37x+11$

$3a+b+3c=243x^2+333x+99$ …… ㉡

Step 3 [방법 Ⅲ]에 의하여 잘린 직육면체 중 한 직육면체의 겉넓이를 식으로 나타내기

[방법 Ⅲ]에 의하여 잘린 직육면체 중 한 직육면체의 겉넓이는

$\frac{a}{3}\times2+\frac{b}{3}\times2+\frac{c}{9}\times2=42x^2+82x+26$

$\frac{a}{3}+\frac{b}{3}+\frac{c}{9}=21x^2+41x+13$

$3a+3b+c=189x^2+369x+117$ …… ㉢

Step 4 직육면체 ABCD$-$EFGH의 겉넓이 구하기

직육면체 ABCD$-$EFGH의 겉넓이는

$2a+2b+2c$

이때 ㉠+㉡+㉢에서

$7a+7b+7c=693x^2+1071x+315$

$a+b+c=99x^2+153x+45$

따라서

$2a+2b+2c=198x^2+306x+90$

이므로

$p+q+r=198+306+90$

$=594$ 답 594

실수 Point 찾기

직육면체의 모서리의 길이를 미지수로 놓으면 식이 복잡해지므로 각 면의 넓이를 미지수로 표현하는 것이 좋다.

02 나머지정리

내신 빈출 필수 문제 본문 18~19쪽

01 ④	02 ②	03 ①	04 ③	05 ③
06 ⑤	07 ③	08 ①	09 ④	10 1

11 몫: $x^2-x-\frac{3}{2}$, 나머지: $-\frac{5}{2}$

01 $(x+1)(x^2-2x+c)$
$=x(x^2-2x+c)+(x^2-2x+c)$
$=x^3-x^2+(c-2)x+c$
즉, 등식 $x^3+ax^2+bx+2=x^3-x^2+(c-2)x+c$는 x에 대한 항등식이므로
$a=-1$, $b=c-2$, $2=c$
따라서 $a=-1$, $b=0$, $c=2$이므로
$a+b+c=1$ 답 ④

02 $a(x-y)+b(x+y)=(a+b)x+(-a+b)y$이므로
$(a+b)x+(-a+b)y=3x+5y$에서
$a+b=3$, $-a+b=5$
위 두 식을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=4$
따라서 $ab=(-1)\times 4=-4$ 답 ②

03 등식 $a(x-2)+bx(x-3)+c(x-2)(x-3)=x^2-8$에
$x=3$을 대입하면 $a=1$
$x=2$를 대입하면 $-2b=-4$, $b=2$
$x=0$을 대입하면 $-2a+6c=-8$, $-2+6c=-8$, $c=-1$
따라서 $a^2+b^2+c^2=1^2+2^2+(-1)^2=6$ 답 ①

04 다항식 $f(x)$를 $x-3$으로 나눈 나머지가 4이므로
$f(3)=4$
따라서 다항식 $(x+1)f(x)$를 $x-3$으로 나눈 나머지는
$4f(3)=4\times 4=16$ 답 ③

05 다항식 $f(x)$를 $x+1$로 나눈 나머지가 2이므로
$f(-1)=2$
다항식 $f(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지가 -1이므로
$f(2)=-1$
다항식 $f(x)$를 $(x+1)(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면
$f(x)=(x+1)(x-2)Q(x)+ax+b$
이때 $f(-1)=2$, $f(2)=-1$이므로
$f(-1)=-a+b=2$
$f(2)=2a+b=-1$
위 두 식을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=1$
따라서 $R(x)=-x+1$이므로
$R(-2)=3$ 답 ③

06 다항식 $f(x)$를 $x+2$로 나눈 나머지가 a이므로
$f(-2)=a$
다항식 $(1-x)f(x+3)$을 $x+5$로 나눈 나머지가 10이므로
$(1+5)f(-2)=10$, $6f(-2)=10$
이때 $f(-2)=a$이므로 $6a=10$에서 $a=\frac{5}{3}$ 답 ⑤

07 다항식 x^3+ax^2-5x+b를 $x-1$, $x-3$으로 각각 나눈 나머지가 모두 0이므로
$1+a-5+b=0$에서
$a+b=4$ …… ㉠
또, $27+9a-15+b=0$에서
$9a+b=-12$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=6$이므로
$b-a=8$ 답 ③

08 $f(x)=x^3+x^2+ax+b$라 하면 $f(x)$가 $(x+2)(x-2)$로 나누어떨어지므로
$f(-2)=-8+4-2a+b=0$에서
$2a-b=-4$ …… ㉠
또, $f(2)=8+4+2a+b=0$에서
$2a+b=-12$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-4$, $b=-4$
따라서 $g(x)=x^3-4x^2-4x+2$라 하면 $g(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지는
$g(1)=1-4-4+2=-5$ 답 ①

09 다항식 x^3+2x^2+ax+3을 $x-2$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & 2 & a & 3 \\ & & 2 & 8 & 2a+16 \\ \hline & 1 & 4 & a+8 & 2a+19 \end{array}$$

이는 주어진 과정인 아래와 같으므로

$$\begin{array}{c|cccc} b & 1 & 2 & a & 3 \\ & & 2 & 8 & d \\ \hline & 1 & c & 4 & e \end{array}$$

$a+8=4$에서 $a=-4$
$b=2$, $c=4$, $d=2a+16=2\times(-4)+16=8$
$e=2a+19=2\times(-4)+19=11$
따라서 $a+b+c+d+e=21$ 답 ④

10 $f(x)$는 다항식이고 주어진 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로 등식 $(x^2-3)f(x)=x^3+ax^2+bx-6$에서 최고차항과 상수항을 비교하면
$f(x)=x+2$
…………………………………………………………… ❶
즉, $(x^2-3)f(x)=(x^2-3)(x+2)=x^3+2x^2-3x-6$
이므로 $a=2$, $b=-3$
…………………………………………………………… ❷

따라서 $f(a+b)=f(-1)=-1+2=1$

·· ❸

답 1

단계	채점 기준	비율
❶	다항식 $f(x)$를 구한 경우	40 %
❷	a, b의 값을 각각 구한 경우	40 %
❸	$f(a+b)$의 값을 구한 경우	20 %

11 다항식 $2x^3-3x^2-2x-1$을 $2x-1$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{c|cccc} \frac{1}{2} & 2 & -3 & -2 & -1 \\ & & 1 & -1 & -\frac{3}{2} \\ \hline & 2 & -2 & -3 & \boxed{-\frac{5}{2}} \end{array}$$

·· ❶

즉,

$2x^3-3x^2-2x-1$

$=\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x^2-2x-3)-\frac{5}{2}$

$=\frac{1}{2}(2x-1)(2x^2-2x-3)-\frac{5}{2}$

$=(2x-1)\left(x^2-x-\frac{3}{2}\right)-\frac{5}{2}$

·· ❷

따라서 다항식 $2x^3-3x^2-2x-1$을 $2x-1$로 나누었을 때의 몫은 $x^2-x-\frac{3}{2}$, 나머지는 $-\frac{5}{2}$이다.

·· ❸

답 몫: $x^2-x-\frac{3}{2}$, 나머지: $-\frac{5}{2}$

단계	채점 기준	비율
❶	조립제법을 올바르게 구한 경우	40 %
❷	나눗셈을 식으로 표현한 경우	40 %
❸	몫과 나머지를 각각 구한 경우	20 %

내신 고득점 도전 문제

본문 20~21쪽

12 ②	**13** ⑤	**14** 127	**15** ①	**16** ⑤
17 ④	**18** ②	**19** ③	**20** ②	**21** $\frac{106}{5}$
22 $3x$				

12 주어진 등식에 $x=0$을 대입하면

$(-a)^2=4$, $a^2=4$

이때 $a>0$이므로

$a=2$

$(x+1)^2(x-2)^2$

$=(x^2+2x+1)(x^2-4x+4)$

$=x^2(x^2-4x+4)+2x(x^2-4x+4)+(x^2-4x+4)$

$=(x^4-4x^3+4x^2)+(2x^3-8x^2+8x)+(x^2-4x+4)$

$=x^4-2x^3-3x^2+4x+4$

따라서 $b=-2$, $c=-3$이므로

$abc=2\times(-2)\times(-3)=12$ 답 ②

13 $x^2+(k+2)x+kn-n^2-1=0$을 k에 대하여 정리하면

$(x+n)k+x^2+2x-n^2-1=0$ ······ ㉠

이 등식은 $x=m$일 때 k에 대한 항등식이므로

$m+n=0$, $m^2+2m-n^2-1=0$

즉, $m=-n$이므로 이를 $m^2+2m-n^2-1=0$에 대입하면

$(-n)^2+2\times(-n)-n^2-1=0$

$-2n-1=0$

$n=-\frac{1}{2}$

따라서 $m=\frac{1}{2}$이므로

$m^2+n^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$ 답 ⑤

14 등식

$x^8-1=a_8(x+1)^8+a_7(x+1)^7+\cdots+a_1(x+1)+a_0$

에 $x=0$을 대입하면

$-1=a_8+a_7+a_6+\cdots+a_1+a_0$ ······ ㉠

또, 등식에 $x=-2$를 대입하면

$(-2)^8-1=a_8(-1)^8+a_7(-1)^7+\cdots+a_1(-1)+a_0$

$256-1=a_8-a_7+a_6-\cdots-a_1+a_0$

$255=a_8-a_7+a_6-\cdots-a_1+a_0$ ······ ㉡

㉠+㉡을 하면

$254=2(a_8+a_6+a_4+a_2+a_0)$

따라서 $a_0+a_2+a_4+a_6+a_8=127$ 답 127

15 다항식 $f(x)=x^4+x^2+2x+a$를 x^2-x+b로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하면

$f(x)=(x^2-x+b)Q(x)-4x+7$

$f(x)+4x-7=(x^2-x+b)Q(x)$

$(x^4+x^2+2x+a)+4x-7=(x^2-x+b)Q(x)$

$x^4+x^2+6x+a-7=(x^2-x+b)Q(x)$

이 식은 x에 대한 항등식이므로

$Q(x)=x^2+px+q$ (p, q는 상수)라 하면

$(x^2-x+b)(x^2+px+q)$

$=x^2(x^2+px+q)-x(x^2+px+q)+b(x^2+px+q)$

$=x^4+(p-1)x^3+(-p+q+b)x^2+(bp-q)x+bq$

이므로

$x^4+x^2+6x+a-7$

$=x^4+(p-1)x^3+(-p+q+b)x^2+(bp-q)x+bq$

즉, $p-1=0$, $-p+q+b=1$, $bp-q=6$, $bq=a-7$이므로

$p=1$, $q=-2$, $a=-1$, $b=4$

다항식 $f(x)=x^4+x^2+2x-1$을 x^2+4x+1로 나누면 다음과 같다.

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad x^2-4x+16 \\
\cline{2-2}
x^2+4x+1 & x^4 \qquad\ +\ x^2+\ 2x-1 \\
 & x^4+4x^3+\ x^2 \\
\cline{2-2}
 & \quad -4x^3 \qquad +\ 2x \\
 & \quad -4x^3-16x^2-\ 4x \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad 16x^2+\ 6x-1 \\
 & \qquad\qquad 16x^2+64x+16 \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad\qquad -58x-17
\end{array}
$$

따라서 $m=-58$, $n=-17$이므로

$n-m=41$ 답 ①

16 조건 (나)에서

$f(2)=6$, $g(-2)=-1$

이므로 조건 (가)의 등식에 $x=2$를 대입하면

$f(2)=3g(2)=6$에서

$g(2)=2$

이때 $g(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$g(-2)=4-2a+b=-1$에서

$2a-b=5$ …… ㉠

$g(2)=4+2a+b=2$에서

$2a+b=-2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{3}{4}$, $b=-\frac{7}{2}$

즉, $g(x)=x^2+\frac{3}{4}x-\frac{7}{2}$

따라서 $f(x)=(x+1)\left(x^2+\frac{3}{4}x-\frac{7}{2}\right)$이므로

$f(3)+g(3)$

$=4\left(9+\frac{9}{4}-\frac{7}{2}\right)+\left(9+\frac{9}{4}-\frac{7}{2}\right)$

$=5\left(9+\frac{9}{4}-\frac{7}{2}\right)$

$=5\times\frac{31}{4}=\frac{155}{4}$ 답 ⑤

17 다항식 $f(x)$를 x^2-2x로 나눈 몫을 $Q_1(x)$라 하면 나머지가 $x+2$이므로

$f(x)=(x^2-2x)Q_1(x)+x+2$

$\quad=x(x-2)Q_1(x)+x+2$

다항식 $f(x)$를 x^2-3x로 나눈 몫을 $Q_2(x)$라 하면 나머지가 $3x+2$이므로

$f(x)=(x^2-3x)Q_2(x)+3x+2$

$\quad=x(x-3)Q_2(x)+3x+2$

다항식 $f(x)$를 $x(x-2)(x-3)$으로 나눈 몫을 $Q_3(x)$, 나머지 $R(x)$를 $R(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$f(x)=x(x-2)(x-3)Q_3(x)+ax^2+bx+c$ …… ㉠

㉠에 $x=0$을 대입하면

$f(0)=c=2$

㉠에 $x=2$를 대입하면

$f(2)=4a+2b+c=4$

$4a+2b+2=4$에서

$2a+b=1$ …… ㉡

㉠에 $x=3$을 대입하면

$f(3)=9a+3b+c=11$

$9a+3b+2=11$에서

$3a+b=3$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=-3$

이므로 $R(x)=2x^2-3x+2$

따라서 $R(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지는

$R(1)=2-3+2=1$ 답 ④

18 조건 (가)에서

$f(1)-1=0$, $f(2)-2=0$

이므로

$f(x)-x=(x-1)(x-2)(x-p)$ (p는 상수)로 놓을 수 있다.

조건 (나)에서

$f(3)=-1$이므로

$f(3)-3=(3-1)(3-2)(3-p)$

$-4=2\times1\times(3-p)$

$3-p=-2$

$p=5$

따라서 $f(x)-x=(x-1)(x-2)(x-5)$에서

$f(x)=(x-1)(x-2)(x-5)+x$

이므로 $f(x-1)$을 $2x-1$로 나눈 나머지는

$f\left(\frac{1}{2}-1\right)=f\left(-\frac{1}{2}\right)$

$\qquad=\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)\left(-\frac{1}{2}-5\right)-\frac{1}{2}$

$\qquad=-\frac{3}{2}\times\left(-\frac{5}{2}\right)\times\left(-\frac{11}{2}\right)-\frac{1}{2}$

$\qquad=-\frac{165}{8}-\frac{1}{2}$

$\qquad=-\frac{169}{8}$ 답 ②

19 다항식 $f(x)=x^3+ax^2+bx-2$가 $(x+1)(x-2)$로 나누어떨어지므로

$f(-1)=-1+a-b-2=0$에서

$a-b=3$ …… ㉠

$f(2)=8+4a+2b-2=0$에서

$2a+b=-3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=0$, $b=-3$

이므로 $f(x)=x^3-3x-2$

따라서 다항식 $xf(x^2)-2x+3$을 $x+2$로 나눈 나머지는

$-2f(4)+4+3$

$=-2\times(4^3-3\times4-2)+4+3$

$=-2\times50+7$

$=-93$ 답 ③

20 $x+1$로 계속해서 나누는 과정을 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
-1 & 1 & 1 & 2 & 0 & -2 \\
 & & -1 & 0 & -2 & 2 \\
\hline
-1 & 1 & 0 & 2 & -2 & \boxed{0} \\
 & & -1 & 1 & -3 & \\
\hline
-1 & 1 & -1 & 3 & \boxed{-5} & \\
 & & -1 & 2 & & \\
\hline
-1 & 1 & -2 & \boxed{5} & & \\
 & & -1 & & & \\
\hline
 & 1 & \boxed{-3} & & &
\end{array}
$$

$x^4+x^3+2x^2-2$
$=(x+1)(x^3+2x-2)$
$=(x+1)\{(x+1)(x^2-x+3)-5\}$
$=(x+1)^2(x^2-x+3)-5(x+1)$
$=(x+1)^2\{(x+1)(x-2)+5\}-5(x+1)$
$=(x+1)^3(x-2)+5(x+1)^2-5(x+1)$
$=(x+1)^3\{(x+1)-3\}+5(x+1)^2-5(x+1)$
$=(x+1)^4-3(x+1)^3+5(x+1)^2-5(x+1)$
따라서 $a=1$, $b=-3$, $c=5$, $d=-5$, $e=0$
이므로
$ab+cd+e=-3-25+0=-28$

답 ②

21 조건 ㈎에 의하여
$f(x-2)=(x-2)^2+a(x-2)+b$
$=(x^2-4x+4)+a(x-2)+b$
$=x^2+(a-4)x-2a+b+4$
…… ❶

이므로 $-2a+b+4=3$에서
$2a-b=1$ …… ㉠
조건 ㈏에서
$f(3)=9+3a+b=6$이므로
$3a+b=-3$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a=-\frac{2}{5}$, $b=-\frac{9}{5}$
이므로 $f(x)=x^2-\frac{2}{5}x-\frac{9}{5}$
…… ❷

따라서 $f(5)=25-2-\frac{9}{5}=\frac{106}{5}$
…… ❸

답 $\frac{106}{5}$

단계	채점 기준	비율
❶	$f(x-2)$를 구한 경우	30 %
❷	$f(x)$를 구한 경우	50 %
❸	$f(5)$의 값을 구한 경우	20 %

22 조건 ㈎에서
$f(x)+f(-x)=0$, $f(x)=-f(-x)$
이므로
$f(x)=x^3+ax$ (a는 상수)
라 하자.
…… ❶

조건 ㈏에서
$f(-1)=-1-a=0$
이므로 $a=-1$
즉, $f(x)=x^3-x$
…… ❷

다항식 $f(x)$를 x^2-4, 즉 $(x-2)(x+2)$로 나눈 나머지를
$bx+c$ (b, c는 상수)라 하면
$f(2)=2b+c=6$ …… ㉠
$f(-2)=-2b+c=-6$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $b=3$, $c=0$
따라서 구하는 나머지는 $3x$이다.
…… ❸

답 $3x$

단계	채점 기준	비율
❶	$f(x)=x^3+ax$ 꼴로 표현한 경우	20 %
❷	$f(x)$를 구한 경우	30 %
❸	다항식 $f(x)$를 x^2-4로 나눈 나머지를 구한 경우	50 %

변별력을 만드는 1등급 문제

본문 22~24쪽

23 ④	24 ①	25 ③	26 ①	27 54
28 ②	29 ①	30 ④	31 ⑤	32 ④
33 ①	34 ③	35 ②	36 ⑤	37 ③

23
다항식 $f(x)$를 $\underbrace{x^2+x-2}_{(x+2)(x-1)}$로 나눈 나머지가 $2x+1$이고, 다항식 $f(x)$를 $\underbrace{x^2-4x+3}_{(x-1)(x-3)}$으로 나눈 나머지는 $2x+a$이다. 다항식 $f(x)$를 $\underbrace{x^2-x-6}_{(x+2)(x-3)}$으로 나눈 나머지가 $bx+c$일 때, $a+b+c$의 값은?
(단, a, b, c는 상수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3
✓④ 4 ⑤ 5

Step 1 나머지정리를 이용하여 상수 a의 값 구하기
$x^2+x-2=(x+2)(x-1)$이고 다항식 $f(x)$를 x^2+x-2로 나눈 나머지가 $2x+1$이므로
$f(-2)=-3$, $f(1)=3$
$x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$이고 다항식 $f(x)$를 x^2-4x+3으로 나눈 나머지가 $2x+a$이므로
$f(1)=2+a$, $f(3)=6+a$
즉, $3=2+a$에서 $a=1$

Step 2 나머지정리를 이용하여 상수 b, c의 값 각각 구하기

$x^2-x-6=(x+2)(x-3)$이고 다항식 $f(x)$를 x^2-x-6으로 나눈 나머지가 $bx+c$이므로

$f(-2)=-2b+c$, $f(3)=3b+c$

즉, $-2b+c=-3$, $3b+c=6+a=7$이므로

$b=2$, $c=1$

따라서 $a+b+c=1+2+1=4$ 답 ④

24

$f(1)=1$

다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지가 1이고, 다항식 $f(x)$를 $(x+1)^2$으로 나눈 나머지는 $3x+2$이다. 다항식 $f(x)$를 $(x-1)(x+1)^2$으로 나눈 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(3)$의 값은?

√① -5 ② -4 ③ -3
④ -2 ⑤ -1

Step 1 $f(1)$의 값 구하기

다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지가 1이므로

$f(1)=1$

Step 2 나눗셈을 식으로 나타내기

다항식 $f(x)$를 $(x+1)^2$으로 나눈 몫을 $Q_1(x)$라 하면 나머지가 $3x+2$이므로

$f(x)=(x+1)^2Q_1(x)+3x+2$

다항식 $f(x)$를 $(x-1)(x+1)^2$으로 나눈 몫을 $Q_2(x)$, 나머지를 $R(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$$\begin{aligned} f(x)&=(x-1)(x+1)^2Q_2(x)+R(x) \\ &=(x-1)(x+1)^2Q_2(x)+ax^2+bx+c \\ &=(x+1)^2\{(x-1)Q_2(x)\}+a(x+1)^2+3x+2 \quad \cdots\cdots \text{㉠} \end{aligned}$$

Step 3 $R(3)$의 값 구하기

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=4a+5=1$에서

$a=-1$

따라서 $R(x)=-(x+1)^2+3x+2$이므로

$R(3)=-16+9+2=-5$ 답 ①

25

$f(1)=3$

다항식 $f(x)$를 $(x+1)^3$으로 나눈 나머지가 11, 다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지는 3이다. 다항식 $f(x)$를 $(x+1)^3(x-1)$로 나눈 나머지를 $R(x)$라 할 때, 다항식 $R(x^2)$을 $x+\sqrt{2}$로 나눈 나머지는?

① -20 ② -18 √③ -16
④ -14 ⑤ -12

Step 1 나눗셈을 식으로 나타내기

다항식 $f(x)$를 $(x+1)^3$으로 나눈 몫을 $Q_1(x)$라 하면 나머지는 11이므로

$f(x)=(x+1)^3Q_1(x)+11$

다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나눈 몫을 $Q_2(x)$라 하면 나머지는 3이므로

$f(x)=(x-1)Q_2(x)+3$

다항식 $f(x)$를 $(x+1)^3(x-1)$로 나눈 몫을 $Q_3(x)$라 하면 나머지는 $R(x)$이므로

$f(x)=(x+1)^3(x-1)Q_3(x)+R(x)$

Step 2 $R(x)$ 구하기

$R(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d는 상수)라 하면

$$\begin{aligned} f(x)&=(x+1)^3(x-1)Q_3(x)+R(x) \\ &=(x+1)^3(x-1)Q_3(x)+ax^3+bx^2+cx+d \\ &=(x+1)^3(x-1)Q_3(x)+a(x+1)^3+11 \end{aligned}$$

이때 $f(1)=3$이므로

$f(1)=8a+11=3$에서 $a=-1$

따라서 $R(x)=-(x+1)^3+11$

Step 3 다항식 $R(x^2)$을 $x+\sqrt{2}$로 나눈 나머지 구하기

다항식 $R(x^2)$을 $x+\sqrt{2}$로 나눈 나머지는

$R((-\sqrt{2})^2)=R(2)=-27+11=-16$ 답 ③

26

$f(x)$를 $(x+1)^2$으로 나눈 몫을 $Q_1(x)$, $f(x)$를 $(x-1)^2$으로 나눈 몫을 $Q_2(x)$로 놓고 나눗셈을 식으로 나타낸다.

다항식 $f(x)$를 $(x+1)^2$으로 나눈 나머지가 $x+2$이고, 다항식 $f(x)$를 $(x-1)^2$으로 나눈 나머지가 $x+4$이다. 다항식 $f(x)$를 $(x+1)(x-1)^2$으로 나눈 나머지가 $R(x)$일 때, $R(5)$의 값은?

√① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

Step 1 나눗셈을 식으로 나타내기

다항식 $f(x)$를 $(x+1)^2$으로 나눈 몫을 $Q_1(x)$라 하면 나머지는 $x+2$이므로

$f(x)=(x+1)^2Q_1(x)+x+2$ $\cdots\cdots$ ㉠

다항식 $f(x)$를 $(x-1)^2$으로 나눈 몫을 $Q_2(x)$라 하면 나머지는 $x+4$이므로

$f(x)=(x-1)^2Q_2(x)+x+4$

이때 다항식 $Q_2(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 몫을 $Q_3(x)$, 나머지를 r이라 하면

$Q_2(x)=(x+1)Q_3(x)+r$

Step 2 $R(x)$ 구하기

$$\begin{aligned} f(x)&=(x-1)^2Q_2(x)+x+4 \\ &=(x-1)^2\{(x+1)Q_3(x)+r\}+x+4 \\ &=(x+1)(x-1)^2Q_3(x)+r(x-1)^2+x+4 \end{aligned}$$

이므로 $x=-1$을 대입하면

$f(-1)=4r+3$

또, ㉠에 $x=-1$을 대입하면 $f(-1)=1$이므로

$4r+3=1$, $r=-\frac{1}{2}$

따라서 $R(x)=-\frac{1}{2}(x-1)^2+x+4$

Step 3 $R(5)$의 값 구하기

$R(x)=-\frac{1}{2}(x-1)^2+x+4$에 $x=5$를 대입하면

$R(5)=-\frac{1}{2}\times16+9=1$ 답 ①

27

최고차항의 계수가 1인 삼차식 $f(x)$가 있다. 다항식 $f(x)$를 $2x+1$로 나눈 나머지가 -1, 다항식 $f(x)$를 $x-3$으로 나눈 나머지가 13이다. 다항식 $f(x)$를 $4x+1$로 나누었을 때의 몫이 ax^2+bx+c이고 나머지가 0일 때, $64(a^2+b^2+c^2)$의 값을 구하시오. 54

(단, a, b, c는 상수이다.)

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$

$f(3)=13$

Step 1 $f\left(-\frac{1}{2}\right)$, $f(3)$의 값 각각 구하기

다항식 $f(x)$를 $2x+1$로 나눈 나머지가 -1이므로

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$

또, 다항식 $f(x)$를 $x-3$으로 나눈 나머지가 13이므로

$f(3)=13$

Step 2 다항식 $f(x)$ 구하기

다항식 $f(x)$를 $4x+1$로 나누었을 때의 몫이 ax^2+bx+c이고 나머지가 0이므로

$f(x)=(4x+1)(ax^2+bx+c)$ …… ㉠

이때 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차식이므로

$4a=1$에서 $a=\frac{1}{4}$

이를 ㉠에 대입하면

$f(x)=(4x+1)\left(\frac{1}{4}x^2+bx+c\right)$ …… ㉡

㉡에 $x=-\frac{1}{2}$을 대입하면

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\left(\frac{1}{16}-\frac{b}{2}+c\right)=-1$

$\frac{1}{16}-\frac{b}{2}+c=1$

$\frac{b}{2}-c=-\frac{15}{16}$ …… ㉢

또, ㉡에 $x=3$을 대입하면

$f(3)=13\left(\frac{9}{4}+3b+c\right)=13$

$\frac{9}{4}+3b+c=1$

$3b+c=-\frac{5}{4}$ …… ㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $b=-\frac{5}{8}$, $c=\frac{5}{8}$

Step 3 $64(a^2+b^2+c^2)$의 값 구하기

따라서

$64(a^2+b^2+c^2)=64\left(\frac{1}{16}+\frac{25}{64}+\frac{25}{64}\right)$

$=4+25+25=54$

답 54

28

다항식 $(2x^3-5x^2+6x-1)^3$을 x^2-x+1로 나눈 나머지가 $R(x)$일 때, $R(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지는?

인수분해가 되지 않으므로 직접 나눗셈을 한다.

① 36 ✓② 37 ③ 38 ④ 39 ⑤ 40

Step 1 $2x^3-5x^2+6x-1$을 x^2-x+1로 나누기

다항식 $2x^3-5x^2+6x-1$을 x^2-x+1로 나누는 과정은 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|l} & 2x-3 \\ \hline x^2-x+1 & 2x^3-5x^2+6x-1 \\ & 2x^3-2x^2+2x \\ \hline & \quad -3x^2+4x-1 \\ & \quad -3x^2+3x-3 \\ \hline & \qquad\qquad x+2 \end{array}$$

즉, $2x^3-5x^2+6x-1=(x^2-x+1)(2x-3)+x+2$

Step 2 $(2x^3-5x^2+6x-1)^3$을 x^2-x+1로 나눈 나머지 $R(x)$ 구하기

$(2x^3-5x^2+6x-1)^3=\{(x^2-x+1)(2x-3)+x+2\}^3$

이고, 다항식 $(2x^3-5x^2+6x-1)^3$을 x^2-x+1로 나눈 나머지 $R(x)$는 $(x+2)^3$을 x^2-x+1로 나눈 나머지와 같다.

이때 $(x+2)^3=x^3+6x^2+12x+8$이므로 $(x+2)^3$을 x^2-x+1로 나누는 과정은 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|l} & x+7 \\ \hline x^2-x+1 & x^3+6x^2+12x+8 \\ & x^3-x^2+x \\ \hline & \quad 7x^2+11x+8 \\ & \quad 7x^2-7x+7 \\ \hline & \qquad 18x+1 \end{array}$$

즉, $R(x)=18x+1$

Step 3 $R(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지 구하기

따라서 $R(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지는

$R(2)=18\times2+1=37$

답 ②

29

다항식 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킬 때, ab의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

주어진 식이 x에 대한 항등식임을 이용한다.

(가) $f(x)=(ax+b)(x-1)x$
(나) $f(x^2)=x^3f(x)+x^2(x^2-1)$

✓① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

Step 1 a, b에 대한 관계식 구하기

조건 (가)에서 $f(1)=0$이므로

조건 (나)의 식에 $x=-1$을 대입하면

$f(1)=-f(-1)$

즉, $f(-1)=0$

따라서 조건 (가)의 식에 $x=-1$을 대입하면

$f(-1)=(-a+b)\times(-2)\times(-1)=0$

이므로 $a=b$

Step 2 ab의 값 구하기

$f(x)=(ax+b)(x-1)x$

$=a(x+1)(x-1)x$

$=a(x^3-x)$

이므로 조건 (나)에 대입하면

$a(x^6-x^2)=x^3\times a(x^3-x)+x^2(x^2-1)$

$ax^6-ax^2=ax^6-ax^4+x^4-x^2$

$ax^6-ax^2=ax^6-(a-1)x^4-x^2$

이므로 $a-1=0$에서 $a=1$

따라서 $a=1$, $b=1$이므로

$ab=1$

답 ①

30

다항식 $f(x)=x^4+ax^2-2x+3$이 다항식 $g(x)=x^2+x+b$로 나누어떨어질 때, 다항식 $f(x)+g(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지는?

나머지가 0이다.

(단, a, b는 자연수이다.)

① 30 ② 32 ③ 34 ④ 36 ⑤ 38

Step 1 두 다항식 $f(x)$, $g(x)$ 구하기

다항식 $f(x)=x^4+ax^2-2x+3$을 다항식 $g(x)=x^2+x+b$로 나누는 과정은 다음과 같다.

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2-x+a-b+1 \\
\hline
x^2+x+b & x^4 \quad + \quad ax^2 \quad -2x+3 \\
 & x^4+x^3+bx^2 \\
\hline
 & -x^3+(a-b)x^2-2x \\
 & -x^3-x^2-bx \\
\hline
 & (a-b+1)x^2+(b-2)x+3 \\
 & (a-b+1)x^2+(a-b+1)x+b(a-b+1) \\
\hline
 & (-a+2b-3)x+3-b(a-b+1)
\end{array}
$$

이때 다항식 $f(x)$가 다항식 $g(x)$로 나누어떨어지므로

$(-a+2b-3)x+3-b(a-b+1)=0$

$-a+2b-3=0$에서

$a=2b-3$ …… ㉠

또, $3-b(a-b+1)=0$에서

$b(a-b+1)=3$ …… ㉡

이때 a, b는 자연수이므로 ㉡에서

$b=1$ 또는 $b=3$

$b=1$을 ㉠에 대입하면

$a=-1$

이는 자연수라는 조건을 만족시키지 못한다.

또, $b=3$을 ㉠에 대입하면

$a=3$

$a=b=3$을 ㉡에 대입해도 성립한다.

따라서

$f(x)=x^4+3x^2-2x+3$, $g(x)=x^2+x+3$

Step 2 다항식 $f(x)+g(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지 구하기

$f(x)+g(x)=x^4+4x^2-x+6$

이므로 $f(x)+g(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지는

$f(2)+g(2)=16+16-2+6=36$

답 ④

31

이차식 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$f(f(x))=\{f(x)\}^2+1$ 주어진 등식이 x에 대한 항등식임을 이용한다.

을 만족시킬 때, $f(3)$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

Step 1 $f(x)$의 최고차항의 계수 구하기

$f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수, $a\neq0$)이라 하고 $f(f(x))$, $\{f(x)\}^2+1$의 최고차항을 각각 구하면

$a(ax^2)^2$, $(ax^2)^2$

이때 $f(f(x))=\{f(x)\}^2+1$이므로

$a(ax^2)^2=(ax^2)^2$에서 $a^3x^4=a^2x^4$

$a^3=a^2$, 즉 $a=1$

Step 2 다항식 $f(x)$ 구하기

$f(x)=x^2+bx+c$이므로

$f(f(x))=f(x^2+bx+c)$

$=(x^2+bx+c)^2+b(x^2+bx+c)+c$

$\{f(x)\}^2+1=(x^2+bx+c)^2+1$

에서

$(x^2+bx+c)^2+b(x^2+bx+c)+c=(x^2+bx+c)^2+1$

$bx^2+b^2x+bc+c=1$

위 등식은 x에 대한 항등식이므로

$b=0$, $bc+c=1$에서 $b=0$, $c=1$

따라서 $f(x)=x^2+1$

Step 3 $f(3)$의 값 구하기

$f(x)=x^2+1$이므로

$f(3)=3^2+1=10$

답 ⑤

32

$f(\alpha)=-2$

다항식 $f(x)=x^2-2x+2$를 $x-\alpha$로 나눈 나머지가 -2일 때, 다항식 $(x^4-2x^3+5x^2-2x+2)f(x)$를 $x-\alpha$로 나눈 나머지는?

(단, α는 상수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

Step 1 나머지정리를 이용하여 $\alpha^2-2\alpha+4$의 값 구하기

다항식 $f(x)=x^2-2x+2$를 $x-\alpha$로 나눈 나머지가 -2이므로

$f(\alpha)=\alpha^2-2\alpha+2=-2$

즉, $\alpha^2-2\alpha+4=0$

Step 2 다항식 $(x^4-2x^3+5x^2-2x+2)f(x)$를 $x-\alpha$로 나눈 나머지 구하기

다항식 $(x^4-2x^3+5x^2-2x+2)f(x)$를 $x-\alpha$로 나눈 나머지는

$(\alpha^4-2\alpha^3+5\alpha^2-2\alpha+2)f(\alpha)$

$=(\alpha^4-2\alpha^3+4\alpha^2+\alpha^2-2\alpha+2)f(\alpha)$

$=\{\alpha^2(\alpha^2-2\alpha+4)+(\alpha^2-2\alpha+4)-2\}f(\alpha)$

$=-2\times(-2)=4$

답 ④

33

$f(x)=g(x)h(x)+R(x)$

다항식 $f(x)=x^4-6x+a$를 다항식 $g(x)$로 나누었을 때의 몫이 $h(x)=x^2-3x+2$, 나머지가 $R(x)$이다. $R(x)$가 $h(x)$의 인수인 일차식일 때, 모든 상수 a의 값의 합은?

(단, $R(x)$의 최고차항의 계수는 1이다.)

✓① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

Step 1 나눗셈을 식으로 나타내어 $R(x)$ 구하기

$f(x)=g(x)h(x)+R(x)$에서

$x^4-6x+a=g(x)(x^2-3x+2)+R(x)$

$\quad=g(x)(x-1)(x-2)+R(x)$ …… ㉠

따라서 $g(x)$는 이차식이고, $R(x)$가 $h(x)$의 인수인 일차식이므로

$R(x)=x-1$ 또는 $R(x)=x-2$

Step 2 인수정리를 이용하여 상수 a의 값 구하기

(i) $R(x)=x-1$일 때

㉠에 $x=1$을 대입하면 $-5+a=0$에서

$a=5$

(ii) $R(x)=x-2$일 때

㉠에 $x=2$를 대입하면 $4+a=0$에서

$a=-4$

Step 3 모든 상수 a의 값의 합 구하기

따라서 모든 상수 a의 값의 합은

$5+(-4)=1$

답 ①

34

주어진 식이 x에 대한 항등식임을 이용한다.

최고차항의 계수가 1인 다항식 $f(x)$가 임의의 x에 대하여 등식

$(x+1)f(x)=(x-2)f(x+1)$

을 만족시킨다. 다항식 $f(x)$의 차수가 최소일 때, $f(5)$의 값은?

① 50 ② 55 ✓③ 60
④ 65 ⑤ 70

Step 1 항등식의 성질을 이용하여 $f(x)$ 구하기

등식 $(x+1)f(x)=(x-2)f(x+1)$에

$x=-1$을 대입하면 $0=-3f(0)$에서

$f(0)=0$

$x=2$를 대입하면 $3f(2)=0$에서

$f(2)=0$

$x=0$을 대입하면 $f(0)=-2f(1)$에서

$f(1)=0$

따라서 $f(0)=f(1)=f(2)=0$이므로 주어진 조건을 만족시키는 다항식 $f(x)$ 중 차수가 최소인 경우는 $f(x)$의 차수가 3일 때이므로

$f(x)=x(x-1)(x-2)$

Step 2 $f(5)$의 값 구하기

따라서 $f(x)=x(x-1)(x-2)$이므로

$f(5)=5\times4\times3=60$

답 ③

35

몫을 $Q(x)$라 하고 나눗셈을 식으로 나타낸다.

자연수 n에 대하여 다항식 $x^{n+1}+ax^n-1$을 $(x+2)^n$으로 나눈 나머지가 2^nx-1일 때, $n+a$의 값은? (단, a는 양의 상수이다.)

① 4 ✓② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

Step 1 나눗셈을 식으로 나타내기

다항식 $x^{n+1}+ax^n-1$을 $(x+2)^n$으로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 2^nx-1이므로

$x^{n+1}+ax^n-1=(x+2)^nQ(x)+2^nx-1$ …… ㉠

Step 2 $Q(x)$ 구하기

양변의 최고차항이 서로 일치해야 하므로

$Q(x)=x+m$ (m은 상수)

또, ㉠에 $x=0$을 대입하면

$-1=2^n\times m-1$이므로 $m=0$

따라서 $Q(x)=x$

Step 3 $n+a$의 값 구하기

$x^{n+1}+ax^n-1=(x+2)^nx+2^nx-1$ …… ㉡

㉡에 $x=1$을 대입하면

$1+a-1=3^n\times1+2^n\times1-1$

즉, $a=3^n+2^n-1$

이때 $n\geq2$이면 ㉡에서 좌변은 x항이 존재하지 않으므로 $n=1$

따라서 $a=3+2-1=4$이므로 $n+a=5$

답 ②

36

$(x+2)(x-1)$

다음은 다항식 $x^4+ax^3+bx^2+cx+d$를 다항식 x^2+x-2로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하는 과정의 일부이다.

1	1	a	b	c	d
		$\boxed{\quad}$			
-2	$\boxed{\quad}$				1
	$\boxed{\quad}$				
	1	-3	6	-15	

네 상수 a, b, c, d에 대하여 $abcd$의 값은?

① 16 ② 18 ③ 20
④ 22 ✓⑤ 24

Step 1 네 상수 a, b, c, d의 값 각각 구하기

$x^2+x-2=(x+2)(x-1)$이므로 다항식 $x^4+ax^3+bx^2+cx+d$를 다항식 $(x+2)(x-1)$로 나눈 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하는 과정의 일부는 다음과 같다.

1	1	a	b	c	d
		1	$a+1$	$a+b+1$	$a+b+c+1$
-2	1	$a+1$	$a+b+1$	$a+b+c+1$	$a+b+c+d+1$
		-2	$-2a+2$	$2a-2b-6$	
	1	$a-1$	$-a+b+3$	$3a-b+c-5$	

$a-1=-3$에서 $a=-2$

$-a+b+3=b+5=6$에서 $b=1$

$3a-b+c-5=c-12=-15$에서 $c=-3$

$a+b+c+d+1=d-3=1$에서 $d=4$

Step 2 $abcd$의 값 구하기

따라서 $a=-2$, $b=1$, $c=-3$, $d=4$이므로

$abcd=-2\times1\times(-3)\times4=24$ 답 ⑤

37

$f(x)=g(x)Q(x)+R(x)$

다항식 $f(x)$를 이차식 $g(x)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)$라 할 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $f(x)=2x^3+7x^2+10x+5$, $g(x)=x^2+2x+3$일 때, $R(x)$는 일차식이다.

ㄴ. 방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 두 근을 α, β라 하면 $f(\alpha)=f(\beta)$이다.

ㄷ. 다항식 $g(x)$가 $x-\alpha$와 $x-\beta\ (\alpha\neq\beta)$를 인수로 가질 때, $f(\alpha)=f(\beta)$이면 $R(x)$는 상수이다.

① ㄱ ② ㄴ ✓③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

Step 1 나눗셈을 식으로 나타내기

다항식 $f(x)$를 이차식 $g(x)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)$라 하면

$f(x)=g(x)Q(x)+R(x)$

이때 $R(x)$의 차수는 $g(x)$의 차수보다 낮다.

Step 2 보기의 참, 거짓 판단하기

ㄱ. $f(x)=2x^3+7x^2+10x+5$를 $g(x)=x^2+2x+3$으로 나누면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|l} & 2x+3 \\ \hline x^2+2x+3 & 2x^3+7x^2+10x+5 \\ & 2x^3+4x^2+6x \\ \hline & \quad 3x^2+4x+5 \\ & \quad 3x^2+6x+9 \\ \hline & \qquad -2x-4 \end{array}$$

따라서 $R(x)=-2x-4$이므로 일차식이다. (참)

ㄴ. [반례] $f(x)=2x^3+7x^2+10x+5$, $g(x)=x^2-3x+2$라 하면

$g(x)=0$에서 $x^2-3x+2=0$

$(x-1)(x-2)=0$

즉, $x=1$ 또는 $x=2$

따라서

$f(1)=2+7+10+5=24$,

$f(2)=16+28+20+5=69$

이므로 $f(1)\neq f(2)$이다. (거짓)

ㄷ. $f(x)=k(x-\alpha)(x-\beta)Q(x)+R(x)$ (k는 0이 아닌 상수)에서

$f(\alpha)=R(\alpha)$, $f(\beta)=R(\beta)$

이고 $f(\alpha)=f(\beta)$이므로

$R(\alpha)=R(\beta)$

이때 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라고 하면

$a\alpha+b=a\beta+b$에서 $a(\alpha-\beta)=0$

이때 $\alpha\neq\beta$이므로 $a=0$

따라서 $R(x)=b$이므로 $R(x)$는 상수이다. (참)

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

1등급을 넘어서는 상위 1%

본문 25쪽

38

$(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)=x^5-1$임을 이용한다.

다항식 $x^{2026}-1$을 $x^4+x^3+x^2+x+1$로 나눈 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(x)$를 $x-10$으로 나눈 나머지를 구하시오. 9

문항 파헤치기

$f(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$이라 하고 $(x-1)f(x)=x^5-1$임을 이용하여 $x^{2026}-1$을 다항식 $f(x)$로 나눈 나머지를 구한다.

풀이

Step 1 $f(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$이라 하고 $(x-1)f(x)$ 구하기

$f(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$이라 하면

$(x-1)f(x)$

$=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$

$=x(x^4+x^3+x^2+x+1)-(x^4+x^3+x^2+x+1)$

$=(x^5+x^4+x^3+x^2+x)-(x^4+x^3+x^2+x+1)$

$=x^5-1$

Step 2 x^{2026}을 $(x-1)f(x)$가 포함된 식으로 나타내기

$x^{2026}=(x^5)^{405}\times x$

이므로

$x^{2026}=(x^5)^{405}\times x$

$\quad=\{(x-1)f(x)+1\}^{405}\times x$

Step 3 $x^{2026}-1$을 $f(x)$가 포함된 식으로 나타내기

이때 $\{(x-1)f(x)+1\}^{405}=f(x)g(x)+1$ ($g(x)$는 다항식)이라 하면

$x^{2026}-1$

$=\{(x-1)f(x)+1\}^{405}\times x-1$

$=\{f(x)g(x)+1\}\times x-1$

$=f(x)g(x)\times x+x-1$

$=f(x)\{xg(x)\}+x-1$

Step 4 $R(x)$를 $x-10$으로 나눈 나머지 구하기

따라서 $x^{2026}-1$을 $x^4+x^3+x^2+x+1$로 나누었을 때의 나머지 $R(x)$는

$R(x)=x-1$

이므로 $R(x)$를 $x-10$으로 나눈 나머지는

$R(10)=10-1=9$ 답 9

실수 Point 찾기

$x^{2026}-1$을 $x^4+x^3+x^2+x+1$로 나눈 나머지를 직접 구하기는 쉽지 않으므로 $(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)=x^5-1$임을 이용하여 나눗셈의 식을 간단히 하는 것이 중요하다.

03 인수분해

내신 빈출 필수 문제

본문 28~29쪽

01 ②	02 ③	03 ①	04 ⑤
05 ④	06 ④	07 $(2z-y)(3x-z)(x-y)$	
08 ③	09 ②	10 98	
11 $(x-2)(x+3)(x-1)$			

01 $64x^6-144x^4y+108x^2y^2-27y^3$
$=(4x^2)^3-3\times(4x^2)^2\times 3y+3\times 4x^2\times(3y)^2-(3y)^3$
$=(4x^2-3y)^3$
따라서 $a=4$, $b=-3$이므로
$a-b=4-(-3)=7$ 답 ②

02 x^3+27y^6
$=x^3+(3y^2)^3$
$=(x+3y^2)(x^2-3xy^2+9y^4)$ 답 ③

03 $x^2+4y^2+9z^2-4xy+12yz-6zx$
$=x^2+(-2y)^2+(-3z)^2+2x(-2y)+2(-2y)(-3z)+2x(-3z)$
$=(x-2y-3z)^2$ 답 ①

04 $x^2+2x=X$라 하면
$(x^2+2x)^2-18(x^2+2x+1)+63$
$=X^2-18(X+1)+63$
$=X^2-18X+45=(X-3)(X-15)$
$=(x^2+2x-3)(x^2+2x-15)$
$=(x+3)(x-1)(x+5)(x-3)$
이때 양수인 두 수는 3, 5이므로
$pq=3\times5=15$ 답 ⑤

05 $x^2+4x=X$라 하면
$(x^2+4x+a)(x^2+4x-a)-16$
$=(X+a)(X-a)-16$
$=X^2-a^2-16$
$=X^2-(a^2+16)$ …… ㉠
$(x+b)(x-1)(x^2+4x+5)$
$=\{x^2+(b-1)x-b\}(x^2+4x+5)$
$=\{x^2+(b-1)x-b\}(X+5)$ …… ㉡
이때 ㉡을 전개했을 때 ㉠이 되기 위해서는 $b=5$이어야 한다. 즉,
$X^2-(a^2+16)=(x^2+4x-5)(X+5)$
$=(X-5)(X+5)$
$=X^2-25$
에서 $a^2+16=25$, $a^2=9$
이때 $a>0$이므로 $a=3$
따라서 $a+b=3+5=8$ 답 ④

06 $x-1=X$라 하면
$(x-1)^4+(x-1)^2+1$
$=X^4+X^2+1$
$=(X^4+2X^2+1)-X^2$
$=(X^2+1)^2-X^2$
$=(X^2-X+1)(X^2+X+1)$
$=\{(x-1)^2-(x-1)+1\}\times\{(x-1)^2+(x-1)+1\}$
$=\{(x^2-2x+1)-(x-1)+1\}\times\{(x^2-2x+1)+(x-1)+1\}$
$=(x^2-3x+3)(x^2-x+1)$
따라서 보기 중 인수인 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

07 $3xy^2+6zx^2+2yz^2-3x^2y-y^2z-2z^2x-5xyz$
$=(6z-3y)x^2+(3y^2-5yz-2z^2)x+2yz^2-y^2z$
$=3(2z-y)x^2+(3y+z)(y-2z)x+yz(2z-y)$
$=(2z-y)\{3x^2-(3y+z)x+yz\}$
$=(2z-y)(3x-z)(x-y)$ 답 $(2z-y)(3x-z)(x-y)$

08 $f(x)=x^3-2x^2-5x+6$이라 하면 $f(1)=0$이므로 인수정리와 조립제법에 의하여 인수분해 하면 다음과 같다.

1	1	-2	-5	6
		1	-1	-6
	1	-1	-6	0

$x^3-2x^2-5x+6=(x-1)(x^2-x-6)$
$=(x-1)(x-3)(x+2)$
따라서 $a^2+b^2+c^2=1^2+3^2+(-2)^2=14$ 답 ③

09 $f(x)=4x^4-8x^3-7x^2+17x-6$이라 하면
$f(1)=0$, $f(2)=0$이므로 인수정리와 조립제법에 의하여 인수분해 하면 다음과 같다.

1	4	-8	-7	17	-6
		4	-4	-11	6
2	4	-4	-11	6	0
		8	8	-6	
	4	4	-3	0	

$4x^4-8x^3-7x^2+17x-6$
$=(x-1)(x-2)(4x^2+4x-3)$
$=(x-1)(x-2)(2x-1)(2x+3)$
따라서 보기 중에서 인수가 아닌 것은 $2x+1$이다. 답 ②

10 $x=99$라 하면
$99^3-1=x^3-1$
$=(x-1)(x^2+x+1)$
$99^2+100=99^2+(99+1)$
$=99^2+99+1=x^2+x+1$
…… ❶
따라서
$$\frac{99^3-1}{99^2+100}=\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x^2+x+1}=x-1=99-1=98$$
…… ❷
답 98

단계	채점 기준	비율
❶	분모와 분자를 각각 인수분해 한 경우	80 %
❷	식의 값을 구한 경우	20 %

11 $f(x)=x^3+ax^2-7x+b$라 하면

$x^2+x-6=(x+3)(x-2)$이므로 $x+3$, $x-2$는 $f(x)$의 인수이다.

즉, $f(-3)=0$, $f(2)=0$이므로

$f(-3)=-27+9a+21+b$

$\quad=9a+b-6=0$

에서 $9a+b=6$ …… ㉠

$f(2)=8+4a-14+b$

$\quad=4a+b-6=0$

에서 $4a+b=6$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=0$, $b=6$

…… ❶

$x^3+ax^2-7x+b=x^3-7x+6$이므로 인수정리와 조립제법에 의하여 인수분해 하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & 0 & -7 & 6 \\ & & 2 & 4 & -6 \\ \hline & 1 & 2 & -3 & \boxed{0} \end{array}$$

따라서

$x^3-7x+6=(x-2)(x^2+2x-3)=(x-2)(x+3)(x-1)$

…… ❷

답 $(x-2)(x+3)(x-1)$

단계	채점 기준	비율
❶	a, b의 값을 각각 구한 경우	50 %
❷	다항식을 인수분해 한 경우	50 %

내신 고득점 도전 문제

본문 30~31쪽

12 ④ **13** ④ **14** ④ **15** ② **16** ①

17 $\frac{1}{3}(x^2+3)(x^4+9x^2+21)$

18 $(b^2+c^2)(a^2+b^2)(a^2+c^2)$ **19** ②

20 ④

21 $a=b$인 이등변삼각형 또는 빗변의 길이가 b인 직각삼각형

22 0.7161

12 $f(2a, b)=(2a)^2+6\times(2a)\times b=4a^2+12ab$,

$f(2b, a)=(2b)^2+6\times(2b)\times a=4b^2+12ab$

이므로

$2a\times f(2a, b)+2b\times f(2b, a)$

$=2a\times(4a^2+12ab)+2b\times(4b^2+12ab)$

$=8a^3+24a^2b+24ab^2+8b^3$

$=(2a+2b)^3$

답 ④

13 $(2x-y)^3-(y-2z)^3$

$=\{(2x-y)-(y-2z)\}\{(2x-y)^2+(2x-y)(y-2z)+(y-2z)^2\}$

$=(2x-2y+2z)$

$\quad\{(4x^2-4xy+y^2)+(2xy-4zx-y^2+2yz)+(y^2-4yz+4z^2)\}$

$=2(x-y+z)(4x^2+y^2+4z^2-2xy-2yz-4zx)$

따라서 $a=2$, $b=4$, $c=-2$이므로

$a+b+c=4$

답 ④

14 $(2x-y)^2+3z(3z-2y+4x)$

$=(4x^2-4xy+y^2)+(9z^2-6yz+12zx)$

$=4x^2+y^2+9z^2-4xy-6yz+12zx$

$=(2x)^2+(-y)^2+(3z)^2+2(2x)(-y)+2(-y)(3z)+2(3z)(2x)$

$=(2x-y+3z)^2$

따라서 $a^2+b^2+c^2=2^2+(-1)^2+3^2=14$

답 ④

15 $(2-x)^4-4(x-2)^2-4(x^2-1)$

$=(x-2)^4-4(x-2)^2+4-4x^2$

$=(x-2)^4-4(x-2)^2+4-(2x)^2$

$=\{(x-2)^2-2\}^2-(2x)^2$

$=(x^2-4x+2)^2-(2x)^2$

$=(x^2-6x+2)(x^2-2x+2)$

따라서 $a=6$, $b=2$ 또는 $a=2$, $b=6$이므로

$ab=12$

답 ②

16 $(x-1)x(x+1)(x+2)+k$

$=\{(x-1)(x+2)\}\{x(x+1)\}+k$

$=(x^2+x-2)(x^2+x)+k$

$=(x^2+x)^2-2(x^2+x)+k$

$x^2+x=k$라 하면

$X^2-2X+k=(X-1)^2+k-1$

이때 $f(x)=x^2+px+q$ (p, q는 상수)라 하면

$(X-1)^2+k-1=(x^2+px+q)^2$

이 성립하기 위해서는 $k=1$이어야 한다. 즉,

$(X-1)^2=(x^2+px+q)^2$

$(x^2+x-1)^2=(x^2+px+q)^2$

에서 $p=1$, $q=-1$

따라서 $f(x)=x^2+x-1$이므로

$f(2k+1)=f(3)=3^2+3-1=11$

답 ①

17 $x^2+1=X$라 하면

$\frac{1}{3}(x^2+1)^3+3(x^2+1)^2+9(x^2+1)+\frac{26}{3}$

$=\frac{1}{3}(X^3+9X^2+27X+26)$

$=\frac{1}{3}(X^3+9X^2+27X+27)-\frac{1}{3}$

$=\frac{1}{3}(X+3)^3-\frac{1}{3}$

$=\frac{1}{3}(x^2+4)^3-\frac{1}{3}$

$=\frac{1}{3}\{(x^2+4)^3-1^3\}$

$=\frac{1}{3}\{(x^2+4)-1\}\{(x^2+4)^2+(x^2+4)+1^2\}$

$=\frac{1}{3}(x^2+3)(x^4+9x^2+21)$ 　　답 $\frac{1}{3}(x^2+3)(x^4+9x^2+21)$

18 $a^2=x$, $b^2=y$, $c^2=z$라 하면

$(a^2+b^2+c^2)(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-a^2b^2c^2$

$=(x+y+z)(xy+yz+zx)-xyz$

$=(x^2y+xyz+zx^2)+(xy^2+y^2z+xyz)+(xyz+yz^2+z^2x)-xyz$

$=(y+z)x^2+(y^2+2yz+z^2)x+y^2z+yz^2$

$=(y+z)x^2+(y+z)^2x+yz(y+z)$

$=(y+z)\{x^2+(y+z)x+yz\}$

$=(y+z)(x+y)(x+z)$

$=(b^2+c^2)(a^2+b^2)(a^2+c^2)$ 　　답 $(b^2+c^2)(a^2+b^2)(a^2+c^2)$

19 $f(x)=x^4+ax^2+b$가 $(x-2)^2$을 인수로 가지므로 인수정리와 조립제법을 이용하여 인수분해 하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|rrrrr}
2 & 1 & 0 & a & 0 & b \\
 & & 2 & 4 & 2a+8 & 4a+16 \\
\hline
2 & 1 & 2 & a+4 & 2a+8 & \boxed{4a+b+16} \\
 & & 2 & 8 & 2a+24 & \\
\hline
 & 1 & 4 & a+12 & \boxed{4a+32} &
\end{array}$$

즉, $4a+b+16=0$, $4a+32=0$에서

$a=-8$, $b=16$

따라서

$f(x)=x^4+ax^2+b$

$=(x-2)^2(x^2+4x+a+12)$

$=(x-2)^2(x^2+4x+4)$

$=(x-2)^2(x+2)^2$ 　　답 ②

20 $f(x)=2x^3+7x^2+7x+2$라 하면 $f(-1)=0$이므로 인수정리와 조립제법을 이용하여 인수분해 하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|rrrr}
-1 & 2 & 7 & 7 & 2 \\
 & & -2 & -5 & -2 \\
\hline
 & 2 & 5 & 2 & \boxed{0}
\end{array}$$

$f(x)=2x^3+7x^2+7x+2$

$=(x+1)(2x^2+5x+2)$

$=(x+1)(2x+1)(x+2)$

이때 각 모서리의 길이가 일차항의 계수와 상수항이 모두 자연수인 x에 대한 일차식이므로 이 직육면체의 모든 모서리의 길이의 합은

$4(x+1)+4(2x+1)+4(x+2)=16x+16$ 　　답 ④

21 $a^3+b^3+ac^2=a^2b+ab^2+bc^2$에서

$(a-b)c^2+a^3+b^3-a^2b-ab^2=0$

$(a-b)c^2+(a^3-a^2b)+(b^3-ab^2)=0$

$(a-b)c^2+a^2(a-b)-b^2(a-b)=0$

$(a-b)(c^2+a^2-b^2)=0$

………… ❶

이므로 $a-b=0$ 또는 $c^2+a^2-b^2=0$

$a=b$ 또는 $c^2+a^2=b^2$

………… ❷

따라서 주어진 삼각형은 $a=b$인 이등변삼각형 또는 빗변의 길이가 b인 직각삼각형이다.

………… ❸

답 $a=b$인 이등변삼각형 또는 빗변의 길이가 b인 직각삼각형

단계	채점 기준	비율
❶	주어진 식을 인수분해 한 경우	50 %
❷	a, b, c에 대한 관계식을 구한 경우	30 %
❸	삼각형의 모양을 구한 경우	20 %

22 $x=2.1$이라 하면

$2.1^4-2\times2.1^3-2.1^2+2\times2.1$

$=x^4-2x^3-x^2+2x$

$=x^3(x-2)-x(x-2)$

$=(x^3-x)(x-2)$

$=x(x^2-1)(x-2)$

$=x(x-1)(x+1)(x-2)$

………… ❶

따라서 위 식에 $x=2.1$을 대입하면

$2.1\times1.1\times3.1\times0.1$

$=0.7161$

………… ❷

답 0.7161

단계	채점 기준	비율
❶	주어진 식을 인수분해 한 경우	60 %
❷	주어진 식의 값을 구한 경우	40 %

변별력을 만드는 1등급 문제

본문 32~34쪽

23 ④	**24** ②	**25** ③	**26** ①	**27** ②
28 ②	**29** ④	**30** $3(x+y)(z+x)(z+y)$	**31** ①	
32 ④	**33** ⑤	**34** ①	**35** 12	**36** 2
37 ⑤				

23
$x=65$로 놓고 인수분해 한다.

등식 $\sqrt{65^3-3\times65^2+194}=2^n$을 만족시키는 자연수 n의 값은?

① 6 　② 7 　③ 8 　④ 9 　⑤ 10

Step 1 $x=65$라 하고 근호 안의 식을 인수분해 하기

$x=65$라 하면

$65^3-3\times65^2+194=65^3-3\times65^2+3\times65-1$

$=x^3-3x^2+3x-1$

$=(x-1)^3$

$=64^3$

$=(2^6)^3=2^{18}$

Step 2 n의 값 구하기

$\sqrt{65^3-3\times65^2+194}=\sqrt{2^{18}}=2^9$

따라서 $n=9$

답 ④

24

2 이상의 세 자연수 a, b, c에 대하여

$$6a^3bc+11a^2b^2c+3ab^3c=6270$$

일 때, $a^2+b^2+c^2$의 값은?

a, b, c가 자연수임을 이용하기 위하여 6270을 소인수분해 한다.

① 36 ② 38 ③ 40 ④ 42 ⑤ 44

Step 1 인수분해 하기

$6a^3bc+11a^2b^2c+3ab^3c$

$=abc(6a^2+11ab+3b^2)$

$=abc(2a+3b)(3a+b)$

Step 2 소인수분해 하기

$6270=30\times209=2\times3\times5\times11\times19$

Step 3 a, b, c의 값을 구한 후 $a^2+b^2+c^2$의 값 구하기

이때 $a\geq2$, $b\geq2$, $c\geq2$이므로

$2a+3b\geq10$, $3a+b\geq8$

즉, $2a+3b=11$, $3a+b=19$ 또는 $2a+3b=19$, $3a+b=11$

이때 $2a+3b=11$, $3a+b=19$이면 2 이상의 자연수 a, b는 존재하지 않는다.

또, $2a+3b=19$, $3a+b=11$이면 $a=2$, $b=5$이므로

$c=3$

따라서

$a^2+b^2+c^2=4+25+9=38$

답 ②

25

세 다항식

$$A=x^4+ax^3+bx^2+cx+d,$$
$$B=x^3-7x+6,$$
$$C=x^3+2x^2-5x-6$$

두 다항식 B, C를 인수분해 한다.

에 대하여 두 다항식 B, C가 모두 다항식 A의 인수일 때, $abcd$의 값은? (단, a, b, c, d는 상수이다.)

① 34 ② 38 ③ 42 ④ 46 ⑤ 50

Step 1 두 다항식 B, C를 각각 인수분해 하기

$B=x^3-7x+6$

$\quad=(x-1)(x-2)(x+3)$

$C=x^3+2x^2-5x-6$

$\quad=(x+1)(x-2)(x+3)$

Step 2 다항식 A 구하기

이때 두 다항식 B, C가 모두 다항식 A의 인수이므로

$A=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$

$\quad=(x-1)(x-2)(x+3)(x+1)$

$\quad=(x^2-1)(x^2+x-6)$

$\quad=x^4+x^3-7x^2-x+6$

Step 3 $abcd$의 값 구하기

따라서 $a=1$, $b=-7$, $c=-1$, $d=6$이므로

$abcd=1\times(-7)\times(-1)\times6=42$

답 ③

26

$f(x)$에서 x 대신에 $2k-1$을 대입하여 인수분해 한다.

다항식 $f(x)$가 상수 k에 대하여

$$f(x)=x^3-(2k+1)x^2+(k-1)x-2k+1$$

일 때, $f(2k-1)=-3$을 만족시키는 모든 k의 값의 합은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

Step 1 다항식 $f(x)$를 인수분해 하기

$f(x)$

$=x^3-(2k+1)x^2+(k-1)x-2k+1$

$=x\{x^2-(2k+1)x+k-1\}-2k+1$

Step 2 $f(2k-1)$ 구하기

$f(2k-1)$

$=(2k-1)\{(2k-1)^2-(2k+1)(2k-1)+k-1\}-(2k-1)$

$=(2k-1)\{(2k-1)^2-(2k+1)(2k-1)+k-1-1\}$

$=(2k-1)\{(4k^2-4k+1)-(4k^2-1)+k-2\}$

$=(2k-1)\times(-3k)$

$=-6k^2+3k$

Step 3 모든 k의 값의 합 구하기

즉, $-6k^2+3k=-3$에서

$2k^2-k-1=0$

$(2k+1)(k-1)=0$

$k=-\frac{1}{2}$ 또는 $k=1$

따라서 모든 k의 값의 합은

$-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$

답 ①

27

$f(x)$를 인수분해 한다.

두 다항식 $f(x)=x^6+x^4-x^2-1$, $g(x)=ax^3+bx$에 대하여 다항식 $f(x)+g(x)$가 x^2-1로 나누어떨어질 때, $f(x)+g(x)$를 $x+a+b$로 나눈 나머지는? (단, a, b는 0이 아닌 상수이다.)

$(x-1)(x+1)$

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

Step 1 다항식 $f(x)$를 인수분해 하기

$$\begin{aligned}f(x)&=x^6+x^4-x^2-1\\&=x^4(x^2+1)-(x^2+1)\\&=(x^2+1)(x^4-1)\\&=(x^2+1)(x^2+1)(x^2-1)\\&=(x^2+1)^2(x+1)(x-1)\end{aligned}$$

Step 2 $f(x)+g(x)$ 구하기

$f(x)+g(x)=(x^2+1)^2(x+1)(x-1)+ax^3+bx$

$x^2-1=(x-1)(x+1)$

이고, 다항식 $f(x)+g(x)$가 $x^2-1=(x-1)(x+1)$로 나누어떨어지므로 ax^3+bx도 $(x-1)(x+1)$로 나누어떨어져야 한다.

Step 3 $a+b$의 값 구하기

즉, ax^3+bx의 값은 $x=1$, $x=-1$일 때 0이어야 하므로

$a+b=0$, $-a-b=0$에서 $a+b=0$

Step 4 $f(x)+g(x)$를 $x+a+b$로 나눈 나머지 구하기

따라서 $f(x)+g(x)$를 x로 나눈 나머지는

$f(0)+g(0)=-1$

답 ②

28

두 자연수 m, n에 대하여 등식

m, n이 자연수라는 조건을 이용하기 위하여 인수분해 한다.

$$2mn+2m+n^2+n=132$$

를 만족시키는 m, n의 모든 순서쌍 (m, n)의 개수는?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

Step 1 주어진 식 인수분해 하기

$2mn+2m+n^2+n=2m(n+1)+n(n+1)=(2m+n)(n+1)$

Step 2 조건을 만족시키는 두 자연수 m, n의 값 각각 구하기

m, n은 자연수이므로 $2m+n>n+1\geq2$

이때 $132=2^2\times3\times11$이므로

$n+1=2$일 때, $2m+n=66$ …… ㉠

$n+1=3$일 때, $2m+n=44$ …… ㉡

$n+1=4$일 때, $2m+n=33$ …… ㉢

$n+1=6$일 때, $2m+n=22$ …… ㉣

$n+1=11$일 때, $2m+n=12$ …… ㉤

그런데 ㉠, ㉣인 경우는 m이 자연수가 아니므로 순서쌍 (m, n)은 $(21, 2)$, $(15, 3)$, $(1, 10)$의 3개이다.

답 ②

29

모든 n에 대하여 등식

인수분해 하여 $f(n)$, $g(n)$을 각각 구한다.

$$(n-3)(n-5)(n-7)(n-9)-9=\{f(n)\}^2\times g(n)$$

을 만족시키는 일차식 $f(n)$과 이차식 $g(n)$이 있다. $g(n)$을 $f(n)$으로 나눈 나머지는? (단, $f(n)$과 $g(n)$의 최고차항의 계수는 1이다.)

① -16 ② -14 ③ -12 ④ -10 ⑤ -8

Step 1 주어진 식 인수분해 하기

$$\begin{aligned}&(n-3)(n-5)(n-7)(n-9)-9\\&=\{(n-3)(n-9)\}\{(n-5)(n-7)\}-9\\&=(n^2-12n+27)(n^2-12n+35)-9\\&=(n^2-12n)^2+62(n^2-12n)+936\\&=(n^2-12n+36)(n^2-12n+26)\\&=(n-6)^2(n^2-12n+26)\end{aligned}$$

Step 2 $g(n)$을 $f(n)$으로 나눈 나머지 구하기

따라서 $f(n)=n-6$, $g(n)=n^2-12n+26$이므로 $g(n)$을 $f(n)$으로 나눈 나머지는

$$\begin{aligned}g(6)&=6^2-12\times6+26\\&=36-72+26\\&=-10\end{aligned}$$

답 ④

30

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

$3(x+y)(z+x)(z+y)$

다항식 $(x+y+z)^3-(x^3+y^3+z^3)$을 인수분해 하시오.

Step 1 $x+y=w$라 하고 곱셈 공식의 변형 이용하기

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$이므로

$x+y=w$라 하면

$$\begin{aligned}&(x+y+z)^3-(x^3+y^3+z^3)\\&=(w+z)^3-(w^3-3xyw+z^3)\\&=(w^3+3w^2z+3wz^2+z^3)-(w^3-3xyw+z^3)\end{aligned}$$

Step 2 인수분해 하기

$$\begin{aligned}&=3w^2z+3wz^2+3xyw\\&=3w(wz+z^2+xy)\\&=3(x+y)\{(x+y)z+z^2+xy\}\\&=3(x+y)\{z^2+(x+y)z+xy\}\\&=3(x+y)(z+x)(z+y)\end{aligned}$$

답 $3(x+y)(z+x)(z+y)$

31

두 자연수 m, n에 대하여

m, n이 자연수라는 조건을 이용하기 위하여 인수분해 한다.

$$m^3-4m^2n+mn^2+6n^3=0$$

이 성립할 때, **보기** 에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $m=2$이면 $n=1$이다.

ㄴ. m이 짝수이면 n은 짝수이다.

ㄷ. m은 5의 배수가 될 수 없다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄷ

Step 1 m, n에 대한 관계식 구하기

$m^3-4m^2n+mn^2+6n^3=0$에서

$(m^3-4m^2n+4mn^2)-3mn^2+6n^3=0$

$m(m^2-4mn+4n^2)-3n^2(m-2n)=0$

$m(m-2n)^2-3n^2(m-2n)=0$

$(m^2-2mn-3n^2)(m-2n)=0$

$(m+n)(m-3n)(m-2n)=0$

이때 $m+n>0$이므로

$m=3n$ 또는 $m=2n$

Step 2 보기 확인하기

ㄱ. $m=2$이면 $3n=2$ 또는 $2n=2$
이때 n은 자연수이므로 $n=1$이다. (참)

ㄴ. $m=6$일 때 $3n=6$ 또는 $2n=6$
즉, $m=6$, $n=3$일 때도 성립한다. (거짓)

ㄷ. $n=5$이면 $m=15$ 또는 $m=10$이므로 m이 5의 배수인 경우가 존재한다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

답 ①

32

한 모서리의 길이가 $3x+6$인 정육면체와 반지름의 길이가 $x+2$인 구와 반지름의 길이가 $x+1$인 구가 있다. 정육면체의 부피를 $f(x)$, 두 구의 부피의 합을 $g(x)$라 하자. 다항식 $\frac{1}{3}f(x)-\frac{3}{4\pi}g(x)$를 인수분해 하면 $(x+a)(7x^2+bx+c)$일 때, $a+b+c$의 값은?

반지름의 길이를 r이라 하면 $\frac{4}{3}\pi r^3$이다.

(단, a, b, c는 상수이다)

① 42 ② 44 ③ 46
④ 48 ⑤ 50

Step 1 $f(x)$, $g(x)$ 각각 구하기

$f(x)=(3x+6)^3=3^3(x+2)^3$

$\quad=27(x+2)^3$

$g(x)=\frac{4}{3}\pi(x+2)^3+\frac{4}{3}\pi(x+1)^3$

$\quad=\frac{4}{3}\pi\{(x+2)^3+(x+1)^3\}$

Step 2 $\frac{1}{3}f(x)-\frac{3}{4\pi}g(x)$를 구한 후 인수분해 하기

$\frac{1}{3}f(x)-\frac{3}{4\pi}g(x)$

$=\frac{1}{3}\times27(x+2)^3-\frac{3}{4\pi}\times\frac{4}{3}\pi\{(x+2)^3+(x+1)^3\}$

$=9(x+2)^3-\{(x+2)^3+(x+1)^3\}$

$=8(x+2)^3-(x+1)^3$

$=(2x+4)^3-(x+1)^3$

$=\{(2x+4)-(x+1)\}\{(2x+4)^2+(2x+4)(x+1)+(x+1)^2\}$

$=(x+3)\{(4x^2+16x+16)+(2x^2+6x+4)+(x^2+2x+1)\}$

$=(x+3)(7x^2+24x+21)$

Step 3 $a+b+c$의 값 구하기

따라서 $a=3$, $b=24$, $c=21$이므로

$a+b+c=48$

답 ④

33

$(x+2)(x^2-2x+4)$

최고차항의 계수가 1인 이차식 $f(x)$에 대하여 다항식 $x^3+8-f(x)$를 인수분해 하면 $(x+2)(x^2+ax+a+3)$일 때, $f(a)$의 값은?

(단, a는 상수이다.)

① -5 ② -4 ③ -3
④ -2 ⑤ -1

Step 1 다항식 x^3+8 인수분해 하기

$x^3+8=x^3+2^3$

$\quad=(x+2)(x^2-2x+4)$

Step 2 $f(x)$ 구하기

$x^3+8-f(x)$

$=(x+2)(x^2-2x+4)-f(x)$

$=(x+2)(x^2+ax+a+3)$

이기 위해서는 최고차항의 계수가 1인 이차식 $f(x)$도 $x+2$를 인수로 가져야 하므로

$f(x)=(x+2)(x+k)$ (k는 상수)

Step 3 a의 값 구하기

$(x+2)(x^2-2x+4)-f(x)$

$=(x+2)(x^2-2x+4)-(x+2)(x+k)$

$=(x+2)\{(x^2-2x+4)-(x+k)\}$

$=(x+2)(x^2-3x+4-k)$

즉, $x^2-3x+4-k=x^2+ax+a+3$이므로

$a=-3$, $k=4$

Step 4 $f(a)$의 값 구하기

따라서 $f(x)=(x+2)(x+4)$이므로

$f(a)=f(-3)=-1\times1=-1$

답 ⑤

34

$f(x)=(x^2+3x+9)Q(x)+2x-1$

다항식 $f(x)$를 x^2+3x+9로 나누었을 때의 몫은 $Q(x)$, 나머지는 $2x-1$이고, 다항식 $f(x)$를 x^3-27로 나눈 나머지를 $R(x)$라 하자. 다항식 $Q(x)$를 $x-3$으로 나눈 나머지가 -2일 때, 다항식 $R(x)$를 $x+3$으로 나눈 나머지는?

$(x-3)(x^2+3x+9)$

① -25 ② -20 ③ -15
④ -10 ⑤ -5

Step 1 $f(x)$를 x^2+3x+9로 나눈 나눗셈을 식으로 나타내기

다항식 $f(x)$를 x^2+3x+9로 나누었을 때의 몫은 $Q(x)$, 나머지는 $2x-1$이므로

$f(x)=(x^2+3x+9)Q(x)+2x-1$ …… ㉠

Step 2 $f(x)$를 x^3-27로 나눈 나눗셈을 식으로 나타내기

다항식 $f(x)$를 x^3-27로 나누었을 때의 몫을 $Q'(x)$라 하고, 나머지 $R(x)$를 $R(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$f(x)$

$=(x^3-27)Q'(x)+R(x)$

$=(x-3)(x^2+3x+9)Q'(x)+ax^2+bx+c$

$=(x^2+3x+9)\{(x-3)Q'(x)\}+ax^2+bx+c$
$=(x^2+3x+9)\{(x-3)Q'(x)\}+a(x^2+3x+9)+2x-1$ …… ㉡

Step 3 $R(x)$를 $x+3$으로 나눈 나머지 구하기
다항식 $Q(x)$를 $x-3$으로 나눈 나머지가 -2이므로
$Q(3)=-2$
㉠에 $x=3$을 대입하면
$f(3)=27Q(3)+5=-49$
㉡에 $x=3$을 대입하면
$f(3)=27a+5=-49$에서
$a=-2$
따라서 $R(x)=-2(x^2+3x+9)+2x-1$이므로 $R(x)$를 $x+3$으로 나눈 나머지는
$R(-3)$
$=-2(9-9+9)-6-1$
$=-25$ 답 ①

35

세 자연수 a, b, c에 대하여 세 변의 길이가 a, b, c인 삼각형 ABC가 다음 조건을 만족시킬 때, 삼각형 ABC의 둘레의 길이를 구하시오. 12

(가) $a^3-c^3+ca^2+ab^2-ac^2+b^2c=0$
(나) $a^2+b^2+c^2=10c$

주어진 식을 인수분해 하여 a, b, c에 대한 관계식을 구한다.

Step 1 인수분해를 이용하여 a, b, c에 대한 관계식 구하기
조건 (가) $a^3-c^3+ca^2+ab^2-ac^2+b^2c=0$에서
$(a+c)b^2+a^3+ca^2-c^3-ac^2=0$
$(a+c)b^2+(a+c)a^2-(a+c)c^2=0$
$(a+c)(b^2+a^2-c^2)=0$
이때 $a+c>0$이므로
$b^2+a^2-c^2=0$
즉, $c^2=a^2+b^2$ …… ㉠
따라서 삼각형 ABC는 빗변의 길이가 c인 직각삼각형이다.

Step 2 조건 (나)를 이용하여 c의 값 구하기
조건 (나) $a^2+b^2+c^2=10c$에서 ㉠에 의하여
$a^2+b^2+c^2=(a^2+b^2)+c^2$
$=c^2+c^2$
$=2c^2$
$=10c$
이때 $c>0$이므로
$c=5$

Step 3 삼각형 ABC의 둘레의 길이 구하기
㉠에서 $a^2+b^2=25$이고 a, b가 자연수이므로
$a=3$, $b=4$ 또는 $a=4$, $b=3$
따라서 삼각형 ABC의 둘레의 길이는
$a+b+c=12$ 답 12

36

자연수 n에 대하여 n^3+4n^2+8n+8이 n^2+3n+2의 배수일 때, n의 값을 구하시오. 2

주어진 식을 인수분해 한다.

Step 1 주어진 식을 각각 인수분해 하기
n^3+4n^2+8n+8
$=(n^3+4n^2+4n)+4n+8$
$=n(n^2+4n+4)+4(n+2)$
$=n(n+2)^2+4(n+2)$
$=(n+2)\{n(n+2)+4\}$
$=(n+2)(n^2+2n+4)$
이고
$n^2+3n+2=(n+1)(n+2)$

Step 2 n^3+4n^2+8n+8이 n^2+3n+2의 배수일 조건 구하기
$(n+2)(n^2+2n+4)$가 $(n+1)(n+2)$의 배수이기 위해서는
$n^2+2n+4=(n+1)k$ (k는 자연수)
이어야 한다.
이때 $n^2+2n+4=(n+1)^2+3$이므로
$n+1$은 3의 양의 약수이어야 한다.
따라서 $n+1=3$에서 $n=2$ 답 2

37

세 자연수 a, b, c가 다음 조건을 만족시킨다. $a+b+c$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M-m$의 값은?

(가) $a<b<c$
(나) $a+b<c$
(다) 다항식 $ax^2-(a^2+ab)x+a^2b-174$는 $x-c$로 나누어떨어진다.

$f(x)=ax^2-(a^2+ab)x+a^2b-174$라 하고 $f(c)=0$임을 이용한다.

① 80 ② 90 ③ 100 ④ 110 ✓⑤ 120

Step 1 $ax^2-(a^2+ab)x+a^2b-174$를 인수분해 하기
$f(x)=ax^2-(a^2+ab)x+a^2b-174$라 하면
조건 (다)에 의하여
$f(c)=ac^2-(a^2+ab)c+a^2b-174=0$이므로
$ac^2-(a^2+ab)c+a^2b=174$
$a\{c^2-(a+b)c+ab\}=174$
즉, $a(c-a)(c-b)=174$

Step 2 두 조건 (가), (나)를 이용하여 $a+b+c$의 값 구하기
이때 $174=2\times3\times29$이고 두 조건 (가), (나)에 의하여
$a<c-b<c-a$이므로
$a=1$, $c-b=2$일 때, $c-a=87$
$a=1$, $c-b=3$일 때, $c-a=58$
$a=1$, $c-b=6$일 때, $c-a=29$
$a=2$, $c-b=3$일 때, $c-a=29$

즉,
$a=1,\ b=86,\ c=88$일 때, $a+b+c=175$
$a=1,\ b=56,\ c=59$일 때, $a+b+c=116$
$a=1,\ b=24,\ c=30$일 때, $a+b+c=55$
$a=2,\ b=28,\ c=31$일 때, $a+b+c=61$

Step 3 $M-m$의 값 구하기
따라서 $M=175,\ m=55$이므로
$M-m=120$ 답 ⑤

1등급을 넘어서는 상위 1%
본문 35쪽

38
세 정수 $x,\ y,\ z$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 $x,\ y,\ z$의 모든 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수를 구하시오. 2

(가) $x\le y\le z$
(나) $x^3+y^3+z^3-3xyz=25$ → $(x+y)^3-3xy(x+y)$

문항 파헤치기
$x^3+y^3+z^3-3xyz$를 인수분해한 후 $y-x=a,\ z-y=b,\ z-x=a+b$로 치환하여 나타낸 다음 $x,\ y,\ z$가 정수이고 조건 (가)를 이용하여 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수를 구한다.

풀이

Step 1 $x^3+y^3+z^3-3xyz$를 인수분해 하기
$x^3+y^3+z^3-3xyz$
$=(x+y)^3-3xy(x+y)+z^3-3xyz$
$=(x+y)^3+z^3-3xy(x+y+z)$
$=(x+y+z)\{(x+y)^2-(x+y)z+z^2\}-3xy(x+y+z)$
$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$
$=\frac{1}{2}(x+y+z)\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}$

Step 2 $y-x=a,\ z-y=b,\ z-x=a+b$라 하고 $a,\ b$에 대한 관계식 구하기
이때 $y-x=a,\ z-y=b,\ z-x=a+b$라 하면
$a,\ b$는 음이 아닌 정수이므로
$\frac{1}{2}\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}$
$=a^2+b^2+ab\ge 0$

Step 3 $a,\ b$를 구한 후 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수 구하기
이때 조건 (나)를 만족시키기 위해서는 $x+y+z>0$이어야 한다.
(i) $x+y+z=1,\ a^2+b^2+ab=25$
이때 $a=0,\ b=5$ 또는 $a=5,\ b=0$
ⓐ $a=0,\ b=5$일 때
$y-x=0,\ z-y=5,\ z-x=5$에서
$x+y+z=x+x+x+5$
$=3x+5$
$=1$
이를 만족시키는 정수 x는 존재하지 않는다.
ⓑ $a=5,\ b=0$일 때
$y-x=5,\ z-y=0,\ z-x=5$에서
$x+y+z=x+x+5+x+5$
$=3x+10$
$=1$
$x=-3$이므로 $y=2,\ z=2$
(ii) $x+y+z=5,\ a^2+b^2+ab=5$
$a^2+b^2+ab=5$를 만족시키는 음이 아닌 정수 $a,\ b$는 존재하지 않는다.
(iii) $x+y+z=25,\ a^2+b^2+ab=1$
이때 $a=1,\ b=0$ 또는 $a=0,\ b=1$
ⓒ $a=1,\ b=0$일 때
$y-x=1,\ z-y=0,\ z-x=1$에서
$x+y+z=x+x+1+x+1$
$=3x+2$
$=25$
이를 만족시키는 정수 x는 존재하지 않는다.
ⓓ $a=0,\ b=1$일 때
$y-x=0,\ z-y=1,\ z-x=1$에서
$x+y+z=x+x+x+1$
$=3x+1$
$=25$
$x=8$이므로 $y=8,\ z=9$
(i), (ii), (iii)에 의하여 조건을 만족시키는 모든 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는 2이다. 답 2

실수 Point 찾기
$\frac{1}{2}(x+y+z)\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}=25$에서 조건을 만족시키는 세 정수 $x,\ y,\ z$를 직접 구하기는 쉽지 않다.
이때 $y-x=a,\ z-y=b,\ z-x=a+b$라 하면 좀 더 쉽게 정수 조건을 이용하여 그 값을 구할 수 있다.

04 복소수와 이차방정식

내신 빈출 필수 문제

본문 38~41쪽

01 ②	02 ⑤	03 ③	04 ①	05 ④
06 ②	07 ③	08 ①	09 ⑤	10 ④
11 ⑤	12 28 cm	13 ②	14 ①	15 ②
16 ⑤	17 ③	18 ②	19 ④	20 ③
21 ①	22 6	23 -22		

01 $(a-3)+(b+4)i=(b+1)+6i$에서
두 복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$a-3=b+1$ …… ㉠
$b+4=6$ …… ㉡
㉡에서 $b=6-4=2$
$b=2$를 ㉠에 대입하면 $a-3=2+1$에서 $a=6$
따라서 $a+b=6+2=8$ 답 ②

02 $(2+i)(1-i)+3i$
$=2-2i+i-i^2+3i$
$=2-2i+i-(-1)+3i$
$=3+2i$ 답 ⑤

03 $z=(1+i)x^2+4(x-4i)$
$=(x^2+4x)+(x^2-16)i$
$=x(x+4)+(x+4)(x-4)i$
z^2이 음의 실수이려면 복소수 z의 실수부분은 0이고, z의 허수부분은 0이 아니어야 한다.
즉, 복소수 z의 실수부분은 $x(x+4)$이고, 허수부분은 $(x+4)(x-4)$이므로 $x(x+4)=0$이고 $(x+4)(x-4)\neq0$이어야 한다.
$x(x+4)=0$에서
$x=0$ 또는 $x=-4$ …… ㉠
$(x+4)(x-4)\neq0$에서
$x\neq-4$, $x\neq4$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 $x=0$ 답 ③

04 $\alpha^3-\alpha^2\beta-\alpha\beta^2+\beta^3=\alpha^2(\alpha-\beta)-\beta^2(\alpha-\beta)$
$=(\alpha-\beta)(\alpha^2-\beta^2)$
$=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)^2$
이때
$\alpha+\beta=(2-i)+(2+i)=4$,
$\alpha-\beta=(2-i)-(2+i)=(2-2)+(-1-1)i=-2i$
이므로
$(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)^2=4\times(-2i)^2=4\times4i^2$
$=4\times(-4)=-16$ 답 ①

05 $z=i(1-2i)=i-2i^2=i-2\times(-1)=2+i$
이므로
$\overline{z}=\overline{2+i}=2-i$
$z+\overline{z}=(2+i)+(2-i)=4$
$z\overline{z}=(2+i)(2-i)=2^2-i^2=4-(-1)=5$
따라서
$z+\overline{z}+z\overline{z}=4+5=9$ 답 ④

06 $(1+2i)^2=1^2+4i+(2i)^2=1+4i+4\times(-1)=-3+4i$
$\dfrac{2+3i}{i}=\dfrac{2i+3i^2}{i^2}=\dfrac{2i+3\times(-1)}{-1}=3-2i$
따라서
$(1+2i)^2+\dfrac{2+3i}{i}=(-3+4i)+(3-2i)$
$=2i$ 답 ②

07 $(2+i)(2-i)=2^2-i^2=4-(-1)=5$,
$\dfrac{10}{1+3i}=\dfrac{10(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)}=\dfrac{10(1-3i)}{1^2-(3i)^2}=\dfrac{10(1-3i)}{1-(-9)}=1-3i$
이므로
$(2+i)(2-i)+\dfrac{10}{1+3i}=5+(1-3i)=6-3i$
따라서 $a=6$, $b=-3$이므로
$a+b=6+(-3)=3$ 답 ③

08 $\dfrac{1+i}{1-i}=\dfrac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{1+2i+i^2}{1^2-i^2}=\dfrac{1+2i+(-1)}{1-(-1)}=i$
따라서
$\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{10}+\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{15}+\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{20}$
$=i^{10}+i^{15}+i^{20}$
$=(i^4)^2i^2+(i^4)^3i^3+(i^4)^5$
$=1^2\times(-1)+1^3\times(-i)+1^5$
$=-1-i+1$
$=-i$ 답 ①

09 음이 아닌 정수 n에 대하여
$i^{4n+1}=i$, $i^{4n+2}=i^2=-1$, $i^{4n+3}=i^3=-i$, $i^{4n+4}=1$
이므로
$i^{4n+1}+i^{4n+2}+i^{4n+3}+i^{4n+4}=i+i^2+i^3+i^4=i-1-i+1=0$
$i+i^2+i^3+i^4+\cdots+i^{50}$
$=(i+i^2+i^3+i^4)+(i^5+i^6+i^7+i^8)$
$+\cdots+(i^{45}+i^{46}+i^{47}+i^{48})+i^{49}+i^{50}$
$=(i-1-i+1)+(i-1-i+1)+\cdots+(i-1-i+1)+i-1$
$=-1+i$
$-1+i=a+bi$에서 두 복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$a=-1$, $b=1$
따라서 $b-a=1-(-1)=2$ 답 ⑤

10 $\sqrt{2}\sqrt{-8}=\sqrt{2\times(-8)}=\sqrt{-16}=4i$
$\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{-3}}=-\sqrt{\dfrac{12}{-3}}=-\sqrt{-4}=-2i$
따라서
$\sqrt{2}\sqrt{-8}+\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{-3}}=4i+(-2i)=2i$ 답 ④

[다른 풀이]

$\sqrt{2}\sqrt{-8}=\sqrt{2}\sqrt{8}i=\sqrt{2\times8}i=\sqrt{16}i=4i$

$\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{-3}}=\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}i}=\frac{\sqrt{12}i}{\sqrt{3}i^2}=-\sqrt{\frac{12}{3}}i=-\sqrt{4}i=-2i$

따라서

$\sqrt{2}\sqrt{-8}+\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{-3}}=4i+(-2i)=2i$

11 이차방정식 $x^2+ax-2a+5=0$의 근이 $x=1$이므로

$1+a-2a+5=0$, $a=6$

이차방정식 $x^2+6x-7=0$에서 $(x+7)(x-1)=0$

$x=-7$ 또는 $x=1$

따라서 $b=-7$이므로

$a-b=6-(-7)=13$ 답 ⑤

12 직사각형의 세로의 길이를 x cm $(x>0)$이라 하면

가로의 길이는 $(x+2)$cm이다.

직사각형의 넓이가 48 cm^{2}이므로

$x(x+2)=48$에서 $x^2+2x-48=0$

$(x+8)(x-6)=0$

$x=-8$ 또는 $x=6$

이때 $x>0$이므로 $x=6$

따라서 직사각형의 둘레의 길이는

$2\{(x+2)+x\}=2(2x+2)$

$=2(2\times6+2)$

$=28$(cm) 답 28 cm

13 이차방정식 $2x^2+6x+a=0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로 이차방정식 $2x^2+6x+a=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=3^2-2a>0$

이어야 한다.

즉, $a<\frac{9}{2}$이므로 정수 a의 최댓값은 4이다. 답 ②

14 이차방정식 $x^2+kx-k+3=0$이 중근을 가지므로

이차방정식 $x^2+kx-k+3=0$의 판별식을 D라 하면

$D=k^2-4(-k+3)=0$이어야 한다. 즉,

$k^2+4k-12=0$에서 $(k+6)(k-2)=0$

$k=-6$ 또는 $k=2$

이때 $k>0$이므로 $k=2$

이차방정식 $x^2+2x+1=0$에서 $(x+1)^2=0$

즉, $x=-1$

따라서 $\alpha=-1$이므로

$k+\alpha=2+(-1)=1$ 답 ①

15 이차방정식 $x^2+2ax+a^2-2a+8=0$이 서로 다른 두 허근을 가지므로 이차방정식 $x^2+2ax+a^2-2a+8=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-(a^2-2a+8)<0$이어야 한다.

즉, $2a-8<0$에서 $a<4$

따라서 자연수 a의 값은 1, 2, 3이고, 그 합은 $1+2+3=6$ 답 ②

16 이차방정식 $x^2+ax-5a+7=0$의 두 근을 α, β라 하면

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-a$ …… ㉠

$\alpha\beta=-5a+7$ …… ㉡

이차방정식 $x^2+ax-5a+7=0$의 두 근의 합이 -2이므로

㉠에서 $-a=-2$, 즉 $a=2$

$a=2$를 ㉡에 대입하면

$\alpha\beta=-5\times2+7=-3$이므로

$b=-3$

따라서 $a+b=2+(-3)=-1$ 답 ⑤

17 이차방정식 $x^2+6x-4=0$의 두 근이 α, β이므로

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-6$, $\alpha\beta=-4$

따라서

$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{-6}{-4}=\frac{3}{2}$ 답 ③

18 이차방정식 $2x^2-4x+k=0$의 두 근이 α, β이므로

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\frac{-4}{2}=2$, $\alpha\beta=\frac{k}{2}$

$\alpha^2+\beta^2=5$에서

$(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=5$

$2^2-2\times\frac{k}{2}=5$, $4-k=5$

따라서 $k=-1$ 답 ②

19 이차방정식 $x^2+(a^2-6a+8)x+a-3=0$의 서로 다른 두 실근의 절댓값이 같고 부호가 서로 다르므로 이차방정식 $x^2+(a^2-6a+8)x+a-3=0$의 두 근을 α, $-\alpha$ $(\alpha\neq0)$으로 놓을 수 있다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에서

$\alpha+(-\alpha)=-(a^2-6a+8)$ …… ㉠

$\alpha\times(-\alpha)=a-3$ …… ㉡

㉠에서

$a^2-6a+8=0$, $(a-2)(a-4)=0$

$a=2$ 또는 $a=4$ …… ㉢

㉡에서 $-\alpha^2=a-3$

이때 $-\alpha^2<0$이므로

$a-3<0$, 즉 $a<3$ …… ㉣

㉢, ㉣에서 $a=2$ 답 ④

20 최고차항의 계수가 2인 이차식 $f(x)$에 대하여

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 α, β이므로

$f(x)=2\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}$로 놓을 수 있다.

$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=-1$이므로

$f(x)=2(x^2-3x-1)$

따라서 $f(1)=2(1-3-1)=-6$ 답 ③

21 a, b가 실수이고, 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $2+i$이므

로 $\overline{2+i}$, 즉 $2-i$도 이 이차방정식의 근이다.
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$(2+i)+(2-i)=-a$ …… ㉠
$(2+i)(2-i)=b$ …… ㉡
㉠에서 $a=-4$
㉡에서 $b=2^2-i^2=4-(-1)=5$
따라서 $a+b=-4+5=1$
답 ①

22 $\frac{4ai}{1+i}+3i=b+7i$에서
$\frac{4ai}{1+i}=\frac{4ai(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{4ai-4ai^2}{1^2-i^2}$
$=\frac{4ai-4a\times(-1)}{1-(-1)}=2a+2ai$
…… ❶
이므로
$(2a+2ai)+3i=b+7i$
$2a+(2a+3)i=b+7i$
두 복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$2a=b$ …… ㉠
$2a+3=7$ …… ㉡
…… ❷
㉡에서 $a=2$
$a=2$를 ㉠에 대입하면 $b=4$
따라서 $a+b=2+4=6$
…… ❸
답 6

단계	채점 기준	비율
❶	$\frac{4ai}{1+i}$를 간단히 한 경우	40 %
❷	a, b에 대한 관계식을 구한 경우	30 %
❸	$a+b$의 값을 구한 경우	30 %

23 이차방정식 $x^2+ax-2a+1=0$의 두 근이 α, β이므로
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=-a$, $\alpha\beta=-2a+1$ …… ㉠
…… ❶
$\alpha^2+\beta^2=-6$에서
$(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=-6$ …… ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면
$(-a)^2-2(-2a+1)=-6$
$a^2+4a+4=0$, $(a+2)^2=0$
즉, $a=-2$
…… ❷
$a=-2$를 ㉠에 대입하면
$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=5$
따라서
$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$
$=2^3-3\times5\times2$
$=-22$
…… ❸
답 -22

단계	채점 기준	비율
❶	α, β에 대한 관계식을 구한 경우	20 %
❷	a의 값을 구한 경우	40 %
❸	$\alpha^3+\beta^3$의 값을 구한 경우	40 %

내신 고득점 도전 문제

본문 42~45쪽

24 ①	**25** ③	**26** ④	**27** 17	**28** ②
29 ⑤	**30** ①	**31** ④	**32** 5	**33** ①
34 ①	**35** ③	**36** ④	**37** ①	**38** ④
39 4	**40** ②	**41** ③	**42** ④	**43** ②
44 ⑤	**45** 72	**46** $x^2-8x+15=0$		

24 $\frac{2a}{1-i}=\frac{2a(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{2a(1+i)}{1^2-i^2}$
$=\frac{2a(1+i)}{1-(-1)}=a+ai$
$bi(2+i)=2bi+bi^2=2bi+b\times(-1)$
$=-b+2bi$
$\frac{2a}{1-i}+bi(2+i)=5-i$에서
$(a+ai)+(-b+2bi)=5-i$
$(a-b)+(a+2b)i=5-i$
두 복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$a-b=5$ …… ㉠
$a+2b=-1$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a=3$, $b=-2$
따라서 $a+b=3+(-2)=1$
답 ①

25 $\overline{z_2}=1+2i$이므로 $z_2=\overline{1+2i}=1-2i$
이때 $z_1=1+3i$이므로
$z_1+z_2=(1+3i)+(1-2i)=2+i$,
$\overline{z_1+z_2}=\overline{2+i}=2-i$
따라서
$z_1\overline{z_1}+z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2+z_2\overline{z_2}$
$=z_1(\overline{z_1}+\overline{z_2})+z_2(\overline{z_1}+\overline{z_2})$
$=(z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})=(z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2})$
$=(2+i)(2-i)$
$=2^2-i^2$
$=4-(-1)=5$
답 ③

26 $z=(a-2i)^2+bi=(a^2-4ai+4i^2)+bi$
$=(a^2-4)+(b-4a)i$
$=(a+2)(a-2)+(b-4a)i$
조건 (가)에서 $z^2<0$이므로 복소수 z의 실수부분은 0이고, z의 허수부분은 0이 아니어야 한다.

$(a+2)(a-2)=0$에서 $a=-2$ 또는 $a=2$

$b-4a\neq 0$에서 $b\neq 4a$

(ⅰ) $a=-2$일 때, $b\neq -8$

$z=(b+8)i$이므로

$$(1+i)z=(1+i)(b+8)i$$
$$=(b+8)i+(b+8)i^2$$
$$=-(b+8)+(b+8)i$$

이때 $(1+i)z$의 실수부분은 $-(b+8)$이고, 조건 ㈏에 의하여

$-(b+8)=3$, $b=-11$

이는 $b>0$의 조건을 만족시키지 못한다.

(ⅱ) $a=2$일 때, $b\neq 8$

$z=(b-8)i$이므로

$$(1+i)z=(1+i)(b-8)i$$
$$=(b-8)i+(b-8)i^2$$
$$=(8-b)+(b-8)i$$

이때 $(1+i)z$의 실수부분은 $8-b$이고, 조건 ㈏에 의하여

$8-b=3$, $b=5$

이는 $b>0$의 조건을 만족시킨다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $a=2$, $b=5$

따라서 $a+b=2+5=7$ 답 ④

27 $z=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$에 대하여

$z^2=\dfrac{1+2i+i^2}{2}=i$

$z^3=z^2z=i\times\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}=\dfrac{-1+i}{\sqrt{2}}$

$z^4=(z^2)^2=i^2=-1$

$z^5=z^4z=-z=-\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$

$z^6=(z^2)^3=i^3=-i$

$z^7=z^6z=-i\times\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}=\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$

$z^8=(z^2)^4=i^4=1$

음이 아닌 정수 m에 대하여

$n=8m+4$일 때, $z^n=z^{8m+4}=-1$

$n=8m+8$일 때, $z^n=z^{8m+8}=1$

이때 $n\times z^n>10$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 16이다.

따라서 $k=16$이므로

$k+z^k=16+z^{16}=16+1=17$ 답 17

28 $z=\dfrac{1+i}{1-i}=\dfrac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}$

$=\dfrac{1+2i+i^2}{1^2-i^2}=\dfrac{1+2i+(-1)}{1-(-1)}=i$

음이 아닌 정수 n에 대하여

$z^{4n+1}=i^{4n+1}=i$

$z^{4n+2}=i^{4n+2}=i^2=-1$

$z^{4n+3}=i^{4n+3}=i^3=-i$

$z^{4n+4}=i^{4n+4}=i^4=1$

이때

$z+2z^2+3z^3+4z^4+\cdots+25z^{25}$

$=i+2i^2+3i^3+4i^4+\cdots+25i^{25}$

$=(i+2i^2+3i^3+4i^4)+(5i^5+6i^6+7i^7+8i^8)+\cdots$
$\quad+(21i^{21}+22i^{22}+23i^{23}+24i^{24})+25i^{25}$

$=(i-2-3i+4)+(5i-6-7i+8)+\cdots$
$\quad+(21i-22-23i+24)+25i$

$=(2-2i)+(2-2i)+\cdots+(2-2i)+25i$

$=6\times(2-2i)+25i$

$=12+13i$

이므로

$12+13i=a+bi$

두 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a=12$, $b=13$

따라서 $a-b=12-13=-1$ 답 ②

29 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\overline{z}=a-bi$

$zi=(a+bi)i=ai+bi^2=-b+ai$

$\overline{3z+3i}=3\overline{z}-3i=3(a-bi)-3i=3a-3(b+1)i$

$zi+\overline{3z+3i}=1-8i$에서

$(-b+ai)+\{3a-3(b+1)i\}=1-8i$

$(3a-b)+(a-3b-3)i=1-8i$

두 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$3a-b=1$ …… ㉠

$a-3b-3=-8$, 즉 $a-3b=-5$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=2$

$z=1+2i$이므로

$z-1=2i$

위 식의 양변을 제곱하면

$(z-1)^2=4i^2$, $z^2-2z+1=-4$, $z^2-2z+5=0$

따라서

$$z^3-2z^2+8z-3=z(z^2-2z+5)+3z-3$$
$$=3(1+2i)-3$$
$$=6i$$

답 ⑤

30 16의 제곱근은 $\sqrt{16}$, $-\sqrt{16}$, 즉 4, -4이므로

$a=4$, $b=-4$ 또는 $a=-4$, $b=4$

또, -4의 제곱근은 $\sqrt{-4}$, $-\sqrt{-4}$, 즉 $2i$, $-2i$이므로

$c=2i$, $d=-2i$ 또는 $c=-2i$, $d=2i$

$$\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{b}}+\frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=\frac{4\sqrt{4}}{\sqrt{-4}}-\frac{4\sqrt{-4}}{\sqrt{4}}$$
$$=-4\sqrt{\frac{4}{-4}}-4\sqrt{\frac{-4}{4}}$$
$$=-4\sqrt{-1}-4\sqrt{-1}$$
$$=-4i-4i$$
$$=-8i$$

$\sqrt{-cd}=\sqrt{-(2i)(-2i)}=\sqrt{4i^2}=\sqrt{-4}=2i$

따라서

$\dfrac{a\sqrt{a}}{\sqrt{b}}+\dfrac{b\sqrt{b}}{\sqrt{a}}+\sqrt{-cd}=-8i+2i=-6i$ 답 ①

31 조건 ㈎의 $\sqrt{-a}\sqrt{2b-7}=\sqrt{a(7-2b)}$에서

$-a<0$, $2b-7\neq 0$이므로 $2b-7>0$이어야 한다.

즉, $b>\frac{7}{2}$

조건 (나)의 $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{5-a}}=-\sqrt{\frac{b}{5-a}}$에서

$b>0$이므로 $5-a<0$이어야 한다.

즉, $a>5$

따라서 $a+b$의 최솟값은 $a=6$, $b=4$일 때

$6+4=10$ 답 ④

32 이차방정식 $x^2+(2k-1)x+k^2-n=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이차방정식 $x^2+(2k-1)x+k^2-n=0$의 판별식을 D라 하면 $D=(2k-1)^2-4(k^2-n)>0$이어야 한다.

즉, $-4k+4n+1>0$에서 $k<\frac{4n+1}{4}$

이때 자연수 k의 개수가 5이므로

$5<\frac{4n+1}{4}\le 6$

이어야 한다.

즉, $20<4n+1\le 24$에서 $\frac{19}{4}<n\le\frac{23}{4}$

따라서 n이 정수이므로

$n=5$ 답 5

33 이차방정식 $x^2+2ax+a+12=0$이 중근을 가지므로 이차방정식 $x^2+2ax+a+12=0$의 판별식을 D_1이라 하면 $\frac{D_1}{4}=a^2-(a+12)=0$이어야 한다. 즉,

$a^2-a-12=0$, $(a+3)(a-4)=0$

$a=-3$ 또는 $a=4$

(i) $a=-3$일 때

이차방정식 $x^2+2ax+a^2-3a-6=0$, 즉 $x^2-6x+12=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=(-3)^2-12=-3<0$

따라서 이차방정식 $x^2-6x+12=0$은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(ii) $a=4$일 때

이차방정식 $x^2+2ax+a^2-3a-6=0$, 즉 $x^2+8x-2=0$의 판별식을 D_3이라 하면

$\frac{D_3}{4}=4^2-(-2)=18>0$

따라서 이차방정식 $x^2+8x-2=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(i), (ii)에 의하여 $a=-3$ 답 ①

34 이차방정식 $x^2+ax+ak-6k+b=0$이 중근을 가져야 하므로 이차방정식 $x^2+ax+ak-6k+b=0$의 판별식을 D라 하면 $D=a^2-4(ak-6k+b)=0$이어야 한다.

즉, $-4(a-6)k+a^2-4b=0$ …… ㉠

㉠이 k의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$-4(a-6)=0$, $a^2-4b=0$

$-4(a-6)=0$에서 $a=6$

이때 $6^2-4b=0$에서 $b=9$

따라서 $a+b=6+9=15$ 답 ①

35 이차방정식 $x^2-ax+k^2+2k-8=0$의 두 실근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=a$

이때 $\alpha+\beta=2k$이므로 $a=2k$

이차방정식 $x^2-2kx+k^2+2k-8=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이차방정식 $x^2-2kx+k^2+2k-8=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-k)^2-(k^2+2k-8)>0$이어야 한다.

즉, $-2k+8>0$에서 $k<4$

따라서 자연수 k는 1, 2, 3이고, 그 합은

$1+2+3=6$ 답 ③

36 이차방정식 $x^2+2ax+2a^2+b=0$이 중근을 가지므로 이차방정식 $x^2+2ax+2a^2+b=0$의 판별식을 D라 하면 $\frac{D}{4}=a^2-(2a^2+b)=0$이어야 한다. 즉, $b=-a^2$

이차방정식 $x^2+2ax+a^2=0$에서

$(x+a)^2=0$, $x=-a$

즉, $k=-a$이므로 $2k+b=-24$에서

$-2a-a^2=-24$, $a^2+2a-24=0$, $(a+6)(a-4)=0$

$a=-6$ 또는 $a=4$

이때 $a>0$이므로 $a=4$

$b=-4^2=-16$

따라서 $a+b=4+(-16)=-12$ 답 ④

37 이차방정식 $x^2+kx-4=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-k$, $\alpha\beta=-4$

이때 $\alpha+\beta=-2$이므로 $-k=-2$, 즉 $k=2$

한편, $\alpha^2+2\alpha-4=0$, $\beta^2+2\beta-4=0$이므로

$\alpha^2=-2\alpha+4$, $\beta^2=-2\beta+4$

따라서

$(\alpha^2+3\alpha)(\beta^2+3\beta)$

$=\{(-2\alpha+4)+3\alpha\}\{(-2\beta+4)+3\beta\}$

$=(\alpha+4)(\beta+4)$

$=\alpha\beta+4(\alpha+\beta)+16$

$=-4+4\times(-2)+16$

$=4$ 답 ①

38 이차방정식 $x^2-2kx+k^2-k+6=0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로 이차방정식 $x^2-2kx+k^2-k+6=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-k)^2-(k^2-k+6)>0$이어야 한다.

즉, $k-6>0$에서 $k>6$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=2k$이고, k가 자연수이므로 $\alpha+\beta$의 최솟값은 $k=7$일 때 14이다. 답 ④

39 이차방정식 $x^2-2(k-1)x+3k-3=0$이 중근을 가지므로 이차방정식 $x^2-2(k-1)x+3k-3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(k-1)\}^2-(3k-3)=0$이어야 한다.

즉, $k^2-5k+4=0$에서
$(k-1)(k-4)=0$
$k=1$ 또는 $k=4$
(i) $k=1$일 때
이차방정식 $x^2-4x+k^2-2=0$, 즉 $x^2-4x-1=0$의 두 근을 α, β라 하면
$\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=-1$
따라서 $\alpha+\beta>\alpha\beta$이므로 주어진 조건을 만족시키지 못한다.
(ii) $k=4$일 때
이차방정식 $x^2-4x+k^2-2=0$, 즉 $x^2-4x+14=0$의 두 근을 δ, γ라 하면
$\delta+\gamma=4$, $\delta\gamma=14$
따라서 $\delta+\gamma<\delta\gamma$이므로 주어진 조건을 만족시킨다.
(i), (ii)에 의하여 $k=4$

답 4

40 이차방정식 $f(x)=0$의 이차항의 계수를 a $(a\neq0)$이라 하면
이차방정식 $f(x)=0$의 두 실근이 α, β이므로
$f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)$로 놓을 수 있다.
방정식 $f(4x-2)=0$에서
$a\{(4x-2)-\alpha\}\{(4x-2)-\beta\}=0$
$4x-2-\alpha=0$ 또는 $4x-2-\beta=0$
$x=\dfrac{\alpha+2}{4}$ 또는 $x=\dfrac{\beta+2}{4}$
따라서 방정식 $f(4x-2)=0$의 서로 다른 모든 근의 곱은

$$\begin{aligned}\frac{\alpha+2}{4}\times\frac{\beta+2}{4}&=\frac{\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+4}{16}\\&=\frac{4+2\times3+4}{16}\\&=\frac{7}{8}\end{aligned}$$

답 ②

41 이차방정식 $x^2+6x-2=0$의 두 근이 α, β이므로
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=-6$, $\alpha\beta=-2$

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{-6}{-2}=3$$

$$\frac{1}{\alpha}\times\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha\beta}=-\frac{1}{2}$$

두 수 $\dfrac{1}{\alpha}$, $\dfrac{1}{\beta}$을 근으로 하고 이차항의 계수가 2인 이차방정식은

$$2\left\{x^2-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)x+\frac{1}{\alpha\beta}\right\}=0$$

$$2\left(x^2-3x-\frac{1}{2}\right)=0$$

$2x^2-6x-1=0$
따라서 $a=-6$, $b=-1$이므로
$a+b=-6-1=-7$

답 ③

42 이차방정식 $x^2-ax-2a+2=0$의 두 근이 -1, b이므로
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$-1+b=a$ …… ㉠
$-b=-2a+2$ …… ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면
$-b=-2(-1+b)+2$에서 $b=4$
$b=4$를 ㉠에 대입하면
$a=-1+4=3$
$(2a-1)+(2b-1)=5+7=12$,
$(2a-1)(2b-1)=5\times7=35$
이므로 두 수 $2a-1$, $2b-1$, 즉 5, 7을 근으로 하고 이차항의 계수가 1인 이차방정식은 $x^2-12x+35=0$
따라서 $f(x)=x^2-12x+35$이므로
$f(1)=1-12+35=24$

답 ④

43

$$\begin{aligned}\frac{6+2i}{1-i}&=\frac{(6+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}\\&=\frac{6+6i+2i+2i^2}{1^2-i^2}\\&=\frac{6+6i+2i-2}{1-(-1)}\\&=2+4i\end{aligned}$$

a, b가 실수이고 $2+4i$가 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이므로
$\overline{2+4i}$, 즉 $2-4i$도 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 근이다.
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$(2+4i)+(2-4i)=-a$ …… ㉠
$(2+4i)(2-4i)=b$ …… ㉡
㉠에서 $a=-4$
㉡에서 $b=2^2-(4i)^2=4+16=20$
따라서 $a+b=-4+20=16$

답 ②

44

$$\begin{aligned}z&=(2-3i)(1+i)\\&=2+2i-3i-3i^2\\&=2+2i-3i+3\\&=5-i\end{aligned}$$

$x-z$, 즉 $x-(5-i)$가 이차식 $f(x)$의 인수이므로 $f(5-i)=0$이다.
a, b가 실수이고 $5-i$가 이차방정식 $f(x)=0$의 근이므로 $\overline{5-i}$, 즉 $5+i$도 이차방정식 $f(x)=0$, 즉 $x^2+ax+b=0$의 근이다.
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$(5-i)+(5+i)=-a$, $(5-i)(5+i)=b$
이므로
$a=-10$
$b=5^2-i^2=25+1=26$
따라서 $f(x)=x^2-10x+26$이므로
$f(2)=4-20+26=10$

답 ⑤

45

$$\frac{2i}{1-i}=\frac{2i(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i+2i^2}{1^2-i^2}=\frac{-2+2i}{2}=-1+i,$$

$$\frac{2+i}{1+i}=\frac{(2+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{2-2i+i-i^2}{1^2-i^2}=\frac{3-i}{2}$$

이므로

$$z=\frac{2i}{1-i}+\frac{2+i}{1+i}=(-1+i)+\frac{3-i}{2}=\frac{1+i}{2}$$

…… ❶

$$\frac{1}{z}=\frac{2}{1+i}=\frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{2(1-i)}{1^2-i^2}=1-i$$

이므로

$\left(\frac{1}{z}\right)^2=(1-i)^2=1^2-2i+i^2=-2i$

$\left(\frac{1}{z}\right)^4=\left\{\left(\frac{1}{z}\right)^2\right\}^2=(-2i)^2=4i^2=-4$

$\left(\frac{1}{z}\right)^6=\left\{\left(\frac{1}{z}\right)^2\right\}^3=(-2i)^3=-8i^3=8i$

$\left(\frac{1}{z}\right)^8=\left\{\left(\frac{1}{z}\right)^2\right\}^4=(-2i)^4=16i^4=16$

이때

$\left(\frac{1}{z}\right)^2+\left(\frac{1}{z}\right)^4+\left(\frac{1}{z}\right)^6+\left(\frac{1}{z}\right)^8$

$=-2i+(-4)+8i+16$

$=12+6i$

이므로

$12+6i=a+bi$

.... ❷

두 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a=12,\ b=6$

따라서 $ab=12\times6=72$

.... ❸

답 72

단계	채점 기준	비율
❶	복소수 z를 간단히 한 경우	30 %
❷	$\left(\frac{1}{z}\right)^2+\left(\frac{1}{z}\right)^4+\left(\frac{1}{z}\right)^6+\left(\frac{1}{z}\right)^8$을 간단히 하여 a, b에 대한 관계식을 구한 경우	50 %
❸	ab의 값을 구한 경우	20 %

46 이차방정식 $x^2-5x+a=0$의 두 근의 차가 3이므로 두 근을 $\alpha,\ \alpha+3$ (α는 상수)라 하자.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(\alpha+3)=5$ ...... ㉠

$\alpha(\alpha+3)=a$ ...... ㉡

.... ❶

㉠에서 $\alpha=1$

$\alpha=1$을 ㉡에 대입하면

$1\times4=a,\ a=4$

.... ❷

따라서 두 수 $a-1$, $a+1$, 즉 3, 5를 근으로 하고 이차항의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2-(3+5)x+3\times5=0$

즉, $x^2-8x+15=0$

.... ❸

답 $x^2-8x+15=0$

단계	채점 기준	비율
❶	이차방정식의 근과 상수 a에 대한 관계식을 구한 경우	20 %
❷	a의 값을 구한 경우	40 %
❸	두 수 $a-1$, $a+1$을 근으로 하고 이차항의 계수가 1인 이차방정식을 구한 경우	40 %

변별력을 만드는 1등급 문제

본문 46~48쪽

47 ①	**48** ④	**49** ④	**50** ④	**51** ③
52 ⑤	**53** ④	**54** ②	**55** ④	**56** ①
57 ⑤	**58** ③			

47

$xy<0$인 두 실수 x, y에 대하여 복소수 $z=(i+3x)x-2yi-12$가 $z^2<0$, $(z-\bar{z})i=8$을 만족시킬 때, $(z+xyi)^2$의 값은?

$z=a+bi$ (a, b는 실수, $i=\sqrt{-1}$)에 대하여 $z^2<0$이면 $a=0$, $b\neq0$이다.

(단, $i=\sqrt{-1}$)

✓① -36　② -25　③ -16　④ -9　⑤ -4

Step 1 복소수 z 파악하기

$z=(i+3x)x-2yi-12=(3x^2-12)+(x-2y)i$

이때 $z^2<0$이므로 복소수 z의 실수부분은 0이고, z의 허수부분은 0이 아니어야 한다.

Step 2 두 실수 x, y의 값 각각 구하기

$3x^2-12=0$에서 $3(x+2)(x-2)=0$

$x=-2$ 또는 $x=2$

(i) $x=-2$일 때

$-2-2y\neq0$에서 $y\neq-1$

$z=-2(y+1)i$이므로 $\bar{z}=2(y+1)i$

$(z-\bar{z})i=8$에서

$(z-\bar{z})i=-4(y+1)i^2=4(y+1)$이므로

$4(y+1)=8,\ y=1$

이때 $xy=-2\times1=-2<0$이므로 주어진 조건을 만족시킨다.

(ii) $x=2$일 때

$2-2y\neq0$에서 $y\neq1$

$z=2(1-y)i$이므로 $\bar{z}=-2(1-y)i$

$(z-\bar{z})i=8$에서 $4(1-y)i^2=8,\ 4y-4=8,\ y=3$

이때 $xy=2\times3=6>0$이므로 주어진 조건을 만족시키지 못한다.

(i), (ii)에 의하여 $x=-2,\ y=1$

Step 3 $(z+xyi)^2$의 값 구하기

따라서 $z=-4i$이므로

$(z+xyi)^2=(-4i-2i)^2=-36$

답 ①

48

두 복소수 α, β가 다음 조건을 만족시킬 때, $(\alpha+\beta)(\overline{\alpha}+\overline{\beta})$의 값은?

$z=a+bi$ (a, b는 실수, $i=\sqrt{-1}$)에 대하여 $\bar{z}=a-bi$이고, $\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}$이다.

(단, $i=\sqrt{-1}$)

(가) $\alpha+\overline{\alpha}=\beta+\overline{\beta}+2=4$

(나) $\alpha-\overline{\alpha}=\beta-\overline{\beta}-2i=2i$

① 12　② 14　③ 16　✓④ 18　⑤ 20

Step 1 두 복소수 α, β에 대한 켤레복소수 구하기

$\alpha=p+qi$ (p, q는 실수),

$\beta=r+si$ (r, s는 실수)

라 하면

$\overline{\alpha}=p-qi$, $\overline{\beta}=r-si$

Step 2 α, β 각각 구하기

(i) 조건 (가)에서 $\alpha+\overline{\alpha}=4$이므로 $2p=4$, $p=2$

또, $\beta+\overline{\beta}+2=4$에서 $2r+2=4$, $r=1$

(ii) 조건 (나)에서 $\alpha-\overline{\alpha}=2i$이므로 $2qi=2i$, $q=1$

또, $\beta-\overline{\beta}-2i=2i$에서 $2si=4i$, $s=2$

(i), (ii)에 의하여

$\alpha=2+i$, $\beta=1+2i$

Step 3 $(\alpha+\beta)(\overline{\alpha}+\overline{\beta})$의 값 구하기

따라서

$\alpha+\beta=(2+i)+(1+2i)=3+3i$,

$\overline{\alpha}+\overline{\beta}=\overline{\alpha+\beta}=3-3i$

이므로

$(\alpha+\beta)(\overline{\alpha}+\overline{\beta})=(3+3i)(3-3i)$

$=3^2-(3i)^2=18$

답 ④

49

$z=a+bi$ (a, b는 실수, $i=\sqrt{-1}$)에 대하여

$z+\overline{z}=2a$, $z-\overline{z}=2bi$

실수부분이 양수인 복소수 z에 대하여

$$z-\overline{z}=4i,\ \frac{2\overline{z}^2}{z+\overline{z}}=3-4i$$

일 때, z^2-8z의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① -26 ② -24 ③ -22

√④ -20 ⑤ -18

Step 1 복소수 z의 허수부분 구하기

$z=a+bi$ (a, b는 실수이고, $a>0$)이라 하면 $\overline{z}=a-bi$

$z-\overline{z}=4i$에서

$(a+bi)-(a-bi)=4i$

$2bi=4i$, $b=2$

Step 2 복소수 z의 실수부분 구하기

또, $\dfrac{2\overline{z}^2}{z+\overline{z}}=3-4i$에서

$$\frac{2\overline{z}^2}{z+\overline{z}}=\frac{2(a-2i)^2}{2a}=\frac{a^2-4ai+4i^2}{a}=\frac{a^2-4-4ai}{a}$$

이므로

$$\frac{a^2-4-4ai}{a}=3-4i$$

$a^2-4-4ai=3a-4ai$

두 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a^2-4=3a$

$a^2-3a-4=0$, $(a+1)(a-4)=0$

$a=-1$ 또는 $a=4$

이때 $a>0$이므로 $a=4$

Step 3 z^2-8z의 값 구하기

$z=4+2i$이므로

$z-4=2i$

위 식의 양변을 제곱하면

$(z-4)^2=4i^2$, $z^2-8z+16=-4$

따라서 $z^2-8z=-20$

답 ④

50

음이 아닌 자연수 n에 대하여

$(-i)^{4n+1}=-i$, $(-i)^{4n+2}=-1$, $(-i)^{4n+3}=i$,

$(-i)^{4n+4}=1$

복소수 $z=-1+\dfrac{2}{1+i}$에 대하여

$$z+2z^2+3z^3+\cdots+50z^{50}=a+bi$$

일 때, $b-a$의 값은? (단, a, b는 실수이고, $i=\sqrt{-1}$이다.)

① -2 ② -1 ③ 0

√④ 1 ⑤ 2

Step 1 복소수 z를 간단히 나타내기

$$z=-1+\frac{2}{1+i}=-1+\frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)}$$

$$=-1+\frac{2(1-i)}{1^2-i^2}=-1+\frac{2(1-i)}{2}=-i$$

Step 2 a, b의 값 각각 구하기

$z+2z^2+3z^3+\cdots+50z^{50}$

$=-i+2(-i)^2+3(-i)^3+\cdots+50(-i)^{50}$

$=(-i-2+3i+4)+(-5i-6+7i+8)$

$+\cdots+(-45i-46+47i+48)-49i-50$

$=(2+2i)+(2+2i)+\cdots+(2+2i)-49i-50$

$=12(2+2i)-49i-50$

$=-26-25i$

$-26-25i=a+bi$

두 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a=-26$, $b=-25$

Step 3 $b-a$의 값 구하기

따라서 $b-a=-25-(-26)=1$

답 ④

51

복소수 $z=\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$와 100 이하의 자연수 n에 대하여 $z^n+\overline{z}^n<0$을 만족시키는 n의 개수는?

복소수 $z=a+bi$ (a, b는 실수, $i=\sqrt{-1}$)에 대하여 $z+\overline{z}<0$이려면 $a<0$이어야 한다.

① 36 ② 37 √③ 38

④ 39 ⑤ 40

Step 1 복소수 z의 거듭제곱의 변화 파악하기

$$z=\frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

$$z^2=\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1-2i+i^2}{2}=-i$$

$$z^3=z^2\times z=-iz=\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$$

$z^4=(z^2)^2=(-i)^2=i^2=-1$

$$z^5=z^4\times z=-z=\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$$

$z^6=(z^2)^3=(-i)^3=-i^3=i$

$z^7=z^6\times z=iz=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$

$z^8=(z^4)^2=(-1)^2=1$

$\vdots$

이므로 음이 아닌 정수 k에 대하여

$z^{8k+1}=z=\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$

$z^{8k+2}=z^2=-i$

$z^{8k+3}=z^3=\dfrac{-1-i}{\sqrt{2}}$

$z^{8k+4}=z^4=-1$

$z^{8k+5}=z^5=\dfrac{-1+i}{\sqrt{2}}$

$z^{8k+6}=z^6=i$

$z^{8k+7}=z^7=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$

$z^{8k+8}=z^8=1$

Step 2 주어진 조건을 만족시키는 자연수 n의 개수 구하기

한편, $z^n+\overline{z}^n<0$이므로 복소수 z^n의 실수부분이 음수이어야 한다. 즉, 음이 아닌 정수 k에 대하여

$n=8k+3$ 또는 $n=8k+4$ 또는 $n=8k+5$

따라서 자연수 n의 개수는

$3\times 12+2=38$ 답 ③

52

두 복소수

$\alpha=(a^2-3a+2)+(a^2-a)i,$

$\beta=(b+2)+(b^2-b-6)i$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $\beta^2-\alpha^2$의 값은?

(단, a, b는 실수이고, $i=\sqrt{-1}$이다.)

(가) α^2은 음의 실수이다.
(나) β^2은 양의 실수이다.

복소수 $z=a+bi$ (a, b는 실수, $i=\sqrt{-1}$)에 대하여
① $z^2<0$이면 $a=0$, $b\neq0$이다.
② $z^2>0$이면 $a\neq0$, $b=0$이다.

① 21 ② 23 ③ 25
④ 27 ✓⑤ 29

Step 1 복소수 α 구하기

조건 (가)에서 α^2이 음의 실수이므로 복소수 α의 실수부분은 0이고, 허수부분은 0이 아니어야 한다.

즉, $\alpha=(a^2-3a+2)+(a^2-a)i$에서

$a^2-3a+2=0$ …… ㉠

$a^2-a\neq0$ …… ㉡

㉠에서 $(a-1)(a-2)=0$이므로 $a=1$ 또는 $a=2$

㉡에서 $a(a-1)\neq0$이므로 $a\neq0$, $a\neq1$

㉠, ㉡에서 $a=2$이므로 $\alpha=2i$

Step 2 복소수 β 구하기

조건 (나)에서 β^2이 양의 실수이므로 복소수 β는 0이 아닌 실수이어야 한다.

즉, $\beta=(b+2)+(b^2-b-6)i$에서

$b+2\neq0$ …… ㉢

$b^2-b-6=0$ …… ㉣

㉢에서 $b\neq-2$

㉣에서 $(b+2)(b-3)=0$이므로 $b=-2$ 또는 $b=3$

㉢, ㉣에서 $b=3$이므로 $\beta=5$

Step 3 $\beta^2-\alpha^2$의 값 구하기

따라서

$\beta^2-\alpha^2=5^2-(2i)^2=25-(-4)=29$ 답 ⑤

53

두 실수 a, b에 대하여

$(a-bi)^2+2b^2=12-4i$

가 성립한다. 복소수 $z=a+bi$라 할 때, $\dfrac{zi}{\overline{z}}+\dfrac{\overline{z}}{zi}$의 값은?

(단, $i=\sqrt{-1}$)

복소수 $z=a+bi$ (a, b는 실수, $i=\sqrt{-1}$)에 대하여
$z+\overline{z}=2a$, $z-\overline{z}=2bi$,
$z\overline{z}=a^2+b^2$

① $-\dfrac{5}{3}$ ② $-\dfrac{4}{3}$ ③ -1
✓④ $-\dfrac{2}{3}$ ⑤ $-\dfrac{1}{3}$

Step 1 a^2+b^2, ab의 값 각각 구하기

$(a-bi)^2+2b^2=12-4i$에서

$(a^2-2abi+b^2i^2)+2b^2=12-4i$

$(a^2+b^2)-2abi=12-4i$

두 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a^2+b^2=12$

$-2ab=-4$

즉, $ab=2$

Step 2 $\dfrac{zi}{\overline{z}}+\dfrac{\overline{z}}{zi}$의 값 구하기

$z=a+bi$이므로

$\overline{z}=a-bi$

$\dfrac{zi}{\overline{z}}+\dfrac{\overline{z}}{zi}=\dfrac{zi}{\overline{z}}-\dfrac{\overline{z}i}{z}=\dfrac{(z^2-\overline{z}^2)i}{z\overline{z}}$

$=\dfrac{(z+\overline{z})(z-\overline{z})i}{z\overline{z}}$

$=\dfrac{2a\times2bi\times i}{(a+bi)(a-bi)}$

$=\dfrac{4abi^2}{a^2-b^2i^2}$

$=-\dfrac{4ab}{a^2+b^2}$

$=-\dfrac{4\times2}{12}=-\dfrac{2}{3}$ 답 ④

54

x에 대한 이차방정식 $x^2+2kx+k+6=0$이 중근을 가지고, $\sqrt{-2}\sqrt{1-k}=\sqrt{2(k-1)}$이 성립할 때, 실수 k의 값은?

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ (a, b, c는 실수)가 중근을 가지면 판별식 $D=b^2-4ac=0$이다.

① -4 ✓② -2 ③ 1
④ 3 ⑤ 5

두 실수 a, b에 대하여 $a<0$이고, $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$이면 $b\geq0$이다.

Step 1 이차방정식이 중근을 가지는 조건을 만족시키는 k의 값 구하기

이차방정식 $x^2+2kx+k+6=0$이 중근을 가지므로 이차방정식 $x^2+2kx+k+6=0$의 판별식을 D라 하면 $\frac{D}{4}=k^2-(k+6)=0$이어야 한다.

즉, $k^2-k-6=0$에서 $(k+2)(k-3)=0$

$k=-2$ 또는 $k=3$ …… ㉠

Step 2 실수 k의 값 구하기

한편, $\sqrt{-2}\sqrt{1-k}=\sqrt{2(k-1)}$, 즉 $\sqrt{-2}\sqrt{1-k}=\sqrt{-2(1-k)}$에서 $-2<0$이므로 $1-k\geq 0$이어야 한다.

따라서 $k\leq 1$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $k=-2$ 답 ②

55

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ (a, b, c는 실수)가 서로 다른 두 실근을 가지려면 판별식 $D>0$이어야 한다.

x에 대한 이차방정식

$$x^2-2kx+k^2+2k-50=0$$

이 서로 다른 두 실근을 가지고, i^k이 양수가 되도록 하는 모든 자연수 k의 값의 합은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① 72 ② 76 ③ 80
✓④ 84 ⑤ 88

Step 1 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가지는 조건을 만족시키는 k의 값의 범위 구하기

이차방정식 $x^2-2kx+k^2+2k-50=0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로 이차방정식 $x^2-2kx+k^2+2k-50=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-k)^2-(k^2+2k-50)>0$이어야 한다.

즉, $-2k+50>0$에서 $k<25$

Step 2 i^k이 양수가 되도록 하는 k의 값 구하기

한편, 음이 아닌 정수 n에 대하여

$i^{4n+1}=i$, $i^{4n+2}=i^2=-1$

$i^{4n+3}=i^3=-i$, $i^{4n+4}=i^4=1$

이므로 i^k이 양수가 되려면 $k=4n+4$ 꼴이어야 한다.

이때 $k<25$이므로 k의 값은 4, 8, 12, 16, 20, 24이다.

Step 3 모든 자연수 k의 값의 합 구하기

따라서 구하는 모든 자연수 k의 값의 합은

$4+8+12+16+20+24=84$ 답 ④

56

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ (a, b, c는 실수)의 한 근이 $p+qi$ (p, q는 실수, $q\neq 0$, $i=\sqrt{-1}$)이면 $p-qi$도 이 이차방정식의 근이다.

다항식 $f(x)=ax^2+bx+c$가 다음 조건을 만족시킬 때, x에 대한 방정식 $f(ax+b)=cx-4$의 서로 다른 모든 실근의 합은?

(단, a, b, c는 실수이고, $a\neq 0$이다.)

(가) $f(-2i)=0$
(나) 이차방정식 $f(x)+2x=0$의 두 근의 합은 -4이다.

✓① 16 ② 18 ③ 20
④ 22 ⑤ 24

Step 1 조건 (가)를 만족시키는 $f(x)$ 구하기

이차방정식 $f(x)=0$의 한 근이 $-2i$이고, a, b, c가 모두 실수이므로 $2i$도 이차방정식 $f(x)=0$의 근이다.

$f(x)=a(x-2i)(x+2i)$로 놓으면

Step 2 a, b, c의 값 각각 구하기

$f(x)+2x=0$에서

$a(x-2i)(x+2i)+2x=0$

$ax^2+2x+4a=0$

조건 (나)에서 이차방정식 $f(x)+2x=0$의 두 근의 합은 -4이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-\frac{2}{a}=-4$, 즉 $a=\frac{1}{2}$

$f(x)=\frac{1}{2}(x-2i)(x+2i)=\frac{1}{2}x^2+2$이므로

$b=0$, $c=2$

Step 3 방정식 $f(ax+b)=cx-4$의 서로 다른 모든 실근의 합 구하기

$f(ax+b)=cx-4$에서 $f\left(\frac{x}{2}\right)=2x-4$

$\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2+2=2x-4$, $x^2-16x+48=0$

$(x-4)(x-12)=0$, $x=4$ 또는 $x=12$

따라서 x에 대한 방정식 $f(ax+b)=cx-4$의 서로 다른 모든 실근의 합은

$4+12=16$ 답 ①

57

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ (a, b, c는 상수)의 두 근을 α, β라 하면 $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

x에 대한 이차방정식 $x^2+2kx-6k+3=0$의 두 근 α, β가 다음 조건을 만족시킬 때, $k+|\alpha^2-\beta^2|$의 값은? (단, k는 상수이다.)

(가) 두 근 α, β의 부호가 같고, $\alpha\beta\neq 0$이다.
(나) 두 근 α, β의 차는 4이다.

① 41 ② 43 ③ 45
④ 47 ✓⑤ 49

Step 1 이차방정식의 두 근 α, β에 대한 식 구하기

이차방정식 $x^2+2kx-6k+3=0$의 두 근이 α, β이므로

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2k$ …… ㉠

$\alpha\beta=-6k+3$ …… ㉡

Step 2 k와 $\alpha+\beta$의 값 각각 구하기

조건 (가)에서 $\alpha\beta>0$이므로

㉡에서 $-6k+3>0$

$k<\frac{1}{2}$ …… ㉢

조건 (나)에서 $|\alpha-\beta|=4$

양변을 제곱하면 $(\alpha-\beta)^2=16$

$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=16$ …… ㉣

㉠, ㉡을 ㉣에 대입하면

$(-2k)^2-4(-6k+3)=16$

$k^2+6k-7=0$, $(k+7)(k-1)=0$

ⓒ에서 $k<\frac{1}{2}$이므로 $k=-7$

$k=-7$을 ㉠에 대입하면

$\alpha+\beta=14$

Step 3 $k+|\alpha^2-\beta^2|$의 값 구하기

따라서

$$k+|\alpha^2-\beta^2|=k+|\alpha+\beta||\alpha-\beta|$$
$$=-7+14\times4$$
$$=49$$

답 ⑤

58

x에 대한 이차방정식 $x^2-2(n-4)x-8=0$의 두 실근을 α, β라 하자. α, β가 다음 조건을 만족시킬 때, $n(\alpha^2+\beta^2)$의 값은? (단, n은 실수이다.)

(가) $\alpha+\beta>0$
(나) 두 수 α, β의 절댓값의 비는 1 : 2이다.

두 수 α, β $(\alpha>0, \beta>0)$의 비가 $m:n$ $(m>0, n>0)$이면 $\alpha=mk$, $\beta=nk$ $(k>0)$

① 60 ② 80 ✓③ 100
④ 120 ⑤ 140

Step 1 이차방정식의 두 근 α, β에 대한 식 구하기

이차방정식 $x^2-2(n-4)x-8=0$의 두 실근이 α, β이므로

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2(n-4)$ …… ㉠

$\alpha\beta=-8$ …… ㉡

Step 2 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값 각각 구하기

조건 (가)에서 $\alpha+\beta>0$이고

㉡에서 $\alpha\beta<0$이므로

$\alpha<\beta$라 하면 $\alpha<0<\beta$이고 $|\alpha|<|\beta|$이다.

조건 (나)에 의하여

$\alpha=-k$, $\beta=2k$ (k는 양수)

로 놓으면 ㉡에서

$-k\times2k=-8$, $k^2=4$

이때 $k>0$이므로 $k=2$ …… ㉢

㉠에서 $-k+2k=2(n-4)$

즉, $k=2n-8$ …… ㉣

㉢을 ㉣에 대입하면

$2=2n-8$, $n=5$

$n=5$를 ㉠에 대입하면

$\alpha+\beta=2$

Step 3 $n(\alpha^2+\beta^2)$의 값 구하기

따라서

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$$
$$=2^2-2\times(-8)$$
$$=20$$

이므로 $n(\alpha^2+\beta^2)=5\times20=100$

답 ③

1등급을 넘어서는 상위 1%

본문 49쪽

59

양수 k에 대하여 이차방정식 $x^2-kx-k^2=0$의 서로 다른 두 실근을 α, β라 할 때,

$$i\times\frac{\sqrt{-\alpha\beta}}{\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}}-\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\times\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}=k$$

두 실수 a, b에 대하여 $a>0$, $b<0$이면 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}$

이다. 복소수 $z=\frac{k+k^2i}{1+i}$에 대하여 $z^3-7z^2+15z-7$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

✓① $-i$ ② -1 ③ i
④ 2 ⑤ $2i$

문항 파헤치기

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$임과 음수의 제곱근의 성질인 $a<0$, $b<0$일 때 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$, $a>0$, $b<0$일 때 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}$임을 문제 풀이에 적용한다.

풀이

Step 1 이차방정식의 두 실근의 크기 파악하기

이차방정식 $x^2-kx-k^2=0$의 서로 다른 두 실근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ (a, b, c는 상수)의 두 근이 α, β이면 $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

$\alpha+\beta=k>0$, $\alpha\beta=-k^2<0$

이때 $\alpha<0<\beta$라 하면 $|\alpha|<|\beta|$이다.

Step 2 k의 값 구하기

$\alpha<0<\beta$이므로 $\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}=\sqrt{\alpha\beta}$

$\alpha\beta<0$이므로 $\frac{\sqrt{-\alpha\beta}}{\sqrt{\alpha\beta}}=-\sqrt{\frac{-\alpha\beta}{\alpha\beta}}=-\sqrt{-1}=-i$

$\alpha\beta<0$이므로 $-\alpha\beta>0$이다. 이때 $\frac{\sqrt{-\alpha\beta}}{\sqrt{\alpha\beta}}=-\sqrt{\frac{-\alpha\beta}{\alpha\beta}}$가 성립한다.

$\frac{\beta}{\alpha}<0$, $\frac{\alpha}{\beta}<0$이므로

$\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\times\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}=-\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}\times\frac{\alpha}{\beta}}=-1$

$i\times\frac{\sqrt{-\alpha\beta}}{\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}}-\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\times\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}=k$에서

$k=i\times(-i)-(-1)=-i^2+1=-(-1)+1=2$

Step 3 $z^3-7z^2+15z-7$의 값 구하기

$$z=\frac{k+k^2i}{1+i}=\frac{2+4i}{1+i}=\frac{2(1+2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}$$
$$=\frac{2(1-i+2i-2i^2)}{1-i^2}=\frac{2(3+i)}{1-(-1)}=3+i$$

$z-3=i$에서 양변을 제곱하면 $(z-3)^2=i^2$

$z^2-6z+9=-1$, $z^2=6z-10$

$z^3=z(6z-10)=6z^2-10z=6(6z-10)-10z=26z-60$

따라서

$$z^3-7z^2+15z-7=(26z-60)-7(6z-10)+15z-7=-z+3$$
$$=-(3+i)+3=-i$$

답 ①

실수 Point 찾기

음수의 제곱근의 성질 중 $a>0$, $b<0$일 때 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}$임을 기억하도록 한다.

05 이차방정식과 이차함수

내신 빈출 필수 문제

본문 52~55쪽

01 ①	02 ④	03 ①	04 ③	05 ②
06 ④	07 ③	08 ④	09 ⑤	10 ③
11 ④	12 ⑤	13 40	14 ②	15 ②
16 ①	17 ②	18 8	19 ⑤	20 ③
21 ③	22 2	23 8		

01 이차함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프가 x축과 두 점 $(-1, 0)$, $(3, 0)$에서 만나므로 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 서로 다른 두 실근은 -1, 3이다.
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$-1+3=-a$, $-1\times3=b$
따라서 $a=-2$, $b=-3$이므로
$a+b=-2+(-3)=-5$ 답 ①

02 이차함수 $y=2x^2-4x+a$의 그래프와 x축이 만나는 두 점 A, B의 x좌표가 각각 -2, b이므로 이차방정식 $2x^2-4x+a=0$의 두 실근은 -2, b이다.
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$-2+b=-\dfrac{-4}{2}$ …… ㉠
$-2b=\dfrac{a}{2}$ …… ㉡
㉠에서 $b=4$
$b=4$를 ㉡에 대입하면 $a=-16$
따라서 $b-a=4-(-16)=20$ 답 ④

03 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 서로 다른 두 실근이 α, β이고 $\alpha+\beta=-4$, $\alpha\beta=-5$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$-4=-a$, $-5=b$
즉, $a=4$, $b=-5$
이차방정식 $x^2-5x+4=0$에서 $(x-1)(x-4)=0$
$x=1$ 또는 $x=4$
두 점 A, B의 x좌표는 각각 1, 4 또는 4, 1이다.
따라서 $\overline{AB}=4-1=3$ 답 ①

04 이차방정식 $2x^2+ax+b=0$의 한 근이 5이므로 이차함수 $y=2x^2+ax+b$의 그래프와 x축은 점 $(5, 0)$에서 만난다.
이때 이차함수 $y=2x^2+ax+b$의 그래프가 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로 이차함수 $y=2x^2+ax+b$의 그래프와 x축은 점 $(-3, 0)$에서도 만난다.
이차방정식 $2x^2+ax+b=0$의 두 근이 -3, 5이므로
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$-3+5=-\dfrac{a}{2}$, $-3\times5=\dfrac{b}{2}$
따라서 $a=-4$, $b=-30$이므로
$a-b=-4-(-30)=26$ 답 ③

05 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축이 만나는 두 점의 x좌표가 각각 -2, 6이므로 이차방정식 $f(x)=0$의 두 실근은 -2, 6이다.
이차함수 $y=f(x)$의 최고차항의 계수를 a $(a\neq0)$라 하면
$f(x)=a(x+2)(x-6)$
이때 $f(2x)=a(2x+2)(2x-6)=4a(x+1)(x-3)$이므로
$f(2x)=0$에서
$4a(x+1)(x-3)=0$
$x=-1$ 또는 $x=3$
함수 $y=f(2x)$의 그래프와 x축이 만나는 두 점의 x좌표는 각각 -1, 3이다.
따라서 $p=-1$, $q=3$ 또는 $p=3$, $q=-1$이므로
$p+q=-1+3=2$ 답 ②

06 이차함수 $y=x^2-2kx+k^2-2k+6$의 그래프와 x축이 서로 다른 두 점에서 만나려면 이차방정식 $x^2-2kx+k^2-2k+6=0$의 판별식을 D라 할 때,
$\dfrac{D}{4}=(-k)^2-(k^2-2k+6)>0$
이어야 한다.
즉, $2k-6>0$에서 $k>3$
따라서 정수 k의 최솟값은 4이다. 답 ④

07 이차함수 $y=x^2-4x-3k+16$의 그래프와 x축이 접하려면 이차방정식 $x^2-4x-3k+16=0$의 판별식을 D라 할 때,
$\dfrac{D}{4}=(-2)^2-(-3k+16)=0$
이어야 한다.
즉, $3k-12=0$에서 $k=4$
한편, 이차방정식 $x^2-4x+4=0$에서
$(x-2)^2=0$, $x=2$
이차함수 $y=x^2-4x+4$의 그래프는 x축과 점 $(2, 0)$에서 접하므로 $a=2$
따라서 $k+a=4+2=6$ 답 ③

08 이차함수 $y=x^2+2(k-1)x+k^2+k-14$의 그래프가 x축과 만나지 않으려면 이차방정식 $x^2+2(k-1)x+k^2+k-14=0$의 판별식을 D라 할 때,
$\dfrac{D}{4}=(k-1)^2-(k^2+k-14)<0$
이어야 한다.
즉, $-3k+15<0$에서 $k>5$
따라서 정수 k의 최솟값은 6이다. 답 ④

09 이차함수 $y=x^2+2(a-k)x+k^2-6k+b$의 그래프가 실수 k의 값에 관계없이 항상 x축과 한 점에서 만나므로 이차방정식 $x^2+2(a-k)x+k^2-6k+b=0$의 판별식을 D라 할 때,
$\dfrac{D}{4}=(a-k)^2-(k^2-6k+b)=0$
이어야 한다. 즉,

$(a^2-2ak+k^2)-(k^2-6k+b)=0$에서
$-2(a-3)k+a^2-b=0$
위 등식이 k에 대한 항등식이므로
$-2(a-3)=0$, $a^2-b=0$
따라서 $a=3$, $b=9$이므로
$a+b=3+9=12$ 답 ⑤

10 이차함수 $y=-x^2+3x+3$의 그래프와 직선 $y=2x+1$이 두 점 A, B에서 만나고, 두 점 A, B의 x좌표가 각각 a, b이므로 이차방정식 $-x^2+3x+3=2x+1$, 즉 $x^2-x-2=0$의 두 실근은 a, b이다.
이차방정식 $x^2-x-2=0$에서
$(x+1)(x-2)=0$
$x=-1$ 또는 $x=2$
따라서 $a=-1$, $b=2$ 또는 $a=2$, $b=-1$이므로
$|a-b|=|-1-2|=3$ 답 ③

11 이차함수 $y=x^2-x+8$의 그래프와 직선 $y=-3x+k$가 만나지 않아야 하므로 이차방정식 $x^2-x+8=-3x+k$, 즉 $x^2+2x+8-k=0$의 판별식을 D라 할 때,
$\frac{D}{4}=1^2-(8-k)<0$
이어야 한다.
즉, $k<7$
따라서 정수 k의 최댓값은 6이다. 답 ④

12 이차함수 $y=x^2+ax-2$의 그래프와 직선 $y=-2x+b$가 두 점 A, B에서 만나고, 점 A의 x좌표가 $3-2\sqrt{2}$이므로 이차방정식 $x^2+ax-2=-2x+b$, 즉 $x^2+(a+2)x-2-b=0$의 한 근이 $3-2\sqrt{2}$이다.
이때 a, b가 유리수이므로
$3+2\sqrt{2}$도 이차방정식 $x^2+(a+2)x-2-b=0$의 근이다.
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$(3-2\sqrt{2})+(3+2\sqrt{2})=-(a+2)$,
$(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})=-2-b$
이므로 $a=-8$, $b=-3$
따라서 $a+b=-8+(-3)=-11$ 답 ⑤

13 이차함수 $y=-x^2+7x+4$의 그래프와 직선 $y=-x+k$가 접하므로 이차방정식 $-x^2+7x+4=-x+k$, 즉 $x^2-8x+k-4=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(-4)^2-(k-4)=0$
이어야 한다.
즉, $k=20$
이차방정식 $x^2-8x+16=0$에서
$(x-4)^2=0$, $x=4$
이므로 점 P의 x좌표는 4이다.
한편, 직선 $y=-x+20$과 y축이 만나는 점 Q의 좌표는 $(0, 20)$이다.
따라서 삼각형 OPQ의 넓이는
$\frac{1}{2}\times4\times20=40$ 답 40

14 이차함수 $y=2x^2-3x+1$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 만나야 하므로 이차방정식 $2x^2-3x+1=x+k$, 즉 $2x^2-4x+1-k=0$의 판별식을 D라 할 때,
$\frac{D}{4}=(-2)^2-2(1-k)\ge0$
이어야 한다.
즉, $k\ge-1$
따라서 실수 k의 최솟값은 -1이다. 답 ②

15 점 $(0, -1)$을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은 $y=mx-1$이다.
이차함수 $y=x^2-2x+3$의 그래프와 직선 $y=mx-1$이 접하므로 이차방정식 $x^2-2x+3=mx-1$, 즉 $x^2-(m+2)x+4=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(m+2)^2-4\times1\times4=0$
이어야 한다.
즉, $m^2+4m-12=0$에서 $(m+6)(m-2)=0$
$m=-6$ 또는 $m=2$
따라서 모든 실수 m의 값의 합은
$-6+2=-4$ 답 ②

16 $f(x)=x^2-2x+a=(x-1)^2+a-1$이므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 x좌표는 1이다.
$-2\le1\le2$이므로 $-2\le x\le2$에서 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 최솟값을 갖고, $x=-2$일 때 최댓값을 갖는다.
이때 함수 $f(x)$의 최솟값이 -3이므로
$f(1)=1-2+a=-3$에서 $a=-2$
$M=f(-2)=(-2)^2-2\times(-2)-2=6$
따라서 $a+M=-2+6=4$ 답 ①

17 $f(x)=-x^2+4x+8=-(x-2)^2+12$이므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(2, 12)$이다.
(i) $a\ge2$일 때
$-4\le x\le a$에서 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최댓값 12를 가지므로 주어진 조건을 만족하지 않는다.
(ii) $-4<a<2$일 때
$-4\le x\le a$에서 함수 $f(x)$는 $x=a$일 때 최댓값을 가진다.
이때 함수 $f(x)$의 최댓값이 3이므로
$f(a)=-a^2+4a+8=3$
$a^2-4a-5=0$, $(a+1)(a-5)=0$
즉, $-4<a<2$이므로 $a=-1$
(i), (ii)에 의하여 $a=-1$ 답 ②

18 $\overline{DF}=x$로 놓으면
$\overline{BF}=\overline{CG}=x$
$\overline{FG}=\overline{BC}-(\overline{BF}+\overline{CG})=8-2x$
이때 $x>0$, $8-2x>0$이므로 $0<x<4$
직사각형 DFGE의 넓이를 S라 하면
$S=\overline{DF}\times\overline{FG}$
$=x(8-2x)$

$=-2(x-2)^2+8$

따라서 직사각형 DFGE의 넓이 S는 $x=2$일 때 최댓값 8을 갖는다.

답 8

19 $3x-2=t$로 놓으면 $-2\le t\le 4$

$f(x)=(3x-2)^2-4(3x-2)+5$

$=t^2-4t+5=(t-2)^2+1$

이때 $-2\le 2\le 4$이므로 $-2\le t\le 4$에서 함수 $f(x)$는 $t=-2$일 때 최댓값을 갖고, $t=2$일 때 최솟값을 갖는다.

따라서 $M=(-2-2)^2+1=17$, $m=(2-2)^2+1=1$이므로

$M+m=17+1=18$

답 ⑤

20 $x^2-2x+2y^2+8y+12=(x^2-2x+1)+2(y^2+4y+4)+3$

$=(x-1)^2+2(y+2)^2+3$

따라서 $x=1$, $y=-2$일 때 주어진 식은 최솟값 3을 가진다.

답 ③

21 $x+y=4$에서 $y=4-x$

$y\ge 0$이므로 $4-x\ge 0$, $x\le 4$

이때 $x\ge 0$이므로 $0\le x\le 4$

따라서

$x^2-xy+5=x^2-x(4-x)+5$

$=2x^2-4x+5$

$=2(x-1)^2+3$

이므로 주어진 식은 $x=1$일 때 최솟값 3을 갖는다.

답 ③

22 이차함수 $y=2x^2-3x+k$의 그래프와 x축이 만나지 않아야 하므로 이차방정식 $2x^2-3x+k=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=(-3)^2-4\times 2\times k<0$

이어야 한다.

즉, $9-8k<0$에서 $k>\dfrac{9}{8}$ …… ㉠

………………………………………………………… ❶

이차함수 $y=x^2+2kx+k+2$의 그래프와 x축이 접하므로 이차방정식 $x^2+2kx+k+2=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\dfrac{D_2}{4}=k^2-(k+2)=0$

이어야 한다.

즉, $k^2-k-2=0$에서 $(k+1)(k-2)=0$

$k=-1$ 또는 $k=2$ …… ㉡

………………………………………………………… ❷

㉠, ㉡에서 $k=2$

………………………………………………………… ❸

답 2

단계	채점 기준	비율
❶	이차함수 $y=2x^2-3x+k$의 그래프와 x축이 만나지 않도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구한 경우	40 %
❷	이차함수 $y=x^2+2kx+k+2$의 그래프와 x축이 접하도록 하는 실수 k의 값을 구한 경우	40 %
❸	주어진 조건을 만족시키는 실수 k의 값을 구한 경우	20 %

23 이차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이고 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 -3, 1이므로

$f(x)=(x+3)(x-1)=(x+1)^2-4$

………………………………………………………… ❶

이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 x좌표는 -1이다.

이때 $-3\le -1\le 3$이므로 $-3\le x\le 3$에서 함수 $f(x)$는 $x=3$일 때 최댓값을 갖고, $x=-1$일 때 최솟값을 갖는다.

$M=f(3)=(3+1)^2-4=12$,

$m=f(-1)=(-1+1)^2-4=-4$

………………………………………………………… ❷

따라서

$M+m=12+(-4)=8$

………………………………………………………… ❸

답 8

단계	채점 기준	비율
❶	함수 $f(x)$를 구한 경우	40 %
❷	최댓값 M과 최솟값 m을 각각 구한 경우	40 %
❸	$M+m$의 값을 구한 경우	20 %

내신 고득점 도전 문제

본문 56~59쪽

24 ③	**25** ②	**26** ④	**27** ①	**28** ⑤
29 ③	**30** ④	**31** ②	**32** ①	**33** ④
34 ⑤	**35** ④	**36** ②	**37** -5	**38** ③
39 ②	**40** ①	**41** ④	**42** ③	**43** ②
44 ③	**45** 3	**46** 9		

24 $\overline{AB}=2$이므로 두 점 A, B의 x좌표는 각각 a, $a+2$ 또는 $a+2$, a로 놓을 수 있다.

이차방정식 $x^2-kx+15=0$의 두 실근이 a, $a+2$이므로

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a+(a+2)=k$ …… ㉠

$a(a+2)=15$ …… ㉡

㉡에서

$a^2+2a-15=0$

$(a+5)(a-3)=0$

$a=-5$ 또는 $a=3$

$a=-5$일 때, $k=-8$

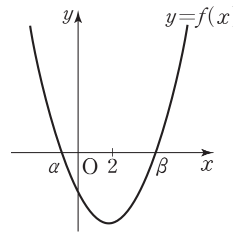
$a=3$일 때, $k=8$

따라서 모든 실수 k의 값의 곱은

$-8\times 8=-64$

답 ③

25 이차방정식 $x^2+nx-4n+7=0$의 한 근은 2보다 작고, 다른 한 근은 2보다 크므로 이차방정식 $x^2+nx-4n+7=0$은 서로 다른 두 실근 α, β $(\alpha<\beta)$를 갖고, $\alpha<2<\beta$이다.



$f(x)=x^2+nx-4n+7$이라 하면

$f(2)=4+2n-4n+7<0$이어야 한다.

즉, $2n>11$에서 $n>\frac{11}{2}$

따라서 구하는 정수 n의 최솟값은 6이다.

답 ②

26 $f(x)=-x^2+ax+a+1$이라 하면

$f(-1)=-1-a+a+1=0$

이므로 -1은 이차방정식 $-x^2+ax+a+1=0$의 한 근이다.

이차방정식 $-x^2+ax+a+1=0$, 즉 $x^2-ax-a-1=0$에서

$(x+1)(x-a-1)=0$

$x=-1$ 또는 $x=a+1$

이차함수 $y=-x^2+ax+a+1$의 그래프와 x축이 만나는 두 점 A, B의 x좌표는 각각 -1, $a+1$ 또는 $a+1$, -1이다.

$a>0$이므로 $\overline{\mathrm{OA}}+\overline{\mathrm{OB}}=(a+1)+1=a+2$

이때 $\overline{\mathrm{OA}}+\overline{\mathrm{OB}}=12$이므로

$a+2=12$

따라서 $a=10$

답 ④

27 이차함수 $y=x^2+ax-4a+2$의 그래프와 x축이 만나는 두 점의 x좌표가 α, β이므로 이차방정식 $x^2+ax-4a+2=0$의 두 실근은 α, β이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-a$, $\alpha\beta=-4a+2$ …… ㉠

$|\alpha-\beta|=3$에서

$(\alpha-\beta)^2=9$

$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=9$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$(-a)^2-4(-4a+2)=9$, $a^2+16a-17=0$

$(a+17)(a-1)=0$, $a=-17$ 또는 $a=1$

따라서 모든 실수 a의 값의 합은

$-17+1=-16$

답 ①

28 $f(0)=f(4)$이므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축은 직선 $x=2$이다.

이때 -2가 이차방정식 $f(x)=0$의 근이므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축이 만나는 두 점의 x좌표는 각각 -2, 6이다.

즉, 이차방정식 $f(x)=0$의 두 실근이 -2, 6이므로 이차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수를 a $(a<0)$이라 하면

$f(x)=a(x+2)(x-6)$

$f(0)=-12a=6$에서 $a=-\frac{1}{2}$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{2}(x+2)(x-6)$이므로

$f(2)=-\frac{1}{2}\times4\times(-4)=8$

답 ⑤

29 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축이 두 점 A, B에서 만나므로 두 점 A, B의 x좌표는 이차방정식 $x^2+2x-3=0$의 서로 다른 두 실근이다.

$x^2+2x-3=0$에서

$(x+3)(x-1)=0$

$x=-3$ 또는 $x=1$

한편, $\overline{\mathrm{OA}}>\overline{\mathrm{OB}}$이므로 두 점 A, B의 x좌표는 각각 -3, 1이다.

이차함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축이 두 점 A, C에서 만나므로 두 점 A, C의 x좌표는 이차방정식 $g(x)=0$의 근이다.

$g(-3)=9-3a+8a+1=0$에서 $a=-2$

$g(x)=0$에서

$x^2-2x-15=0$, $(x+3)(x-5)=0$

$x=-3$ 또는 $x=5$

따라서 점 C의 x좌표는 5이므로

$\overline{\mathrm{AC}}=5-(-3)=8$

답 ③

30 이차함수 $f(x)=x^2-kx+3k-9$의 그래프가 x축과 접하므로 이차방정식 $x^2-kx+3k-9=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-k)^2-4(3k-9)=0$

이어야 한다.

즉, $k^2-12k+36=0$에서

$(k-6)^2=0$, $k=6$

$x^2-6x+9=0$에서

$(x-3)^2=0$, $x=3$

즉, 점 A의 좌표는 $(3, 0)$이다.

한편, $f(0)=3k-9=18-9=9$이므로 점 B의 좌표는 $(0, 9)$이다.

따라서 삼각형 OAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{OB}}=\frac{1}{2}\times3\times9=\frac{27}{2}$

답 ④

31 이차함수 $y=x^2-6x+k+7$의 그래프와 x축이 서로 다른 두 점에서 만나므로 이차방정식 $x^2-6x+k+7=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=(-3)^2-(k+7)>0$

이어야 한다.

즉, $2-k>0$에서

$k<2$ …… ㉠

이차함수 $y=-x^2+2kx-k-12$의 그래프와 x축이 접하므로 이차방정식 $-x^2+2kx-k-12=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=k^2-(-1)\times(-k-12)=0$

이어야 한다.

즉, $k^2-k-12=0$에서 $(k+3)(k-4)=0$

$k=-3$ 또는 $k=4$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $k=-3$

답 ②

32 이차함수 $y=x^2+2ax+10a-b^2-4b-28$의 그래프와 x축이 만나지 않아야 하므로 이차방정식 $x^2+2ax+10a-b^2-4b-28=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-(10a-b^2-4b-28)<0$

이어야 한다.

즉, $a^2-10a+b^2+4b+28<0$에서

$(a-5)^2+(b+2)^2<1$ …… ㉠

$(a-5)^2$, $(b+2)^2$은 음이 아닌 정수이므로

㉠에서 $(a-5)^2=0$, $(b+2)^2=0$이어야 한다.

따라서 $a=5$, $b=-2$이므로

$a+b=5+(-2)=3$ 답 ①

33 이차함수 $f(x)=x^2+ax+b$의 그래프와 x축이 만나는 두 점 A, B의 x좌표가 각각 2, 4이므로 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 실근은 2, 4이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$2+4=-a$, $2\times4=b$이므로

$a=-6$, $b=8$

이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-4x+c$가 접하므로 이차방정식 $x^2-6x+8=-4x+c$, 즉 $x^2-2x+8-c=0$의 판별식을 D라 할 때,

$\frac{D}{4}=(-1)^2-(8-c)=0$

이어야 한다.

즉, $c=7$

따라서 $a+b+c=-6+8+7=9$ 답 ④

34 이차방정식 $x^2-x-2=4$, 즉 $x^2-x-6=0$에서

$(x+2)(x-3)=0$

$x=-2$ 또는 $x=3$

이차함수 $y=x^2-x-2$의 그래프와 직선 $y=4$가 만나는 두 점 A, B의 좌표는 각각 $(3, 4)$, $(-2, 4)$이다.

이차방정식 $x^2-x-2=0$에서 $(x+1)(x-2)=0$

$x=-1$ 또는 $x=2$

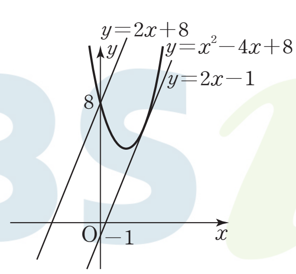
이차함수 $y=x^2-x-2$의 그래프와 x축이 만나는 두 점 C, D의 좌표는 각각 $(2, 0)$, $(-1, 0)$이다.

따라서 사각형 ABDC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times(\overline{AB}+\overline{CD})\times4$

$=\frac{1}{2}\times(5+3)\times4=16$ 답 ⑤

35 이차함수 $y=x^2-4x+8$의 그래프와 y축이 만나는 점의 좌표는 $(0, 8)$이다.



이차함수 $y=x^2-4x+8$의 그래프와 직선 $y=2x+k$가 접하려면 이차방정식 $x^2-4x+8=2x+k$, 즉 $x^2-6x+8-k=0$의 판별식을 D라 할 때,

$\frac{D}{4}=(-3)^2-(8-k)=0$

이어야 한다.

즉, $k=-1$

직선 $y=2x+k$가 점 $(0, 8)$을 지날 때, $k=8$

이차함수 $y=x^2-4x+8$의 그래프와 직선 $y=2x+k$가 만나는 두 점 A, B의 x좌표가 모두 양수이려면 $-1<k<8$이어야 한다.

따라서 정수 k는 0, 1, 2, …, 7의 8개이다. 답 ④

36 최고차항의 계수가 -1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 이차방정식 $f(x)=0$의 두 실근이 -3, 0이므로

$f(x)=-x(x+3)=-x^2-3x$

이차함수 $f(x)=-x^2-3x$의 그래프와 직선 $y=x+n$이 만나지 않아야 하므로 이차방정식 $-x^2-3x=x+n$, 즉 $x^2+4x+n=0$의 판별식을 D라 할 때,

$\frac{D}{4}=2^2-n<0$

이어야 한다.

즉, $n>4$

따라서 정수 n의 최솟값은 5이다. 답 ②

37 조건 (가)에서 $f(0)=f(2)$이므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축은 직선 $x=1$이다.

이때 $-\frac{a}{-2}=1$에서 $a=2$

조건 (나)에서 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-2x+7$이 한 점에서 만나므로 이차방정식 $-x^2+2x+b=-2x+7$, 즉 $x^2-4x+7-b=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=(-2)^2-(7-b)=0$

이어야 한다.

즉, $b=3$

따라서 $f(x)=-x^2+2x+3$이므로

$f(x)+a=0$, 즉 $f(x)+2=0$에서

$-x^2+2x+5=0$

이차방정식 $-x^2+2x+5=0$, 즉 $x^2-2x-5=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=(-1)^2-(-5)=6>0$

이므로 이차방정식 $x^2-2x-5=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 서로 다른 모든 실근의 곱은 -5이다. 답 -5

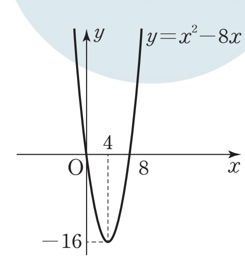
38 이차함수 $y=x^2-8x=(x-4)^2-16$의 꼭짓점의 좌표는 $(4, -16)$

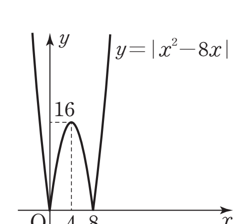
$x^2-8x=0$에서 $x(x-8)=0$

$x=0$ 또는 $x=8$

이므로 이차함수 $y=x^2-8x$의 그래프와 x축은 두 점 $(0, 0)$, $(8, 0)$에서 만난다.

이때 이차함수 $y=x^2-8x$의 그래프와 함수 $y=|x^2-8x|$의 그래프는 각각 다음과 같다.





함수 $y=|x^2-8x|$의 그래프와 직선 $y=a$가 서로 다른 네 점에서 만나려면 $0<a<16$이어야 한다.

따라서 정수 a는 1, 2, 3, …, 15의 15개이다. 답 ③

39 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축은 직선 $x=1$이다.
즉, 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 x좌표가 1이고, 이차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로 $f(x)=(x-1)^2+a$ (a는 상수)로 놓을 수 있다.
$-2\le 1\le 3$이므로 $-2\le x\le 3$에서 이차함수 $f(x)$는 $x=-2$일 때 최댓값을 갖고, $x=1$일 때 최솟값을 갖는다.
이때 함수 $f(x)$의 최댓값이 15이므로
$f(-2)=9+a=15$에서 $a=6$
따라서
$m=f(1)=a=6$ 답 ②

40 $f(-1)=f(a)$이면
$1+2+a=a^2-2a+a$
$a^2-2a-3=0$, $(a+1)(a-3)=0$
$a>-1$이므로 $a=3$
(i) $-1<a<3$일 때
$-1\le x\le a$에서 이차함수 $f(x)$는 $x=-1$일 때 최댓값을 갖고, 최댓값이 12이므로
$f(-1)=1+2+a=12$
$a=9$
이때 $-1<a<3$이므로 주어진 조건을 만족하지 못한다.
(ii) $a\ge 3$일 때
$f(-1)\le f(a)$이므로 $-1\le x\le a$에서 이차함수 $f(x)$는 $x=a$일 때 최댓값을 갖고, 최댓값이 12이므로
$f(a)=a^2-2a+a=12$
$a^2-a-12=0$, $(a+3)(a-4)=0$
이때 $a\ge 3$이므로 $a=4$
(i), (ii)에 의하여 $a=4$
$f(x)=x^2-2x+4=(x-1)^2+3$에서
$-1\le 1\le 4$이므로 $-1\le x\le 4$에서 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 최솟값을 갖는다.
따라서
$m=f(1)=3$ 답 ①

41 $f(x)=g(x)$에서 $-x^2+3x+5=2x-1$
$x^2-x-6=0$, $(x+2)(x-3)=0$
$x=-2$ 또는 $x=3$
이때 $\alpha<\beta$이므로 $\alpha=-2$, $\beta=3$
$$f(x)-g(x)=(-x^2+3x+5)-(2x-1)$$
$$=-x^2+x+6$$
$$=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{25}{4}$$
$-2\le\frac{1}{2}\le 3$이므로 $-2\le x\le 3$에서 함수 $f(x)-g(x)$는 $x=\frac{1}{2}$일 때 최댓값 $\frac{25}{4}$를 가진다.
따라서 $p=\frac{1}{2}$, $M=\frac{25}{4}$이므로
$p+M=\frac{1}{2}+\frac{25}{4}=\frac{27}{4}$ 답 ④

42 $f(x)=x^2-2ax-4a+3$
$=(x-a)^2-a^2-4a+3$
이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 x좌표는 a이다.
(i) $a\le -2$일 때
$-2\le x\le 2$에서 함수 $f(x)$는 $x=-2$일 때 최솟값을 가지므로
$f(-2)=4+4a-4a+3=7$
이는 주어진 조건을 만족시키지 못한다.
(ii) $-2<a<2$일 때
$-2\le x\le 2$에서 함수 $f(x)$는 $x=a$일 때 최솟값 6을 가지므로
$f(a)=-a^2-4a+3=6$
$a^2+4a+3=0$
$(a+1)(a+3)=0$
$a=-3$ 또는 $a=-1$
이때 $-2<a<2$이므로
$a=-1$
$f(x)=(x+1)^2+6$이고, $-2\le x\le 2$에서 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최댓값을 가지므로
$M=f(2)=3^2+6=15$
(iii) $a>2$일 때
$-2\le x\le 2$에서 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최솟값 6을 가지므로
$f(2)=4-4a-4a+3=6$
$-8a+7=6$
$a=\frac{1}{8}$
이때 $a<2$이므로 주어진 조건을 만족시키지 못한다.
(i), (ii), (iii)에 의하여
$a=-1$, $M=15$
따라서 $a+M=-1+15=14$ 답 ③

43 $t=-x^2+4x=-(x-2)^2+4$라 하자.
$0\le x\le 3$에서 함수 t는 $x=2$일 때 최댓값 4를 갖고, $x=0$일 때 최솟값 0을 갖는다.
즉, $0\le t\le 4$
$y=(-x^2+4x)^2-2(-x^2+4x)$
$=t^2-2t$
$=(t-1)^2-1$
이므로 $0\le t\le 4$에서 함수 y는 $t=1$일 때 최솟값 -1을 갖고, $t=4$일 때 최댓값 8을 갖는다.
따라서 구하는 최댓값과 최솟값의 합은
$8+(-1)=7$ 답 ②

44 $y=-x^2+5x-4$
$=-(x-1)(x-4)$
$-(x-1)(x-4)=0$에서
$x=1$ 또는 $x=4$
이차함수 $y=-x^2+5x-4$의 그래프와 x축이 만나는 두 점은 $(1, 0)$, $(4, 0)$이므로 점 P의 x좌표를 a라 하면
$1<a<4$ …… ㉠
$\overline{OQ}=a$, $\overline{OR}=-a^2+5a-4$

이므로 직사각형 PROQ의 둘레의 길이는

$2(\overline{OQ}+\overline{OR})$

$=2\{a+(-a^2+5a-4)\}$

$=-2a^2+12a-8$

$=-2(a-3)^2+10$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 직사각형 PROQ의 둘레의 길이는 $a=3$일 때 최댓값 10을 갖는다.

답 ③

45 조건 ㈎에서 두 수 -2, 3은 이차방정식 $f(x)=a$, 즉 $f(x)-a=0$의 서로 다른 두 실근이고 이차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$f(x)-a=(x+2)(x-3)$

즉, $f(x)=x^2-x-6+a$

…… ❶

조건 ㈏에서 이차방정식 $x^2-x-6+a=x-a-1$, 즉 $x^2-2x+2a-5=0$의 판별식을 D라 할 때,

$\frac{D}{4}=(-1)^2-(2a-5)=0$

이어야 한다.

즉, $6-2a=0$에서 $a=3$

…… ❷

따라서 $f(x)=x^2-x-3$이므로

$f(a)=f(3)=3^2-3-3=3$

…… ❸

답 3

단계	채점 기준	비율
❶	조건 ㈎를 만족시키는 함수 $f(x)$를 구한 경우	30 %
❷	조건 ㈏를 만족시키는 상수 a의 값을 구한 경우	40 %
❸	$f(a)$의 값을 구한 경우	30 %

46 조건 ㈎에 의하여 이차방정식 $f(x)=0$의 두 실근이 -1, 3이므로 이차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수를 a $(a<0)$이라 하면

$f(x)=a(x+1)(x-3)=a(x-1)^2-4a$

…… ❶

$-4\le x\le 4$에서 함수 $f(x)$는 $x=-4$일 때 최솟값을 가지므로 조건 ㈏에서

$f(-4)=21a=-63$

즉, $a=-3$

…… ❷

따라서 $f(x)=-3(x+1)(x-3)$이므로

$f(2)=-3\times3\times(-1)=9$

…… ❸

답 9

단계	채점 기준	비율
❶	조건 ㈎를 만족시키는 함수 $f(x)$를 구한 경우	30 %
❷	조건 ㈏를 이용하여 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수를 구한 경우	40 %
❸	$f(2)$의 값을 구한 경우	30 %

변별력을 만드는 1등급 문제

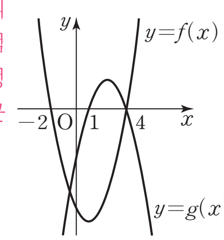
본문 60~62쪽

47 ①	**48** ④	**49** 15	**50** ①	**51** ③
52 ②	**53** ②	**54** ③	**55** ④	**56** ⑤
57 ④	**58** ②			

47

이차항의 계수가 1인 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 이차항의 계수가 -1인 이차함수 $y=g(x)$의 그래프가 다음 그림과 같다. 함수 $y=2f(x)+3g(x)$의 그래프와 x축이 만나는 서로 다른 모든 점의 x좌표의 합은?

이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 이차방정식 $f(x)=0$의 실근과 같다.



✓① 11 ② 12 ③ 13
④ 14 ⑤ 15

Step 1 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 각각 구하기

이차항의 계수가 1인 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축이 만나는 두 점의 x좌표가 각각 -2, 4이므로

$f(x)=(x+2)(x-4)$

이차항의 계수가 -1인 이차함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축이 만나는 두 점의 x좌표가 각각 1, 4이므로

$g(x)=-(x-1)(x-4)$

Step 2 방정식 $2f(x)+3g(x)=0$의 실근 구하기

함수 $y=2f(x)+3g(x)$의 그래프와 x축이 만나는 점의 x좌표는 방정식 $2f(x)+3g(x)=0$의 실근이다.

$2f(x)+3g(x)=0$에서

$2(x+2)(x-4)-3(x-1)(x-4)=0$

$(x-4)\{2(x+2)-3(x-1)\}=0$

$(x-4)(-x+7)=0$

$x=4$ 또는 $x=7$

Step 3 서로 다른 모든 점의 x좌표의 합 구하기

따라서 구하는 서로 다른 모든 점의 x좌표의 합은

$4+7=11$

답 ①

48

최고차항의 계수가 a $(a\ne0)$인 이차함수 $f(x)$에 대하여 $f(\alpha)=f(\beta)=0$이면 $f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)$이다.

최고차항의 계수가 2인 이차함수 $f(x)$에 대하여 $f(p)=f(2p)=0$이고, 방정식 $f(2x-1)=0$의 서로 다른 모든 실근의 합이 10일 때, $f(4)$의 값은? (단, p는 0이 아닌 실수이다.)

① 20 ② 24 ③ 28
✓④ 32 ⑤ 36

Step 1 함수 $f(x)$ 구하기

$f(p)=f(2p)=0$이므로 이차방정식 $f(x)=0$의 두 실근은 p, $2p$이다.
이차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 2이므로
$f(x)=2(x-p)(x-2p)$

Step 2 p의 값 구하기

$f(2x-1)=2(2x-1-p)(2x-1-2p)$이므로
방정식 $f(2x-1)=0$에서
$2(2x-1-p)(2x-1-2p)=0$
$x=\frac{p+1}{2}$ 또는 $x=\frac{2p+1}{2}$
이때 $p\neq0$이므로 $\frac{p+1}{2}\neq\frac{2p+1}{2}$
방정식 $f(2x-1)=0$의 서로 다른 모든 실근의 합이 10이므로
$\frac{p+1}{2}+\frac{2p+1}{2}=10$에서 $p=6$

Step 3 $f(4)$의 값 구하기

따라서 $f(x)=2(x-6)(x-12)$이므로
$f(4)=2\times(-2)\times(-8)=32$ 답 ④

이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축이 한 점에서 만나면 이차방정식 $f(x)=0$은 중근을 갖는다. 즉, 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면 $D=0$이다.

49

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축은 서로 다른 두 점에서 만나고, 이차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 이차함수 $y=2x^2-4x$의 그래프와 x축이 만나는 두 점 중에서 한 점만을 지난다.
> (나) 함수 $y=f(x)+1$의 그래프와 x축은 한 점에서 만난다.

$f(3)<0$일 때, $f(-1)$의 값을 구하시오.

Step 1 방정식 $f(x)=0$의 근 구하기

이차방정식 $2x^2-4x=0$에서
$2x(x-2)=0$
$x=0$ 또는 $x=2$
이차함수 $y=2x^2-4x$의 그래프와 x축은 두 점 $(0, 0)$, $(2, 0)$에서 만난다.
이때 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 두 점 $(0, 0)$, $(2, 0)$ 중 한 점만을 지나므로 두 수 0, 2 중 한 수만 방정식 $f(x)=0$의 근이다.

Step 2 이차함수 $f(x)$ 구하기

(i) $f(0)=0$, $f(2)\neq0$일 때
상수 a $(a\neq0,\ a\neq2)$에 대하여
$f(x)=x(x-a)=x^2-ax$
로 놓을 수 있다.
조건 (나)에서 함수 $y=f(x)+1$의 그래프와 x축이 한 점에서 만나므로 이차방정식 $f(x)+1=0$, 즉 $x^2-ax+1=0$의 판별식을 D_1이라 하면
$D_1=a^2-4=0$
이어야 한다.
$(a+2)(a-2)=0$에서 $a\neq2$이므로 $a=-2$
즉, $f(x)=x(x+2)$이고 $f(3)=15>0$이므로 주어진 조건을 만족시키지 못한다.

(ii) $f(2)=0$, $f(0)\neq0$일 때
상수 b $(b\neq0,\ b\neq2)$에 대하여
$f(x)=(x-2)(x-b)=x^2-(b+2)x+2b$
로 놓을 수 있다.
조건 (나)에서 함수 $y=f(x)+1$의 그래프와 x축이 한 점에서 만나므로 이차방정식 $f(x)+1=0$, 즉 $x^2-(b+2)x+2b+1=0$의 판별식을 D_2라 하면
$D_2=(b+2)^2-4(2b+1)=0$
이어야 한다.
$b(b-4)=0$에서 $b\neq0$이므로 $b=4$
즉, $f(x)=(x-2)(x-4)$이고 $f(3)=-1<0$이므로 주어진 조건을 만족시킨다.

Step 3 $f(-1)$의 값 구하기

(i), (ii)에 의하여
$f(x)=(x-2)(x-4)$
이므로
$f(-1)=(-3)\times(-5)=15$ 답 15

50

이차함수 $f(x)=a(x-p)^2+q$ (a, p, q는 실수)에 대하여
① $a>0$이면 $f(x)\geq q$ ② $a<0$이면 $f(x)\leq q$

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq f(1)$이다.
> (나) $f(-2)=0$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 접할 때, 상수 k의 값은?

✓① $-\frac{41}{4}$ ② $-\frac{37}{4}$ ③ $-\frac{33}{4}$
④ $-\frac{29}{4}$ ⑤ $-\frac{25}{4}$

Step 1 이차방정식 $f(x)=0$의 두 실근 구하기

조건 (가)에서 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq f(1)$이므로
이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 x좌표는 1이다.
이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축이 직선 $x=1$이고
조건 (나)에서 $f(-2)=0$이므로 $f(4)=0$이다.
즉, 이차방정식 $f(x)=0$의 두 실근이 -2, 4이다.

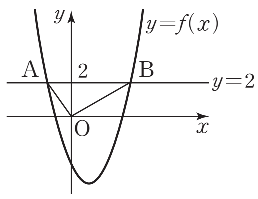
Step 2 상수 k의 값 구하기

이차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로
$f(x)=(x+2)(x-4)$
$=x^2-2x-8$
함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 접하므로 이차방정식 $x^2-2x-8=x+k$, 즉 $x^2-3x-8-k=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(-3)^2-4(-8-k)=0$
이어야 한다.
즉, $4k+41=0$에서
$k=-\frac{41}{4}$ 답 ①

51

두 점 A, B의 x좌표는 이차방정식 $x^2-2kx+k^2-14=2$의 두 실근이고, 두 점 A, B의 y좌표는 모두 2이다.

실수 k에 대하여 이차함수 $f(x)=x^2-2kx+k^2-14$의 그래프와 직선 $y=2$가 두 점 A, B에서 만나고, 두 직선 OA, OB의 기울기의 곱이 -1이다. 삼각형 AOB의 넓이를 S라 할 때, $k^2\times S$의 값은? (단, O는 원점이고, $k^2\neq 16$이다.)



① 92　② 94　✓③ 96
④ 98　⑤ 100

Step 1 두 점 A, B의 좌표 각각 구하기

$f(x)=2$에서 $x^2-2kx+k^2-14=2$
$x^2-2kx+k^2-16=0$
$(x-k+4)(x-k-4)=0$
$x=k-4$ 또는 $x=k+4$
즉, 두 점 A, B의 좌표를 $\mathrm{A}(k-4,\ 2)$, $\mathrm{B}(k+4,\ 2)$라 할 수 있다.

Step 2 k^2의 값 구하기

직선 OA의 기울기는 $\dfrac{2}{k-4}$

직선 OB의 기울기는 $\dfrac{2}{k+4}$

두 직선 OA, OB의 기울기의 곱이 -1이므로

$\dfrac{2}{k-4}\times\dfrac{2}{k+4}=-1$, $k^2=12$

Step 3 $k^2\times S$의 값 구하기

한편 $\overline{\mathrm{AB}}=8$이므로 $S=\dfrac{1}{2}\times 8\times 2=8$

따라서 $k^2\times S=12\times 8=96$　답 ③

52

방정식 $h(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수와 같다.

두 유리수 a, b에 대하여 이차함수 $f(x)=x^2+ax-3$의 그래프와 일차함수 $g(x)=2x+b$의 그래프가 두 점 A, B에서 만나고 점 A의 x좌표는 $2-\sqrt{3}$이다. 함수 $h(x)$를

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)\leq g(x)) \\ g(x) & (f(x)>g(x)) \end{cases}$$

라 할 때, 방정식 $h(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되도록 하는 모든 실수 t의 값의 범위는 $\alpha<t<\beta$이다. $\alpha^2+\beta^2$의 값은?

① 26　✓② 28　③ 30
④ 32　⑤ 34

Step 1 이차방정식 $x^2+(a-2)x-b-3=0$의 근 구하기

이차함수 $f(x)=x^2+ax-3$의 그래프와 일차함수 $g(x)=2x+b$의 그래프가 두 점 A, B에서 만나고 점 A의 x좌표가 $2-\sqrt{3}$이므로 이차방정식 $x^2+ax-3=2x+b$, 즉 $x^2+(a-2)x-b-3=0$의 한 근은 $2-\sqrt{3}$이다.

이때 a, b가 모두 유리수이므로 $2+\sqrt{3}$도 이차방정식 $x^2+(a-2)x-b-3=0$의 근이다.

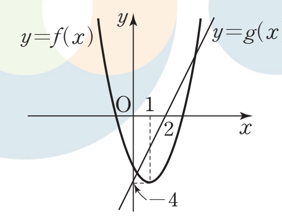
Step 2 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프 나타내기

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=-(a-2)$　…… ㉠
$(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=-b-3$　…… ㉡

㉠에서 $4=-a+2$, $a=-2$
㉡에서 $1=-b-3$, $b=-4$

즉, $f(x)=x^2-2x-3=(x-1)^2-4$, $g(x)=2x-4$이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



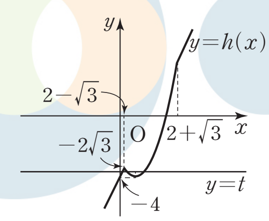
Step 3 $\alpha^2+\beta^2$의 값 구하기

$g(2-\sqrt{3})=2(2-\sqrt{3})-4=-2\sqrt{3}$이고,

함수 $h(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)\leq g(x)) \\ g(x) & (f(x)>g(x)) \end{cases}$이므로

$2-\sqrt{3}\leq x\leq 2+\sqrt{3}$일 때, $h(x)=f(x)$
$x<2-\sqrt{3}$ 또는 $x>2+\sqrt{3}$일 때, $h(x)=g(x)$

따라서 함수 $y=h(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 방정식 $h(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되도록 하는 실수 t의 값의 범위는 $-4<t<-2\sqrt{3}$

따라서 $\alpha=-4$, $\beta=-2\sqrt{3}$이므로

$\alpha^2+\beta^2=(-4)^2+(-2\sqrt{3})^2=28$　답 ②

53

이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 이차방정식 $f(x)=0$의 실근이다.

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축이 원점 O와 점 $\mathrm{A}(a,\ 0)$ $(a>0)$에서 만난다. 직선 $y=2x$와 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 만나는 점 중 원점 O가 아닌 점을 B라 하자. 직선 AB에 평행한 직선과 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 C에서 접한다. 삼각형 ABO의 넓이가 48일 때, 삼각형 ACO의 넓이는?

① 20　✓② 21　③ 22
④ 23　⑤ 24

Step 1 a의 값 구하기

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축이 원점 O와 점 $\mathrm{A}(a,\ 0)$ $(a>0)$에서 만나므로 $f(x)=x(x-a)$로 놓을 수 있다.

$f(x)=2x$에서 $x(x-a)=2x$, $x(x-a-2)=0$

$x=0$ 또는 $x=a+2$

즉, 점 B의 좌표는 $(a+2,\ 2a+4)$이고, 삼각형 ABO의 넓이가 48이므로 $\frac{1}{2}\times a\times(2a+4)=48$에서

$a^2+2a-48=0,\ (a+8)(a-6)=0$

이때 $a>0$이므로 $a=6$

Step 2 점 C의 좌표 구하기

점 A의 좌표는 $(6,\ 0)$이고, 점 B의 좌표는 $(8,\ 16)$이므로 직선 AB의 기울기는 $\frac{16-0}{8-6}=8$

직선 AB와 평행한 직선의 방정식을 $y=8x+k$ (k는 상수)로 놓으면

$f(x)=8x+k$에서 $x^2-6x=8x+k$

$x^2-14x-k=0$

위 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-7)^2-(-k)=0$에서 $k=-49$

$x^2-14x+49=0$에서 $(x-7)^2=0,\ x=7$

즉, 점 C의 x좌표가 7이므로 점 C의 y좌표는 $y=8\times7-49=7$이다.

Step 3 삼각형 ACO의 넓이 구하기

따라서 삼각형 ACO의 넓이는 $\frac{1}{2}\times6\times7=21$ 답 ②

54

최고차항의 계수가 각각 1, -1인 두 이차함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

→ 직선 $y=mx$와 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 접하므로 이차방정식 $f(x)=mx$의 판별식을 D라 하면 $D=0$이다.

(가) $f(-1)>0$
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)g(x)=-x^2(x^2-4)$가 성립한다.
(다) 직선 $y=mx$와 두 이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 각각 접하도록 하는 상수 m의 값이 존재한다.

$f(m)+g(m)$의 값은?

① 4 ② 6 ✓③ 8 ④ 10 ⑤ 12

Step 1 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 각각 구하기

두 조건 (가), (나)에서

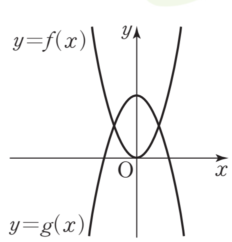
$f(x)=x^2,\ g(x)=-(x^2-4)$

또는 $f(x)=x(x-2),\ g(x)=-x(x+2)$

Step 2 주어진 조건을 모두 만족시키는 실수 k의 값 구하기

(i) $f(x)=x^2,\ g(x)=-(x^2-4)$일 때

이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축이 접하지만 이차함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축은 서로 다른 두 점에서 만나므로 조건 (다)를 만족시키는 상수 m의 값은 존재하지 않는다.



(ii) $f(x)=x(x-2),\ g(x)=-x(x+2)$일 때

$f(x)=mx$에서 $x^2-(m+2)x=0$

이고 이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=(m+2)^2=0$

이어야 한다. 즉, $m=-2$

$g(x)=mx$에서 $-x(x+2)=mx$

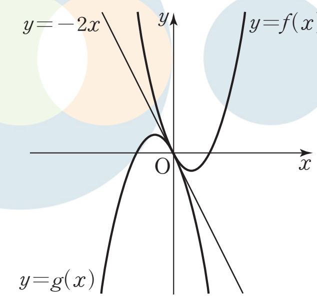
$x^2+(m+2)x=0$

위 이차방정식의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=(m+2)^2=0$

이어야 한다. 즉, $m=-2$

따라서 직선 $y=-2x$는 두 이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프에 모두 접한다.



Step 3 $f(m)+g(m)$의 값 구하기

(i), (ii)에 의하여 $f(x)=x(x-2),\ g(x)=-x(x+2)$

따라서 $f(m)+g(m)=f(-2)+g(-2)=8+0=8$ 답 ③

55

→ 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 x좌표가 p일 때, 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=p$에 대하여 대칭이다.

이차함수 $f(x)=x^2+ax+b$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(1)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

→ 즉, 서로 다른 두 실수 α, β에 대하여 $f(\alpha)=f(\beta)$이면 $p=\frac{\alpha+\beta}{2}$이다.

(가) $f(-2)=f(4)$
(나) $0\le x\le3$에서 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값의 합은 20이다.

① 5 ② 6 ③ 7 ✓④ 8 ⑤ 9

Step 1 a의 값 구하기

$f(x)=x^2+ax+b=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}+b$

조건 (가)에서 $f(-2)=f(4)$이므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축은 직선 $x=1$이다.

즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 x좌표는 1이므로

$-\frac{a}{2}=1$에서 $a=-2$

Step 2 b의 값 구하기

$0\le1\le3$이므로 $0\le x\le3$에서 함수 $y=f(x)$는 $x=3$일 때 최댓값을 갖고, $x=1$일 때 최솟값을 갖는다.

조건 (나)에서 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값의 합이 20이므로

$f(3)+f(1)=20,\ (3+b)+(-1+b)=20$

$b=9$

Step 3 $f(1)$의 값 구하기

따라서 $f(x)=x^2-2x+9$이므로

$f(1)=1-2+9=8$ 답 ④

56

이차함수 $f(x)=a(x-p)^2+q$ (a, p, q는 실수)에 대하여 직선 $y=q$와 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 (p, q)에서 접한다.

두 상수 a, b에 대하여 이차함수 $f(x)=x^2+ax+b$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=-2$에 접한다.
> (나) 방정식 $f(2x+1)=0$의 서로 다른 모든 실근의 합은 -4이다.

$-|a|\le x\le |b|$에서 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 80 ② 84 ③ 88
④ 92 ✓⑤ 96

Step 1 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 y좌표 구하기

이차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이고, 조건 (가)에서 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-2$가 접하므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 y좌표는 -2이다.

Step 2 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식 구하기

이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축이 두 점에서 만나므로
이차방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 가지고, 이차방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 두 실근을 α, β라 하면
$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$로 놓을 수 있다.
$f(2x+1)=0$에서 $(2x+1-\alpha)(2x+1-\beta)=0$
$x=\dfrac{\alpha-1}{2}$ 또는 $x=\dfrac{\beta-1}{2}$
조건 (나)에서 방정식 $f(2x+1)=0$의 서로 다른 모든 실근의 합이 -4이므로 $\dfrac{\alpha-1}{2}+\dfrac{\beta-1}{2}=-4$에서 $\alpha+\beta=-6$
$\dfrac{\alpha+\beta}{2}=-3$이므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축은 직선 $x=-3$이다.
즉, 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 x좌표는 -3이다.

Step 3 최댓값과 최솟값의 합 구하기

$f(x)=(x+3)^2-2=x^2+6x+7$이므로 $a=6$, $b=7$
$-|a|\le x\le |b|$, 즉 $-6\le x\le 7$에서 함수 $f(x)$는 $x=-3$일 때 최솟값을 갖고, $x=7$일 때 최댓값을 갖는다.
따라서 $f(-3)=-2$, $f(7)=98$
이므로 구하는 최댓값과 최솟값의 합은
$98+(-2)=96$

답 ⑤

57

이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=mx+n$ (m, n은 실수)의 교점의 x좌표는 이차방정식 $f(x)=mx+n$의 실근이다.

최고차항의 계수가 a $(a<0)$인 이차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(1)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

> (가) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-ax-3$이 만나는 두 점의 x좌표는 각각 -1, 4이다.
> (나) $-1\le x\le 4$에서 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값의 합은 8이다.

① 8 ② 9 ③ 10
✓④ 11 ⑤ 12

Step 1 함수 $f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 x좌표 구하기

조건 (가)에서 이차방정식 $f(x)=-ax-3$, 즉 $f(x)+ax+3=0$의 두 실근은 -1, 4이므로
$f(x)+ax+3=a(x+1)(x-4)$
$f(x)=a(x+1)(x-4)-ax-3=a(x-2)^2-8a-3$
따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 x좌표는 2이다.

Step 2 a의 값 구하기

$-1\le x\le 4$에서 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최댓값을 갖고, $x=-1$일 때 최솟값을 갖는다.
조건 (나)에서 최댓값과 최솟값의 합이 8이므로
$f(2)+f(-1)=8$에서 $(-8a-3)+(a-3)=8$
$a=-2$

Step 3 $f(1)$의 값 구하기

따라서 $f(x)=-2(x-2)^2+13$이므로
$f(1)=-2+13=11$

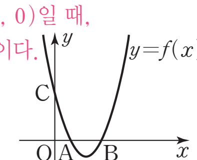
답 ④

58

이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 이차방정식 $f(x)=0$의 실근이다.

$0<k<3$인 상수 k에 대하여 이차함수 $f(x)=x^2-2(k+3)x+12k$의 그래프가 x축과 두 점 A, B에서 만나고, y축과 점 C에서 만난다. 삼각형 ABC의 넓이의 최댓값은?
(단, 점 A의 x좌표는 점 B의 x좌표보다 작다.)

A$(\alpha, 0)$, B$(\beta, 0)$일 때, $\overline{AB}=|\beta-\alpha|$이다.



① 26 ✓② 27 ③ 28
④ 29 ⑤ 30

Step 1 두 점 A, B의 x좌표 각각 구하기

이차방정식 $f(x)=0$에서 $x^2-2(k+3)x+12k=0$
$(x-2k)(x-6)=0$
$x=2k$ 또는 $x=6$
이때 $0<k<3$이므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 두 점 A, B의 x좌표는 각각 $2k$, 6 $(2k<6)$이다.

Step 2 점 C의 y좌표 구하기

이차함수 $y=x^2-2(k+3)x+12k$에서
$x=0$일 때 $y=12k$이므로 점 C의 y좌표는 $12k$이다.

Step 3 최댓값 구하기

원점을 O, 삼각형 ABC의 넓이를 $g(k)$라 하면

$$\begin{aligned}g(k)&=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{OC}\\&=\frac{1}{2}\times(6-2k)\times 12k\\&=-12(k^2-3k)\\&=-12\left(k-\frac{3}{2}\right)^2+27\end{aligned}$$

따라서 $0<k<3$이므로 함수 $g(k)$는 $k=\dfrac{3}{2}$일 때 최댓값 27을 갖는다.

답 ②

1등급을 넘어서는 상위 1%

본문 63쪽

59

최고차항의 계수가 모두 양수인 두 이차함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

두 이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 꼭짓점의 x좌표는 각각 1, -2이다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여
> $f(x)\geq f(1)$, $g(x)\geq g(-2)$
> 이고, $f(0)=g(0)=0$이다.
> (나) 두 방정식 $f(x)+8=0$, $g(x)+8=0$ 중 하나는 중근을 갖고, 다른 하나는 서로 다른 두 허근을 갖는다.
> (다) $|f(1)-g(-2)|=7$, $f(1)+g(1)>0$

$-2\leq x\leq 1$에서 함수 $f(x)+g(x)$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값은?

① 2　② 4　✓③ 6　④ 8　⑤ 10

문항 파헤치기

이차함수 $f(x)=a(x-p)^2+q$의 그래프는 직선 $x=p$에 대하여 대칭이므로 $f(\alpha)=f(\beta)=0$이면 $\frac{\alpha+\beta}{2}=p$이고, $m\leq x\leq n$에서 이차함수 $y=f(x)$의 최댓값과 최솟값을 구할 때에는 p가 주어진 범위에 포함되는 지를 파악한 후 문제를 해결한다.

이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축이 직선 $x=p$이면 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=p$에 대하여 대칭이다. 이때 두 실수 α, β에 대하여 $f(\alpha)=f(\beta)=0$이면 $\frac{\alpha+\beta}{2}=p$이다.

풀이

Step 1 조건 (가)로부터 함수 $f(x)$, $g(x)$ 각각 구하기

조건 (가)에서 모든 실수 x에 대하여

$f(x)\geq f(1)$, $g(x)\geq g(-2)$

이므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축은 직선 $x=1$이고, 이차함수 $y=g(x)$의 그래프의 축은 직선 $x=-2$이다.

이때 $f(0)=g(0)=0$이므로 $f(2)=0$, $g(-4)=0$이다.

두 이차함수 $f(x)$, $g(x)$의 최고차항의 계수를 각각 a, b $(a>0,\ b>0)$이라 하면

$f(x)=ax(x-2)$, $g(x)=bx(x+4)$로 놓을 수 있다.

Step 2 조건 (나), (다)로부터 알 수 있는 값 구하기

조건 (나)에서 두 방정식 $f(x)+8=0$, $g(x)+8=0$ 중 하나는 중근을 갖고, 다른 하나는 서로 다른 두 허근을 가지므로

$f(1)=-8$, $g(-2)>-8$ 또는 $g(-2)=-8$, $f(1)>-8$

(i) $f(1)=-8$, $g(-2)>-8$일 때

$f(1)=a\times1\times(-1)=-8$에서 $a=8$

즉, $f(x)=8x(x-2)$

$f(1)<g(-2)$이므로 조건 (다)에서

$g(-2)-f(1)=7$

$g(-2)=f(1)+7=-8+7=-1$

$g(-2)=b\times(-2)\times2=-1$에서

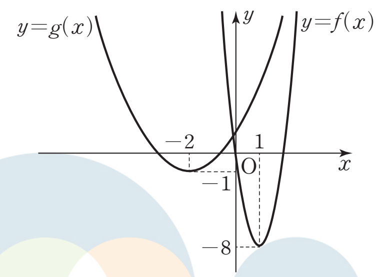
$b=\frac{1}{4}$

즉, $g(x)=\frac{1}{4}x(x+4)$

이때 $f(1)=-8$, $g(1)=\frac{5}{4}$이므로

$f(1)+g(1)=-8+\frac{5}{4}=-\frac{27}{4}<0$

이는 조건 (다)를 만족시키지 못한다.



(ii) $g(-2)=-8$, $f(1)>-8$일 때

$g(-2)=b\times(-2)\times2=-8$에서 $b=2$

즉, $g(x)=2x(x+4)$

$f(1)>g(-2)$이므로 조건 (다)에서

$f(1)-g(-2)=7$

$f(1)=7+g(-2)=7+(-8)=-1$

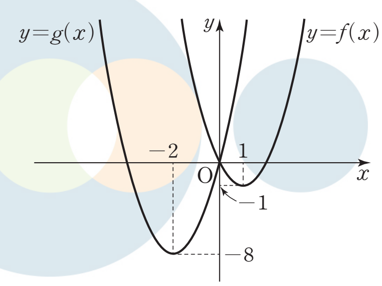
$f(1)=a\times1\times(-1)=-a$에서

$-a=-1$, 즉 $a=1$

이때 $f(x)=x(x-2)$이므로 $f(1)=-1$, $g(1)=10$이고

$f(1)+g(1)=-1+10=9>0$

이는 조건 (다)를 만족시킨다.



(i), (ii)에 의하여

$f(x)=x(x-2)$, $g(x)=2x(x+4)$

이므로

Step 3 $M+m$의 값 구하기

$$\begin{aligned}f(x)+g(x)&=x(x-2)+2x(x+4)\\&=3x^2+6x\\&=3(x+1)^2-3\end{aligned}$$

$-2\leq x\leq 1$에서 함수 $f(x)+g(x)$는 $x=1$일 때 최댓값을 갖고, $x=-1$일 때 최솟값을 갖는다.

따라서

$M=3\times2^2-3=9$, $m=-3$

이므로

$M+m=9+(-3)=6$　답 ③

실수 Point 찾기

방정식 $f(x)+8=0$, 즉 $f(x)=-8$의 서로 다른 실근의 개수가 1이려면 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-8$이 접해야 한다는 것을 기억하도록 한다.

06 여러 가지 방정식과 부등식

내신 빈출 필수 문제

본문 66~69쪽

01 ④	02 ②	03 ③	04 ⑤	05 ①
06 ⑤	07 ②	08 ④	09 ④	10 ③
11 ⑤	12 ④	13 ③	14 ④	15 ①
16 ⑤	17 ④	18 ②	19 ②	20 ④
21 ①	22 -8	23 10		

01 삼차방정식 $x^3-3x^2-x+a=0$의 한 근이 1이므로

$1-3-1+a=0$, $a=3$

$x^3-3x^2-x+3=0$에서

$x^2(x-3)-(x-3)=0$

$(x^2-1)(x-3)=0$

$(x-1)(x+1)(x-3)=0$

$x=1$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=3$

따라서 $\alpha=-1$, $\beta=3$ 또는 $\alpha=3$, $\beta=-1$이므로

$\alpha^3+\beta^3=(-1)^3+3^3=26$ 답 ④

02 $f(x)=x^3-2x^2+x+4$라 하면

$f(-1)=-1-2-1+4=0$이므로

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해 하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ & & -1 & 3 & -4 \\ \hline & 1 & -3 & 4 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x+1)(x^2-3x+4)$

$(x+1)(x^2-3x+4)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x^2-3x+4=0$

이차방정식 $x^2-3x+4=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-3)^2-4\times1\times4=-7<0$

이므로 이차방정식 $x^2-3x+4=0$은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

이차방정식 $x^2-3x+4=0$의 두 허근이 α, β이므로

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=4$

따라서 $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\dfrac{3}{4}$ 답 ②

03 삼차방정식 $x^3-1=0$에서 $(x-1)(x^2+x+1)=0$

$x=1$ 또는 $x^2+x+1=0$

이차방정식 $x^2+x+1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=1^2-4\times1\times1=-3<0$

이므로 이차방정식 $x^2+x+1=0$은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

ω는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 한 허근이므로

$\omega^2+\omega+1=0$

한편, ω는 삼차방정식 $x^3-1=0$의 근이므로 $\omega^3=1$

따라서

$\omega+4\omega^2+8\omega^3+4\omega^4+\omega^5$

$=\omega+4\omega^2+8\omega^3+4\omega^3\omega+\omega^3\omega^2$

$=\omega+4\omega^2+8+4\omega+\omega^2$

$=5(\omega+\omega^2)+8$

$=5\times(-1)+8$

$=3$ 답 ③

04 $f(x)=x^4-5x^3+20x-16$이라 하면

$f(1)=1-5+20-16=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해 하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & -5 & 0 & 20 & -16 \\ & & 1 & -4 & -4 & 16 \\ \hline & 1 & -4 & -4 & 16 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-1)(x^3-4x^2-4x+16)$

$g(x)=x^3-4x^2-4x+16$이라 하면

$g(2)=8-16-8+16=0$이므로 조립제법을 이용하여 $g(x)$를 인수분해 하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -4 & -4 & 16 \\ & & 2 & -4 & -16 \\ \hline & 1 & -2 & -8 & \boxed{0} \end{array}$$

$g(x)=(x-2)(x^2-2x-8)$

주어진 사차방정식은

$(x-1)(x-2)(x^2-2x-8)=0$

$(x-1)(x-2)(x+2)(x-4)=0$

$x=-2$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=4$

따라서 주어진 사차방정식의 서로 다른 모든 양의 실근의 합은

$1+2+4=7$ 답 ⑤

05 사차방정식 $x^4-8x^2+4=0$에서

$(x^4-4x^2+4)-4x^2=0$, $(x^2-2)^2-4x^2=0$

$(x^2+2x-2)(x^2-2x-2)=0$

$x^2+2x-2=0$ 또는 $x^2-2x-2=0$

$x=-1\pm\sqrt{3}$ 또는 $x=1\pm\sqrt{3}$

따라서 주어진 사차방정식의 서로 다른 모든 양의 실근의 곱은

$(-1+\sqrt{3})(1+\sqrt{3})=2$ 답 ①

06 사차방정식 $(x^2+2x)^2-5(x^2+2x)-24=0$에서 $x^2+2x=t$로 놓으면

$t^2-5t-24=0$, $(t+3)(t-8)=0$

$t=-3$ 또는 $t=8$

(i) $t=-3$일 때

$x^2+2x=-3$, 즉 $x^2+2x+3=0$

이차방정식 $x^2+2x+3=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=1^2-3=-2<0$

이므로 이차방정식 $x^2+2x+3=0$은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

이차방정식 $x^2+2x+3=0$의 두 허근을 α, β라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha\beta=3$

(ii) $t=8$일 때

$x^2+2x=8$, $x^2+2x-8=0$

$(x+4)(x-2)=0$, $x=-4$ 또는 $x=2$

(i), (ii)에 의하여

$a=-4\times2=-8$, $b=3$이므로

$b-a=3-(-8)=11$ 답 ⑤

07 삼차방정식 $x^3+4x^2+x-6=0$의 세 근이 α, β, γ이므로

$x^3+4x^2+x-6=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ ······ ㉠

즉,

x^3+4x^2+x-6

$=x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma$

위 등식이 x에 대한 항등식이므로

$\alpha+\beta+\gamma=-4$

이때

$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$

$=(-4-\alpha)(-4-\beta)(-4-\gamma)$ ······ ㉡

이므로 ㉠에 $x=-4$를 대입하면

$(-4-\alpha)(-4-\beta)(-4-\gamma)$

$=-64+64-4-6$

$=-10$ ······ ㉢

㉡, ㉢에서

$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)=-10$ 답 ②

08 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx-5=0$의 한 허근이 $1+2i$이고, a, b가 실수이므로 $1-2i$도 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx-5=0$의 근이다.

실수 α가 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx-5=0$의 근이라 하면

x^3+ax^2+bx-5

$=(x-\alpha)(x-1-2i)(x-1+2i)$ ······ ㉠

㉠이 x에 대한 항등식이므로 ㉠에 $x=0$을 대입하면

$-5=-\alpha(1+2i)(1-2i)$, $-5=-5\alpha$, $\alpha=1$

이때

$(x-1)(x-1-2i)(x-1+2i)$

$=(x-1)(x^2-2x+5)$

$=x^3-3x^2+7x-5$

이므로

$x^3+ax^2+bx-5=x^3-3x^2+7x-5$

따라서 $a=-3$, $b=7$이므로

$a+b=-3+7=4$ 답 ④

09 $\begin{cases} x+2y=-1 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-y^2=8 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x=-2y-1$ ······ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$(-2y-1)^2-y^2=8$, $3y^2+4y-7=0$

$(3y+7)(y-1)=0$, $y=-\frac{7}{3}$ 또는 $y=1$

(i) $y=-\frac{7}{3}$일 때

㉢에서 $x=-2\times\left(-\frac{7}{3}\right)-1=\frac{11}{3}$

이때 $\alpha=\frac{11}{3}$, $\beta=-\frac{7}{3}$이므로

$\alpha+\beta=\frac{11}{3}+\left(-\frac{7}{3}\right)=\frac{4}{3}$

(ii) $y=1$일 때

㉢에서 $x=-2\times1-1=-3$

이때 $\alpha=-3$, $\beta=1$이므로

$\alpha+\beta=-3+1=-2$

(i), (ii)에 의하여 $\alpha+\beta$의 최솟값은 -2이다. 답 ④

10 $\begin{cases} x^2-xy-2y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x^2-3y^2=20 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(x-2y)(x+y)=0$, $x=2y$ 또는 $x=-y$

(i) $x=2y$일 때

㉡에 $x=2y$를 대입하면 $2(2y)^2-3y^2=20$, $y^2=4$

$y=-2$ 또는 $y=2$

$y=-2$일 때, $x=2\times(-2)=-4$

$y=2$일 때, $x=2\times2=4$

(ii) $x=-y$일 때

㉡에 $x=-y$를 대입하면 $2(-y)^2-3y^2=20$, $y^2=-20$

$y=-2\sqrt{5}i$ 또는 $y=2\sqrt{5}i$

$y=-2\sqrt{5}i$일 때, $x=2\sqrt{5}i$

$y=2\sqrt{5}i$일 때, $x=-2\sqrt{5}i$

(i), (ii)에 의하여 $\alpha=4$, $\beta=2$

따라서 $\alpha\beta=4\times2=8$ 답 ③

11 $\begin{cases} 2x+9>4x-5 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x+10<7x+6 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $2x<14$

$x<7$ ······ ㉢

㉡에서 $4x>4$

$x>1$ ······ ㉣

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면

$1<x<7$

따라서 주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x는 2, 3, 4, 5, 6이고, 그 합은

$2+3+4+5+6=20$ 답 ⑤

12 부등식 $-x-22<5x-4\le2x+23$의 해는 연립부등식

$\begin{cases} -x-22<5x-4 & \cdots\cdots ㉠ \\ 5x-4\le2x+23 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

의 해와 같다.

㉠에서 $6x>-18$

$x>-3$ ······ ㉢

㉡에서 $3x\le27$

$x\le9$ ······ ㉣

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면

$-3<x\le9$

따라서 주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x는 -2, -1, 0, 1, $\cdots$, 9의 12개이다. 답 ④

13 부등식 $|2x-5|\le7$에서

$-7\le2x-5\le7$, $-2\le2x\le12$, $-1\le x\le6$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x는 $-1, 0, 1, \cdots, 6$의 8개이다. 답 ③

14 부등식 $|x+2|+|x-4|\le 8$에서 $|x+2|$와 $|x-4|$는 각각 $x=-2$, $x=4$를 경계로 절댓값 안의 식의 부호가 변하므로 다음의 세 가지로 나누어 푼다.

(i) $x<-2$일 때
$-(x+2)-(x-4)\le 8$
$-2x\le 6$, $x\ge -3$
그런데 $x<-2$이므로 $-3\le x<-2$

(ii) $-2\le x<4$일 때
$(x+2)-(x-4)\le 8$, $6\le 8$
이 부등식이 항상 성립하므로 $-2\le x<4$

(iii) $x\ge 4$일 때
$(x+2)+(x-4)\le 8$
$2x\le 10$, $x\le 5$
그런데 $x\ge 4$이므로 $4\le x\le 5$

(i), (ii), (iii)에 의하여 $-3\le x\le 5$
따라서 $\alpha=-3$, $\beta=5$이므로
$\alpha+\beta=-3+5=2$ 답 ④

15 이차부등식 $x^2-2x-8<0$에서
$(x+2)(x-4)<0$, $-2<x<4$
따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x는 $-1, 0, 1, 2, 3$의 5개이다. 답 ①

16 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$의 해가 $-1<x<2$이므로 $a<0$이다.
즉, $ax^2+bx+c=a(x+1)(x-2)$
$ax^2+bx+c=ax^2-ax-2a$
위 등식이 x에 대한 항등식이므로
$b=-a$, $c=-2a$
이차부등식 $ax^2+cx+3b<0$에서
$ax^2-2ax-3a<0$, $a(x+1)(x-3)<0$
이때 $a<0$이므로 $(x+1)(x-3)>0$
$x<-1$ 또는 $x>3$ 답 ⑤

17 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $x^2+2ax-a+6\ge 0$이 항상 성립하려면 이차방정식 $x^2+2ax-a+6=0$의 판별식을 D라 할 때,
$\frac{D}{4}=a^2-(-a+6)\le 0$
이어야 한다.
$a^2+a-6\le 0$에서 $(a+3)(a-2)\le 0$
$-3\le a\le 2$
따라서 정수 a는 $-3, -2, -1, 0, 1, 2$의 6개이다. 답 ④

18 이차부등식 $2x^2-2ax+3a+8\le 0$이 해를 갖지 않으려면 이차방정식 $2x^2-2ax+3a+8=0$의 판별식을 D라 할 때,
$\frac{D}{4}=(-a)^2-2(3a+8)<0$
이어야 한다.
$a^2-6a-16<0$에서
$(a+2)(a-8)<0$, $-2<a<8$
따라서 정수 a의 최댓값은 7이다. 답 ②

19 $\begin{cases} x^2+2x-3\le 0 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x^2-3x-5<0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
㉠에서 $(x+3)(x-1)\le 0$
$-3\le x\le 1$ ⋯⋯ ㉢
㉡에서 $(x+1)(2x-5)<0$
$-1<x<\frac{5}{2}$ ⋯⋯ ㉣
㉢, ㉣의 공통부분은
$-1<x\le 1$
따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x는 0, 1의 2개이다. 답 ②

20 $\begin{cases} x^2-10x-24<0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-(a+2)x+2a\ge 0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
㉠에서 $(x+2)(x-12)<0$
$-2<x<12$ ⋯⋯ ㉢
㉡에서 $(x-2)(x-a)\ge 0$
이때 $a>2$이므로
$x\le 2$ 또는 $x\ge a$ ⋯⋯ ㉣
㉢, ㉣의 공통부분에서 $-2<x\le 2$일 때 정수 x는 $-1, 0, 1, 2$의 4개이고, 주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x의 개수가 9가 되어야 하므로 $a\le x<12$에서 정수 x의 개수가 5이어야 한다.
즉, $6<a\le 7$이어야 한다.
따라서 실수 a의 최댓값은 7이다. 답 ④

21 이차방정식 $x^2+2ax+a+2=0$이 실근을 가지려면 이차방정식 $x^2+2ax+a+2=0$의 판별식을 D_1이라 할 때,
$\frac{D_1}{4}=a^2-(a+2)\ge 0$
이어야 한다.
$a^2-a-2\ge 0$에서 $(a+1)(a-2)\ge 0$
$a\le -1$ 또는 $a\ge 2$ ⋯⋯ ㉠
또, 이차방정식 $x^2+2ax-a+12=0$이 허근을 가지려면 이차방정식 $x^2+2ax-a+12=0$의 판별식을 D_2라 할 때,
$\frac{D_2}{4}=a^2-(-a+12)<0$
이어야 한다.
$a^2+a-12<0$에서 $(a+4)(a-3)<0$
$-4<a<3$ ⋯⋯ ㉡
㉠, ㉡의 공통부분을 구하면
$-4<a\le -1$ 또는 $2\le a<3$
따라서 주어진 조건을 만족시키는 정수 a는 $-3, -2, -1, 2$이고, 그 합은
$-3+(-2)+(-1)+2=-4$ 답 ①

22 삼차방정식 $x^3+ax^2+5x-6=0$의 한 근이 2이므로
$8+4a+10-6=0$, $a=-3$ ⋯⋯ ❶

삼차식 x^3-3x^2+5x-6을 조립제법을 이용하여 인수분해 하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -3 & 5 & -6 \\ & & 2 & -2 & 6 \\ \hline & 1 & -1 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

$x^3-3x^2+5x-6=(x-2)(x^2-x+3)$

······ ❷

삼차방정식 $(x-2)(x^2-x+3)=0$에서

$x=2$ 또는 $x^2-x+3=0$

이차방정식 $x^2-x+3=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-1)^2-4\times1\times3=-11<0$

이므로 이 이차방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

이차방정식 $x^2-x+3=0$의 두 근이 α, β이므로

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=3$

······ ❸

따라서

$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=1^3-3\times3\times1$

$=-8$

······ ❹

답 -8

단계	채점 기준	비율
❶	a의 값을 구한 경우	20 %
❷	삼차식을 인수분해 한 경우	20 %
❸	α, β에 대한 식을 구한 경우	30 %
❹	$\alpha^3+\beta^3$의 값을 구한 경우	30 %

23 $\begin{cases} x^2-3x-10\le0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-x-2>0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서

$(x+2)(x-5)\le0$

$-2\le x\le5$

······ ❶

㉡에서

$(x+1)(x-2)>0$

$x<-1$ 또는 $x>2$

······ ❷

㉠, ㉡의 공통부분은

$-2\le x<-1$ 또는 $2<x\le5$

따라서 주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x는 -2, 3, 4, 5이고, 그 합은

$-2+3+4+5=10$

······ ❸

답 10

단계	채점 기준	비율
❶	부등식 ㉠의 해를 구한 경우	30 %
❷	부등식 ㉡의 해를 구한 경우	30 %
❸	모든 정수 x의 값의 합을 구한 경우	40 %

내신 고득점 도전 문제

본문 70~73쪽

24 ②	25 ①	26 ①	27 ②	28 ③
29 ⑤	30 ②	31 ⑤	32 2	33 ④
34 $a>3$	35 ②	36 ④	37 ④	38 ④
39 ④	40 ①	41 ③	42 ②	43 ⑤
44 ③	45 7	46 $2<k\le4$		

24 삼차방정식 $x^3-kx^2+8kx-32=0$의 허근이 $4i$이므로

$(4i)^3-k(4i)^2+8k\times4i-32=0$에서

$64i^3-16ki^2+32ki-32=0$

$-64i+16k+32ki-32=0$

$(16k-32)+(32k-64)i=0$

$16k-32=0$, $32k-64=0$

$k=2$

삼차방정식 $x^3-2x^2+16x-32=0$에서

$x^2(x-2)+16(x-2)=0$, $(x-2)(x^2+16)=0$

$x=2$ 또는 $x=4i$ 또는 $x=-4i$

따라서 $\alpha=2$이므로

$k+\alpha=2+2=4$

답 ②

25 삼차방정식 $x^3-1=0$에서

$(x-1)(x^2+x+1)=0$

$x=1$ 또는 $x^2+x+1=0$

이차방정식 $x^2+x+1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=1^2-4\times1\times1=-3<0$

이므로 이차방정식 $x^2+x+1=0$은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

ω는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 한 허근이므로 $\overline{\omega}$도 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 한 허근이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=-1$, $\omega\overline{\omega}=1$

한편, ω, $\overline{\omega}$는 삼차방정식 $x^3-1=0$의 근이므로

$\omega^3=\overline{\omega}^3=1$

따라서

$(2\omega^3+\omega)(2\overline{\omega}^3+\overline{\omega})$

$=(2+\omega)(2+\overline{\omega})$

$=4+2(\omega+\overline{\omega})+\omega\overline{\omega}$

$=4+2\times(-1)+1$

$=3$

답 ①

26 $f(x)=x^3-x+6$이라 하면 $f(-2)=-8+2+6=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해 하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 0 & -1 & 6 \\ & & -2 & 4 & -6 \\ \hline & 1 & -2 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

즉, $f(x)=(x+2)(x^2-2x+3)$

$f(x)=0$에서 $(x+2)(x^2-2x+3)=0$

$x=-2$ 또는 $x^2-2x+3=0$

이때 $\alpha=-2$라 하고 두 수 β, γ는 이차방정식 $x^2-2x+3=0$의 근이라 하자.
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\beta+\gamma=2$, $\beta\gamma=3$
세 수 $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$를 근으로 갖고 삼차항의 계수가 1인 삼차방정식은
$(x-\alpha\beta)(x-\beta\gamma)(x-\gamma\alpha)=0$
$(x+2\beta)(x-3)(x+2\gamma)=0$
$(x-3)\{x^2+2(\beta+\gamma)x+4\beta\gamma\}=0$
$(x-3)(x^2+4x+12)=0$
$x^3+x^2-36=0$
따라서 $a=1$, $b=0$, $c=-36$이므로
$a+b+c=1+0+(-36)=-35$ 답 ①

27
사차방정식 $x^4+ax^3-(a+1)x^2+2x-2b^2+4=0$의 한 허근이 $1+i$이고 a, b가 실수이므로 $1-i$도 근이다.
$(1+i)+(1-i)=2$, $(1+i)(1-i)=1^2-i^2=2$
이므로 두 수 $1+i$, $1-i$를 근으로 갖고 이차항의 계수가 1인 이차방정식은
$x^2-2x+2=0$
또, 두 수 b, $1-b$를 근으로 갖고 이차항의 계수가 1인 이차방정식은
$x^2-x+b(1-b)=0$
이때
$(x^2-2x+2)(x^2-x-b^2+b)$
$=x^4-3x^3+(-b^2+b+4)x^2+2(b^2-b-1)x-2b^2+2b$
이므로
$x^4+ax^3-(a+1)x^2+2x-2b^2+4$
$=x^4-3x^3+(-b^2+b+4)x^2+2(b^2-b-1)x-2b^2+2b$
위 등식이 x에 대한 항등식이므로
$a=-3$, $-(a+1)=-b^2+b+4$,
$2=2(b^2-b-1)$, $-2b^2+4=-2b^2+2b$
따라서 $a=-3$, $b=2$이므로
$a+b=-3+2=-1$ 답 ②

28
사차방정식 $x^4-10x^2+2k-15=0$에서
$x^2=t$ $(t\geq 0)$으로 놓으면
$t^2-10t+2k-15=0$ …… ㉠
주어진 사차방정식의 모든 근이 실수이려면 ㉠의 모든 근이 0 이상이어야 한다.
$f(t)=t^2-10t+2k-15$
$\quad=(t-5)^2+2k-40$
이라 하자.
이차방정식 $f(t)=0$의 모든 근이 0 이상이려면 $f(5)\leq 0$, $f(0)\geq 0$이어야 한다.
$f(5)=2k-40\leq 0$에서
$k\leq 20$ …… ㉡
$f(0)=2k-15\geq 0$에서
$k\geq \frac{15}{2}$ …… ㉢
㉡, ㉢에 의하여
$\frac{15}{2}\leq k\leq 20$
따라서 자연수 k는 8, 9, 10, …, 20의 13개이다. 답 ③

29
사차방정식 $x^4-(2a^2-2a-3)x^2+a^4-2a^3-3a^2=0$에서
$x^4-(2a^2-2a-3)x^2+a^2(a^2-2a-3)=0$
$(x^2-a^2)(x^2-a^2+2a+3)=0$
$x^2=a^2$ 또는 $x^2=a^2-2a-3$
$a^2\geq 0$이고 주어진 사차방정식이 서로 다른 두 실근과 서로 다른 두 허근을 가지므로
$a\neq 0$ …… ㉠
$a^2-2a-3<0$ …… ㉡
이어야 한다.
㉡에서 $a^2-2a-3<0$, $(a+1)(a-3)<0$
$-1<a<3$ …… ㉢
㉠, ㉢에서
$-1<a<0$ 또는 $0<a<3$ …… ㉣
한편, 주어진 사차방정식의 근은
$x=-a$ 또는 $x=a$ 또는
$x=-\sqrt{a^2-2a-3}$ 또는 $x=\sqrt{a^2-2a-3}$
이때 $\alpha=-a$, $\beta=a$ 또는 $\alpha=a$, $\beta=-a$이므로 $\alpha^3\beta+\alpha\beta^3=-32$에서
$-2a^4=-32$, $a^4-16=0$, $(a+2)(a-2)(a^2+4)=0$
㉣에 의하여 $a=2$
따라서
$\gamma=-\sqrt{3}i$, $\delta=\sqrt{3}i$ 또는 $\gamma=\sqrt{3}i$, $\delta=-\sqrt{3}i$
이므로
$a+\gamma\delta=2+(-\sqrt{3}i)\times\sqrt{3}i=2-3i^2=5$ 답 ⑤

30
$x=\alpha$, $y=\beta$는 연립방정식
$\begin{cases} x+y=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x^2-y^2=4x+2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
의 해이므로 ㉠에서
$y=1-x$ …… ㉢
㉢을 ㉡에 대입하면
$2x^2-(1-x)^2=4x+2$, $x^2-2x-3=0$, $(x+1)(x-3)=0$
$x=-1$ 또는 $x=3$
$x=-1$일 때, ㉢에서 $y=2$
$x=3$일 때, ㉢에서 $y=-2$
(i) $x=-1$, $y=2$일 때
$a=x^2+y^2=(-1)^2+2^2=5$
$b=3x+y=3\times(-1)+2=-1$
이때 $b<0$이므로 주어진 조건을 만족시키지 못한다.
(ii) $x=3$, $y=-2$일 때
$a=x^2+y^2=3^2+(-2)^2=13$
$b=3x+y=3\times 3+(-2)=7$
이때 $a>0$, $b>0$이므로 주어진 조건을 만족시킨다.
(i), (ii)에 의하여
$a=13$, $b=7$이고 $x=3$, $y=-2$
따라서 $\alpha=3$, $\beta=-2$이므로
$ab-\alpha\beta=13\times 7-3\times(-2)=97$ 답 ②

31 $\begin{cases} x-y=4 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-xy+y^2=k & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서

$y=x-4$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$x^2-x(x-4)+(x-4)^2=k$, $x^2-4x+16-k=0$

이차방정식 $x^2-4x+16-k=0$의 실근이 한 개이어야 하므로 이차방정식 $x^2-4x+16-k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-(16-k)=0$

이어야 한다. 즉, $k=12$

$x^2-4x+4=0$에서 $(x-2)^2=0$, $x=2$

$x=2$를 ㉢에 대입하면 $y=-2$

따라서 $\alpha=2$, $\beta=-2$이므로

$k(\alpha^2+\beta^2)=12\times\{2^2+(-2)^2\}=96$

답 ⑤

32 $\overline{AB}=x$, $\overline{BC}=y$ $(x>0, y>0)$이라 하자.

$\angle B=90°$이고 조건 ㈎에서 $\overline{AC}=2\sqrt{13}$이므로

$x^2+y^2=(2\sqrt{13})^2$

즉, $x^2+y^2=52$ $\cdots\cdots$ ㉠

조건 ㈏에서 직각삼각형 ABC의 넓이는 12이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}=12$

$\frac{1}{2}xy=12$, $xy=24$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠에서

$(x+y)^2-2xy=52$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉡을 ㉢에 대입하면

$(x+y)^2-2\times24=52$, $(x+y)^2=100$

$x>0$, $y>0$이므로 $x+y=10$ $\cdots\cdots$ ㉣

㉡, ㉣에서 두 수 x, y는 이차방정식 $t^2-10t+24=0$의 두 근이다.

이때 $(t-6)(t-4)=0$에서 $t=4$ 또는 $t=6$이므로

$x=4$, $y=6$ 또는 $x=6$, $y=4$

따라서

$|\overline{AB}-\overline{BC}|=|x-y|=|4-6|=2$

답 2

33 $\begin{cases} 6x-a>4x+1 & \cdots\cdots ㉠ \\ 5x+6<3x+b & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $2x>a+1$, $x>\frac{a+1}{2}$

㉡에서 $2x<b-6$, $x<\frac{b-6}{2}$

주어진 연립부등식의 해가 $-1<x<2$이므로 ㉠, ㉡의 공통부분은

$\frac{a+1}{2}<x<\frac{b-6}{2}$이어야 한다.

$\frac{a+1}{2}=-1$에서 $a=-3$

$\frac{b-6}{2}=2$에서 $b=10$

따라서 $a+b=-3+10=7$

답 ④

34 $\begin{cases} 5x-2\geq8 & \cdots\cdots ㉠ \\ 4x+1>6x-a & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $5x\geq10$, $x\geq2$

㉡에서 $2x<a+1$, $x<\frac{a+1}{2}$

이때 주어진 연립부등식의 해가 존재하려면 $\frac{a+1}{2}>2$이어야 한다.

따라서 $a>3$

답 $a>3$

35 부등식 $4x-8\leq x+7<3x+a$에서

$\begin{cases} 4x-8\leq x+7 & \cdots\cdots ㉠ \\ x+7<3x+a & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $3x\leq15$, $x\leq5$

㉡에서 $2x>7-a$, $x>\frac{7-a}{2}$

주어진 부등식을 만족시키는 정수 x의 개수가 3 이상이려면 ㉠, ㉡의 공통부분이 $\frac{7-a}{2}<x\leq5$이어야 하고, $\frac{7-a}{2}<3$이어야 한다.

따라서 $a>1$이므로 정수 a의 최솟값은 2이다.

답 ②

36 부등식 $|x-a|<3$에서

$-3<x-a<3$, $a-3<x<a+3$

주어진 부등식을 만족시키는 정수 x는

$a-2$, $a-1$, a, $a+1$, $a+2$

이고 그 합이 80이므로

$(a-2)+(a-1)+a+(a+1)+(a+2)=80$, $5a=80$

따라서 $a=16$

답 ④

37 부등식 $|3x+2|\geq2x+8$에서

(i) $x<-\frac{2}{3}$일 때

$-(3x+2)\geq2x+8$, $5x\leq-10$, $x\leq-2$

(ii) $x\geq-\frac{2}{3}$일 때

$3x+2\geq2x+8$, $x\geq6$

(i), (ii)에 의하여

$x\leq-2$ 또는 $x\geq6$

따라서 $\alpha=-2$, $\beta=6$이므로

$\beta-\alpha=6-(-2)=8$

답 ④

38 부등식 $|x+1|+|x-2|\leq5$에서

(i) $x<-1$일 때

$-(x+1)-(x-2)\leq5$

$-2x\leq4$, $x\geq-2$

그런데 $x<-1$이므로 $-2\leq x<-1$

(ii) $-1\leq x<2$일 때

$(x+1)-(x-2)\leq5$

$3\leq5$

주어진 부등식은 항상 성립하므로 $-1\leq x<2$

(iii) $x\geq2$일 때

$(x+1)+(x-2)\leq5$

$2x\leq6$, $x\leq3$

그런데 $x\geq2$이므로 $2\leq x\leq3$

(i), (ii), (iii)에 의하여

부등식 $|x+1|+|x-2|\leq5$의 해는 $-2\leq x\leq3$

즉, 이차부등식 $ax^2+bx+c\geq0$의 해가 $-2\leq x\leq3$이므로 $a<0$이다.
최고차항의 계수가 $a(a<0)$이고 해가 $-2\leq x\leq3$인 이차부등식은
$-a(x+2)(x-3)\leq0$
즉, $ax^2-ax-6a\geq0$이므로
$ax^2-ax-6a=ax^2+bx+c$에서
$b=-a$, $c=-6a$
따라서 $\dfrac{b+c}{a}=\dfrac{-a+(-6a)}{a}=-7$ 답 ④

39 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 두 점의 x좌표가 각각 -2, 1이므로
$f(x)=(x+2)(x-1)$
최고차항의 계수가 -1인 이차함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축은 점 $(2, 0)$에서 접하므로
$g(x)=-(x-2)^2$
부등식 $f(2x)+3g(x)\leq9x$에서
$(2x+2)(2x-1)-3(x-2)^2\leq9x$
$x^2+5x-14\leq0$
$(x+7)(x-2)\leq0$
$-7\leq x\leq2$
따라서 정수 x는 -7, -6, -5, $\cdots$, 2의 10개이다. 답 ④

40 이차부등식 $f(x)>0$의 해가 $x\neq-1$인 모든 실수이므로
$f(x)=a(x+1)^2$ (a는 양수)
$f(1)=4a=8$에서 $a=2$
부등식 $f(x)\leq18$에서
$2(x+1)^2\leq18$, $x^2+2x-8\leq0$, $(x+4)(x-2)\leq0$, $-4\leq x\leq2$
따라서 이차부등식 $f(x)\leq18$을 만족시키는 정수 x는 -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2이고, 그 합은
$-4+(-3)+(-2)+(-1)+0+1+2=-7$ 답 ①

41 이차방정식 $x^2-2(k-1)x+2k^2-4k-2=0$이 두 실근을 가지므로 이차방정식 $x^2-2(k-1)x+2k^2-4k-2=0$의 판별식을 D라 하면
$\dfrac{D}{4}=\{-(k-1)\}^2-(2k^2-4k-2)\geq0$
이어야 한다. 즉,
$-k^2+2k+3\geq0$, $k^2-2k-3\leq0$, $(k+1)(k-3)\leq0$
$-1\leq k\leq3$ …… ㉠
한편, 이차방정식 $x^2-2(k-1)x+2k^2-4k-2=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=-\dfrac{-2(k-1)}{1}=2(k-1)$,
$\alpha\beta=2k^2-4k-2$
이므로

$$\begin{aligned}(\alpha-\beta)^2&=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\\&=\{2(k-1)\}^2-4(2k^2-4k-2)\\&=-4k^2+8k+12\\&=-4(k-1)^2+16\end{aligned}$$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $(\alpha-\beta)^2$은 $k=1$일 때 최댓값 16을 갖고,
$k=-1$ 또는 $k=3$일 때 최솟값 0을 갖는다.
따라서 $(\alpha-\beta)^2$의 최댓값과 최솟값의 합은
$16+0=16$ 답 ③

42 연립부등식
$\begin{cases}x^2+4x+a>0 & \cdots\cdots ㉠\\ x^2+bx-8\leq0 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$
의 해가 $1<x\leq4$이려면 ㉠의 해가 $x<\alpha$ 또는 $x>\beta$ (α, β는 상수이고, $\alpha<\beta$이다.) 꼴이어야 하고, ㉡의 해가 $\gamma\leq x\leq\delta$ (γ, δ는 상수이고, $\gamma<\delta$이다.) 꼴이어야 하고, ㉠, ㉡의 공통부분이 $\beta<x\leq\delta$이어야 하므로 $\beta=1$, $\delta=4$이다.
이차방정식 $x^2+4x+a=0$의 한 근이 1이므로
$1+4+a=0$, $a=-5$
이차방정식 $x^2+bx-8=0$의 한 근이 4이므로
$16+4b-8=0$, $b=-2$
따라서
$a+b=-5+(-2)=-7$ 답 ②

43 $\begin{cases}x^2-3x-4\geq0 & \cdots\cdots ㉠\\ x^2-(k+1)x+k<0 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$
㉠에서 $(x+1)(x-4)\geq0$
$x\leq-1$ 또는 $x\geq4$
㉡에서
$(x-1)(x-k)<0$ …… ㉢
(i) $k<1$일 때
㉢에서 $k<x<1$
주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x의 개수가 3이려면
$-4\leq k<-3$이어야 한다.
이때 정수 k의 값은 -4
(ii) $k=1$일 때
㉢을 만족시키는 x의 값은 존재하지 않는다.
(iii) $k>1$일 때,
㉢에서 $1<x<k$
주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x의 개수가 3이려면 $6<k\leq7$이어야 한다.
이때 정수 k의 값은 7
(i), (ii), (iii)에 의하여 $k=-4$ 또는 $k=7$
따라서 $\alpha=-4$, $\beta=7$ 또는 $\alpha=7$, $\beta=-4$이므로
$|\alpha-\beta|=|-4-7|=11$ 답 ⑤

44 부등식
$5x^2-(4a+3)x+2a^2+4a\leq3x^2+x<4x^2-12$
의 해는 연립부등식
$\begin{cases}5x^2-(4a+3)x+2a^2+4a\leq3x^2+x & \cdots\cdots ㉠\\ 3x^2+x<4x^2-12 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$
의 해와 같다.
㉠에서
$2x^2-4(a+1)x+2a(a+2)\leq0$
$x^2-2(a+1)x+a(a+2)\leq0$
$(x-a)(x-a-2)\leq0$
$a\leq x\leq a+2$

ⓒ에서

$x^2-x-12>0$, $(x+3)(x-4)>0$

$x<-3$ 또는 $x>4$

㉠, ⓒ의 공통부분이 없어야 하므로 $a\geq-3$이고 $a+2\leq4$이어야 한다.

즉, $-3\leq a\leq2$

따라서 정수 a는 -3, -2, -1, 0, 1, 2의 6개이다. 답 ③

45 삼차방정식 $x^3-kx^2+2kx-8=0$에서

$f(x)=x^3-kx^2+2kx-8$이라 하자.

$f(2)=8-4k+4k-8=0$

이므로 $f(x)$는 $x-2$를 인수로 갖는다.

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해 하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -k & 2k & -8 \\ & & 2 & -2k+4 & 8 \\ \hline & 1 & -k+2 & 4 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-2)\{x^2-(k-2)x+4\}=0$

…… ❶

$f(x)=0$에서

$x=2$ 또는 $x^2-(k-2)x+4=0$

$\alpha=2$이고 이차방정식 $x^2-(k-2)x+4=0$은 서로 다른 두 허근 β, γ를 가져야 하므로 이차방정식 $x^2-(k-2)x+4=0$의 판별식을 D라 할 때,

$D=\{-(k-2)\}^2-4\times1\times4<0$

이어야 한다.

$k^2-4k-12<0$, $(k+2)(k-6)<0$

$-2<k<6$ …… ㉠

…… ❷

한편, 이차방정식 $x^2-(k-2)x+4=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\beta+\gamma=k-2$, $\beta\gamma=4$

$\beta^2+\gamma^2=11-2k$에서 $(\beta+\gamma)^2-2\beta\gamma=11-2k$이므로

$(k-2)^2-2\times4=11-2k$, $k^2-2k-15=0$, $(k+3)(k-5)=0$

$k=-3$ 또는 $k=5$ …… ⓒ

㉠, ⓒ에서 $k=5$

…… ❸

따라서 $k+\alpha=5+2=7$

…… ❹

답 7

단계	채점 기준	비율
❶	$f(x)$를 인수분해 한 경우	30 %
❷	α의 값과 k의 값의 범위를 각각 구한 경우	30 %
❸	k의 값을 구한 경우	30 %
❹	$k+\alpha$의 값을 구한 경우	10 %

46 $\begin{cases} x^2-5x-6<0 & \cdots\cdots ㉠ \\ |2x-4|\geq k & \cdots\cdots ⓒ \end{cases}$

㉠에서 $(x+1)(x-6)<0$

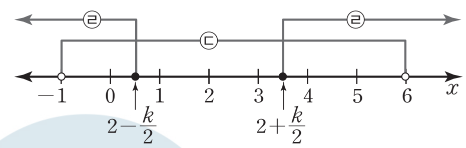
$-1<x<6$ …… ⓒ

…… ❶

ⓒ에서 $2x-4\leq-k$ 또는 $2x-4\geq k$

$x\leq2-\frac{k}{2}$ 또는 $x\geq2+\frac{k}{2}$ …… ㉣

…… ❷



주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x의 개수가 3이려면

$0\leq2-\frac{k}{2}<1$, $3<2+\frac{k}{2}\leq4$이어야 한다.

따라서 $2<k\leq4$

…… ❸

답 $2<k\leq4$

단계	채점 기준	비율
❶	부등식 ㉠의 해를 구한 경우	30 %
❷	부등식 ⓒ의 해를 구한 경우	30 %
❸	양수 k의 값의 범위를 구한 경우	40 %

변별력을 만드는 1등급 문제

본문 74~76쪽

47 ③	48 ④	49 ①	50 ①	51 ④
52 ②	53 ③	54 ⑤	55 ④	56 ②
57 ⑤	58 ③			

47

삼차방정식 $f(x)=0$의 한 근이 α이면 $f(\alpha)=0$이다.

x에 대한 삼차방정식 $x^3+ax^2+4x+b=0$이 실근 1과 허근 α를 가지고 $\alpha=-\overline{\alpha}$, $\alpha\overline{\alpha}=4$일 때, $a-b$의 값은? (단, a, b는 실수이다.)

① 1　② 2　✓③ 3

④ 4　⑤ 5

Step 1 삼차방정식의 허근 구하기

삼차방정식 $x^3+ax^2+4x+b=0$에서

$f(x)=x^3+ax^2+4x+b$로 놓으면 1이 주어진 삼차방정식의 근이므로

$f(1)=1+a+4+b=0$, $a+b=-5$ …… ㉠

또, $\alpha=p+qi$ (p, q는 실수이고, $i=\sqrt{-1}$)로 놓으면

$\overline{\alpha}=p-qi$

$\alpha=-\overline{\alpha}$에서

$p+qi=-(p-qi)$

$p=0$

$\alpha\overline{\alpha}=4$에서

$qi\times(-qi)=4$

$-q^2i^2=4$, $q^2=4$

$q=-2$ 또는 $q=2$

$\alpha=-2i$, $\overline{\alpha}=2i$ 또는 $\alpha=2i$, $\overline{\alpha}=-2i$

Step 2 a, b의 값 각각 구하기

이때 복소수 a가 방정식 $f(x)=0$의 근이고 a, b가 실수이므로 $\overline{a}$도 방정식 $f(x)=0$의 근이다. 즉

$$f(2i)=(2i)^3+a(2i)^2+4\times 2i+b$$
$$=-8i-4a+8i+b$$
$$=-4a+b$$

이므로 $f(2i)=0$에서

$-4a+b=0$, $b=4a$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $a+4a=-5$, $a=-1$

$a=-1$을 ㉡에 대입하면 $b=-4$

Step 3 $a-b$의 값 구하기

따라서 $a-b=-1-(-4)=3$

답 ③

48

삼차방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2이면 $f(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)$ $(\alpha,\ \beta$는 실수$)$ 꼴로 인수분해 된다.

x에 대한 삼차방정식

$$x^3-8x^2+(a+12)x-2a=0$$

의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 합은?

① 14 ② 15 ③ 16
√④ 17 ⑤ 18

Step 1 삼차식 인수분해 하기

$f(x)=x^3-8x^2+(a+12)x-2a$라 하면

$f(2)=8-32+(2a+24)-2a=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해 하면

2	1	-8	$a+12$	$-2a$
		2	-12	$2a$
	1	-6	a	0

$f(x)=(x-2)(x^2-6x+a)$

Step 2 a의 값 구하기

$f(x)=0$에서 $(x-2)(x^2-6x+a)=0$

$x=2$ 또는 $x^2-6x+a=0$

(i) $x=2$가 주어진 삼차방정식의 중근일 때

이차방정식 $x^2-6x+a=0$의 두 근이 2, α $(\alpha\neq 2)$이어야 한다.

이차방정식 $x^2-6x+a=0$의 한 근이 2이므로

$4-12+a=0$에서 $a=8$

$a=8$일 때, $x^2-6x+8=0$에서 $(x-2)(x-4)=0$

$x=2$ 또는 $x=4$

따라서 주어진 삼차방정식의 근은 2(중근), 4이므로 주어진 조건을 만족시킨다.

(ii) $x=2$가 아닌 수가 주어진 삼차방정식의 중근일 때

이차방정식 $x^2-6x+a=0$이 2가 아닌 중근을 가져야 하므로 이차방정식 $x^2-6x+a=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-3)^2-a=0$, $a=9$

$a=9$일 때, $x^2-6x+9=0$에서 $(x-3)^2=0$, $x=3$

따라서 주어진 삼차방정식의 근은 2, 3(중근)이므로 주어진 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에 의하여 $a=8$ 또는 $a=9$

Step 3 모든 실수 a의 값의 합 구하기

따라서 모든 실수 a의 값의 합은

$8+9=17$

답 ④

49

삼차방정식 $f(x)=0$의 세 근이 α, β, γ이면 $f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$이다.

x에 대한 삼차방정식

$$x^3+kx^2+(k+4)x-6k-1=0$$

의 세 근을 α, β, γ라 하자. $(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=8$일 때, $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$의 값은? (단, k는 상수이다.)

√① -5 ② -2 ③ -1
④ 4 ⑤ 7

Step 1 k의 값 구하기

삼차방정식 $x^3+kx^2+(k+4)x-6k-1=0$의 세 근이 α, β, γ이므로

$x^3+kx^2+(k+4)x-6k-1$

$=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ $\cdots\cdots$ ㉠

㉠은 x에 대한 항등식이므로 ㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$1+k+(k+4)-6k-1=(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$

이때 $(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=8$이므로

$1+k+(k+4)-6k-1=8$, $-4k=4$, $k=-1$

Step 2 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$의 값 구하기

㉠에서

$x^3-x^2+3x+5=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

즉,

x^3-x^2+3x+5

$=x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma$

이므로

$\alpha+\beta+\gamma=1$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3$

따라서

$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$

$=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

$=1^2-2\times 3$

$=-5$

답 ①

50

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ $(a,\ b,\ c,\ d$는 실수$)$의 한 근이 $p+qi$ $(p,\ q$는 실수, $q\neq 0$, $i=\sqrt{-1})$이면 $p-qi$도 이 삼차방정식의 근이다.

삼차다항식

$$f(x)=x^3+ax^2+x-a+2$$

와 복소수 z가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) z는 x에 대한 삼차방정식 $f(x)=0$의 허근이다.
> (나) $(z-\overline{z})^2=-4$

방정식 $f(3x-4)=0$의 서로 다른 모든 근의 합은?

(단, a는 음수이다.)

√① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

Step 1 복소수 z 구하기

$z=p+qi$ (p, q는 실수이고, $q\neq0$, $i=\sqrt{-1}$)로 놓으면

$\overline{z}=p-qi$

조건 (나)에서

$\{(p+qi)-(p-qi)\}^2=-4$

$4q^2i^2=-4$

$q^2=1$

$q=-1$ 또는 $q=1$

$z=p+i$ 또는 $z=p-i$

Step 2 $f(x)$를 인수분해 하기

조건 (가)에서 복소수 z가 방정식 $f(x)=0$의 한 근이고, a가 실수이므로 $\overline{z}$도 방정식 $f(x)=0$의 근이다.

즉, $p+i$, $p-i$는 방정식 $f(x)=0$의 근이다.

한편, 삼차방정식 $f(x)=0$에서 $f(-1)=-1+a-1-a+2=0$이므로

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해 하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & a & 1 & -a+2 \\ & & -1 & -a+1 & a-2 \\ \hline & 1 & a-1 & -a+2 & \boxed{0} \end{array}$$

즉, $f(x)=(x+1)\{x^2+(a-1)x-a+2\}$

Step 3 방정식 $f(3x-4)=0$의 해 구하기

$f(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x^2+(a-1)x-a+2=0$

이차방정식 $x^2+(a-1)x-a+2=0$의 두 근이 $p+i$, $p-i$이므로

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(p+i)+(p-i)=-(a-1)$ …… ㉠

$(p+i)(p-i)=-a+2$ …… ㉡

㉠에서

$2p=-a+1$, $a=-2p+1$ …… ㉢

㉡에서

$p^2-i^2=-a+2$

$p^2+1=-a+2$ …… ㉣

㉢을 ㉣에 대입하면

$p^2+1=-(-2p+1)+2$

$p^2-2p=0$, $p(p-2)=0$

$p=0$ 또는 $p=2$

$p=0$일 때, $a=1$

$p=2$일 때, $a=-3$

이때 $a<0$이므로 $a=-3$

$f(x)=(x+1)(x-2-i)(x-2+i)$

이므로

$f(3x-4)=0$에서

$(3x-4+1)(3x-4-2-i)(3x-4-2+i)=0$

$(3x-3)(3x-6-i)(3x-6+i)=0$

$x=1$ 또는 $x=\dfrac{6+i}{3}$ 또는 $x=\dfrac{6-i}{3}$

Step 4 방정식 $f(3x-4)=0$의 서로 다른 모든 근의 합 구하기

따라서 방정식 $f(3x-4)=0$의 서로 다른 모든 근의 합은

$1+\dfrac{6+i}{3}+\dfrac{6-i}{3}=5$

답 ①

51

20 이하의 자연수 n에 대하여 사차다항식 $f(x)$가

$$f(x)=x^4-6nx^2+5n^2$$

일 때, 방정식 $f(x)=0$을 만족시키는 자연수 x가 존재하도록 모든 n의 값의 합은?

→ 인수분해를 이용하여 사차방정식의 근을 구한다.

① 40 ② 45 ③ 50 ✓④ 55 ⑤ 60

Step 1 방정식 $f(x)=0$의 근 중 자연수가 될 수 있는 것 구하기

방정식 $f(x)=0$에서 $x^4-6nx^2+5n^2=0$

$(x^2-n)(x^2-5n)=0$

$x^2=n$ 또는 $x^2=5n$

즉, $x=-\sqrt{n}$ 또는 $x=\sqrt{n}$ 또는 $x=-\sqrt{5n}$ 또는 $x=\sqrt{5n}$

이때 방정식 $f(x)=0$의 근 중 자연수가 될 수 있는 것은

$x=\sqrt{n}$ 또는 $x=\sqrt{5n}$

Step 2 x의 값에 따른 n의 값 구하기

(i) $x=\sqrt{n}$일 때

$\sqrt{n}$이 자연수이려면 $n=k^2$ (k는 자연수) 꼴이어야 한다.

이때 n이 20 이하의 자연수이므로 n이 될 수 있는 값은 1, 4, 9, 16이다.

(ii) $x=\sqrt{5n}$일 때

$\sqrt{5n}$이 자연수이려면 $n=5k^2$ (k는 자연수) 꼴이어야 한다.

이때 n이 20 이하의 자연수이므로 n이 될 수 있는 값은 5, 20이다.

Step 3 모든 n의 값의 합 구하기

(i), (ii)에 의하여 n의 값은 1, 4, 5, 9, 16, 20이고, 그 합은

$1+4+5+9+16+20=55$

답 ④

52

→ 공통인수로 묶은 후, 인수정리를 이용하여 인수분해 한다.

x에 대한 사차방정식

$$x^4-(2a+1)x^3+6(a+2)x^2-4(a+3)x=0$$

이 서로 다른 두 실근 α, β와 서로 다른 두 허근 γ, δ를 가질 때, $\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2$의 최댓값은? (단, a는 실수이다.)

① 27 ✓② 29 ③ 31 ④ 33 ⑤ 35

Step 1 사차식 인수분해 하기

방정식 $x^4-(2a+1)x^3+6(a+2)x^2-4(a+3)x=0$에서

$x\{x^3-(2a+1)x^2+6(a+2)x-4(a+3)\}=0$

$f(x)=x^3-(2a+1)x^2+6(a+2)x-4(a+3)$이라 하면

$f(1)=1-(2a+1)+6(a+2)-4(a+3)=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해 하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -(2a+1) & 6(a+2) & -4(a+3) \\ & & 1 & -2a & 4a+12 \\ \hline & 1 & -2a & 4a+12 & \boxed{0} \end{array}$$

즉, $f(x)=(x-1)(x^2-2ax+4a+12)$

Step 2 a의 값의 범위 구하기

주어진 사차방정식은

$x(x-1)(x^2-2ax+4a+12)=0$

$x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x^2-2ax+4a+12=0$

이때 $\alpha=0$, $\beta=1$ 또는 $\alpha=1$, $\beta=0$이므로

$\alpha^2+\beta^2=0^2+1^2=1$

이차방정식 $x^2-2ax+4a+12=0$은 서로 다른 두 허근 γ, δ를 가져야 하므로 이차방정식 $x^2-2ax+4a+12=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-a)^2-(4a+12)<0$

이어야 한다. 즉,

$a^2-4a-12<0$, $(a+2)(a-6)<0$

$-2<a<6$ …… ㉠

Step 3 $\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2$의 최댓값 구하기

한편, 이차방정식 $x^2-2ax+4a+12=0$의 근과 계수의 관계에 의하여

$\gamma+\delta=2a$, $\gamma\delta=4a+12$이므로

$$\begin{aligned}\gamma^2+\delta^2&=(\gamma+\delta)^2-2\gamma\delta\\&=(2a)^2-2(4a+12)\\&=4a^2-8a-24\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2&=1-(4a^2-8a-24)\\&=-4a^2+8a+25\\&=-4(a-1)^2+29\end{aligned}$$

㉠에서 $-2<a<6$이므로

$\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2$은 $a=1$일 때 최댓값 29를 갖는다. 답 ②

53

$\overline{\text{BD}}$가 지름이므로 원주각의 성질에 의하여

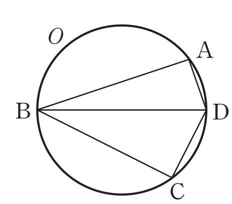
$\angle\text{BAD}=\angle\text{BCD}=90^\circ$이다.

원 O에 내접하는 사각형 ABCD가 있다. 선분 BD가 원 O의 지름이고 사각형 ABCD가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\overline{\text{AB}}=3$, $\overline{\text{CD}}=\sqrt{2}$
>
> (나) 사각형 ABCD의 넓이는 $\frac{7}{2}$이다.

$\overline{\text{AD}}^2+\overline{\text{BC}}^2+\overline{\text{BD}}^2$의 값은?

① 17 ② 18 ③ 19 ④ 20 ⑤ 21



Step 1 조건 (가)로부터 식 구하기

$\overline{\text{AD}}=x$, $\overline{\text{BC}}=y$ $(x>0,\ y>0)$이라 하자.

선분 BD가 원 O의 지름이므로 $\angle\text{A}=\angle\text{C}=90^\circ$

조건 (가)에서 $\overline{\text{AB}}=3$, $\overline{\text{CD}}=\sqrt{2}$이므로

직각삼각형 ABD에서

$\overline{\text{BD}}^2=\overline{\text{AB}}^2+\overline{\text{AD}}^2=3^2+x^2$ …… ㉠

직각삼각형 BCD에서

$\overline{\text{BD}}^2=\overline{\text{BC}}^2+\overline{\text{CD}}^2=y^2+(\sqrt{2})^2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$9+x^2=y^2+2$

$x^2-y^2=-7$ …… ㉢

Step 2 조건 (나)로부터 선분 AD의 길이 구하기

조건 (나)에서 사각형 ABCD의 넓이가 $\frac{7}{2}$이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{\text{AB}}\times\overline{\text{AD}}+\frac{1}{2}\times\overline{\text{BC}}\times\overline{\text{CD}}=\frac{7}{2}$

$\frac{1}{2}\times3\times x+\frac{1}{2}\times y\times\sqrt{2}=\frac{7}{2}$, $3x+\sqrt{2}y=7$

$y=\frac{7-3x}{\sqrt{2}}$ …… ㉣

이때 $x>0$, $y>0$이므로 $0<x<\frac{7}{3}$

㉣을 ㉢에 대입하면

$x^2-\left(\frac{7-3x}{\sqrt{2}}\right)^2=-7$

$x^2-6x+5=0$, $(x-1)(x-5)=0$

$x=1$ 또는 $x=5$

이때 $0<x<\frac{7}{3}$이므로 $x=1$

Step 3 $\overline{\text{AD}}^2+\overline{\text{BC}}^2+\overline{\text{BD}}^2$의 값 구하기

$x=1$을 ㉣에 대입하면 $y=2\sqrt{2}$

$x=1$을 ㉠에 대입하면 $\overline{\text{BD}}^2=3^2+1^2=10$

따라서

$\overline{\text{AD}}^2+\overline{\text{BC}}^2+\overline{\text{BD}}^2=1^2+(2\sqrt{2})^2+10=19$ 답 ③

54

학생 $(b-3)$명은 모두 사탕을 5개씩 받고, 1명의 학생은 사탕을 1개 이상 5개 이하를 받는다.

사탕 a개와 학생 b명이 있다. 각각의 학생에게 사탕을 4개씩 나누어 주면 사탕이 11개가 남고, 사탕을 5개씩 나누어 주면 사탕을 한 개도 받지 못하는 학생의 수는 2이다. $a+b$의 최댓값은?

① 104 ② 112 ③ 120 ④ 128 ⑤ 136

Step 1 연립방정식 구하기

학생 b명에게 각각 4개의 사탕을 나누어 주고 사탕이 11개 남으므로

$a=4b+11$ …… ㉠

학생에게 사탕을 5개씩 나누어 주면 사탕을 한 개도 받지 못하는 학생의 수가 2이므로

$5(b-3)+1\le a\le5(b-2)$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$5(b-3)+1\le4b+11\le5(b-2)$

이때

$\begin{cases}5(b-3)+1\le4b+11 & \cdots\cdots ㉢\\4b+11\le5(b-2) & \cdots\cdots ㉣\end{cases}$

Step 2 $a+b$의 최댓값 구하기

㉢에서 $b\le25$

㉣에서 $b\ge21$

이므로 $21\le b\le25$

한편 $a+b=(4b+11)+b=5b+11$이므로 $b=25$일 때 $a+b$는 최댓값 136을 갖는다. 답 ⑤

55

두 실수 a, b에 대하여 부등식

$$|x-a|\le 5$$

의 해가 $b\le x\le 9$이다. 복소수

$$z=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\times\sqrt{\frac{b}{a}}+\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{-a}\sqrt{b}}$$

에 대하여 $(z-1)^{10}+iz^{10}$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

두 실수 a, b $(b>0)$에 대하여 부등식 $|x-a|\le b$의 해는 $-b\le x-a\le b$이다.

① 25 ② 27 ③ 29
✓④ 31 ⑤ 33

Step 1 a, b의 값 각각 구하기

부등식 $|x-a|\le 5$에서

$-5\le x-a\le 5$, $a-5\le x\le a+5$

이때 부등식 $|x-a|\le 5$의 해가 $b\le x\le 9$이므로

$a-5=b$ …… ㉠

$a+5=9$ …… ㉡

㉡에서 $a=4$

$a=4$를 ㉠에 대입하면

$b=4-5=-1$

Step 2 복소수 z를 간단히 나타내기

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\times\sqrt{\frac{b}{a}}=\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{-1}}\times\sqrt{\frac{-1}{4}}=\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{-1}}\times\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{4}}=1,$$

$$\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{-a}\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{4\times(-1)}}{\sqrt{-4}\sqrt{-1}}=\frac{\sqrt{4\times(-1)}}{-\sqrt{-4\times(-1)}}=-\frac{\sqrt{-4}}{\sqrt{4}}=-\sqrt{\frac{-4}{4}}=-i$$

이므로

$$z=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\times\sqrt{\frac{b}{a}}+\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{-a}\sqrt{b}}=1-i$$

Step 3 $(z-1)^{10}+iz^{10}$의 값 구하기

$(z-1)^{10}=(-i)^{10}=i^{10}=(i^4)^2\times i^2=1^2\times(-1)=-1$

$z^{10}=(1-i)^{10}=\{(1-i)^2\}^5=(1-2i+i^2)^5$

$=(-2i)^5=-32i^4i=-32i$

$iz^{10}=i\times(-32i)=-32i^2=32$

따라서

$(z-1)^{10}+iz^{10}=-1+32=31$ 답 ④

56

x에 대한 삼차방정식

$$x^3-(2k-1)x^2-3(k-2)x-k+6=0$$

이 한 개의 음의 실근과 서로 다른 두 개의 양의 실근을 갖도록 하는 모든 정수 k의 값의 합은?

삼차방정식 $f(x)=0$에서 $f(\alpha)=0$인 실수 α를 구한 후 α의 부호에 따라 주어진 조건을 만족시키는 k의 값을 구한다.

① 11 ✓② 12 ③ 13
④ 14 ⑤ 15

Step 1 삼차식 인수분해 하기

삼차방정식 $x^3-(2k-1)x^2-3(k-2)x-k+6=0$에서

$f(x)=x^3-(2k-1)x^2-3(k-2)x-k+6$이라 하자.

$f(-1)=-1-(2k-1)+3(k-2)-k+6=0$이므로

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해 하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -(2k-1) & -3(k-2) & -k+6 \\ & & -1 & 2k & k-6 \\ \hline & 1 & -2k & -k+6 & 0 \end{array}$$

즉, $f(x)=(x+1)(x^2-2kx-k+6)$

Step 2 k의 값의 범위 구하기

$f(x)=0$에서 $(x+1)(x^2-2kx-k+6)=0$

$x=-1$ 또는 $x^2-2kx-k+6=0$

삼차방정식 $f(x)=0$이 한 개의 음의 실근과 서로 다른 두 개의 양의 실근을 가지므로 이차방정식 $x^2-2kx-k+6=0$은 서로 다른 두 개의 양의 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $x^2-2kx-k+6=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-k)^2-(-k+6)>0$

이어야 한다. 즉,

$k^2+k-6>0$에서 $(k+3)(k-2)>0$

$k<-3$ 또는 $k>2$ …… ㉠

이차방정식 $x^2-2kx-k+6=0$의 서로 다른 두 실근을 α, β라 하면

$\alpha+\beta=2k>0$에서

$k>0$ …… ㉡

$\alpha\beta=-k+6>0$에서

$k<6$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $2<k<6$

Step 3 모든 정수 k의 값의 합 구하기

따라서 정수 k는 3, 4, 5이고, 그 합은

$3+4+5=12$ 답 ②

57

해가 $x\le\alpha$ 또는 $x\ge\beta$ $(\alpha<\beta)$인 이차부등식은 $a(x-\alpha)(x-\beta)\ge 0$으로 놓을 수 있다. (단, a는 양수이다.)

최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(5)$의 값은?

> (가) 이차부등식 $f(x)\ge 4$의 해는 $x\le -1$ 또는 $x\ge 3$이다.
> (나) 이차부등식 $f(x)\le -4$의 해의 개수는 1이다.

① 20 ② 22 ③ 24
④ 26 ✓⑤ 28

Step 1 조건 (가)로부터 $f(x)$의 식 세우기

이차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수를 a $(a>0)$이라 하자.

조건 (가)에서 이차부등식 $f(x)\ge 4$, 즉 $f(x)-4\ge 0$의 해가

$x\le -1$ 또는 $x\ge 3$이므로

$f(x)-4=a(x+1)(x-3)$

으로 놓을 수 있다. 즉,

$f(x)=a(x+1)(x-3)+4$

Step 2 이차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수 구하기

조건 (나)에서 이차부등식 $f(x)\le -4$의 해의 개수가 1이므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-4$는 접해야 한다.

즉, 이차방정식 $f(x)=-4$는 중근을 가져야 하므로

$f(x)+4=0$에서

$a(x+1)(x-3)+8=0$

$ax^2-2ax-3a+8=0$

이차방정식 $ax^2-2ax-3a+8=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-a)^2-a(-3a+8)=0$

이어야 한다.

즉, $4a^2-8a=0$에서

$4a(a-2)=0$

이때 $a>0$이므로 $a=2$

Step 3 $f(5)$의 값 구하기

따라서 $f(x)=2(x+1)(x-3)+4$이므로

$f(5)=2\times6\times2+4=28$

답 ⑤

58

연립부등식

이차부등식 $(x-\alpha)(x-\beta)>0$ $(\alpha<\beta)$의 해는 $x<\alpha$ 또는 $x>\beta$이다.

$$\begin{cases} x^2-10x+21>0 \\ |x-a|<1 \end{cases}$$

부등식 $|x|<a$ (a는 양수)의 해는 $-a<x<a$이다.

을 만족시키는 정수 x가 항상 존재하도록 하는 10 이하의 자연수 a의 개수는?

① 3 ② 4 ✓③ 5

④ 6 ⑤ 7

Step 1 연립부등식의 해의 범위 구하기

$$\begin{cases} x^2-10x+21>0 & \cdots\cdots ㉠ \\ |x-a|<1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $(x-3)(x-7)>0$

$x<3$ 또는 $x>7$ ...... ㉢

㉡에서 $-1<x-a<1$

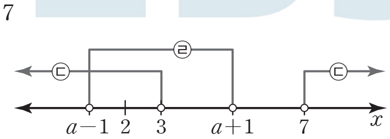
$a-1<x<a+1$ ...... ㉣

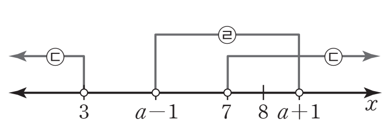
Step 2 정수 x가 항상 존재하기 위한 a의 위치 파악하기

주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x가 항상 존재하려면

$a-1<2$ 또는 $a+1>8$이어야 하므로

$a<3$ 또는 $a>7$





Step 3 자연수 a의 개수 구하기

따라서 10 이하의 자연수 a는 1, 2, 8, 9, 10의 5개이다.

답 ③

1등급을 넘어서는 상위 1%

본문 77쪽

59

최고차항의 계수가 각각 -1, 1인 두 이차함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

함수 $g(x)-f(x)$는 이차항의 계수가 2인 이차함수이므로 $g(x)-f(x)=2(x+1)(x-3)$으로 놓을 수 있다.

(가) 부등식 $f(x)\ge2$의 해는 $x=1$이다.

(나) 부등식 $g(x)-f(x)\le0$의 해는 $-1\le x\le3$이다.

x에 대한 방정식 $f(x)-k=0$이 실근을 갖지 않고, x에 대한 방정식 $g(x)+n-k=0$이 실근을 갖지 않도록 하는 정수 k의 개수가 7일 때, 정수 n의 값을 구하시오. 16

문항 파헤치기

해의 조건으로부터 두 이차함수의 식을 파악한 다음, 주어진 방정식이 실근을 갖지 않도록 하는 두 함수의 그래프의 위치를 파악하도록 한다.

풀이

이차함수 $f(x)-2$의 최고차항의 계수가 -1이고, 이차부등식 $f(x)-2\ge0$의 해가 $x=1$이므로 이차함수 $y=f(x)-2$의 그래프는 x축과 점 $(1,\ 0)$에서 접한다.

Step 1 이차함수 $f(x)$의 식 구하기

이차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 -1이고 조건 (가)에서 이차부등식 $f(x)\ge2$, 즉 $f(x)-2\ge0$의 해가 $x=1$이므로 $f(x)-2=-(x-1)^2$이다. 즉, $f(x)=-x^2+2x+1$

Step 2 이차함수 $g(x)$의 식 구하기

최고차항의 계수가 각각 -1, 1인 두 이차함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 함수 $g(x)-f(x)$의 최고차항의 계수는 2이고, 조건 (나)에서 부등식 $g(x)-f(x)\le0$의 해가 $-1\le x\le3$이므로

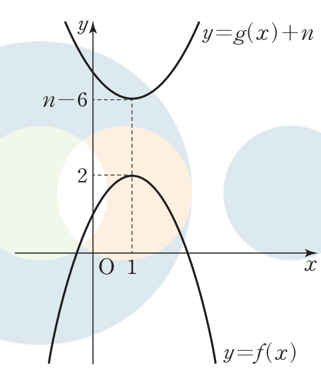
$g(x)-f(x)=2(x+1)(x-3)$이다. 즉,

$g(x)=f(x)+2(x+1)(x-3)$

$\quad=(-x^2+2x+1)+(2x^2-4x-6)=x^2-2x-5$

Step 3 정수 n의 값 구하기

이때 $f(x)=-(x-1)^2+2$, $g(x)+n=(x-1)^2+n-6$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최댓값 2를 갖고, 함수 $g(x)+n$은 $x=1$에서 최솟값 $n-6$을 갖는다.



즉, 두 방정식 $f(x)-k=0$, $g(x)+n-k=0$이 모두 실근을 갖지 않도록 하는 정수 k의 개수가 7이려면 $9<n-6\le10$이어야 한다.

따라서 $15<n\le16$이므로 구하는 정수 n의 값은 16이다.

답 16

실수 Point 찾기

최고차항의 계수와 해의 조건으로부터 식을 유추하는 과정에서 실수하지 않도록 하고, 방정식을 이루는 두 식에서 공통인 수를 이용하는 방법을 생각할 수 있어야 한다.

07 경우의 수

내신 빈출 필수 문제

본문 80~83쪽

01 ③	02 ②	03 ④	04 12	05 4
06 27	07 5	08 24	09 ②	10 144
11 120	12 ⑤	13 144	14 480	15 140
16 4	17 180	18 360	19 45	20 ⑤
21 ①	22 20	23 56		

01 25 이하의 자연수 중에서 4의 배수는 4, 8, 12, 16, 20, 24의 6개이고, 25 이하의 자연수 중에서 7의 배수는 7, 14, 21의 3개이다.
이때 25 이하의 자연수 중에서 4와 7의 공배수, 즉 28의 배수는 없으므로 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여
$6+3=9$

답 ③

02 한 개의 주사위를 두 번 던져서 나오는 두 눈의 수를 차례로 a, b라 하자.
(i) $a+b=5$일 때
$a+b=5$를 만족시키는 순서쌍 (a, b)는 $(1, 4)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$, $(4, 1)$의 4개이다.
(ii) $a+b=10$일 때
$a+b=10$을 만족시키는 순서쌍 (a, b)는 $(4, 6)$, $(5, 5)$, $(6, 4)$의 3개이다.
(i), (ii)가 동시에 일어나지 않으므로 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여
$4+3=7$

답 ②

03 이차방정식 $ax^2+bx+1=0$의 판별식을 D라 할 때, 이 이차방정식의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되려면 $D>0$이어야 한다.
즉, $D=b^2-4a>0$에서 $b^2>4a$
(i) $a=1$, 2일 때
$b^2>4a$에서 b가 될 수 있는 수는 3, 4, 5, 6의 4가지
그러므로 순서쌍 (a, b)의 개수는 $2\times4=8$이다.
(ii) $a=3$일 때
$b^2>12$이므로 b가 될 수 있는 수는 4, 5, 6의 3가지
그러므로 순서쌍 (a, b)의 개수는 3이다.
(iii) $a=4$, 5, 6일 때
$b^2>4a$에서 b가 될 수 있는 수는 5, 6의 2가지
그러므로 순서쌍 (a, b)의 개수는 $3\times2=6$이다.
(i), (ii), (iii)에서 어느 두 사건도 동시에 일어나지 않으므로 구하는 모든 순서쌍 (a, b)의 개수는 합의 법칙에 의하여
$8+3+6=17$

답 ④

04 $5^a\times7^b\times11^c$의 양의 약수는 1, 5, ⋯, 5^a 중 하나와 1, 7, ⋯, 7^b 중 하나와 1, 11, ⋯, 11^c 중 하나의 곱으로 나타낼 수 있으므로 양의 약수의 개수는
$(a+1)(b+1)(c+1)=105$
따라서 $(a+1)(b+1)(c+1)=3\times5\times7$에서
$a=2$, $b=4$, $c=6$이므로
$a+b+c=2+4+6=12$

답 12

05 A 도시에서 출발하여 B 도시를 거쳐 C 도시에 가는 경우의 수는
$3\times n$
그 각각에 대하여 한 번 지나온 도로는 다시 이용하지 않으면서 B 도시를 거쳐 A 도시로 되돌아오는 경우의 수는
$(n-1)\times2$
따라서 $3\times n\times(n-1)\times2=72$이므로
$n(n-1)=12$, $n^2-n-12=0$
$(n-4)(n+3)=0$
이때 n은 자연수이므로
$n=4$

답 4

06 한 개의 주사위를 두 번 던져서 나오는 경우의 수는
$6\times6=36$
한 개의 주사위를 두 번 던져서 나오는 두 눈의 수의 곱이 홀수가 되는 경우는 두 번 모두 홀수의 눈이 나와야 하므로 그 경우의 수는
$3\times3=9$
따라서 구하는 경우의 수는
$36-9=27$

답 27

[다른 풀이]
(i) 첫 번째 나온 눈의 수가 홀수인 경우
한 개의 주사위를 던져 나오는 눈의 수가 홀수인 경우의 수는 3
그 각각에 대하여 두 번째 던진 주사위의 눈의 수는 짝수가 나와야 하므로 그 경우의 수는 3
따라서 이때의 경우의 수는 $3\times3=9$
(ii) 첫 번째 나온 눈의 수가 짝수인 경우
한 개의 주사위를 던져 나오는 눈의 수가 짝수인 경우의 수는 3
그 각각에 대하여 두 번째 던진 주사위의 눈의 수는 1, 2, 3, 4, 5, 6 모두 가능하므로 그 경우의 수는 6
따라서 이때의 경우의 수는 $3\times6=18$
(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는
$9+18=27$

07 ${}_{2n}\mathrm{P}_4=252\times{}_n\mathrm{P}_2$에서
$2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)=252\times n(n-1)$
$4n(n-1)(2n-1)(2n-3)=252\times n(n-1)$
이때 n은 $n\geq2$인 자연수이므로
$(2n-1)(2n-3)=63$
$4n^2-8n-60=0$
$n^2-2n-15=0$
$(n+3)(n-5)=0$
$n=5$

답 5

08 A를 맨 처음에 배치하고 나머지 4명의 선수를 일렬로 세우면 되므로 그 경우의 수는
$4!=4\times3\times2\times1=24$

답 24

09 1, 3, 5, 7이 적힌 4장의 카드 중에서 서로 다른 2장의 카드를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수는

${}_4P_2=4\times3=12$

그 각각에 대하여 나머지 5장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$5!$

따라서 구하는 경우의 수는

$12\times5!=2\times6\times5!=2\times6!=k\times6!$

이므로 $k=2$

답 ②

10 남학생 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는

${}_4P_4=4!=4\times3\times2\times1=24$

그 각각에 대하여 남학생 사이의 ✓로 표시된 곳에 여학생 2명을 세워야 하므로 그 경우의 수는

${}_3P_2=3\times2=6$

남	✓	남	✓	남	✓	남

따라서 구하는 경우의 수는

$24\times6=144$

답 144

11 조건 (가)에서 홀수 1, 3, 5, 7이 적힌 4장의 카드는 이 순서대로 나열해야 한다.

두 조건 (나), (다)에서 4, 8이 적힌 카드는 한 장의 카드로 생각하여 나머지 2, 6이 적힌 2장의 카드와 함께 3장의 카드를 ✓로 표시된 곳에 나열해야 하므로 그 경우의 수는

${}_5P_3=5\times4\times3=60$

✓	1	✓	3	✓	5	✓	7	✓

그 각각에 대하여 4, 8이 적힌 2장의 카드의 자리를 서로 바꾸는 경우의 수는

$2!=2\times1=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$60\times2=120$

답 120

12 십의 자리의 수와 일의 자리의 수의 합이 짝수이려면 두 수가 모두 홀수이거나 짝수이어야 한다.

(i) 십의 자리의 수와 일의 자리의 수가 모두 홀수인 경우

1, 3, 5, 7, 9의 5개의 수 중에서 서로 다른 2개를 뽑아 일렬로 나열하면 되므로 그 경우의 수는

${}_5P_2=5\times4=20$

(ii) 십의 자리의 수와 일의 자리의 수가 모두 짝수인 경우

2, 4, 6, 8의 4개의 수 중에서 서로 다른 2개를 뽑아 일렬로 나열하면 되므로 그 경우의 수는

${}_4P_2=4\times3=12$

(i), (ii)에 의하여 구하는 자연수의 개수는

$20+12=32$

답 ⑤

13 A, B, C를 한 명으로 생각하여 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$4!=4\times3\times2\times1=24$

그 각각에 대하여 A, B, C 세 명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$3!=3\times2\times1=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$24\times6=144$

답 144

14 남학생 4명과 여학생 2명의 총 6명을 일렬로 세우는 경우의 수는

${}_6P_6=6!=6\times5\times4\times3\times2\times1=720$

여학생 2명을 이웃하여 세우는 경우의 수는 여학생 2명을 한 명으로 생각하여 5명을 일렬로 세우고 그 각각에 대하여 여학생 2명이 자리를 바꾸는 경우의 수이므로

${}_5P_5\times2!=5!\times2!=5\times4\times3\times2\times1\times2\times1=240$

따라서 구하는 경우의 수는

$720-240=480$

답 480

15 ${}_6P_3=6\times5\times4=120$, ${}_6C_3=\dfrac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$

이므로

${}_6P_3+{}_6C_3=120+20=140$

답 140

16 $8-n=2n-5$일 때, $3n=13$이므로 자연수 n은 존재하지 않는다.

한편, ${}_7C_{8-n}={}_7C_{2n-5}$에서

${}_7C_{7-(8-n)}={}_7C_{2n-5}$

${}_7C_{n-1}={}_7C_{2n-5}$

이므로

$n-1=2n-5$

$n=4$

답 4

17 1학년 학생 5명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는

${}_5C_2=\dfrac{5\times4}{2\times1}=10$

그 각각에 대하여 2학년 학생 4명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는

${}_4C_2=\dfrac{4\times3}{2\times1}=6$

그 각각에 대하여 3학년 학생 3명 중에서 1명을 뽑는 경우의 수는

${}_3C_1=3$

따라서 구하는 경우의 수는

$10\times6\times3=180$

답 180

18 남학생 5명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는

${}_5C_2=\dfrac{5\times4}{2\times1}=10$

그 각각에 대하여 여학생 3명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는

${}_3C_2={}_3C_1=3$

그 각각에 대하여 여학생 2명을 한 명으로 생각하여 3명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$3!=3\times2\times1=6$

그 각각에 대하여 여학생 2명이 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2\times1=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$10\times3\times6\times2=360$

답 360

19 선택한 4개의 수 중에서 가장 작은 수를 a, 가장 큰 수를 b라 하면 그 차가 7이 되는 순서쌍 (a, b)는 $(1, 8)$, $(2, 9)$, $(3, 10)$의 3개이다.

그 각각에 대하여 그 사이에 있는 6개의 자연수 중에서 서로 다른 2개를 택하는 경우의 수는

$_6C_2=\frac{6\times5}{2\times1}=15$

따라서 구하는 경우의 수는

$3\times15=45$

답 45

20 A, B를 제외한 나머지 8명 중에서 A를 제외한 나머지 3명을 뽑아야 하므로 그 경우의 수는

$_8C_3=\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56$

답 ⑤

21 (i) 선택한 세 수가 모두 홀수인 경우

1, 3, 5, 7, 9의 5개의 홀수 중에서 서로 다른 3개를 택하는 경우의 수는

$_5C_3={}_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$

(ii) 선택한 세 수 중에서 홀수가 1개, 짝수가 2개인 경우

1, 3, 5, 7, 9의 5개의 홀수 중에서 1개를 택하고, 그 각각에 대하여 2, 4, 6, 8의 4개의 짝수 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$_5C_1\times{}_4C_2=5\times\frac{4\times3}{2\times1}=30$

(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$10+30=40$

답 ①

22 300보다 작은 세 자리의 자연수이므로 백의 자리에 올 수 있는 수는 1, 2이다.

········· ❶

(i) 백의 자리의 수가 1인 경우

일의 자리에 올 수 있는 수는 0, 2, 4의 3가지이고, 그 각각에 대하여 십의 자리에 올 수 있는 수는 일의 자리의 수와 백의 자리의 수를 제외한 나머지 4개의 수이므로 이 경우 세 자리의 자연수의 개수는

$3\times4=12$

········· ❷

(ii) 백의 자리의 수가 2인 경우

일의 자리에 올 수 있는 수는 0, 4의 2가지이고, 그 각각에 대하여 십의 자리에 올 수 있는 수는 일의 자리의 수와 백의 자리의 수를 제외한 나머지 4개의 수이므로 이 경우 세 자리의 자연수의 개수는

$2\times4=8$

········· ❸

(i), (ii)가 동시에 일어나지 않으므로 구하는 300보다 작은 짝수의 개수는

$12+8=20$

········· ❹

답 20

단계	채점 기준	비율
❶	백의 자리에 올 수 있는 수를 구한 경우	20 %
❷	백의 자리의 수가 1인 세 자리의 짝수의 개수를 구한 경우	30 %
❸	백의 자리의 수가 2인 세 자리의 짝수의 개수를 구한 경우	30 %
❹	300보다 작은 짝수의 개수를 구한 경우	20 %

[다른 풀이]

일의 자리에 올 수 있는 수는 0, 2, 4이다.

········· ❶

(i) 일의 자리의 수가 0인 경우

백의 자리에 올 수 있는 수는 1, 2의 2가지이고, 그 각각에 대하여 십의 자리에 올 수 있는 수는 일의 자리의 수와 백의 자리의 수를 제외한 나머지 4개의 수이므로 이 경우 세 자리의 자연수의 개수는

$2\times4=8$

········· ❷

(ii) 일의 자리의 수가 2인 경우

백의 자리에 올 수 있는 수는 1의 1가지이고, 그 각각에 대하여 십의 자리에 올 수 있는 수는 일의 자리의 수와 백의 자리의 수를 제외한 나머지 4개의 수이므로 이 경우 세 자리의 자연수의 개수는

$1\times4=4$

········· ❸

(iii) 일의 자리의 수가 4인 경우

백의 자리에 올 수 있는 수는 1, 2의 2가지이고, 그 각각에 대하여 십의 자리에 올 수 있는 수는 일의 자리의 수와 백의 자리의 수를 제외한 나머지 4개의 수이므로 이 경우 세 자리의 자연수의 개수는

$2\times4=8$

········· ❹

(i), (ii), (iii)에서 어느 두 사건도 동시에 일어나지 않으므로 구하는 300보다 작은 짝수의 개수는

$8+4+8=20$

········· ❺

단계	채점 기준	비율
❶	일의 자리에 올 수 있는 수를 구한 경우	20 %
❷	일의 자리의 수가 0인 세 자리의 자연수의 개수를 구한 경우	20 %
❸	일의 자리의 수가 2인 세 자리의 자연수의 개수를 구한 경우	20 %
❹	일의 자리의 수가 4인 세 자리의 자연수의 개수를 구한 경우	20 %
❺	300보다 작은 짝수의 개수를 구한 경우	20 %

23 조건 (가)에서 abc는 홀수이므로 세 자연수 a, b, c는 모두 홀수이다. 조건 (나)에서 a, b는 16보다 작은 홀수이므로 순서쌍 (a, b)의 개수는 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15의 8개의 홀수 중에서 서로 다른 2개를 택하는 경우의 수이므로

$_8C_2=\frac{8\times7}{2\times1}=28$

········· ❶

그 각각에 대하여 c는 16보다 큰 홀수이므로 c가 될 수 있는 수는 17, 19의 2가지이다.

········· ❷

따라서 구하는 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$28\times2=56$

········· ❸

답 56

단계	채점 기준	비율
❶	순서쌍 (a, b)의 개수를 구한 경우	50 %
❷	c의 개수를 구한 경우	30 %
❸	순서쌍 (a, b, c)의 개수를 구한 경우	20 %

내신 고득점 도전 문제

본문 84~87쪽

24 7	**25** ④	**26** 110	**27** 324	**28** 400
29 106	**30** 540	**31** 67	**32** 144	**33** 300
34 ⑤	**35** 480	**36** 720	**37** 36	**38** ①
39 6	**40** 13	**41** 300	**42** 40	**43** ①
44 48	**45** 100			

24 2장, 3장, 4장씩 묶은 묶음의 개수를 각각 a, b, c라 하면
$2a+3b+4c=12$
(i) $c=0$일 때
$2a+3b=12$를 만족시키는 순서쌍 (a, b)의 개수는
$(0, 4)$, $(3, 2)$, $(6, 0)$의 3
(ii) $c=1$일 때
$2a+3b=8$을 만족시키는 순서쌍 (a, b)의 개수는
$(1, 2)$, $(4, 0)$의 2
(iii) $c=2$일 때
$2a+3b=4$를 만족시키는 순서쌍 (a, b)의 개수는
$(2, 0)$의 1
(iv) $c=3$일 때
$2a+3b=0$을 만족시키는 순서쌍 (a, b)의 개수는
$(0, 0)$의 1
(i)~(iv)에서 어느 두 사건도 동시에 일어나지 않으므로 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여
$3+2+1+1=7$ 답 7

25 이차함수 $y=x^2$의 그래프와 직선 $y=2ax-b$가 만나는 점의 개수가 2이려면 x에 대한 이차방정식 $x^2=2ax-b$, 즉 $x^2-2ax+b=0$의 판별식을 D라 할 때, $\frac{D}{4}=a^2-b>0$이어야 한다.
즉, $b<a^2$
(i) $a=1$일 때
$b<1$을 만족시키는 자연수 b는 존재하지 않으므로 순서쌍 (a, b)의 개수는 0이다.
(ii) $a=2$일 때
$b<4$이므로 순서쌍 (a, b)의 개수는 $(2, 1)$, $(2, 2)$, $(2, 3)$의 3이다.
(iii) $a=3$, 4, 5, 6일 때
$b<a^2$이므로 순서쌍 (a, b)의 개수는 $(a, 1)$, $(a, 2)$, $(a, 3)$, $(a, 4)$, $(a, 5)$, $(a, 6)$에서 $4\times6=24$
(i), (ii), (iii)에서 어느 두 사건도 동시에 일어나지 않으므로 구하는 모든 순서쌍 (a, b)의 개수는 합의 법칙에 의하여
$3+24=27$ 답 ④

26 조건 (가)에서 세 자리의 자연수가 5의 배수이려면 일의 자리의 수가 0 또는 5이어야 한다.
(i) 일의 자리의 수가 0인 경우
ⓐ 십의 자리의 수가 홀수인 경우
십의 자리에 올 수 있는 수는 1, 3, 5, 7, 9의 5가지이고, 그 각각에 대하여 백의 자리에 올 수 있는 수는 2, 4, 6, 8의 4가지이므로 이 경우 세 자리의 자연수의 개수는
$5\times4=20$
ⓑ 십의 자리의 수가 0 또는 짝수인 경우
십의 자리에 올 수 있는 수는 0, 2, 4, 6, 8의 5가지이고, 그 각각에 대하여 백의 자리에 올 수 있는 수는 1부터 9까지의 9가지이므로 이 경우 세 자리의 자연수의 개수는
$5\times9=45$
ⓐ, ⓑ에 의하여 일의 자리의 수가 0인 세 자리의 자연수의 개수는
$20+45=65$
(ii) 일의 자리의 수가 5인 경우
십의 자리에 올 수 있는 수는 0, 2, 4, 6, 8의 5가지이고, 그 각각에 대하여 백의 자리에 올 수 있는 수는 1부터 9까지의 9가지이므로 일의 자리의 수가 5인 세 자리의 자연수의 개수는
$5\times9=45$
(i), (ii)에 의하여 구하는 세 자리의 자연수의 개수는
$65+45=110$ 답 110

27 조건 (가)에서 2개의 수의 일의 자리의 수는 0, 5가 아니고, 조건 (나)에서 2개의 수의 일의 자리의 수를 합하면 10이 되어야 한다.
1부터 9까지의 자연수 중에서 서로 다른 두 수의 합이 10이 되는 경우의 수는 $(1, 9)$, $(2, 8)$, $(3, 7)$, $(4, 6)$의 4이다.
각각의 경우 두 자리의 자연수가 되려면 십의 자리에 올 수 있는 수가 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9이어야 하므로 구하는 경우의 수는
$4\times9\times9=324$ 답 324

28 (i) ab는 홀수, c는 짝수인 경우
a의 값이 될 수 있는 수는 1, 3, 5, 7, 9의 5가지이고 b의 값이 될 수 있는 수는 1, 3, 5, 7, 9 중에서 a의 값을 제외한 4가지이므로 ab가 홀수인 경우의 수는 $5\times4=20$
그 각각에 대하여 c가 짝수인 경우의 수는
2, 4, 6, 8, 10의 5
따라서 ab는 홀수, c는 짝수인 순서쌍 (a, b, c)의 개수는
$20\times5=100$
(ii) ab는 짝수, c는 홀수인 경우
ⓐ a, b가 모두 짝수인 경우
a의 값이 될 수 있는 수는 2, 4, 6, 8, 10의 5가지이고 b의 값이 될 수 있는 수는 2, 4, 6, 8, 10 중에서 a의 값을 제외한 4가지이므로 a, b가 모두 짝수인 경우의 수는
$5\times4=20$
그 각각에 대하여 c가 홀수인 경우의 수는
1, 3, 5, 7, 9의 5
따라서 이 경우 순서쌍 (a, b, c)의 개수는
$20\times5=100$

ⓑ a, b 중에서 하나는 홀수이고 다른 하나는 짝수인 경우
그 경우의 수는 $2\times5\times5=50$
그 각각에 대하여 c가 홀수인 경우의 수는 a 또는 b의 홀수를 제외한 나머지 홀수 4가지이므로 이 경우 순서쌍 (a, b, c)의 개수는
$50\times4=200$
ⓐ, ⓑ에 의하여 ab는 짝수, c는 홀수인 순서쌍 (a, b, c)의 개수는
$100+200=300$
(i), (ii)에 의하여 구하는 순서쌍 (a, b, c)의 개수는
$100+300=400$ 답 400

29 (i) 백의 자리의 수가 1 또는 2 또는 4인 경우
백의 자리에 올 수 있는 수는 1, 2, 4의 3가지이고, 그 각각에 대하여 일의 자리에 올 수 있는 수는 1, 2, 4 중에서 백의 자리의 수를 제외한 2가지이다.
그 각각에 대하여 십의 자리에 올 수 있는 수는 백의 자리의 수와 일의 자리의 수를 제외한 나머지 8개의 수이다.
따라서 이때의 세 자리의 자연수의 개수는
$3\times2\times8=48$
(ii) 백의 자리의 수가 3 또는 5인 경우
백의 자리에 올 수 있는 수는 3, 5의 2가지이고, 그 각각에 대하여 일의 자리에 올 수 있는 수는 1, 2, 4의 3가지이다.
그 각각에 대하여 십의 자리에 올 수 있는 수는 백의 자리의 수와 일의 자리의 수를 제외한 나머지 8개의 수이다.
따라서 이때의 세 자리의 자연수의 개수는
$2\times3\times8=48$
(iii) 백의 자리의 수가 6인 경우
백의 자리에 올 수 있는 수는 6의 1가지이고, 그 각각에 대하여 일의 자리의 수가 1, 2인 경우 십의 자리의 수는 0, 1, 2, 3 중에서 일의 자리의 수를 제외한 3가지이고, 일의 자리의 수가 4인 경우 십의 자리의 수는 0, 1, 2, 3의 4가지이다.
따라서 이때의 세 자리의 자연수의 개수는
$1\times2\times3+1\times1\times4=6+4=10$
(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 세 자리의 자연수의 개수는
$48+48+10=106$ 답 106

30 A 영역에 칠하는 색을 정하는 경우의 수는 5
그 각각에 대하여 B 영역에 칠하는 색을 정하는 경우의 수는 A 영역에 칠한 색을 제외한 4
그 각각에 대하여 C 영역에 칠하는 색을 정하는 경우의 수는 A, B 영역에 칠한 색을 제외한 3
그 각각에 대하여 D 영역에 칠하는 색을 정하는 경우의 수는 A, C 영역에 칠한 색을 제외한 3
그 각각에 대하여 E 영역에 칠하는 색을 정하는 경우의 수는 C, D 영역에 칠한 색을 제외한 3
따라서 구하는 경우의 수는
$5\times4\times3\times3\times3=540$ 답 540

31 1부터 10까지의 자연수 중에서 3의 배수의 개수는 3, 6, 9의 3,
3으로 나누었을 때의 나머지가 1인 수의 개수는 1, 4, 7, 10의 4,
3으로 나누었을 때의 나머지가 2인 수의 개수는 2, 5, 8의 3
1부터 20까지의 자연수 중에서 3의 배수의 개수는 3, 6, 9, 12, 15, 18의 6,
3으로 나누었을 때의 나머지가 1인 수의 개수는 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19의 7,
3으로 나누었을 때의 나머지가 2인 수의 개수는 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20의 7
이때 $\frac{a+b}{3}$가 자연수가 되려면 $a+b$가 3의 배수이어야 한다.
(i) a와 b 모두 3의 배수인 경우
$3\times6=18$
(ii) a는 3으로 나누었을 때의 나머지가 1인 수이고, b는 3으로 나누었을 때의 나머지가 2인 수인 경우
$4\times7=28$
(iii) a는 3으로 나누었을 때의 나머지가 2인 수이고, b는 3으로 나누었을 때의 나머지가 1인 수인 경우
$3\times7=21$
(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 경우의 수는
$18+28+21=67$ 답 67

32 1, 2, 3, 4의 4개의 숫자 중에서 서로 다른 2개를 뽑아 일렬로 나열하는 경우의 수는 ${}_4P_2=4\times3=12$
그 각각에 대하여 2개의 문자 사이에 2개의 숫자를 넣은 것을 한 묶음으로 하여 3개를 나열하는 경우의 수는
$3!=3\times2\times1=6$
그 각각에 대하여 묶음 안에 있는 2개의 문자의 자리를 서로 바꾸는 경우의 수는
$2!=2\times1=2$
따라서 구하는 경우의 수는
$12\times6\times2=144$ 답 144

33 (i) 각 자리의 수 중에서 짝수의 개수가 1인 경우
짝수의 자리를 정하는 경우의 수는 3이고, 그 각각에 대하여 그 자리에 올 수 있는 짝수는 2, 4, 6, 8의 4가지
그 각각에 대하여 나머지 자리의 수는 모두 홀수이므로 1, 3, 5, 7, 9의 5개의 수 중에서 서로 다른 2개를 뽑아 일렬로 나열하는 경우의 수는 ${}_5P_2=5\times4=20$
따라서 각 자리의 수 중에서 짝수의 개수가 1인 자연수의 개수는
$3\times4\times20=240$
(ii) 각 자리의 수가 모두 홀수인 경우
1, 3, 5, 7, 9의 5개의 수 중에서 서로 다른 3개를 뽑아 일렬로 나열하는 경우의 수이므로
${}_5P_3=5\times4\times3=60$
따라서 각 자리의 수가 모두 홀수인 자연수의 개수는 60이다.
(i), (ii)에 의하여 구하는 자연수의 개수는
$240+60=300$ 답 300

34 7명의 학생을 모두 일렬로 세우는 경우의 수는 $7!$이다.
여학생 3명을 모두 이웃하지 않게 세우는 경우의 수는 남학생 4명을 일렬로 세우고 남학생 4명 사이와 양 끝의 ✓로 표시된 5개의 자리 중에서 3

개의 자리에 여학생을 세우는 경우의 수이므로
$4!\times{}_5P_3=4!\times5\times4\times3=2\times6!$

✓	남	✓	남	✓	남	✓	남	✓

따라서 구하는 경우의 수는
$7!-2\times6!=(7-2)\times6!=5\times6!=k\times6!$
이므로
$k=5$ 답 ⑤

35 (i) 홀수, 짝수, 홀수, 짝수인 경우
1, 3, 5, 7, 9의 5개의 홀수 중에서 서로 다른 2개를 뽑아 일렬로 나열하고 그 각각에 대하여 2, 4, 6, 8의 4개의 짝수 중에서 서로 다른 2개를 뽑아 일렬로 나열하는 경우의 수는
${}_5P_2\times{}_4P_2=5\times4\times4\times3=240$
(ii) 짝수, 홀수, 짝수, 홀수인 경우
2, 4, 6, 8의 4개의 짝수 중에서 서로 다른 2개를 뽑아 일렬로 나열하고 그 각각에 대하여 1, 3, 5, 7, 9의 5개의 홀수 중에서 서로 다른 2개를 뽑아 일렬로 나열하는 경우의 수는
${}_4P_2\times{}_5P_2=4\times3\times5\times4=240$
(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는
$240+240=480$ 답 480

36 1부터 7까지의 자연수가 하나씩 적힌 7장의 카드 중에서 서로 다른 4장의 카드를 택해 일렬로 나열하는 경우의 수는
${}_7P_4=7\times6\times5\times4=840$
양 쪽 끝에 짝수가 적힌 카드가 오는 경우의 수는 2, 4, 6이 하나씩 적힌 3장의 카드 중에서 서로 다른 2장을 택해 일렬로 나열하고 그 각각에 대하여 나머지 5장의 카드 중에서 서로 다른 2장을 택해 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로
${}_3P_2\times{}_5P_2=3\times2\times5\times4=120$
따라서 구하는 경우의 수는
$840-120=720$ 답 720

37 (i) 백의 자리의 수가 홀수인 경우
조건 (가)에서 십의 자리의 수는 3 또는 6이다.
ⓐ 십의 자리의 수가 3인 경우
조건 (다)에서 각 자리의 수의 합이 홀수이므로 일의 자리의 수는 홀수이다.
백의 자리의 수와 일의 자리의 수가 모두 홀수인 세 자리의 자연수의 개수는 1, 5, 7 중에서 서로 다른 2개를 뽑아 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로
${}_3P_2=3\times2=6$
ⓑ 십의 자리의 수가 6인 경우
백의 자리에 올 수 있는 수는 1, 3, 5, 7의 4가지이고, 그 각각에 대하여 일의 자리에 올 수 있는 수는 6을 제외한 나머지 2개의 짝수 중 한 개이므로 이 경우의 자연수의 개수는
$4\times2=8$
ⓐ, ⓑ에서 백의 자리의 수가 홀수인 자연수의 개수는
$6+8=14$
(ii) 백의 자리의 수가 짝수인 경우
ⓒ 십의 자리의 수가 1인 경우
조건 (다)에서 각 자리의 수의 합이 홀수이므로 일의 자리의 수는 짝수이다.
백의 자리의 수와 일의 자리의 수가 모두 짝수인 세 자리의 자연수의 개수는 2, 4, 6 중에서 서로 다른 2개를 뽑아 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로
${}_3P_2=3\times2=6$
ⓓ 십의 자리의 수가 2 또는 4인 경우
십의 자리에 올 수 있는 수는 2, 4의 2가지이고, 그 각각에 대하여 백의 자리에 올 수 있는 수는 2, 4, 6 중에서 십의 자리의 수를 제외한 2가지이고, 그 각각에 대하여 일의 자리에 올 수 있는 수는 1, 3, 5, 7의 4가지이므로 이 경우의 자연수의 개수는
$2\times2\times4=16$
ⓒ, ⓓ에서 백의 자리의 수가 짝수인 자연수의 개수는
$6+16=22$
(i), (ii)에 의하여 구하는 자연수의 개수는
$14+22=36$ 답 36

38 1부터 9까지의 자연수 중에서 서로 다른 4개의 수를 택하는 경우의 수는
${}_9C_4=\dfrac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2\times1}=126$
선택한 4개의 수의 곱이 짝수가 되려면 4개의 수 중에서 적어도 1개 이상은 짝수이어야 한다.
선택한 4개의 수가 모두 홀수인 경우의 수는 1, 3, 5, 7, 9의 5개 홀수 중에서 서로 다른 4개를 택하는 경우의 수이므로
${}_5C_4={}_5C_1=5$
따라서 구하는 경우의 수는
$126-5=121$ 답 ①

39 여학생 $(16-n)$명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수가 남학생 n명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수의 3배이므로
${}_{16-n}C_2=3\times{}_nC_2$에서
$\dfrac{(16-n)(15-n)}{2\times1}=3\times\dfrac{n(n-1)}{2\times1}$
$(16-n)(15-n)=3n(n-1)$
$240-31n+n^2=3n^2-3n$
$n^2+14n-120=0$
$(n+20)(n-6)=0$
이때 n은 $2\le n\le14$인 자연수이므로
$n=6$ 답 6

40 ${}_8C_r={}_8C_{2r-1}$에서
$r=2r-1$ 또는 $8-r=2r-1$
(i) $r=2r-1$일 때
$r=2r-1$에서 $r=1$
${}_nC_1-{}_{n-2}C_1=4$에서 $n-(n-2)=4$
이므로 등식이 성립하지 않는다.
(ii) $8-r=2r-1$일 때
$8-r=2r-1$에서 $3r=9$, $r=3$

즉, ${}_{n}C_3-{}_{n-2}C_3=4^3$이므로

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{3\times2\times1}-\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{3\times2\times1}=64$$

$n(n-1)(n-2)-(n-2)(n-3)(n-4)=64\times6$

$(n-2)(6n-12)=64\times6$

$(n-2)^2=64$

이때 n은 자연수이므로

$n-2=8$

$n=10$

(i), (ii)에 의하여 $n=10$, $r=3$이므로

$n+r=10+3=13$

답 13

41 택한 6장의 카드 중에서 짝수가 적힌 4장의 카드는 모두 포함되어야 하므로 홀수가 적힌 5장의 카드 중에서 서로 다른 2장을 택해야 한다.

그 경우의 수는

$${}_{5}C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$$

그 각각에 대하여 일렬로 나열한 6개의 자리 중에서 짝수가 들어갈 4개의 자리를 뽑는 경우의 수는

$${}_{6}C_4={}_{6}C_2=\frac{6\times5}{2\times1}=15$$

그 각각에 대하여 홀수가 적힌 2장의 카드를 나열하는 경우의 수는

$2!=2\times1=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$10\times15\times2=300$

답 300

42 1부터 9까지의 자연수 중에서 택한 6개의 수의 합이 짝수가 되는 경우는 다음과 같다.

(i) 짝수의 개수가 4, 홀수의 개수가 2인 경우

2, 4, 6, 8의 4개의 짝수 중에서 서로 다른 4개의 수를 택하고 그 각각에 대하여 1, 3, 5, 7, 9의 5개의 홀수 중에서 서로 다른 2개의 수를 택하는 경우의 수는

$${}_{4}C_4\times{}_{5}C_2=1\times\frac{5\times4}{2\times1}=10$$

(ii) 짝수의 개수가 2, 홀수의 개수가 4인 경우

2, 4, 6, 8의 4개의 짝수 중에서 서로 다른 2개의 수를 택하고 그 각각에 대하여 1, 3, 5, 7, 9의 5개의 홀수 중에서 서로 다른 4개의 수를 택하는 경우의 수는

$${}_{4}C_2\times{}_{5}C_4={}_{4}C_2\times{}_{5}C_1=\frac{4\times3}{2\times1}\times5=30$$

(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$10+30=40$

답 40

[다른 풀이]

1부터 9까지의 합은 45로 홀수이므로 택한 6개의 수의 합이 짝수가 되려면 선택되지 않은 나머지 3개의 수의 합은 홀수이어야 한다.

(i) 남은 3개의 수가 모두 홀수인 경우

1, 3, 5, 7, 9의 5개의 홀수 중에서 서로 다른 3개의 수를 택하는 경우의 수는

$${}_{5}C_3={}_{5}C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$$

(ii) 남은 3개의 수가 홀수 1개, 짝수 2개인 경우

1, 3, 5, 7, 9의 5개의 홀수 중에서 1개를 택하고, 그 각각에 대하여 2, 4, 6, 8의 4개의 짝수 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_{5}C_1\times{}_{4}C_2=5\times\frac{4\times3}{2\times1}=30$$

(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$10+30=40$

43 각 조가 모두 서로 다른 학년의 학생으로 구성되어야 하므로 1학년 학생 3명을 1명씩 3개의 조로 나눈다. 이때 나머지 한 조를 2학년 학생 1명과 3학년 학생 1명으로 구성해야 하므로 그 경우의 수는

${}_{3}C_1\times{}_{2}C_1=3\times2=6$

그 각각에 대하여 남은 2학년 학생 2명과 3학년 학생 1명을 1학년 학생과 짝을 지어주는 경우의 수는 이 3명을 일렬로 세우는 경우의 수와 같으므로

$3!=3\times2\times1=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times6=36$

답 ①

44 빨간색 카드 3장을 가질 3명의 학생을 선택하는 경우의 수는

${}_{4}C_3={}_{4}C_1=4$

.... ❶

그 각각에 대하여 초록색 카드를 가질 학생을 정하는 경우를 다음과 같이 나눌 수 있다.

(i) 빨간색 카드를 갖지 않은 학생이 초록색 카드를 가지는 경우

빨간색 카드를 갖지 않은 학생이 초록색 카드를 가지는 경우의 수는 1이고, 그 각각에 대하여 4명의 학생 중에서 파란색 카드를 가질 2명의 학생을 택하는 경우의 수는

$${}_{4}C_2=\frac{4\times3}{2\times1}=6$$

그 각각에 대하여 나머지 2명의 학생이 각각 노란색 카드 1장씩을 갖게 되므로 그 경우의 수는 1이다.

따라서 이때의 경우의 수는

$1\times6\times1=6$

.... ❷

(ii) 빨간색 카드를 가진 학생이 초록색 카드를 가지는 경우

빨간색 카드를 가진 학생이 초록색 카드를 가지는 경우의 수는 빨간색 카드를 가진 3명의 학생 중에서 1명을 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_{3}C_1=3$

그 각각에 대하여 아무 카드도 받지 못 한 학생은 파란색 카드와 노란색 카드를 각각 한 장씩 받아야 하므로 경우의 수는 1

그 각각에 대하여 남은 파란색 카드 1장과 노란색 카드 1장을 나누는 경우의 수는 2장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$2!=2$

따라서 이때의 경우의 수는

$3\times1\times2=6$

.... ❸

(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$4\times(6+6)=48$

.... ❹

답 48

단계	채점 기준	비율
❶	빨간색 카드를 갖는 학생을 정하는 경우의 수를 구한 경우	20 %
❷	빨간색 카드를 갖지 않은 학생이 초록색 카드를 갖도록 카드를 나누어 갖는 경우의 수를 구한 경우	30 %
❸	빨간색 카드를 가진 학생이 초록색 카드를 갖도록 카드를 나누어 갖는 경우의 수를 구한 경우	30 %
❹	2장의 카드의 색이 모두 다르도록 카드를 나누어 갖는 경우의 수를 구한 경우	20 %

45 1부터 5까지의 5개의 자연수 중에서 서로 다른 3개를 뽑아 크기순으로 작은 수부터 x_1, x_2, x_3을 정하는 경우의 수는

${}_5C_3={}_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$

.... ❶

그 각각에 대하여 5부터 9까지의 5개의 자연수 중에서 서로 다른 2개를 뽑아 크기순으로 작은 수부터 x_4, x_5를 정하는 경우의 수는

${}_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$

.... ❷

따라서 구하는 모든 순서쌍 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$의 개수는

$10\times10=100$

.... ❸

답 100

단계	채점 기준	비율
❶	x_1, x_2, x_3을 정하는 경우의 수를 구한 경우	40 %
❷	x_4, x_5를 정하는 경우의 수를 구한 경우	40 %
❸	주어진 조건을 만족시키는 순서쌍의 개수를 구한 경우	20 %

변별력을 만드는 1등급 문제

본문 88~90쪽

46 4	**47** 5	**48** 44	**49** 20	**50** ③
51 7	**52** 8	**53** 84	**54** 24	**55** 184
56 624	**57** ②	**58** 10	**59** 115	**60** 168

46

밑을 2로 통일시켜 방정식을 세운다.

세 자연수 a, b, c에 대하여 등식 $2^a\times8^b\times64^c=512^2$을 만족시키는 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수를 구하시오. 4

Step 1 a, b, c에 대한 방정식 세우기

$2^a\times8^b\times64^c=512^2$에서

$2^a\times(2^3)^b\times(2^6)^c=(2^9)^2$

$2^a\times2^{3b}\times2^{6c}=2^{18}$, $2^{a+3b+6c}=2^{18}$

$a+3b+6c=18$

Step 2 c의 값에 따른 각각의 순서쌍 (a, b, c)의 개수 구하기

(i) $c=1$일 때

$a+3b=12$를 만족시키는 순서쌍 (a, b)는 $(9, 1)$, $(6, 2)$, $(3, 3)$의 3개이므로 순서쌍 (a, b, c)의 개수도 3이다.

(ii) $c=2$일 때

$a+3b=6$을 만족시키는 순서쌍 (a, b)는 $(3, 1)$의 1개이므로 순서쌍 (a, b, c)의 개수도 1이다.

(iii) $c\geq3$일 때

$a+3b+6c=18$을 만족시키는 자연수 a, b는 존재하지 않으므로 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 0이다.

Step 3 조건에 맞는 순서쌍의 개수 구하기

(i), (ii), (iii)에서 어느 두 사건도 동시에 일어나지 않으므로 구하는 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 합의 법칙에 의하여

$3+1=4$

답 4

47

각 묶음의 개수를 a, b, c라 놓고 방정식을 세운다.

자연수 m에 대하여 같은 종류의 $6m$장의 종이를 2장 또는 3장 또는 6장씩 묶음으로 나누는 경우의 수가 21일 때, m의 값을 구하시오. (단, 종이를 묶은 후에 남은 종이는 없고, 각 묶음이 없는 경우도 존재한다. 또한 같은 종류의 종이끼리는 서로 구별하지 않는다.) 5

Step 1 각 묶음의 개수를 a, b, c로 놓고 방정식 세우기

2장, 3장, 6장씩 묶은 묶음의 개수를 각각 a, b, c (a, b, c는 음이 아닌 정수)라 하면 $2a+3b+6c=6m$

Step 2 순서쌍 (a, b, c)의 개수 구하기

(i) $c=0$일 때, $2a+3b=6m$

a, b는 음이 아닌 정수이고, m은 자연수이므로

$a=3p$, $b=2q$ (p, q는 음이 아닌 정수)

로 놓을 수 있다.

$6p+6q=6m$

$p+q=m$

$p+q=m$을 만족시키는 순서쌍 (p, q)의 개수는

$(0, m)$, $(1, m-1)$, $\cdots$, $(m, 0)$의 $m+1$

즉, 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 $m+1$

(ii) $c=1, 2, 3, \cdots, m-1$일 때, $2a+3b=6(m-c)$

a, b, c는 음이 아닌 정수이고, m은 자연수이므로

$a=3p$, $b=2q$ (p, q는 음이 아닌 정수)

로 놓을 수 있다.

$6p+6q=6(m-c)$

$p+q=m-c$

$p+q=m-c$를 만족시키는 순서쌍 (p, q)의 개수는

$(0, m-c)$, $(1, m-c-1)$, $\cdots$, $(m-c, 0)$의 $m-c+1$

즉, 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$m+(m-1)+\cdots+2$

(iii) $c=m$일 때

$2a+3b=0$을 만족시키는 순서쌍 (a, b)의 개수는

$(0, 0)$의 1

즉, 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 1

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 어느 두 사건도 동시에 일어나지 않으므로 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여

$(m+1)+\{m+(m-1)+\cdots+2\}+1=21$

Step 3 m의 값 구하기

따라서 $1+2+3+4+5+6=21$이므로

$m+1=6$에서 $m=5$ 답 5

48

$a\neq1,\ b\neq2,\ c\neq3,\ d\neq4,\ e\neq5$

1부터 5까지의 자연수가 하나씩 적힌 5개의 공이 들어 있는 상자에서 공을 한 개씩 모두 꺼낼 때, 꺼낸 공에 적힌 수를 차례로 a, b, c, d, e라 하자. $(a-1)(b-2)(c-3)(d-4)(e-5)\neq0$이 되는 경우의 수를 구하시오. (단, 꺼낸 공은 다시 상자에 넣지 않는다.) 44

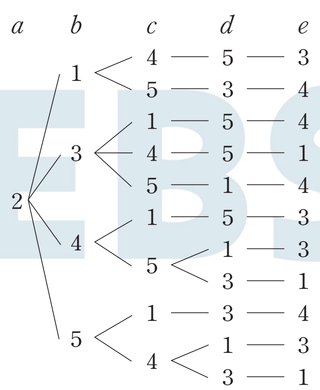
Step 1 $(a-1)(b-2)(c-3)(d-4)(e-5)\neq0$을 만족시키는 경우 생각하기

$(a-1)(b-2)(c-3)(d-4)(e-5)\neq0$이 되려면

$a\neq1,\ b\neq2,\ c\neq3,\ d\neq4,\ e\neq5$를 동시에 만족시켜야 한다.

Step 2 $a=2$인 경우의 조건을 만족시키는 수형도 그리기

$a=2$인 경우, 조건을 만족시키는 수형도를 그려 보면 다음과 같다.



$a=2$일 때, 조건을 만족시키는 경우의 수는 11이다.

Step 3 조건을 만족시키는 경우의 수 구하기

마찬가지로 a가 3, 4, 5일 때의 경우의 수도 각각 11이다.

따라서 구하는 경우의 수는

$11\times4=44$ 답 44

49

a와 b는 $1\le a\le6$, $1\le b\le6$인 자연수이다.

서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던져서 나오는 눈의 수를 각각 a, b라 하자. 부등식 $10\le 2a+3b\le20$을 만족시키는 모든 순서쌍 (a, b)의 개수를 구하시오. 20

Step 1 각 경우의 순서쌍의 개수 구하기

(ⅰ) $b=1$일 때, $7\le2a\le17$

a는 6 이하의 자연수이므로 $4\le a\le6$

따라서 순서쌍 (a, b)의 개수는 3

(ⅱ) $b=2$일 때, $4\le2a\le14$

a는 6 이하의 자연수이므로 $2\le a\le6$

따라서 순서쌍 (a, b)의 개수는 5

(ⅲ) $b=3$일 때, $1\le2a\le11$

a는 6 이하의 자연수이므로 $1\le a\le5$

따라서 순서쌍 (a, b)의 개수는 5

(ⅳ) $b=4$일 때, $-2\le2a\le8$

a는 6 이하의 자연수이므로 $1\le a\le4$

따라서 순서쌍 (a, b)의 개수는 4

(ⅴ) $b=5$일 때, $-5\le2a\le5$

a는 6 이하의 자연수이므로 $1\le a\le2$

따라서 순서쌍 (a, b)의 개수는 2

(ⅵ) $b=6$일 때, $-8\le2a\le2$

a는 6 이하의 자연수이므로 $a=1$

따라서 순서쌍 (a, b)의 개수는 1

Step 2 주어진 조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b)의 개수 구하기

(ⅰ)~(ⅵ)에서 어느 두 사건도 동시에 일어나지 않으므로 구하는 순서쌍 (a, b)의 개수는 합의 법칙에 의하여

$3+5+5+4+2+1=20$ 답 20

50

이차방정식의 판별식 D가 $D>0$이다.

서로 다른 세 개의 주사위를 동시에 던져서 나오는 눈의 수를 각각 a, b, c라 하자. x에 대한 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는?

① 36 ② 37 ✓③ 38 ④ 39 ⑤ 40

Step 1 이차방정식의 판별식을 이용하여 식 구하기

x에 대한 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 하면 이 이차방정식의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되려면 $D>0$이어야 한다.

즉, $D=b^2-4ac>0$에서 $b^2>4ac$

Step 2 부등식 $b^2>4ac$를 만족시키는 순서쌍 (a, b, c)의 개수 구하기

(ⅰ) $b=1$일 때

$4ac<1$을 만족시키는 6 이하의 자연수 a, c는 존재하지 않으므로 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 0이다.

(ⅱ) $b=2$일 때

$4ac<4$에서 $ac<1$

이 부등식을 만족시키는 6 이하의 자연수 a, c는 존재하지 않으므로 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 0이다.

(ⅲ) $b=3$일 때

$4ac<9$에서 $ac<\frac{9}{4}$

이 부등식을 만족시키는 순서쌍 (a, c)의 개수는

$(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$의 3이므로 순서쌍 (a, b, c)의 개수도 3이다.

(ⅳ) $b=4$일 때

$4ac<16$에서 $ac<4$

이 부등식을 만족시키는 순서쌍 (a, c)의 개수는

$(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 1)$, $(3, 1)$의 5이므로 순서쌍 (a, b, c)의 개수도 5이다.

(ⅴ) $b=5$일 때

$4ac<25$에서 $ac<\dfrac{25}{4}$

이 부등식을 만족시키는 순서쌍 (a, c)의 개수는

$(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$, $(1, 5)$, $(1, 6)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 1)$, $(3, 2)$, $(4, 1)$, $(5, 1)$, $(6, 1)$의 14이므로 순서쌍 (a, b, c)의 개수도 14이다.

(vi) $b=6$일 때

$4ac<36$에서 $ac<9$

이 부등식을 만족시키는 순서쌍 (a, c)의 개수는

$(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$, $(1, 5)$, $(1, 6)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$, $(2, 3)$, $(2, 4)$, $(3, 1)$, $(3, 2)$, $(4, 1)$, $(4, 2)$, $(5, 1)$, $(6, 1)$의 16이므로 순서쌍 (a, b, c)의 개수도 16이다.

(i)~(vi)에서 어느 두 사건도 동시에 일어나지 않으므로 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 합의 법칙에 의하여

$3+5+14+16=38$

답 ③

51

노란색, 빨간색, 파란색 구슬이 각각 9개씩 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 노란색 구슬을 한 번에 1개씩 x번 꺼내고, 빨간색 구슬을 한 번에 2개씩 y번 꺼내고, 파란색 구슬을 한 번에 3개씩 z번 꺼내려고 한다. 꺼낸 전체 구슬의 개수가 9 이하가 되도록 하는 세 자연수 x, y, z의 모든 순서쌍 (x, y, z)의 개수를 구하시오. (단, 같은 색 구슬끼리는 서로 구별하지 않고 꺼낸 구슬은 다시 주머니에 넣지 않는다.) 7

$x+2y+3z\le 9$

Step 1 조건을 만족시키는 부등식 세우기

꺼낸 노란색 구슬의 개수는 x, 꺼낸 빨간색 구슬의 개수는 $2y$, 꺼낸 파란색 구슬의 개수는 $3z$이므로

$x+2y+3z\le 9$ (단, x, y, z는 자연수)

Step 2 z의 값에 따라 순서쌍 (x, y, z)의 개수 구하기

(i) $z=1$일 때

$x+2y\le 6$

이 부등식을 만족시키는 순서쌍 (x, y)의 개수는

$(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 1)$, $(4, 1)$의 6이므로 순서쌍 (x, y, z)의 개수도 6이다.

(ii) $z=2$일 때

$x+2y\le 3$

이 부등식을 만족시키는 순서쌍 (x, y)의 개수는

$(1, 1)$의 1이므로 순서쌍 (x, y, z)의 개수도 1이다.

(iii) $z\ge 3$일 때

$x+2y+3z\le 9$를 만족시키는 세 자연수 x, y, z는 없다.

(i), (ii), (iii)에서 어느 두 사건도 동시에 일어나지 않으므로 구하는 모든 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 합의 법칙에 의하여

$6+1=7$

답 7

52

$30=2\times3\times5$이므로 눈의 수의 합은 2의 배수도 아니고 3의 배수도 아니고 5의 배수도 아니다.

한 개의 주사위를 두 번 던져서 나오는 두 눈의 수의 합이 30과 서로소가 되는 경우의 수를 구하시오. 8

Step 1 30과 서로소가 되는 경우 찾기

한 개의 주사위를 두 번 던져서 나오는 눈의 수를 차례로 a, b라 하자.

$2\le a+b\le 12$이고 $a+b$의 값이 30과 서로소이려면

$a+b=7$, $a+b=11$이어야 한다.

Step 2 $a+b=7$, $a+b=11$인 경우의 수 구하기

(i) $a+b=7$일 때

$a+b=7$을 만족시키는 순서쌍 (a, b)의 개수는

$(1, 6)$, $(2, 5)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$, $(5, 2)$, $(6, 1)$의 6이다.

(ii) $a+b=11$일 때

$a+b=11$을 만족시키는 순서쌍 (a, b)의 개수는

$(5, 6)$, $(6, 5)$의 2이다.

(i), (ii)가 동시에 일어나지 않으므로 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여

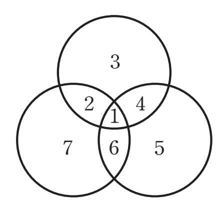
$6+2=8$

답 8

53

영역 1에 먼저 색을 칠하고 영역 2, 4, 6에 칠하는 색의 개수를 경우로 나눈다. 또는 수형도를 그려본다.

1부터 7까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 7개의 영역에 빨간색, 파란색, 노란색을 칠하려고 할 때, 다음 조건을 만족시키도록 색을 칠하는 경우의 수를 구하시오. 84



(가) 한 영역에는 한 가지 색만 칠한다.
(나) 이웃하는 영역은 다른 색으로 칠한다.

(단, 경계를 일부라도 공유하는 두 영역을 이웃한 영역이라 하고, 한 점만 공유하는 두 영역은 이웃하지 않는 것으로 한다. 예를 들어, 1이 적힌 영역과 이웃하는 영역은 2, 4, 6이 적힌 세 영역이다. 또한 색을 칠하는 순서는 고려하지 않는다.)

Step 1 영역 1에 색을 칠하는 경우의 수 구하기

영역 1에 색을 칠하는 경우의 수는 3이다.

Step 2 영역 2, 4, 6에 칠하는 색이 모두 같을 때의 경우의 수 구하기

(i) 영역 2, 4, 6에 칠하는 색이 모두 같은 경우

영역 2, 4, 6에 칠하는 색을 정하는 경우의 수는

${}_2C_1=2$

이고, 그 각각에 대하여 영역 3, 5, 7에 색을 칠하는 경우의 수는

${}_2C_1\times{}_2C_1\times{}_2C_1=2\times2\times2=8$

이므로 이때의 경우의 수는

$2\times8=16$

Step 3 영역 2, 4, 6에 칠하는 색의 개수가 2일 때의 경우의 수 구하기

(ii) 영역 2, 4, 6에 칠하는 색의 개수가 2인 경우

영역 2, 4, 6 중에서 다른 색이 칠해지는 영역을 택하고 그 색을 정하는 경우의 수는

${}_3C_1\times{}_2C_1=3\times2=6$

이고, 그 각각에 대하여 영역 3, 5, 7에 색을 칠하는 경우의 수는

${}_{2}C_{1}\times1\times1=2\times1\times1=2$

이므로 이때의 경우의 수는 $6\times2=12$

Step 4 조건을 만족시키는 경우의 수 구하기

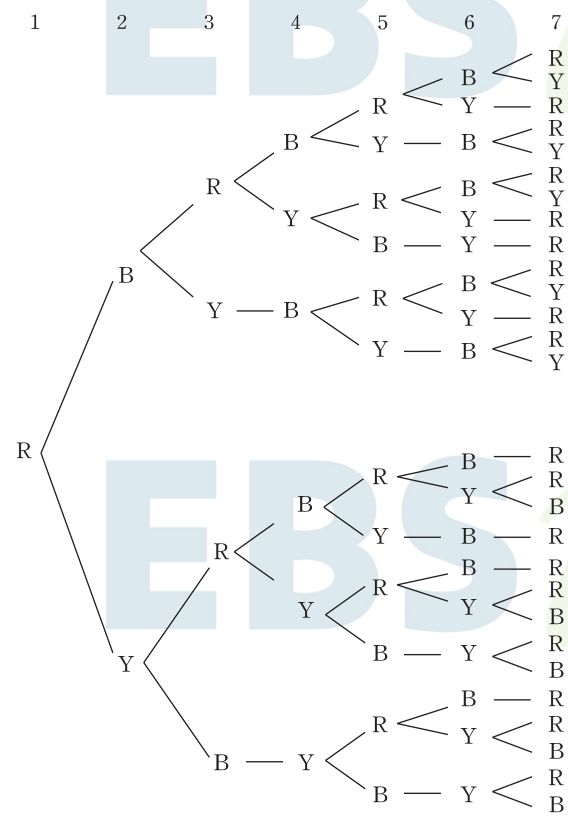
(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$3\times(16+12)=84$ 답 84

[다른 풀이]

Step 1 수형도 그리기

빨간색을 R, 파란색을 B, 노란색을 Y로 나타내어 영역 1에 빨간색을 칠할 경우의 수형도를 그리면 다음과 같이 그 경우의 수는 28이다.



Step 2 그린 수형도를 기본으로 전체 경우의 수 구하기

마찬가지로 영역 1에 파란색, 노란색을 칠할 때도 경우의 수가 28이므로 구하는 경우의 수는 $28\times3=84$

54

5개의 영역 A, B, C, D, E에 빨간색, 파란색, 노란색의 3가지의 색 중에서 전부 또는 일부를 사용하여 다음 조건을 만족시키도록 색을 칠하려고 한다. A 영역과 E 영역의 색이 다른 경우의 수를 p라 하고, A, B, C, D, E를 모두 색칠하는 데 사용한 색의 개수가 2인 경우의 수를 q라 할 때, $p-q$의 값을 구하시오. 24

조건을 만족시키는 수형도를 그려 본다.

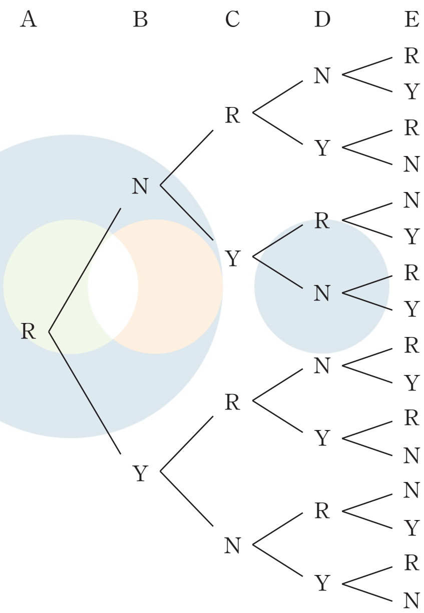
(단, 색을 칠하는 순서는 고려하지 않는다.)

A	B	C	D	E

(가) 한 영역에는 한 가지 색만 칠한다.
(나) 같은 색을 여러 번 사용할 수 있으나 이웃하는 영역은 다른 색으로 칠한다.

Step 1 수형도 그리기

빨간색을 R, 파란색을 N, 노란색을 Y로 나타내어 A 영역에 빨간색을 칠하는 경우의 수형도를 그리면 다음과 같다.



A 영역과 E 영역의 색이 다른 경우의 수가 10이고, A, B, C, D, E를 모두 색칠하는 데 사용한 색의 개수가 2인 경우의 수가 2이다.

Step 2 그린 수형도를 기본으로 전체 경우의 수 구하기

마찬가지로 A 영역이 파란색, 노란색인 경우도 A 영역과 E 영역의 색이 다른 경우의 수가 10, A, B, C, D, E를 모두 색칠하는 데 사용한 색의 개수가 2인 경우의 수가 2이므로

$p=10\times3=30$,

$q=2\times3=6$

따라서 $p-q=30-6=24$ 답 24

55

1부터 9까지의 자연수 중에서 서로 다른 3개의 수를 택해 일렬로 나열하여 세 자리의 자연수를 만들 때, 다음 조건을 만족시키는 자연수의 개수를 구하시오. 184

일의 자리의 수가 홀수인 경우와 짝수인 경우로 나누어 생각한다.

(가) 일의 자리의 수가 홀수이면 십의 자리의 수는 짝수이어야 한다.
(나) 각 자리의 수의 합은 짝수이다.

Step 1 일의 자리의 수가 홀수인 자연수의 개수 구하기

(i) 일의 자리의 수가 홀수인 경우

일의 자리에 올 수 있는 수는 1, 3, 5, 7, 9의 5가지이고, 그 각각에 대하여 조건 (가)에서 십의 자리에 올 수 있는 수는 2, 4, 6, 8의 4가지이다.

그 각각에 대하여 조건 (나)에서 백의 자리의 수는 홀수이어야 하므로 백의 자리에 올 수 있는 수는 일의 자리의 수를 제외한 나머지 4개의 홀수이다.

따라서 일의 자리의 수가 홀수인 자연수의 개수는

$5\times4\times4=80$

Step 2 일의 자리의 수가 짝수인 자연수의 개수 구하기

(ⅱ) 일의 자리의 수가 짝수인 경우

ⓐ 십의 자리의 수와 백의 자리의 수가 모두 짝수인 경우

2, 4, 6, 8의 4개의 짝수 중에서 서로 다른 3개를 택해 일렬로 나열하는 경우의 수이므로

${}_4P_3=4\times3\times2=24$

ⓑ 십의 자리의 수와 백의 자리의 수가 모두 홀수인 경우

일의 자리에 올 수 있는 수는 2, 4, 6, 8의 4가지이고, 그 각각에 대하여 1, 3, 5, 7, 9의 5개의 홀수 중에서 서로 다른 2개를 택하여 십의 자리의 수와 백의 자리의 수로 정해줘야 하므로 그 경우의 수는

$4\times{}_5P_2=4\times5\times4=80$

ⓐ, ⓑ에서 일의 자리의 수가 짝수인 자연수의 개수는

$24+80=104$

Step 3 조건을 만족시키는 자연수의 개수 구하기

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 자연수의 개수는

$80+104=184$ 답 184

56

각 학년의 학생이 1명씩은 모두 들어가야 하고 그 외에 2명을 어느 학년의 학생으로 뽑아야 하는지 생각한다.

1학년 학생 4명, 2학년 학생 4명, 3학년 학생 4명 중에서 5명을 뽑을 때, 각 학년의 학생이 적어도 한 명씩 포함되도록 뽑는 경우의 수를 구하시오. 624

Step 1 조건에 맞게 뽑는 방법 파악하기

1학년을 1, 2학년을 2, 3학년을 3으로 표현하면 각 학년의 학생이 적어도 한 명씩은 포함되어야 하므로 1, 2, 3은 반드시 포함되어야 하고 여기에 1, 1 또는 1, 2 또는 1, 3 또는 2, 2 또는 2, 3 또는 3, 3으로 뽑아야 한다.

Step 2 한 학년의 학생을 3명, 나머지 두 학년의 학생을 각각 1명씩 뽑는 경우의 수 구하기

(ⅰ) 한 학년의 학생을 3명, 나머지 두 학년의 학생을 각각 1명씩 뽑는 경우

3명을 뽑는 학년을 선택하는 경우의 수는

${}_3C_1=3$

그 각각에 대하여 3명을 뽑는 학년에서 학생을 3명 뽑고 나머지 두 학년에서 학생을 각각 1명씩 뽑는 경우의 수는

${}_4C_3\times{}_4C_1\times{}_4C_1={}_4C_1\times{}_4C_1\times{}_4C_1=64$

이므로 이때의 경우의 수는

$3\times64=192$

Step 3 두 학년의 학생을 2명씩 뽑고 나머지 학년의 학생을 1명 뽑는 경우의 수 구하기

(ⅱ) 두 학년의 학생을 2명씩 뽑고 나머지 학년의 학생을 1명 뽑는 경우

2명씩 뽑는 두 학년을 선택하는 경우의 수는

${}_3C_2={}_3C_1=3$

그 각각에 대하여 2명씩 뽑는 학년에서 학생을 각각 2명씩 뽑고 나머지 학년에서 학생을 1명 뽑는 경우의 수는

${}_4C_2\times{}_4C_2\times{}_4C_1=\frac{4\times3}{2\times1}\times\frac{4\times3}{2\times1}\times4=144$

이므로 이때의 경우의 수는

$3\times144=432$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 경우의 수는

$192+432=624$ 답 624

57

2개인 경우와 1개의 경우로 나눈다.

흰 공 4개와 검은 공 3개를 1부터 7까지의 자연수가 하나씩 적힌 7개의 상자에 각각 한 개씩 넣으려고 한다. 홀수가 적힌 모든 상자에 들어간 흰 공의 개수가 2 이하인 경우의 수는? (단, 같은 색의 공은 서로 구별하지 않고, 공을 넣는 순서는 고려하지 않는다.)

1	2	3	4	5	6	7

① 21　✓② 22　③ 23　④ 24　⑤ 25

Step 1 홀수가 적힌 모든 상자에 들어간 흰 공의 개수가 2인 경우의 수 구하기

(ⅰ) 홀수가 적힌 상자에 들어간 흰 공의 개수가 2인 경우

홀수가 적힌 4개의 상자 중에서 흰 공이 들어가는 2개의 상자를 택하는 경우의 수는

${}_4C_2=\frac{4\times3}{2\times1}=6$

그 각각에 대하여 2, 4, 6이 적힌 3개의 상자 중에서 흰 공이 들어가는 2개의 상자를 택하는 경우의 수는

${}_3C_2={}_3C_1=3$

이므로 홀수가 적힌 상자에 들어간 흰 공의 개수가 2인 경우의 수는

$6\times3=18$

Step 2 홀수가 적힌 모든 상자에 들어간 흰 공의 개수가 1인 경우의 수 구하기

(ⅱ) 홀수가 적힌 상자에 들어간 흰 공의 개수가 1인 경우

홀수가 적힌 4개의 상자 중에서 흰 공이 들어가는 1개의 상자를 택하는 경우의 수는

${}_4C_1=4$

그 각각에 대하여 2, 4, 6이 적힌 3개의 상자 중에서 흰 공이 들어가는 3개의 상자를 택하는 경우의 수는

${}_3C_3=1$

이므로 홀수가 적힌 상자에 들어간 흰 공의 개수가 1인 경우의 수는

$4\times1=4$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 경우의 수는

$18+4=22$ 답 ②

[다른 풀이]

Step 1 흰 공이 들어가는 4개의 상자를 택하는 경우의 수 구하기

7개의 상자 중에서 흰 공이 들어가는 4개의 상자를 택하는 경우의 수는

${}_7C_4={}_7C_3=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$

Step 2 홀수가 적힌 모든 상자에 들어간 흰 공의 개수가 3인 경우의 수 구하기

(ⅰ) 홀수가 적힌 모든 상자에 들어간 흰 공의 개수가 3인 경우

홀수가 적힌 4개의 상자 중에서 흰 공이 들어가는 3개의 상자를 택하는 경우의 수는

${}_4C_3={}_4C_1=4$

그 각각에 대하여 2, 4, 6이 적힌 3개의 상자 중에서 흰 공이 들어가는 1개의 상자를 택하는 경우의 수는

${}_3C_1=3$

이므로 홀수가 적힌 상자에 들어간 흰 공의 개수가 3인 경우의 수는

$4\times3=12$

Step 3 홀수가 적힌 모든 상자에 들어간 흰 공의 개수가 4인 경우의 수 구하기

(ii) 홀수가 적힌 모든 상자에 들어간 흰 공의 개수가 4인 경우

홀수가 적힌 4개의 상자 중에서 흰 공이 들어가는 4개의 상자를 택하는 경우의 수는

${}_4C_4=1$

(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$35-(12+1)=22$

58 8개의 사탕을 1개, 7개 또는 1개, 1개, 6개 또는 1개, 2개, 5개 또는 1개, 3개, 4개로 나눌 수 있다.

서로 다른 8개의 사탕과 서로 다른 7개의 초콜릿을 남김없이 모두 서로 다른 세 상자 A, B, C에 나누어 넣을 때, 다음 조건을 만족시키도록 넣는 경우의 수는 $2^p\times3^q\times5^r\times7^s$이다. 네 자연수 p, q, r, s에 대하여 $p+q+r+s$의 값을 구하시오. 10

(단, 사탕과 초콜릿을 넣는 순서는 고려하지 않는다.)

8개의 사탕을 1개, 3개, 4개로 나눌 수 있다.

(가) 상자에 들어 있는 사탕의 개수가 1인 상자가 있다.
(나) 각 상자에는 초콜릿이 적어도 한 개 이상 들어 있다.
(다) 각 상자에 들어 있는 사탕과 초콜릿의 개수의 합은 5로 모두 같다.

Step 1 서로 다른 8개의 사탕을 나누는 경우의 수 구하기

조건 (가)에서 8개의 사탕을 1개, 7개 또는 1개, 1개, 6개 또는 1개, 2개, 5개 또는 1개, 3개, 4개로 나눌 수 있다.

이때 두 조건 (나), (다)를 만족시키려면 서로 다른 8개의 사탕을 1개, 3개, 4개로 나누어야 하고 그 경우의 수는 서로 다른 8개의 사탕 중에서 1개를 택하고 나머지 7개의 사탕 중에서 3개를 택하고 나머지 4개의 사탕 중에서 4개를 택하는 경우의 수이므로

$${}_8C_1\times{}_7C_3\times{}_4C_4=8\times\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}\times1$$
$$=2^3\times5\times7$$

이다.

Step 2 서로 다른 7개의 초콜릿을 나누는 경우의 수 구하기

그 각각에 대하여 서로 다른 7개의 초콜릿을 4개, 2개, 1개로 나누어야 하므로 그 경우의 수는 7개의 초콜릿 중에서 4개를 택하고 나머지 3개의 초콜릿 중에서 2개를 택하고 나머지 1개의 초콜릿 중에서 1개를 택하는 경우의 수이므로

$${}_7C_4\times{}_3C_2\times{}_1C_1={}_7C_3\times{}_3C_1\times{}_1C_1$$
$$=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}\times3\times1$$
$$=3\times5\times7$$

Step 3 세 상자에 넣는 경우의 수 구하기

그 각각에 대하여 세 상자 A, B, C에 넣는 경우의 수는

$3!=3\times2\times1$

이다.

따라서 구하는 경우의 수는

$(2^3\times5\times7)\times(3\times5\times7)\times(3\times2\times1)$

$=2^4\times3^2\times5^2\times7^2$

이므로

$p=4$, $q=2$, $r=2$, $s=2$에서

$p+q+r+s=4+2+2+2=10$

답 10

59 대표로 뽑힌 A학교 학생의 수가 0이거나 1인 경우의 수를 구해 전체 경우의 수에서 뺀다.

A학교 학생 4명을 포함한 10명의 학생 중에서 대표 4명을 뽑을 때, A학교 학생이 2명 이상 포함되도록 뽑는 경우의 수를 구하시오. 115

Step 1 10명 중에서 대표 4명을 뽑는 경우의 수 구하기

10명의 학생 중에서 대표 4명을 뽑는 경우의 수는

$${}_{10}C_4=\frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}=210$$

Step 2 조건에 맞는 경우의 수 구하기

대표 4명을 모두 A학교 학생이 아닌 학생 중에서 뽑는 경우의 수는

$${}_6C_4={}_6C_2=\frac{6\times5}{2\times1}=15$$

대표 4명 중 1명을 A학교 학생 중에서 뽑고 나머지 3명을 A학교 학생이 아닌 학생 중에서 뽑는 경우의 수는

$${}_4C_1\times{}_6C_3=4\times\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=80$$

따라서 구하는 경우의 수는

$210-(15+80)=115$

답 115

60 택한 숫자 0이 적힌 카드의 수에 따라 경우를 나눈다.

숫자 1, 2, 3, 4가 하나씩 적힌 4장의 카드와 숫자 0이 적힌 4장의 카드가 있다. 이 8장의 카드 중에서 동시에 5장을 택해 일렬로 나열하여 다섯 자리의 자연수를 만들 때, 숫자 0이 적힌 카드끼리는 모두 이웃하지 않도록 하여 만들 수 있는 자연수의 개수를 구하시오. 168

Step 1 조건에 맞는 방법 생각하기

8장의 카드 중에서 동시에 5장을 택해 일렬로 나열하여 다섯 자리의 자연수를 만들려면 숫자 0이 적힌 카드는 적어도 1장 이상은 뽑아야 한다.

Step 2 숫자 0이 적힌 카드가 1장일 때 자연수의 개수 구하기

(i) 숫자 0이 적힌 카드를 1장 택한 경우

숫자 0, 1, 2, 3, 4가 적힌 5장의 카드를 일렬로 나열하여 만들 수 있는 다섯 자리의 자연수의 개수는 5장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수에서 숫자 0이 적힌 카드가 맨 앞에 오는 경우의 수를 빼주면 되므로

$5!-4!=96$

Step 3 숫자 0이 적힌 카드가 2장일 때 자연수의 개수 구하기

(ii) 숫자 0이 적힌 카드를 2장 택한 경우

숫자 1, 2, 3, 4가 적힌 4장의 카드 중에서 서로 다른 3장의 카드를 택하는 경우의 수는

${}_4C_3={}_4C_1=4$

그 각각에 대하여 택한 3장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$3!=3\times2\times1=6$

그 각각에 대하여 숫자 0이 적힌 카드 2장은 ✓로 표시된 3개의 자리 중에서 2개의 자리에 들어가야 하므로 그 경우의 수는

${}_3C_2={}_3C_1=3$

수	✓	수	✓	수	✓

이때의 자연수의 개수는

$4\times6\times3=72$

Step 4 숫자 0이 적힌 카드가 3장 이상일 때 자연수의 개수 구하기

(iii) 숫자 0이 적힌 카드를 3장 이상 택한 경우

숫자 0이 적힌 카드는 반드시 이웃할 수밖에 없으므로 조건을 만족시키지 않는다.

Step 5 조건에 맞는 자연수의 개수 구하기

(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 자연수의 개수는

$96+72=168$ 답 168

1등급을 넘어서는 **상위 1%**

본문 91쪽

61

오른쪽 그림과 같이 10개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0과 2개의 특수 문자 ∗, # 중에서 서로 다른 4개의 숫자와 1개의 특수 문자를 택해 일렬로 나열하여 비밀번호를 만들려고 한다. 다음 조건을 만족시키도록 비밀번호를 만드는 경우의 수가 $k\times5!$일 때, 상수 k의 값을 구하시오. 184

1	2	3
4	5	6
7	8	9
∗	0	#

(가) 선택한 4개의 수의 합은 1 이상의 홀수이다. → 1 이상의 홀수의 개수는 1 또는 3이다.

(나) 0은 맨 앞에 오지 않도록 한다.

→ 0이 선택되는 경우, 0이 맨 앞에 오는 경우의 수를 뺀다.

문항 파헤치기

각 조건을 만족시키는 경우를 생각하여 문제를 해결한다.

풀이

Step 1 4개의 수의 합이 1 이상의 홀수가 되는 경우 생각하기

4개의 수의 합이 1 이상의 홀수가 되려면 4개의 수 중에서 1 이상의 홀수의 개수는 1 또는 3이다.

Step 2 4개의 수의 합이 1 이상의 홀수가 되는 각 경우의 수 구하기

(i) 4개의 수 중에서 1 이상의 홀수의 개수가 1인 경우

ⓐ 0이 선택되는 경우

1, 3, 5, 7, 9의 5개의 숫자 중에서 1개를 택하는 경우의 수는

${}_5C_1=5$

그 각각에 대하여 2, 4, 6, 8, 0의 5개의 숫자 중에서 0을 반드시 포함하여 서로 다른 3개를 택하는 경우의 수는

${}_4C_2=\dfrac{4\times3}{2\times1}=6$

그 각각에 대하여 2개의 특수문자 ∗, # 중에서 1개를 택하는 경우의 수는

${}_2C_1=2$

선택한 4개의 숫자와 특수문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$5!-4!=4\times4!$

이므로 이때의 경우의 수는

$5\times6\times2\times4\times4!=48\times5!$

ⓑ 0이 선택되지 않는 경우

1, 3, 5, 7, 9의 5개의 숫자 중에서 1개를 택하는 경우의 수는

${}_5C_1=5$

그 각각에 대하여 2, 4, 6, 8, 0의 5개의 숫자 중에서 0을 포함하지 않고 서로 다른 3개를 택하는 경우의 수는

${}_4C_3={}_4C_1=4$

그 각각에 대하여 2개의 특수문자 ∗, # 중에서 1개를 택하는 경우의 수는

${}_2C_1=2$

선택한 4개의 숫자와 특수문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$5!$

이므로 이때의 경우의 수는

$5\times4\times2\times5!=40\times5!$

ⓐ, ⓑ에서 4개의 수 중에서 1 이상의 홀수의 개수가 1인 경우의 수는

$48\times5!+40\times5!=88\times5!$

(ii) 4개의 수 중에서 1 이상의 홀수의 개수가 3인 경우

ⓒ 0이 선택되는 경우

1, 3, 5, 7, 9의 5개의 숫자 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

${}_5C_3={}_5C_2=\dfrac{5\times4}{2\times1}=10$

그 각각에 대하여 0을 선택하는 경우의 수는 1

그 각각에 대하여 2개의 특수문자 ∗, # 중에서 1개를 택하는 경우의 수는

${}_2C_1=2$

선택한 4개의 숫자와 특수문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$5!-4!=4\times4!$

이므로 이때의 경우의 수는

$10\times1\times2\times4\times4!=16\times5!$

ⓓ 0이 선택되지 않는 경우

1, 3, 5, 7, 9의 5개의 숫자 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

${}_5C_3={}_5C_2=\dfrac{5\times4}{2\times1}=10$

그 각각에 대하여 2, 4, 6, 8의 4개의 숫자 중에서 1개를 택하는 경우의 수는

${}_4C_1=4$

그 각각에 대하여 2개의 특수문자 ∗, # 중에서 1개를 택하는 경우의 수는

${}_2C_1=2$

선택한 4개의 숫자와 특수문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$5!$

이므로 이때의 경우의 수는

$10\times4\times2\times5!=80\times5!$

ⓒ, ⓓ에서 4개의 수 중에서 1 이상의 홀수의 개수가 3인 경우의 수는

$16\times5!+80\times5!=96\times5!$

Step 3 상수 k의 값 구하기

(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$88\times5!+96\times5!=184\times5!$

이므로 $k=184$ 답 184

실수 Point 찾기

4개의 수의 합이 홀수가 되는 경우를 잘 파악해야 한다.

08 행렬과 그 연산

내신 빈출 필수 문제

본문 94~95쪽

01 ④ **02** 100 **03** ⑤ **04** ⑤ **05** ①
06 ⑤ **07** 5 **08** ② **09** ④
10 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ **11** 19

01 $a_{12}=2\times1+3\times2-1=7$

$a_{22}=2\times2+3\times2-1=9$

따라서 $a_{12}+a_{22}=7+9=16$

답 ④

02 $\begin{pmatrix} a & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4-b & -1 \\ 0 & ab \end{pmatrix}$에서

$a=4-b$, $ab=-3$

즉, $a+b=4$, $ab=-3$

따라서

$$\begin{aligned} a^3+b^3&=(a+b)^3-3ab(a+b) \\ &=4^3-3\times(-3)\times4 \\ &=100 \end{aligned}$$

답 100

03
$$\begin{aligned} xA+yB&=x\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix} 2x & -3x \\ 0 & x \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -y & 2y \\ 4y & 3y \end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix} 2x-y & -3x+2y \\ 4y & x+3y \end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix} 7 & -12 \\ -12 & -7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

에서

$2x-y=7$, $-3x+2y=-12$,

$4y=-12$, $x+3y=-7$

따라서 $x=2$, $y=-3$이므로

$x-y=2-(-3)=5$

답 ⑤

04 $2(A-B)-(A+3B)$

$=2A-2B-A-3B$

$=A-5B$

$=\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}-5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 10 & -5 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 $2(A-B)-(A+3B)$의 모든 성분의 합은

$2+4+(-7)+3=2$

답 ⑤

05 $AB=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 7 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

$BA=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & -14 \\ 6 & -8 \end{pmatrix}$

따라서

$AB+BA=\begin{pmatrix} -1 & 7 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 8 & -14 \\ 6 & -8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & -7 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$

이므로 행렬 $AB+BA$의 모든 성분의 합은

$7+(-7)+3+(-7)=-4$

답 ①

06 $A-B=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$

$A+B=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

이므로

$$\begin{aligned} (A-B)(A+B)&=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix} 10 & 6 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix} a & 6 \\ -5 & b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

따라서 $a=10$, $b=1$이므로

$a+b=10+1=11$

답 ⑤

07 이차방정식 $x^2-3x-15=0$의 두 실근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=-15$

$$\begin{aligned} A^2&=AA \\ &=\begin{pmatrix} k & \alpha \\ \beta & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k & \alpha \\ \beta & k \end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix} k^2+\alpha\beta & 2k\alpha \\ 2k\beta & k^2+\alpha\beta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

에서 행렬 A^2의 모든 성분의 합이 50이므로

$2(k^2+\alpha\beta)+2k\alpha+2k\beta$

$=2(k^2+\alpha\beta)+2k(\alpha+\beta)$

$=2(k^2-15)+6k=50$

$k^2+3k-40=0$

$(k+8)(k-5)=0$

이때 $k>0$이므로 $k=5$

답 5

08 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$에 대하여

$A^2=AA=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 27 \end{pmatrix}$

$A^2+A^3=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 27 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 36 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$

에서 $a=12$, $b=36$

따라서 $a+b=12+36=48$

답 ②

09 $2A+B=2\begin{pmatrix}1 & a\\3 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 1\\b & 2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}2 & 2a\\6 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 1\\b & 2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}6 & 2a+1\\6+b & 2\end{pmatrix}$

이므로

$(2A+B)A=\begin{pmatrix}6 & 2a+1\\6+b & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a\\3 & 0\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}6a+9 & 6a\\12+b & 6a+ab\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-3 & -12\\9 & -6\end{pmatrix}$

에서

$6a+9=-3$, $6a=-12$, $12+b=9$, $6a+ab=-6$

따라서 $a=-2$, $b=-3$이므로

$a-b=-2-(-3)=1$

답 ④

10 행렬 A를 $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$로 나타내면

$a_{11}=3-1=2$, $a_{12}=1+4=5$,

$a_{21}=6-1=5$, $a_{22}=6-2=4$

이므로

$A=\begin{pmatrix}2 & 5\\5 & 4\end{pmatrix}$

········· ❶

행렬 B를 $B=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}$로 나타내면

$b_{11}=a_{11}+1=2+1=3$,

$b_{12}=a_{12}+1\times2=5+2=7$,

$b_{21}=a_{21}+2-1=5+1=6$,

$b_{22}=a_{22}+2\times2=4+4=8$

이므로

$B=\begin{pmatrix}3 & 7\\6 & 8\end{pmatrix}$

········· ❷

따라서

$3A-2B=3\begin{pmatrix}2 & 5\\5 & 4\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}3 & 7\\6 & 8\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}6 & 15\\15 & 12\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6 & 14\\12 & 16\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}0 & 1\\3 & -4\end{pmatrix}$

········· ❸

답 $\begin{pmatrix}0 & 1\\3 & -4\end{pmatrix}$

단계	채점 기준	비율
❶	행렬 A를 구한 경우	40 %
❷	행렬 B를 구한 경우	40 %
❸	행렬 $3A-2B$를 구한 경우	20 %

11 $A+B=\begin{pmatrix}1 & 2\\4 & 4\end{pmatrix}$ ······ ㉠

$2A-B=\begin{pmatrix}5 & -2\\-7 & 5\end{pmatrix}$ ······ ㉡

에서 ㉠+㉡을 하면

$3A=\begin{pmatrix}1 & 2\\4 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5 & -2\\-7 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 0\\-3 & 9\end{pmatrix}$

이므로

$A=\begin{pmatrix}2 & 0\\-1 & 3\end{pmatrix}$

········· ❶

㉠에서

$B=\begin{pmatrix}1 & 2\\4 & 4\end{pmatrix}-A=\begin{pmatrix}1 & 2\\4 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 0\\-1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\5 & 1\end{pmatrix}$

········· ❷

두 행렬 A, B에 대하여

$AB=\begin{pmatrix}2 & 0\\-1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2\\5 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 4\\16 & 1\end{pmatrix}$

········· ❸

따라서 행렬 AB의 모든 성분의 합은

$-2+4+16+1=19$

········· ❹

답 19

단계	채점 기준	비율
❶	행렬 A를 구한 경우	30 %
❷	행렬 B를 구한 경우	30 %
❸	행렬 AB를 구한 경우	30 %
❹	행렬 AB의 모든 성분의 합을 구한 경우	10 %

내신 고득점 도전 문제

본문 96~97쪽

12 ⑤	**13** 2	**14** ③	**15** 17	**16** ⑤
17 4	**18** 10	**19** 5	**20** 7	**21** ②
22 ②	**23** 17	**24** 2		

12 $b_{12}=(-1)^{1+2}\times a_{21}=(-1)\times(-3)=3$

$b_{22}=(-1)^{2+2}\times a_{22}=1$

따라서 $b_{12}+b_{22}=3+1=4$

답 ⑤

13 두 행렬 A, B에 대하여 $A=B$이므로

$\begin{pmatrix}a^2 & 1\\-2 & -b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}32-b^2 & 1\\-2 & a-6\end{pmatrix}$

에서 $a^2=32-b^2$, $-b=a-6$

즉, $a^2+b^2=32$, $a+b=6$

따라서 $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$에서

$6^2=32+2ab$, $2ab=4$

$ab=2$

답 2

14 $xA+yB=x\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}3&2\\2&1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}2x&x\\x&x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3y&2y\\2y&y\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}2x+3y&x+2y\\x+2y&x+y\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

이므로

$2x+3y=1$, $x+2y=0$, $x+y=1$

따라서 $x=2$, $y=-1$이므로

$2x+y=2\times2-1=3$ 답 ③

15 $A+B=\begin{pmatrix}5&5\\2&-2\end{pmatrix}$, $A-B=\begin{pmatrix}1&5\\-4&6\end{pmatrix}$에서

두 식을 변끼리 더하면

$2A=\begin{pmatrix}5&5\\2&-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&5\\-4&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&10\\-2&4\end{pmatrix}$

이므로

$A=\begin{pmatrix}3&5\\-1&2\end{pmatrix}$

$B=\begin{pmatrix}5&5\\2&-2\end{pmatrix}-A$

$=\begin{pmatrix}5&5\\2&-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&5\\-1&2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}2&0\\3&-4\end{pmatrix}$

따라서

$3A+2B=3\begin{pmatrix}3&5\\-1&2\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}2&0\\3&-4\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}9&15\\-3&6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&0\\6&-8\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}13&15\\3&-2\end{pmatrix}$

에서 $a=15$, $b=-2$이므로

$a-b=15-(-2)=17$ 답 17

16 $AB=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p&q\\r&s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ap+br&aq+bs\\cp+dr&cq+ds\end{pmatrix}$

$BA=\begin{pmatrix}p&q\\r&s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}pa+qc&pb+qd\\ra+sc&rb+sd\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}ap+cq&bp+dq\\ar+cs&br+ds\end{pmatrix}$

특정 일요일에 선수가 수영과 달리기로 소모한 열량은 $ar+cs$이므로 행렬 BA의 $(2, 1)$ 성분이다. 답 ⑤

17 $AB=\begin{pmatrix}1&x\\3&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\-3&y\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1-3x&2+xy\\6&6-y\end{pmatrix}$

$BA=\begin{pmatrix}1&2\\-3&y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&x\\3&-1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}7&x-2\\-3+3y&-3x-y\end{pmatrix}$

이때 $AB=BA$이므로

$\begin{pmatrix}1-3x&2+xy\\6&6-y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&x-2\\-3+3y&-3x-y\end{pmatrix}$

에서 $1-3x=7$, $2+xy=x-2$, $6=-3+3y$, $6-y=-3x-y$

따라서 $x=-2$, $y=3$이므로

$x+2y=-2+6=4$ 답 4

18 $AB=\begin{pmatrix}x&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-x&3\\4&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x^2+4&3x-2\\-x+8&-1\end{pmatrix}$

에서 행렬 AB의 모든 성분의 합은

$-x^2+4+3x-2-x+8-1$

$=-x^2+2x+9$

$=-(x-1)^2+10$

따라서 행렬 AB의 모든 성분의 합은

$-(x-1)^2+10\le10$

이므로 행렬 AB의 모든 성분의 합의 최댓값은 10이다. 답 10

19 $AB=\begin{pmatrix}a&b\\a&b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-6\\-2&4\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}3a-2b&-6a+4b\\3a-2b&-6a+4b\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

에서 $3a-2b=0$, $-6a+4b=0$

즉, $3a=2b$

이때 $a=2k$, $b=3k$ (k는 자연수)라 하면

$a+b=5k$

따라서 k는 $k\ge1$인 자연수이므로 $a+b$의 최솟값은 5이다. 답 5

20 $A^3+E=O$에서 $A^3=-E$

$A^2=\begin{pmatrix}3&-1\\a&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-1\\a&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9-a&-1\\a&4-a\end{pmatrix}$

$A^3=A^2A$

$=\begin{pmatrix}9-a&-1\\a&4-a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-1\\a&-2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}27-4a&a-7\\7a-a^2&a-8\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$

에서 $27-4a=-1$, $a-7=0$, $7a-a^2=0$, $a-8=-1$

따라서 $a=7$ 답 7

21 $A-B=\begin{pmatrix}4&5\\1&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4&2\\-2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&3\\3&0\end{pmatrix}$이므로

$(A-B)^2=\begin{pmatrix}0&3\\3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&3\\3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&0\\0&9\end{pmatrix}$

$$=9\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=9E$$

따라서

$$(A-B)^{10}=\{(A-B)^2\}^5=(9E)^5$$
$$=9^5E^5=(3^2)^5E$$
$$=3^{10}E=\begin{pmatrix}3^{10}&0\\0&3^{10}\end{pmatrix}$$

이므로 행렬 $(A-B)^{10}$의 모든 성분의 합은

$3^{10}+0+0+3^{10}=2\times3^{10}$

답 ②

22 $AB^2=ABB=\begin{pmatrix}4&1\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-2\\2&4\end{pmatrix}$

이므로

$$AB^2-3B=\begin{pmatrix}4&-2\\2&4\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1&-1\\0&2\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}4&-2\\2&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&-3\\0&6\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1&1\\2&-2\end{pmatrix}$$

따라서 행렬 AB^2-3B의 모든 성분의 합은

$1+1+2+(-2)=2$

답 ②

23 이차정사각행렬 A를 $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$라 하면

조건 (가)에서

$$A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$$

이므로

$a=1,\ c=-2$

조건 (나)에서

$$A\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&b\\-2&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+b\\-4+d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$$

이므로

$2+b=5,\ -4+d=0$

즉, $b=3,\ d=4$

따라서 $A=\begin{pmatrix}1&3\\-2&4\end{pmatrix}$

.... ❶

$A\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3\\-2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13\\4\end{pmatrix}$에서

.... ❷

행렬 $A\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$의 모든 성분의 합은 $13+4=17$

.... ❸

답 17

단계	채점 기준	비율
❶	행렬 A를 구한 경우	50 %
❷	행렬 $A\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$을 구한 경우	40 %
❸	행렬 $A\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$의 모든 성분의 합을 구한 경우	10 %

24 행렬 B를 $B=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{pmatrix}$로 나타내면

$b_{11}=(-1)^2a_{11}+2-1=-1+1=0,$

$b_{12}=(-1)^3a_{12}+2-2=-1,$

$b_{21}=(-1)^3a_{21}+4-1=-2+3=1,$

$b_{22}=(-1)^4a_{22}+4-2=-3+2=-1$

이므로

$$B=\begin{pmatrix}0&-1\\1&-1\end{pmatrix}$$

.... ❶

$$B^2=BB$$
$$=\begin{pmatrix}0&-1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1\\1&-1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-1&1\\-1&0\end{pmatrix}$$
$$B^3=B^2B$$
$$=\begin{pmatrix}-1&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1\\1&-1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$
$$=E$$

$B^4=B^3B=EB=B$

$B^5=B^4B=B^2$

이므로

$B^4+B^5=B+B^2$

.... ❷

이때

$$B+B^2=\begin{pmatrix}0&-1\\1&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&1\\-1&0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$
$$=-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$
$$=-E$$

.... ❸

따라서

$$(B+B^2)(B^4+B^5)=(B+B^2)(B+B^2)$$
$$=(-E)(-E)$$
$$=E$$
$$=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

이므로 행렬 $(B+B^2)(B^4+B^5)$의 모든 성분의 합은

$1+0+0+1=2$

.... ❹

답 2

단계	채점 기준	비율
❶	행렬 B를 구한 경우	30 %
❷	$B^4+B^5=B+B^2$을 구한 경우	30 %
❸	$B+B^2=-E$를 구한 경우	20 %
❹	행렬 $(B+B^2)(B^4+B^5)$의 모든 성분의 합을 구한 경우	20 %

변별력을 만드는 1등급 문제

본문 98~100쪽

25 19	**26** ②	**27** ⑤	**28** 50	**29** 4
30 11	**31** 28	**32** 30	**33** 8	**34** 10
35 4	**36** 16	**37** ③	**38** 56	**39** ⑤

25

$a_{11}=0,\ a_{22}=0,\ a_{21}=-a_{12},\ b_{21}=b_{12}$

두 행렬 A, B의 $(i,\ j)$ 성분을 각각 a_{ij}, b_{ij}라 할 때,

$$a_{ij}+a_{ji}=0,\ b_{ij}-b_{ji}=0\ (i=1,\ 2,\ j=1,\ 2)$$

이다. $A+2B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 8 \end{pmatrix}$일 때, 행렬 $B-A^2$의 모든 성분의 합을 구하시오. 19

Step 1 두 행렬 A, B의 성분의 관계식 구하기

$a_{ij}+a_{ji}=0\ (i=1,\ 2,\ j=1,\ 2)$에서

$a_{11}+a_{11}=0,\ a_{22}+a_{22}=0$이므로

$a_{11}=0,\ a_{22}=0$

$a_{12}+a_{21}=0$에서 $a_{21}=-a_{12}$

$b_{ij}-b_{ji}=0\ (i=1,\ 2,\ j=1,\ 2)$에서

$b_{12}-b_{21}=0$이므로

$b_{21}=b_{12}$

$A=\begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{12} & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix}$

Step 2 두 행렬 A, B 각각 구하기

$$A+2B$$
$$=\begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{12} & 0 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{12} & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2b_{11} & 2b_{12} \\ 2b_{12} & 2b_{22} \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 2b_{11} & a_{12}+2b_{12} \\ -a_{12}+2b_{12} & 2b_{22} \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 8 \end{pmatrix}$$

에서

$2b_{11}=2,\ a_{12}+2b_{12}=-1,\ -a_{12}+2b_{12}=-7,\ 2b_{22}=8$

이므로

$b_{11}=1,\ a_{12}=3,\ b_{12}=-2,\ b_{22}=4$

따라서 $A=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

Step 3 행렬 $B-A^2$의 모든 성분의 합 구하기

$A^2=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -9 & 0 \\ 0 & -9 \end{pmatrix}$에서

$$B-A^2=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -9 & 0 \\ 0 & -9 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 13 \end{pmatrix}$$

따라서 행렬 $B-A^2$의 모든 성분의 합은

$10+(-2)+(-2)+13=19$

답 19

26

등식 $\begin{pmatrix} x-1 & y \\ 1 & x-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$을 만족시키는 두 실수 x, y에 대하여 $3x+y$의 최솟값은?

$3x+y=k$라 하고 k의 최솟값을 구한다.

① $-\dfrac{3}{2}$ ② $-\dfrac{5}{4}$ ③ -1

④ $-\dfrac{3}{4}$ ⑤ $-\dfrac{1}{2}$

Step 1 x, y의 관계식 찾기

$$\begin{pmatrix} x-1 & y \\ 1 & x-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} (x-1)^2-y \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

에서 $(x-1)^2-y=2$

즉, $y=(x-1)^2-2$ ······ ㉠

$3x+y=k$ (k는 실수)라 하자. ······ ㉡

Step 2 $3x+y$의 최솟값 구하기

㉠을 ㉡에 대입하면

$3x+(x-1)^2-2=k$

$k=x^2+x-1$

$$=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$$
$$\geq -\frac{5}{4}$$

따라서 $3x+y$의 최솟값은 $-\dfrac{5}{4}$이다. 답 ②

27

네 실수 a, b, c, d와 행렬 $A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & b \end{pmatrix}$에 대하여

$A\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c & 4 \\ 2 & d \end{pmatrix}$이다. 행렬 $A+A^3+A^{10}$의 모든 성분의 곱

A의 거듭제곱의 규칙을 찾는다.

을 m이라 할 때, $m+a+b+c+d$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5

④ 6 ⑤ 7

Step 1 네 실수 a, b, c, d의 값 각각 구하기

$A\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c & 4 \\ 2 & d \end{pmatrix}$에서

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -a+3 \\ 2b & 1+3b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c & 4 \\ 2 & d \end{pmatrix}$$

이므로

$2=c,\ -a+3=4,\ 2b=2,\ 1+3b=d$

즉, $a=-1,\ b=1,\ c=2,\ d=4$

Step 2 $m+a+b+c+d$의 값 구하기

$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$에 대하여

$$A^2=AA=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=O$$

$A^3=A^2A=O$

$A^{10}=A^2A^8=O$

이므로

$A+A^3+A^{10}=A+O+O=A$

따라서 $m=(-1)\times1\times(-1)\times1=1$이므로

$m+a+b+c+d=1+(-1)+1+2+4=7$ 답 ⑤

28

A의 거듭제곱의 규칙을 찾을 수 있다.

행렬 $A=\begin{pmatrix}4&0\\0&8\end{pmatrix}$에 대하여 행렬 A^{10}의 $(1,\ 1)$ 성분과 $(2,\ 2)$ 성분의 곱은 2^k일 때, 상수 k의 값을 구하시오. 50

Step 1 행렬 A^{10} 구하기

$A=\begin{pmatrix}4&0\\0&8\end{pmatrix}$에 대하여

$$A^2=\begin{pmatrix}4&0\\0&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&0\\0&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4^2&0\\0&8^2\end{pmatrix}$$

$$A^4=A^2A^2=\begin{pmatrix}4^2&0\\0&8^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4^2&0\\0&8^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4^4&0\\0&8^4\end{pmatrix}$$

$$A^5=A^4A=\begin{pmatrix}4^4&0\\0&8^4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&0\\0&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4^5&0\\0&8^5\end{pmatrix}$$

$$A^{10}=A^5A^5=\begin{pmatrix}4^5&0\\0&8^5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4^5&0\\0&8^5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4^{10}&0\\0&8^{10}\end{pmatrix}$$

Step 2 상수 k의 값 구하기

행렬 A^{10}의 $(1,\ 1)$ 성분은 4^{10}, $(2,\ 2)$ 성분은 8^{10}이고, 두 성분의 곱은 2^k이므로

$$\begin{aligned}4^{10}\times8^{10}&=(2^2)^{10}\times(2^3)^{10}\\&=2^{20}\times2^{30}=2^{20+30}\\&=2^{50}=2^k\end{aligned}$$

따라서 $k=50$ 답 50

29

행렬 A^{12}의 모든 성분의 합을 a의 식으로 나타낸다.

자연수 a에 대하여 행렬 A를 $A=\begin{pmatrix}a&a-3\\0&3\end{pmatrix}$이라 하자.

행렬 A^{12}의 모든 성분의 합이 2^{25}일 때, a의 값을 구하시오. 4

Step 1 행렬 A^{12} 구하기

$A=\begin{pmatrix}a&a-3\\0&3\end{pmatrix}$에 대하여

$$\begin{aligned}A^2&=\begin{pmatrix}a&a-3\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&a-3\\0&3\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}a^2&a^2-3^2\\0&3^2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A^3&=A^2A\\&=\begin{pmatrix}a^2&a^2-3^2\\0&3^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&a-3\\0&3\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}a^3&a^3-3^3\\0&3^3\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A^6&=A^3A^3\\&=\begin{pmatrix}a^3&a^3-3^3\\0&3^3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a^3&a^3-3^3\\0&3^3\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}a^6&a^6-3^6\\0&3^6\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A^{12}&=A^6A^6\\&=\begin{pmatrix}a^6&a^6-3^6\\0&3^6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a^6&a^6-3^6\\0&3^6\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}a^{12}&a^{12}-3^{12}\\0&3^{12}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Step 2 자연수 a의 값 구하기

행렬 A^{12}의 모든 성분의 합은

$a^{12}+(a^{12}-3^{12})+0+3^{12}=2\times a^{12}=2^{25}$

$a^{12}=2^{24}=4^{12}$

이때 a가 자연수이므로 $a=4$ 답 4

30

A^2을 구해 a, b에 대한 관계식을 찾는다.

각 면에 -5부터 6까지의 정수가 하나씩 적힌 정십이면체가 있다. 이 정십이면체를 두 번 던져서 바닥에 닿는 면에 적힌 수를 차례로 a, b라 하자. 행렬 $A=\begin{pmatrix}a&b\\b&a\end{pmatrix}$에 대하여 행렬 A^2의 모든 성분의 합이 0이 되는 행렬 A의 개수를 구하시오. 11

Step 1 행렬 A^2 구하기

$A=\begin{pmatrix}a&b\\b&a\end{pmatrix}$에 대하여

$$A^2=\begin{pmatrix}a&b\\b&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\b&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2+b^2&2ab\\2ab&a^2+b^2\end{pmatrix}$$

Step 2 행렬 A^2의 모든 성분의 합 구하기

행렬 A^2의 모든 성분의 합은

$a^2+b^2+2ab+2ab+a^2+b^2$

$=2(a+b)^2$

이때 행렬 A^2의 모든 성분의 합이 0이므로

$2(a+b)^2=0$, $a=-b$

따라서 a의 값이 될 수 있는 수는 -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5까지의 11가지이고, b의 값은 a의 값에 의하여 정해지므로 행렬 A의 개수는 11이다. 답 11

31

A의 거듭제곱의 규칙을 찾는다.

행렬 $A=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$과 30 이하의 서로 다른 두 자연수 m, n에 대하여 등식 $A^m=A^n$이 성립할 때, $n-m$의 최댓값을 구하시오. 28

(단, $A^1=A$이다.)

Step 1 세 행렬 A^2, A^3, A^4 구하기

$A=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$에 대하여

$$A^2=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$

$A^4=A^3A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=E$

Step 2 $n-m$의 최댓값 구하기

따라서

$A=A^5=A^9=\cdots=A^{29}$

$A^2=A^6=A^{10}=\cdots=A^{30}$

$A^3=A^7=A^{11}=\cdots=A^{27}$

$A^4=A^8=A^{12}=\cdots=A^{28}$

이므로 $n-m$의 최댓값은

$n=29$, $m=1$ 또는 $n=30$, $m=2$일 때,

$29-1=30-2=28$ 답 28

32 A의 거듭제곱을 구한다.

행렬 $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$에 대하여 행렬

$A+A^2+A^3+A^4+A^5+A^6+A^7+A^8$

의 (1, 2) 성분과 (2, 2) 성분의 합을 구하시오. 30

Step 1 행렬 A^n $(2\le n\le 8)$ 구하기

$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$에 대하여

$A^2=AA=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 2 & 0\end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -2\\ 2 & -2\end{pmatrix}$

$A^4=A^3A=\begin{pmatrix}-2 & -2\\ 2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-4 & 0\\ 0 & -4\end{pmatrix}=-4\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=-4E$

$A^5=A^4A=(-4E)A=-4A$

$A^6=A^4A^2=(-4E)A^2=-4A^2$

$A^7=A^4A^3=(-4E)A^3=-4A^3$

$A^8=A^4A^4=(-4E)A^4=-4A^4$

Step 2 $A+A^2+A^3+A^4$ 구하기

$A+A^2+A^3+A^4$

$=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -2\\ 2 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2 & -2\\ 2 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4 & 0\\ 0 & -4\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-5 & -5\\ 5 & -5\end{pmatrix}$

Step 3 행렬 $A+A^2+A^3+A^4+A^5+A^6+A^7+A^8$의 (1, 2) 성분과 (2, 2) 성분의 합 구하기

$A+A^2+A^3+A^4+A^5+A^6+A^7+A^8$

$=A+A^2+A^3+A^4-4A-4A^2-4A^3-4A^4$

$=(A+A^2+A^3+A^4)-4(A+A^2+A^3+A^4)$

$=-3(A+A^2+A^3+A^4)$

$=-3\begin{pmatrix}-5 & -5\\ 5 & -5\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}15 & 15\\ -15 & 15\end{pmatrix}$

따라서 행렬 $A+A^2+A^3+A^4+A^5+A^6+A^7+A^8$의 (1, 2) 성분과 (2, 2) 성분의 합은

$15+15=30$ 답 30

33 a, b, c에 대한 식을 구한다.

세 자연수 a, b, c에 대하여 행렬 $A=\begin{pmatrix}a & b\\ -c & a-10\end{pmatrix}$이 $A^2=E$를 만족시킬 때, 행렬 A의 개수를 구하시오. (단, E는 단위행렬이다.) 8

Step 1 a, b, c에 대한 식 구하기

$A=\begin{pmatrix}a & b\\ -c & a-10\end{pmatrix}$에 대하여

$A^2=\begin{pmatrix}a & b\\ -c & a-10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ -c & a-10\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}a^2-bc & 2b(a-5)\\ 2c(5-a) & -bc+(a-10)^2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

이므로

$a^2-bc=1$, $2b(a-5)=0$,

$2c(5-a)=0$, $-bc+(a-10)^2=1$

이때 a, b, c는 자연수이므로

$a=5$, $bc=24$

Step 2 행렬 A의 개수 구하기

$bc=24$를 만족시키는 순서쌍 (b, c)는

(1, 24), (2, 12), (3, 8), (4, 6),

(6, 4), (8, 3), (12, 2), (24, 1)

이므로 행렬 A의 개수는 8이다. 답 8

34 $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}p & q\\ r & s\end{pmatrix}$로 놓는다.

영행렬이 아닌 두 이차정사각행렬 A, B가 다음 조건을 만족시킬 때, 행렬 $A+B$의 모든 성분의 합을 구하시오. 10

> (가) $A\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$
>
> (나) $AB=2A$, $BA=3B$

Step 1 두 행렬 A, B를 간단하게 나타내기

$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}p & q\\ r & s\end{pmatrix}$로 놓으면

조건 (가)에서 $A\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$이므로

$A\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-b\\ c-d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$

에서 $a-b=0$, $c-d=0$

즉, $a=b$, $c=d$

마찬가지 방법으로 $p=q$, $r=s$

따라서 $A=\begin{pmatrix} a & a \\ c & c \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} p & p \\ r & r \end{pmatrix}$

Step 2 a, c, p, r의 값 또는 관계식 구하기

조건 (나)에서 $AB=2A$, $BA=3B$이므로

$$AB=\begin{pmatrix} a & a \\ c & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & p \\ r & r \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} a(p+r) & a(p+r) \\ c(p+r) & c(p+r) \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 2a & 2a \\ 2c & 2c \end{pmatrix}$$

에서 $a(p+r)=2a$, $c(p+r)=2c$ …… ㉠

㉠에서 $a=0$, $c=0$이면 $A=O$이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

즉, $a\neq0$ 또는 $c\neq0$이므로

㉠에서 $p+r=2$

$$BA=\begin{pmatrix} p & p \\ r & r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & a \\ c & c \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} p(a+c) & p(a+c) \\ r(a+c) & r(a+c) \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 3p & 3p \\ 3r & 3r \end{pmatrix}$$

에서 $p(a+c)=3p$, $r(a+c)=3r$ …… ㉡

㉡에서 $p=0$, $r=0$이면 $B=O$이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

즉, $p\neq0$ 또는 $r\neq0$이므로

㉡에서 $a+c=3$

Step 3 행렬 $A+B$의 모든 성분의 합 구하기

따라서 $A+B=\begin{pmatrix} a & a \\ c & c \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} p & p \\ r & r \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+p & a+p \\ c+r & c+r \end{pmatrix}$이므로

행렬 $A+B$의 모든 성분의 합은

$2(a+p)+2(c+r)$

$=2(a+c)+2(p+r)$

$=2\times3+2\times2$

$=10$

답 10

35 A의 거듭제곱의 규칙을 찾는다.

한 개의 주사위를 두 번 던져서 나오는 눈의 수를 차례로 m, n이라 하자. 행렬 A를 $A=\begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$이라 할 때, 행렬 A^n의 모든 성분의 합이 14가 되도록 하는 행렬 A의 개수를 구하시오. (단, $A^1=A$이다.) 4

Step 1 행렬 A^n 구하기

$A=\begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$에 대하여

$$A^2=\begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} 1 & 2m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

⋮

$$A^n=\begin{pmatrix} 1 & mn \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Step 2 행렬 A의 개수 구하기

행렬 A^n의 모든 성분의 합은 14이므로

$1+mn+0+1=14$, $2+mn=14$

즉, $mn=12$

따라서 6 이하의 두 자연수 m, n에 대하여 $mn=12$를 만족시키는 순서쌍 (m, n)은 $(2, 6)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$, $(6, 2)$이므로 행렬 A의 개수는 4이다.

답 4

36 A의 거듭제곱의 규칙을 찾는다.

행렬 $A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$에 대하여

$$A+A^2+A^3+A^4+\cdots+A^n=O$$

를 만족시키는 100 이하의 자연수 n의 개수를 구하시오. 16

(단, $A^1=A$이고, O은 영행렬이다.)

Step 1 행렬 A^n $(1\leq n\leq6)$ 구하기

$A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$에 대하여

$$A^2=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2A$$
$$=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$$=-E$$

$A^4=A^3A=-EA=-A$

$A^5=A^4A=-AA=-A^2$

$A^6=A^5A=-A^2A=-A^3=E$

Step 2 100 이하의 자연수 n의 개수 구하기

따라서

$A+A^2+A^3+A^4+A^5+A^6$

$=A+A^2-E-A-A^2+E$

$=O$

이므로 $A+A^2+A^3+A^4+\cdots+A^n=O$를 만족시키는 100 이하의 자연수 n은 6의 배수이다. 즉, 자연수 n의 개수는 100 이하의 자연수 중에서 6의 배수의 개수와 같으므로 16이다.

답 16

[참고]

$A\neq O$

$A+A^2\neq O$

$A+A^2+A^3\neq O$

$A+A^2+A^3+A^4\neq O$

$A+A^2+A^3+A^4+A^5\neq O$

$A+A^2+A^3+A^4+A^5+A^6=O$

37

세 행렬 $A=(x\ \ 2)$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ a & 2 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 0 & x \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 ABC의 $(1,\ 2)$ 성분이 모든 실수 x에 대하여 양수가 되도록 하는 정수 a의 개수는?

$ABC=(AB)C=A(BC)$

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

Step 1 행렬 ABC의 $(1,\ 2)$ 성분 구하기

$A=(x\ \ 2)$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ a & 2 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 0 & x \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$에 대하여

ABC

$=(x\ \ 2)\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ a & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & x \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$=(x+2a\ \ \ -2x+4)\begin{pmatrix} 0 & x \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$=(-2x+4\ \ \ x^2+2ax-2x+4)$

이므로 행렬 ABC의 $(1,\ 2)$ 성분은

$x^2+2ax-2x+4$

Step 2 정수 a의 개수 구하기

모든 실수 x에 대하여 $x^2+2ax-2x+4$의 값이 양수가 되기 위해서는

$x^2+2ax-2x+4=x^2+2(a-1)x+4$

에서 x에 대한 이차방정식 $x^2+2(a-1)x+4=0$이 실근을 갖지 않아야 한다. 즉, 이차방정식 $x^2+2(a-1)x+4=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a-1)^2-4<0$

$a^2-2a-3<0$

$(a+1)(a-3)<0$

$-1<a<3$

따라서 정수 a의 개수는 0, 1, 2의 3이다.　답 ③

38

$\alpha+\beta=4,\ \alpha\beta=2$

이차방정식 $x^2-4x+2=0$의 두 실근 α, β에 대하여 두 행렬 A, B를

$$A=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & \alpha \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ 1 & \beta \end{pmatrix}$$

라 하자. 행렬 AB의 $(i,\ j)$ 성분을 c_{ij}라 할 때, $c_{11}+c_{22}+c_{12}\times c_{21}$의 값을 구하시오. 56

Step 1 행렬 AB 구하기

이차방정식 $x^2-4x+2=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=2$

이므로

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=4^2-2\times2$

$=12$

즉,

$AB=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ 1 & \beta \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} \alpha\beta+\beta & \alpha^2+\beta^2 \\ \beta+\alpha & \alpha+\alpha\beta \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 2+\beta & 12 \\ 4 & \alpha+2 \end{pmatrix}$

Step 2 행렬 AB의 각 성분 구하기

따라서 $c_{11}=2+\beta$, $c_{12}=12$, $c_{21}=4$, $c_{22}=\alpha+2$이므로

$c_{11}+c_{22}+c_{12}\times c_{21}$

$=2+\beta+\alpha+2+12\times4$

$=4+\alpha+\beta+48$

$=4+4+48$

$=56$　답 56

39

두 이차정사각행렬 A, B에 대하여

$$A☆B=AB,\ A⊙B=BA$$

라 하자. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$에 대하여

행렬 $[\{(A☆B)⊙B\}☆B]⊙B$의 제2행의 모든 성분의 합은?

소괄호, 중괄호, 대괄호의 순서로 계산한다.

① 7　② 8　③ 9　④ 10　⑤ 11

Step 1 행렬 $A☆B$ 구하기

$A☆B=AB$

$=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$

Step 2 행렬 $(A☆B)⊙B$ 구하기

$(A☆B)⊙B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

Step 3 행렬 $\{(A☆B)⊙B\}☆B$ 구하기

$\{(A☆B)⊙B\}☆B=\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Step 4 행렬 $[\{(A☆B)⊙B\}☆B]⊙B$ 구하기

$[\{(A☆B)⊙B\}☆B]⊙B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 $[\{(A☆B)⊙B\}☆B]⊙B$의 제2행의 모든 성분의 합은

$5+6=11$　답 ⑤

1등급을 넘어서는 상위 1%

본문 101쪽

40

양변에 2를 곱하여 $2A-kB=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$와 연립한다.

두 이차정사각행렬 A, B가

$$A+3B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},\ B^2=3B$$

를 만족시킨다. $2A-kB=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$인 실수 k에 대하여 k^2의 값을 구하시오. 16

문항 파헤치기

주어진 조건을 만족시키는 실수 k의 값을 구한다.

풀이

Step 1 $k\neq-6$임을 추론하기

$$A+3B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots ㉠$$

의 양변에 2를 곱하면

$$2A+6B=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

즉, $2A=-6B+\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots ㉡$

$2A-kB=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$에서

$$2A=kB+\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots ㉢$$

이때 $k=-6$이면

$2A=-6B+\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$에서

$2A=-6B+\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$이라는 조건을 만족시키지 않으므로

$k\neq-6$

Step 2 $B\neq O$임을 추론하기

$B=O$이면 ㉢에서

$$2A=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

즉, $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

이는 ㉠에 $B=O$를 대입하면 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

즉, $B\neq O$

Step 3 k^2의 값 구하기

㉡, ㉢에서

$$-6B+\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}=kB+\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(k+6)B=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

이때 $(k+6)B(k+6)B=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

$$(k+6)^2B^2=\begin{pmatrix} 12 & 12 \\ 24 & 24 \end{pmatrix}$$

$$=6\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$B^2=3B$이므로

$3(k+6)^2B=6(k+6)B$

$k\neq-6$, $B\neq O$이므로

$3(k+6)=6$

$k+6=2$

따라서 $k=-4$이므로

$k^2=16$

답 16

실수 Point 찾기

$k\neq-6$, $B\neq O$임을 알아야 한다.